Решение проблемы Энгеля о поверхностях переноса

Я. П. Бланк

В настоящей работе мы даём полное решение следующей проблемы, поставленной F. Engel'ем[1]): определить поверхности, являющиеся поверхностями переноса относительно двух плоскостей π, π'.

При этом поверхностью переноса относительно некоторой плоскости называется поверхность, полученная проективным преобразованием из обычной поверхности переноса.

F. Engel решает эту проблему при следующих ограничениях:

1°. Одна сетка обобщённых кривых переноса состоит из плоских кривых. Отсюда следует, что кривые расположены в двух плоских пучках.

2°. Ось одного пучка совпадает с прямой пересечения плоскостей π, π'.

Новое решение при этих же ограничениях дал B. Gambier[2]).

I. Функциональное уравнение, к которому сводится проблема

1. Поверхность переноса относительно некоторой плоскости π есть поверхность с сопряжённой сеткой конических линий:

$$x_i = U_i(u) + V_i(v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

у которой кривые Γ_1, Γ_2

$$x_i = U_i'(u), \qquad x_i = V_i'(v),$$

образованные вершинами конусов, описанных около поверхности вдоль координатных линий, расположены в общей плоскости π.

Пусть плоскость π совпадает с координатной плоскостью $x_1 = 0$, а π' — с бесконечно удалённой плоскостью $x_4 = 0$.

Мы можем считать, что ни Γ_1, ни Γ_2 не совпадают с прямой пересечения плоскостей π, π', так как такое совпадение может иметь место только для одной из четырех линий $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_1', \Gamma_2'$.

В таком случае $U_4' \neq 0, V_4' \neq 0$ и уравнения поверхности могут быть записаны так:

$$x_1 = 1,\ x_2 = U - V,\ x_3 = U_1 - V_1,\ x_4 = u - v. \tag{1}$$

Вторая сопряженная сеть состоит из цилиндрических линий.

---

1) F. Engel, Zur Theorie der Translationsflächen, Rend. Circ. matem. di Palermo, t. 59, 164—184, 1935.

2) B. Gambier, Surfaces admettant plusiéurs réseaux conjugués coniques, Journ. de Math., t. 19, 63—82, 1940.

В двух предыдущих статьях: „Engel'ева проблема про поверхні переносу". Записки н.-д. інст. матем. й мех. ХДУ, т. XIV, 181—204, 1937, и „Проблема Engel'я о поверхностях переноса, II", там же, т. XVII, 99—107, 1940, мы решали эту проблему при более слабых ограничениях.

Диференциальное уравнение цилиндрических линий:

$$(\bar{n}, d\bar{n}, d^2\bar{n}) = 0.$$

где $\bar{n}$ — нормаль поверхности, принимает для поверхности (1), если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} A &= U''\left(U_1' - V_1'\right) - U_1''\left(U' - V'\right) \\ B &= V''\left(U_1' - V_1'\right) - V_1''\left(U' - V'\right) \end{aligned} \tag{2}$$

следующий вид:

$$AB\left(u - v\right)\left(du\, d^2v - dv\, d^2u\right) + A^2du^3 + \left[\left(2AA_v' - BA_u'\right)\left(u - v\right) - AB\right]du^2dv - \left[\left(2BB_u' - AB_v'\right)\left(u - v\right) + AB\right]du\, dv^2 + B^2 dv^3 = 0. \tag{3}$$

Условие сопряжённости сети:

$$\frac{dv}{du} = A\vartheta, \quad \frac{\delta u}{\delta v} = B\vartheta. \tag{4}$$

Подставим (4) в (3); получаем два уравнения относительно ϑ и её первых производных:

$$\begin{aligned} &(AB\vartheta^2 - 1) - (u - v)\left[(AB\vartheta^2 - 1)\, B\vartheta_u' + (BA_u' - AB_u')\, B\vartheta^3 + \right. \\ &\qquad \left. + (3BA_v' - AB_v')\,\vartheta^2 - 2A_v'\,\vartheta\right] = 0 \\ &(AB\vartheta^2 - 1) - (u - v)\left[(AB\vartheta^2 - 1)\, A\vartheta_v' - (BA_v' - AB_v')\, A\vartheta^3 + \right. \\ &\qquad \left. + (3AB_u' - BA_u')\,\vartheta^2 - 2B_u'\,\vartheta\right] = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Введём вместо ϑ функцию φ:

$$\varphi = AB\vartheta + \frac{1}{\vartheta}. \tag{6}$$

Сопряжённая сеть (4) тогда запишется:

$$Adu^2 - \varphi\, du\, dv + Bdv^2 = 0, \tag{7}$$

а уравнения (5) перейдут в

$$\begin{aligned} 4AB - \varphi^2 + (u - v)\left(B\varphi_u' - 2B_u'\,\varphi + 3BB_u' - AB_v'\right) &= 0, \\ 4AB - \varphi^2 - (u - v)\left(A\varphi_v' - 2B_u'\,\varphi + 3AB_u' - BA_u'\right) &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Если вычесть одно из другого и положить

$$\varphi = A + B + \psi, \tag{9}$$

то получим:

$$B\frac{\partial\psi}{\partial u} + A\frac{\partial\psi}{\partial v} = 4B_u'\,\psi. \tag{10}$$

Отсюда

$$\psi = (U' - V')^4 \cdot F\left(\frac{U_1' - V_1'}{U' - V'}\right), \tag{11}$$

и система (8) сводится к одному уравнению:

$$\Phi = [BA'_u - AB'_v - 2B'_u(A-B) + 2F(U'-V')^3(AV''+BU'') - \tag{12}$$
$$- F'AB(U'-V')^2](u-v) - (A-B)^2 - 2F(A+B)(U'-V')^4 - F^2(U'-V')^8 = 0,$$

содержащему пять неизвестных функций U, V, U_1, V_1, F одного аргумента.

2. Случай $F=0$. Если $F=0$, то уравнение (12) принимает вид:

$$\Phi = \left[BA'_u - AB'_v - 2B'_u(A-B)\right](u-v) - (A-B)^2 = 0. \tag{12'}$$

В этом случае, по (9) и (11):

$$\varphi = A + B,$$

и диференциальное уравнение сети кривых переноса (7)

$$(Adu - Bdv)(du - dv) = 0 \tag{7'}$$

дает:

$$u - v = \text{const.}, \qquad U_1' - V_1' = \text{const.}\ (U' - V') \tag{7''}$$

Первое из этих уравнений выражает, что одно семейство кривых переноса состоит из плоских кривых, принадлежащих пучку с осью $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ прямой пересечения плоскостей π, π'.

Обратно: если одна из линий Γ_1', Γ_2' есть прямая $x_1 = 0$ $x_4 = 0$, кривые переноса одного семейства лежат в плоскостях $x_1 = \text{const.}\ x_4$ и для этих кривых $du = dv$ и по (4) и (6) $\varphi = A + B$, т. е. $F = 0$.

3. Линия $u = v$. Докажем, что

$$A = B \qquad (v = u). \tag{13}$$

При $v = u$ имеем $x_4 = 0$, и уравнение касательной плоскости имеет вид:

$$x_1\left[(U-V)(U_1'-V_1') - (U_1-V_1)(U'-V')\right] - x_2(U_1'-V_1') +$$
$$+ x_3(U'-V') - x_4(U'V_1' - V'U_1') = 0.$$

Оно становится неопределённым, если

$$U' = V', \quad U_1' = V_1' \qquad (v = u).$$

Но при этом

$$A = B = 0$$

и условие (13) выполняется.

Пусть теперь по крайней мере одна из величин $U' - V'$, $U_1' - V_1'$ при $u = v$ отлична от нуля.

Линия

$$x_1 = 1, \ x_2 = U(u) - V(v), \ x_3 = U_1(u) - V_1(v), \ x_4 = 0 \tag{14}$$

не является особенной линией поверхности и её параметрического представления (1).

Из (5) следует, что вдоль этой линии

$$AB\vartheta^2 = 1,$$

т. е.

$$\frac{dv}{du}=\frac{\partial v}{\partial u}$$

касательные к линиям переноса совпадают и имеют асимптотическое направление.

Если только сеть кривых переноса не вырождается в семейство прямолинейных образующих, это направление совпадает с касательной к линии $v=u$. Действительно, при сделанном предположении, это направление должно встречать по крайней мере одну из кривых Γ_1', Γ_2' в точке, отличной от точки, лежащей на линии $v=u$, и плоскость $x_4=0$ была бы касательной плоскостью к поверхности вдоль всей линии $u=v$. В этой же плоскости через каждую точку линии $u=v$ должны проходить две касательные к кривым Γ_1, Γ_2 плоскости $x_1=0$, что невозможно.

Таким образом, эта линия должна быть асимптотической. Диференциальное уравнение асимптотических линий

$$A\,du^2 - B\,dv^2 = 0.$$

Линия $u=v$ удовлетворяет этому уравнению только при выполнении условия (13).

Легко видеть, что линия $u=v$ прямая.

Пусть $U'-V'\neq 0 \qquad (v=u)$.

Из условия (13) следует:

$$U_1'-V_1'=C(U'-V')$$

и по (14)

$$x_3=Cx_2+C_1x_1.$$

Посредством проективного преобразования, сохраняющего плоскости π, π', можно перевести эту прямую в прямую $x_3=0$, $x_4=0$. Таким образом, в дальнейшем мы можем ограничиться рассмотрением следующих двух случаев:

1) $U_1-V_1=0,\ U-V=0 \qquad (v=u)$.

2) $U_1-V_1=0,\ \theta=U'-V'\neq 0 \qquad (v=u)$.

II. Случай $U=V$, $U_1=V_1$ $(u=v)$

4. Для определения искомых функций U, V, U_1, V_1 и F используем уравнения, получаемые из (12) последовательным диференцированием, полагая каждый раз $v=u$.

При этом

$$\lim_{v\to u}\frac{U_1'-V_1'}{U'-V'}=\frac{U_1''}{U''}\neq \text{const.},$$

так как иначе получим плоскость.

Первые пять производных не дают никаких новых зависимостей между искомыми функциями.

Обозначим

$$\omega=U_1''U'''-U''U_1'''. \qquad (1\ldots$$

Условие

$$\left.\frac{\partial^6\Phi}{\partial u^6}\right|_{v=u}=0$$

не содержит F и дает:

$$\omega\omega'' - \omega'^2 + \omega\left(U_1''' U^{IV} - U''' U_1^{IV}\right) = 0. \tag{16}$$

Положив

$$\omega' = \sigma\omega \tag{17}$$

($\omega = 0$ приводит к плоскости),
из (15) и (17) получим:

$$U''' = \sigma U'' + h, \qquad U_1''' = \sigma U_1'' + h_1, \qquad \omega = h U_1'' - h_1 U'',$$

где h, h_1 — постоянные, не равные нулю одновременно. Надлежащим проективным преобразованием, сохраняющим плоскости π, π', можно одну из них сделать равной нулю.

Пусть, например, $h \neq 0$. Сделаем преобразование

$$x_2^* = h x_3 - h_1 x_2, \qquad x_3^* = x_2,$$

при этом

$$U^* = h U_1 - h_1 U, \qquad U_1^* = U,$$

и мы получаем:

$$\sigma^* = \sigma, \qquad U^{*'''} = \sigma^* U^{*''}, \qquad U_1^{*'''} = \sigma U_1^{*''} + h.$$

Мы можем поэтому писать, опуская значок *,

$$U''' = \sigma U'', \qquad U_1''' = \sigma U_1'' + h, \qquad \omega = -h U''. \tag{18}$$

В уравнении

$$\left.\frac{\partial^7 \Phi}{\partial u^7}\right|_{v=u} = 0$$

участвуют только члены, содержащие сомножителем функцию F и её производную, так как остальные члены тождественно обращаются в нуль в силу (16).

Получаем:

$$\lim_{v \to u} \left(2 F U''' + F_u' U''\right) = 0,$$

или

$$4 U''' F\left(\frac{U_1''}{U''}\right) + U''\left(\frac{U_1''}{U''}\right)' F'\left(\frac{U_1''}{U''}\right) = 0.$$

Отсюда

$$F\left(\frac{U_1''}{U''}\right) = \varkappa U''^{-4}, \qquad (\varkappa - \text{const.}) \tag{19}$$

В уравнении

$$\left.\frac{\partial^8 \Phi}{\partial u^8}\right|_{v=u} = 0$$

снова выпадают все члены, содержащие функцию F, и мы получаем:

$$3\sigma'''+\sigma\sigma''-2\sigma'^2-2\sigma^2\sigma'=0. \tag{20}$$

В девятой производной участвуют только члены, содержащие F, а именно:

$$F\left(\frac{U_1''}{U''}\right)(3\sigma''-26\sigma\sigma'+88\sigma^3)=0. \tag{21}$$

Пусть $F\neq 0$.
Уравнения (20) и (21) совместны лишь при $\sigma=0$.
В этом случае, по (18),

$$U''=\alpha, \qquad U_1''=hu+\beta, \qquad (\alpha,\ \beta \text{ — постоянные})$$

и по (19)

$$F\left(\frac{U_1''}{U''}\right)=\text{const.},$$

а значит и

$$F\left(\frac{U_1'-V_1'}{U'-V'}\right)=\text{const.}$$

Но теперь

$$B=-A=\frac{\alpha h}{2}(u-v)^2$$

и подстановка этих значений в (12) даёт $F\doteq 0$.

Таким образом, мы пришли к выводу, что в случае $U=V$, $U_1=V_1$ $(v=u)$

$$F=0. \tag{22}$$

Остаётся вычислить

$$\left.\frac{\partial^{10}\phi}{\partial u^{10}}\right|_{v=u}=0.$$

Это уравнение даёт:

$$\begin{gathered}12\sigma^{V}+46\sigma\sigma^{IV}+32\sigma'\sigma'''+117\sigma^2\sigma'''-9\sigma''^2-78\sigma\sigma'\sigma''+53\sigma^3\sigma''\\ -44\sigma'^3-246\sigma^2\sigma'^2-3\sigma^4\sigma'=\frac{196}{3}\sigma^2(\sigma'''+\sigma\sigma''-2\sigma'^2).\end{gathered} \tag{23}$$

Отсюда с помощью (20) получаем диференциальное уравнение второго порядка:

$$27\sigma''^2-12\sigma\sigma'\sigma''+4\sigma^3\sigma''-12\sigma'^3-20\sigma^2\sigma'^2+4\sigma^4\sigma'=0 \tag{24}$$

Одно решение получим в виде

$$\sigma'=0 \tag{25}$$

Пусть $\sigma'\neq 0$. Положим $\sigma=e^t$,

$$\sigma'=\rho\sigma^2. \tag{26}$$

Уравнения (20), (24) перепишутся так:

$$3\rho\frac{d^2\rho}{dt^2}+3\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(21\rho+1\right)\frac{d\rho}{dt}+18\rho^2-2=0 \tag{20'}$$

$$27\rho\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\left(108\rho^2-12\rho+4\right)\frac{d\rho}{dt}+108\rho^3-3\rho^2-12\rho+4=0 \qquad (24^1)$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\rho'=0, \qquad \rho=\pm\frac{1}{3}, \qquad (27)$$

так как после исключения $\frac{d^2\rho}{dt^2}$ и $\frac{d\rho}{dt}$ получаем численное уравнение шестой степени относительно ρ не равное нулю тождественно, т. е. $\rho=$ const., и все решения исчерпываются (27).

5. Рассмотрим сначала (25).

Пусть $\sigma=0$.

По (18):

$$U=\frac{u^2}{2},\ U_1=\frac{u^3}{3}, \qquad V=\frac{v^2}{2},\ V_1=\frac{v^3}{3};$$

остальные коэфициенты можно посредством проективного преобразования, сохраняющего плоскости π, π', обратить в нуль.

Эти значения удовлетворяют уравнению (12). Кривые Γ_1 и Γ_2 совпадают и определяются уравнениями

$$x_1=0, \qquad x_2^2=x_3x_4,$$

т. е. образуют коническое сечение.

По (7″) кривые переноса относительно плоскости π' определяются здесь уравнениями: $x_1=C_1x_4$, $x_2=C_2x_4$.

Таким образом, Γ_1', Γ_2' прямые

$$x_1=0,\ x_4=0 \text{ и } x_2=0,\ x_4=0.$$

Уравнение поверхности после исключения параметров

$$12x_1^2\left(x_2^2-x_3x_4\right)+x_4^4=0.$$

Как поверхность переноса относительно плоскости π' она допускает представление:

$$x_1=p,\ x_2=q,\ x_3=q^2+\frac{1}{12p^2},\ x_4=1.$$

6. Пусть $\sigma=$ const. $\neq 0$.

По (18) имеем:

$$U=\frac{1}{2}e^u,\ U_1=u^2,\ V=\frac{1}{2}e^v,\ V_1=v^2,$$

(здесь положено $\sigma=2$).

Функциональное уравнение (12) этими значениями удовлетворяется. Здесь Γ_1 и Γ_2 совпадают и определяются уравнениями

$$x_1=0, \qquad x_3=x_4\lg\frac{x_2}{x_4}.$$

Исключив параметры, получим уравнение поверхности:

$$x_2=x_1\operatorname{sh}\frac{x_4}{x_1}\cdot e^{\frac{x_3}{x_4}}$$

Для сетки кривых переноса относительно плоскости π' имеем (7″):

$$x_1 = C_1 x_4, \qquad x_2 = C_2 x_4.$$

И здесь Γ_1, Γ_2 прямые

$$x_1 = x_4 = 0, \qquad x_2 = x_4 = 0.$$

Параметрическое представление поверхности, соответствующее это сети:

$$x_1 = q,\ x_2 = e^p, \qquad x_3 = p - \lg\left(q \operatorname{sh} \frac{1}{q}\right), \qquad x_4 = 1.$$

7. Перейдем к (27).

Пусть $\rho = \frac{1}{3}$.

По (26)

$$\sigma = -\frac{3}{u}$$

и по (18)

$$U = \frac{1}{3u}, \qquad U_1 = u^3, \qquad V = \frac{1}{3v}, \qquad V_1 = v^3.$$

Эти значения удовлетворяют уравнению (12).

Линии Γ_1, Γ_2 совпадают и определяются уравнениями

$$x_1 = 0, \qquad x_2 x_3 + x_4^2 = 0,$$

образуя коническое сечение.

Уравнение поверхности, после исключения параметров, представится так:

$$x_1^2 x_2 x_3 = x_4^2 \left(x_2 x_4 - x_1^2\right).$$

По (7″) и здесь Γ_1', Γ_2' — прямые

$$x_1 = x_4 = 0, \qquad x_2 = x_4 = 0$$

и соответствующее параметрическое представление поверхности

$$x_1 = p, \qquad x_2 = q, \qquad x_3 = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{q}, \qquad x_4 = 1.$$

8. Наконец, пусть $\rho = -\frac{1}{3}$.

Отсюда

$$\sigma = \frac{3}{u}, \qquad U = \frac{u^5}{5}, \qquad U_1 = \frac{u^3}{3}, \qquad V = \frac{v^5}{5}, \qquad V_1 = \frac{v^3}{3}.$$

Уравнение (12) удовлетворяется этими значениями.

Линии Γ_1, Γ_2 совпадают и образуют коническое сечение

$$x_1 = 0, \qquad x_2 x_4 = x_3^2.$$

Исключив параметры, получаем:

$$45\left(x_2\, x_4 - x_3^2\right) x_1^4 - 15\, x_1^2\, x_3\, x_4^3 + x_4^6 = 0.$$

Относительно второй сети поверхность допускает параметрическое представление:

$$x_1 = q, \qquad x_2 = p^2 - \frac{1}{20q^4}, \qquad x_3 = p - \frac{1}{6\,q^2}, \qquad x_4 = 1.$$

Для Γ_1', Γ_2' имеем:

$$x_1 = x_4 = 0, \qquad (3x_3)^5 = x_1^2\,(5\,x_2)^3, \qquad x_4 = 0.$$

III. Случай $U_1 = V_1$, $\Theta \neq 0$ $(v = u)$.

9. Вдоль прямой $v = u$ имеет место

$$\varphi = A + B,$$

так как касательные к кривым переноса, определяемые формулой (7) совпадают и направлены по этой прямой.

Отсюда, по (9) и (11),

$$F(0) = 0. \tag{28}$$

Из условия

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right|_{v=u} = 0$$

следует:

$$F'(0) = 0 \tag{29}$$

Вторая производная

$$\left.\frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2}\right|_{v=u} = 0.$$

даёт

$$\left(\frac{U_1'''}{U_1''^2} - \frac{\Theta'}{\Theta U_1''}\right)' + F''(0)\Theta = 0. \tag{30}$$

Уравнение (12) сохраняется, если u, U, U_1 и F(t) заменить на v, V, V_1 и $-F(t)$.

Рассмотрим

$$\left.\frac{\partial^3 \Phi}{\partial u^3} - \frac{\partial^3 \Phi}{\partial v^3}\right|_{v=u} = 0.$$

Положив

$$U'' + V'' = \sigma U_1'' \qquad (v = u), \tag{31}$$

получим:

$$3\left(\frac{\sigma'}{\Theta}\right)' = 3F''(0)\, U_1''\, \sigma + F'''(0)\, U_1''. \tag{32}$$

Составим

$$\left.\frac{\partial^4 \Phi}{\partial u^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial v^4}\right|_{v=u} = 0.$$

Это условие приводится с помощью ранее полученных к следующему виду:

$$\left(\theta'\theta''-\theta\theta'''\right)'+\left(\theta'\theta''-\theta\theta'''\right)\left(\frac{\theta'}{\theta}-4\frac{U_1'''}{U_1''}\right)=6F''(0)\,\theta^2\,\theta''\,U_1'' \qquad (33)$$

Наконец,

$$\left.\frac{\partial^5\Phi}{\partial u^5}-\frac{\partial^5\Phi}{\partial v^5}\right|_{v=u}=0$$

даёт

$$\lambda U_1''\left[F''(0)\sigma+\frac{1}{3}F'''(0)\right]+\mu\frac{\sigma'}{\theta}+\nu=0, \qquad (34)$$

где

$$\lambda=2\left(\frac{U_1'''}{U_1''}-\frac{\theta'}{\theta}\right)^2+\frac{\theta'}{\theta}\left(\frac{U_1'''}{U_1''}-\frac{\theta'}{\theta}\right)-4\frac{\theta''}{\theta}-4F''(0)\,\theta U_1'',$$

$$\mu=\frac{\theta''}{\theta}\left(\frac{U_1'''}{U_1''}-\frac{\theta'}{\theta}\right)-\left(\frac{\theta''}{\theta}\right)'+\left(\frac{U_1'''}{U_1''}-\frac{\theta'}{\theta}\right)^2\cdot\left(\frac{U_1'''}{U_1''}+\frac{\theta'}{\theta}\right)-$$

$$-4F''(0)\,U_1''\,\theta'-2F''(0)\,U_1'''\theta,$$

$$\nu=-\frac{1}{10}F^{V}(0)\,\frac{U_1''^{3}}{\theta^2}.$$

10. Случай $F''(0)\neq 0$.

Обозначим:

$$\tau=-F''(0)\,(U-V), \qquad (v=u). \qquad (35)$$

Из (30) следует:

$$\frac{U_1'''}{U_1''}-\frac{\tau''}{\tau'}=\tau\,U_1''\ ^{*)}\ ; \qquad (36)$$

отсюда

$$U_1''=\frac{2\tau'}{\alpha^2-\tau^2}, \qquad (37)$$

где α постоянная.

Из (33) следует:

$$(\alpha^2-\tau^2)\,\tau'''=4\,\tau\tau'\tau''+\tau'^3+2\,\tau'\,(a_0\tau+a_1), \qquad (38)$$

где a_0, a_1 постоянные.

Положим:

$$\tau'^2=2\,q \qquad (39)$$

и введём τ в качестве независимой переменной.

Получим:

$$(\alpha^2-\tau^2)\frac{d^2q}{d\tau^2}=4\,\tau\frac{dq}{d\tau}+2\,q+2\,(a_0\tau+a_1). \qquad (3[illegible])$$

*) В правой части должно быть $\tau+c$, но можно считать $c=0$, что свод[illegible] к преобразованию $\overset{*}{x}_2=x_2+cx_1$.

Уравнение (32) перепишется в виде

$$(\alpha^2 - \tau^2)\frac{d^2\sigma_1}{d\tau^2} + 2\sigma_1 = 0, \tag{32'}$$

где

$$\sigma_1 = \sigma + \frac{1}{3}\frac{F'''(0)}{F''(0)}. \tag{40}$$

11. Пусть $\alpha \neq 0$.

Из (38′) следует:

$$q = \frac{b_1\tau + b_2}{\alpha^2 - \tau^2} - \frac{a_0}{3}\tau - a_1, \tag{41}$$

а из (32′)

$$\sigma_1 = c_0(\alpha^2 - \tau^2)\lg\frac{\tau + \alpha}{\tau - \alpha} + c_1(\alpha^2 - \tau^2) + 2c_0\alpha\tau. \tag{42}$$

Условие (34) принимает вид:

$$\lambda\sigma_1 + \mu\frac{d\sigma_1}{d\tau} + \nu = 0, \tag{34'}$$

где

$$\lambda = 16\tau^2 q - (\alpha^2 - \tau^2)\left[14\tau\frac{dq}{d\tau} - 8q + 8(a_0\tau + a_1)\right],$$

$$\mu = 8\tau^3 q + (\alpha^2 - \tau^2)\left[(3\alpha^2 - 7\tau^2)\frac{dq}{d\tau} + \right.$$

$$\left. + 4\tau q - 4\tau(a_0\tau + a_1) - a_0(\alpha^2 - \tau^2)\right], \qquad \nu = -\frac{4}{10}F''(0)F^{V}(0).$$

Внеся сюда значения q и σ_1 в функции τ, мы должны получить тождество относительно τ.

Это даёт:

либо
$$c_0 = c_1 = F^{V}(0) = 0,$$
т. е.
$$\sigma_1 = 0, \tag{43}$$
либо
$$c_0 = a_0 = b_1 = 0, \qquad 4a_1\alpha^2 = 5b_2,$$
т. е.
$$\sigma_1 = c_1(\alpha^2 - \tau^2),$$
$$q = \frac{b_2}{\alpha^2 - \tau^2} - a_1, \qquad 4a_1\alpha^2 = 5b_2. \tag{44}$$

Однако, во втором случае, если эти значения внести в 6-ю производную

$$\left.\frac{\partial^6\Phi}{\partial u^6} + \frac{\partial^6\Phi}{\partial v^6}\right|_{v=u} = 0,$$

получим полином 13-й степени относительно $T=\dfrac{1}{\alpha^2-\tau^2}$, который должен тождественно равняться нулю.

Приравнивая нулю старший коэфициент, получаем $b_2=0$, а, значит, по (44), $a_1=0$.

Но тогда и $q=0$, что по (39) и (35) противоречит условию $\theta\neq 0$.

Итак, остаётся (43), $\sigma_1=0$.

В этом случае

$$\left.\frac{\partial^6\Phi}{\partial u^6}+\frac{\partial^6\Phi}{\partial v^6}\right|_{v=u}=0$$

также даёт полином 13-й степени относительно $T=\dfrac{1}{\alpha^2-\tau^2}$ со старшим коэфициентом $\tau^6(b_1\tau+b_2)^5T^{13}$. Умножая этот полином на $(\alpha^2-\tau^2)^{13}$ и полагая $\tau=\pm\alpha$, получим $b_1=b_2=0$, и поэтому

$$q=-\frac{a_0}{3}\tau-a_1.$$

Теперь результат подстановки в шестую производную после сокращения на $2q$ и умножения на $(\alpha^2-\tau^2)^7$ представляет собой многочлен, у которого старший член равен $\left(\dfrac{a_0}{3}\right)^4\tau^8$ с численным коэфициентом, отличным от нуля.

Отсюда следует, что и $a_0=0$, и мы получаем:

$$q=-a_1=\text{const.}$$

Для искомых функций U, V, U_1, V_1 получаем по (39), (37), (35) и (31) с точностью до проективных преобразований, сохраняющих плоскости π, π', следующие выражения:

$$U=u,\qquad U_1=2u\lg 2u-(2u+1)\lg(2u+1),$$
$$V=-v,\qquad V_1=2v\lg 2v-(2v+1)\lg(2v+1).$$

Эти функции удовлетворяют основному уравнению (12) и дают

$$F(t)=2\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}.$$

Γ_1, Γ_2 прямые

$$x_1=0,\qquad x_2=\pm x_4.$$

По (9), (11)

$$\varphi=-4\,\frac{u+v+4uv}{uv(1+2u)(1+2v)}.$$

Отсюда для второй сопряжённой сети имеем по (7):

$$udv-vdu=0,\qquad (1+2v)\delta u-(1+2u)\delta v=0,$$

и она образована двумя плоскими пучками:

$$x_2=\text{const.}\,x_4,\qquad x_1+x_2=\text{const.}\,x_4.$$

Γ_1', Γ_2' прямые

$$x_4=x_2=0;\qquad x_4=0,\qquad x_1+x_2=0.$$

Здесь все четыре прямые Γ_1, Γ_2, Γ_1', Γ_2' проходят через общую точку, лежащую на прямой пересечения плоскостей π, π' ($x_1=x_2=x_4$

Уравнение поверхностей по исключении параметров

$$x_3 = (x_2+x_4)\lg(x_2+x_4)-(x_2-x_4)\lg(x_2-x_4)+(x_1+x_2-x_4)\lg(x_1+x_2-x_4)-$$
$$-(x_1+x_2+x_4)\lg(x_1+x_2+x_4).$$

12. Случай $\alpha = 0$.

По (37)

$$U_1'' = -2\frac{\tau'}{\tau^2},$$

а по (38′) и (32′)

$$q = \frac{b_1\tau + b_2}{\tau^2} - \frac{a_0}{3}\tau - a_1,$$

$$\sigma_1 = c_1\tau^2 + \frac{c_2}{\tau}.$$

Условие (34) сводится к

$$\tau^4\frac{d\sigma_1}{d\tau}\left(-2\tau\frac{d^2q}{d\tau^2}+\frac{dq}{d\tau}+a_0\right)-\tau^4\sigma_1\left(4\frac{d^2q}{d\tau^2}+\frac{2}{\tau}\frac{dq}{d\tau}\right)-\frac{1}{5}F^V(0)=0.$$

Подставив сюда значение q, получим:

$$a_0c_1 = 0, \qquad b_2c_2 = 0, \qquad F^V(0)+45\,b_1c_2 = 0\cdot$$

Наконец, из условия $\left.\frac{\partial^6\Phi}{\partial u^6}+\frac{\partial^6\Phi}{\partial v^6}\right|_{v=u} = 0$ следует:

$$c_1 = c_2 = F^V(0) = 0,$$

т. е.

$$\sigma_1 = 0,$$

и

$$a_0 = a_1 = b_1 = 0,$$

т. е.

$$q = \frac{b_2}{\tau^2}.$$

Отсюда, с точностью до допустимых проективных преобразований,

$$U = k\sqrt{u}, \quad V = -k\sqrt{v}, \quad U_1 = \frac{1}{k}\sqrt{u}, \quad V_1 = \frac{1}{k}\sqrt{v}.$$

Исключив параметры, получаем

$$x_1x_4 = x_2x_3,$$

т. е. поверхность второго порядка, для которой π, π' служат касательными плоскостями.

Каждому значению k соответствует своя сеть в плоскости $x_1 = 0$. Подставив полученные значения в основное уравнение (12), получим для определения F диференциальное уравнение:

$$F'(t)\cdot t(1-t^2)^2 - 4F(t)(1-t^2) - 4F^2(t) - 2t^2(1-t^2)^2 = 0,$$

где

$$t = \frac{U_1' - V_1'}{U' - V'} = \frac{\sqrt{v}-\sqrt{u}}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}.$$

Интегрируя его, получаем:

$$F(t) = t^2 - 1 + \frac{(1-t^2)^2}{1-c^2t^4}$$

причём $F(0)=0$ при произвольном C, и по (7), (9), (11) имеем ∞^1 сопряжённых сеток кривых переноса

$$\frac{1}{2(\sqrt{u}-\sqrt{v})} \pm \frac{C}{2(\sqrt{u}+\sqrt{v})} = \text{const.}$$

или

$$x_2 = \pm C x_3 + \text{const.}\ x_4.$$

Каждому значению C соответствует сеть кривых переноса, получаемая в пересечении поверхности двумя плоскими пучками.

13. Случай $F''(0)=0$.

Мы считали до сих пор $F''(0)\neq 0$.
Пусть $F''(0)=0$. Тогда по (30) и (32)

$$\frac{U_1'''}{U_1''} - \frac{\Theta'}{\Theta} = k U_1'' \qquad (k = \text{const.}) \tag{30'}$$

$$\left(\frac{\sigma'}{\Theta}\right)' = \frac{1}{3} F'''(0)\, U_1''. \tag{32'}$$

Пусть $k \neq 0$.
Обозначим:

$$\tau = -k\,(U - V)\big|_{v=u}. \tag{45}$$

Из (30'), (32') следует:

$$k U_1'' = -\frac{\tau'}{\tau}, \qquad \frac{d^2\sigma}{d\tau^2} = \frac{F'''(0)}{3k^2\tau}. \tag{46}$$

Отсюда

$$\sigma = \tau(\lg\tau - 1)\,\frac{F'''(0)}{3k^2} + c_0\tau + c_1.$$

Уравнение (33) даёт, если положить

$$\tau'^2 = 2q \tag{47}$$

и ввести τ в качестве независимой переменной

$$\tau\frac{d^2q}{d\tau^2} + 2\frac{dq}{d\tau} = a_0\tau + a_1, \quad (a_0, a_1 - \text{const.}),$$

откуда

$$q = \frac{a_0}{6}\tau^2 + \frac{a_1}{2}\tau + b_0 + \frac{b_1}{\tau}, \qquad (b_0,\ b_1 - \text{const.}). \tag{48}$$

Для определения постоянных используем пятую производную (3

Внеся полученные выражения, имеем:

$$\frac{1}{3}F'''(0)\left(\frac{4b_0}{\tau}-\frac{3b_1}{\tau^2}-a_0\tau+\frac{3}{2}a_1\right)-$$

$$-\frac{2b_0k^2}{\tau}\left[c_0+\frac{F'''(0)}{3k^2}\lg\tau\right]+\frac{F^V(0)}{10\tau}=0.$$

Отсюда следует:

$$F'''(0)=0, \qquad F^V(0)=20\,b_0\,c_0\,k^2$$

и, значит,

$$\sigma=c_0\tau, \tag{49}$$

($\sigma=c_0\tau+c_1$, но c_1 можно считать равным нулю, так как этого можно достигнуть надлежащим проективным преобразованием).

Из рассмотрения $\left.\dfrac{\partial^6\Phi}{\partial u^6}+\dfrac{\partial^6\Phi}{\partial v^6}\right|_{v=u}=0$, если отобрать члены низшей степени относительно τ, а именно τ^{-13}, следует $b_1=0$, после чего само условие запишется так:

$$22\tau q'^2+\left(60c_0^2+\frac{40}{3}a_0\right)\tau^2q'-24qq'+\left(\frac{a_0^2}{9}-10a_0c_0^2\right)\tau^3-$$

$$-\left(16a_0+60c_0^2\right)\tau q+\frac{30}{k^2}F^{IV}(0)(2q-\tau q')-\frac{2}{k^2}F^{VI}(0)+120\,b_0c_0^2\tau=0.$$

Отсюда по (48)

$$\begin{gathered}F^{VI}(0)-30\,b_0F^{IV}(0)+6a_1b_0k^2=0,\\ 24\,b_0k^2\left(5c_0^2-2a_0\right)+a_1\left[30F^{IV}(0)-a_1k^2\right]=0.\end{gathered}\tag{50}$$

Пусть a_0 или a_1 отлично от нуля. В таком случае мы можем выполнить преобразование $\tau^*=\tau+\text{const.}$ так, чтобы в выражении

$$q=b_0+\frac{a_1}{2}\tau+\frac{a_0}{6}\tau^2$$

пропал свободный член b_0. Тогда

$$F^V(0)=F^{VI}(0)=0,$$

$$a_1\left[30F^{IV}(0)-a_1k^2\right]=0.$$

Внеся значение q в седьмую производную и отбирая низшие члены относительно τ, получим $a_1^5q^{-1/2}\tau^{-4}$ с численным коэфициентом не равным нулю. Отсюда следует, что $a_1=0$ и

$$q=\frac{a_0}{6}\tau^2.$$

Отсюда по (47), (46), (49), (30′), (45) после допустимых проективных преобразований

$$U=(c_0+1)e^u,\qquad V=(c_0-1)e^v,\qquad U_1=\frac{u^2}{2},\qquad V_1=\frac{v^2}{2}.$$

Эти значения удовлетворяют основному уравнению (12) и дают $F=0$.

Для Γ_1, Γ_2 имеем:

$$x_1=0,\qquad x_2=x_4(c_0\pm1)\,e^{\frac{x_3}{x_4}}.$$

Уравнение поверхности после исключения параметров

$$x_2=2x_1\,e^{\frac{x_3}{x_4}}\left(c_0\operatorname{sh}\frac{x_4}{2x_1}+\operatorname{ch}\frac{x_4}{2x_1}\right).$$

Для Γ_1', Γ_2' имеем по (7″):

$$x_1=x_4=0,\qquad x_2=x_4=0.$$

Таким образом, здесь сопряжённая сетка состоит из плоских кривых.

Мы считали, что a_0 или a_1 отличны от нуля.

Пусть теперь $a_0=a_1=0$; тогда $q=b_0\neq0$. Но по (50) $c_0=0$, т. е.

$$\sigma=0.$$

Имеем:

$$U=\frac{u}{2},\qquad V=-\frac{v}{2},\qquad U_1=u\lg u,\qquad V_1=v\lg v$$

и поверхность приводится к виду

$$x_3=(x_2+x_4)\lg(x_2+x_4)-(x_2-x_4)\lg(x_2-x_4)-2x_4\lg x_1,$$

откуда непосредственно видно, что это поверхность переноса относительно плоскости $x_4=0$, так как при переходе к неоднородным координатам она принимает вид: $z=X(x)+Y(y)$.

Здесь кривыми переноса служат сечения поверхности плоскостями $x=\text{const.}$, $y=\text{const.}$ и для Γ_1', Γ_2' имеем:

$$x_1=x_4=0,\qquad x_2=x_4=0,\qquad F=0.$$

Для Γ_1, Γ_2

$$x_1=0,\qquad x_4=\pm2x_2.$$

Таким образом, все четыре линии — прямые, пересекающиеся в общей точке, причем одна из них совпадает с прямой пересечения плоскостей π, π'.

14. Случай $F''(0)=0$, $k=0$.

Теперь (30′) даёт:

$$\Theta=k_1U_1'' \qquad (k_1=\text{const.}). \tag{51}$$

Положим:

$$\tau=U-V\,|\,v=u; \tag{52}$$

тогда (32′) принимает вид

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2}=\frac{F'''(0)}{3k_1}$$

и даёт

$$\sigma=\frac{F'''(0)}{6k_1}\tau^2+C_0\tau;$$

аддитивную константу можно считать равной нулю.

Уравнение (33), если принять, что

$$\tau'^2=2q \tag{53}$$

даёт

$$\frac{d^2q}{d\tau^2}=a_0\tau+a_1$$

$$q=\frac{a_0}{6}\tau^3+\frac{a_1}{2}\tau^2+a_2\tau+a_3. \tag{54}$$

Для определения постоянных внесём эти значения в (34). Получаем:

$$\frac{4}{3}F'''(0)(a_0\tau+a_1)+a_0k_1\left[\frac{F'''(0)}{3k_1}\tau+C_0\right]+\frac{F^V(0)}{10k_1^2}=0,$$

откуда

$$a_0F'''(0)=0, \tag{55}$$

$$k_1a_0C_0+\frac{4}{3}a_1F'''(0)+\frac{1}{10k_1^2}F^V(0)=0.$$

Пусть $F'''(0)\neq 0$, тогда $a_0=0$. Подставим значения q и σ в шестую производную. Старший член относительно τ равен $a_1^4\tau^8$, с численным коэфициентом не равным нулю. Отсюда $a_1=0$ и по (55), $F^V(0)=0$.

Теперь старший член четвертого измерения $a_2^4\tau^4$ имеет численный коэфициет не равный нулю. Таким образом, и $a_2=0$. При этих условиях шестая производная удовлетворяется тождественно относительно τ и определяет $F^{VI}(0)$:

$$3F^{VI}(0)+70k_1a_3F'''^2(0)=0.$$

Можно считать

$$2a_3=1,\qquad k_1=1.$$

Имеем:

$$U=\frac{c_1}{24}u^4+\frac{c_0}{12}u^3+\frac{u}{2},\qquad V=\frac{c_1}{24}v^4+\frac{c_0}{12}v^3-\frac{v}{2},\qquad U_1=\frac{u^2}{2},\qquad V_1=\frac{v^2}{2}$$

$$c_1=\frac{1}{6}F'''(0).$$

При этих значениях выражение

$$\left[BA'_u-AB'_v-2B'_u(A-B)\right](u-v)-(A-B)^2$$

представляет собой полином шестой степени относительно u, v и его седьмая производная равна нулю. Вычислив седьмую производную $\frac{\partial^7\Phi}{\partial u^7}$ и положив $v=u$, получаем старший член $F'''(_0)U''^4$ с не равным нулю численным коэфициентом; откуда следует: $F'''(0)=0$. Таким образом, случай $F'''(0)\neq 0$ отпадает.

Остаётся рассмотреть случай $F'''(0)=0$.

Внеся значения q и $\sigma = c_0 \tau$ в шестую производную $\frac{\partial^6 \Phi}{\partial u^6}$, получаем, приняв $v=u$,

$$q^3 \Big\{ 5k_1^5 a_0^2 + 2F^{VI}(0) - 6\, C_0 F^V(0)\tau +$$
$$+ 10k_1^2 (a_0 \tau + a_1) \Big[\, 3k_1\, c_0^2 + F^{IV}(0) \,\Big] \Big\} = 0,$$

откуда

$$a_0\, [F^{IV}(0) + 9k_1\, c_0^2] = 0,$$
$$2F^{VI}(0) + 5k_1^5\, a_0^2 + 10\, a_1\, k_1^2 \Big[3k_1\, c_0^2 + F^{IV}(0) \Big] = 0. \tag{56}$$

Из рассмотрения

$$\left. \frac{\partial^7 \Phi}{\partial u^7} - \frac{\partial^7 \Phi}{\partial v^7} \right|_{v=u} = 0$$

следует:

$$F^{VII}(0) = 0,$$

отсюда по (55) $F^V = (0)$ и, кроме того,

либо 1°: $c_0 \neq 0$, $a_1 = 0$, $a_2 F^{IV}(0) = 0$,

в этом случае в силу (56) и $F^{VI}(0) = 0$,

либо 2°: $c_0 = 0$ (т. е. $\sigma = 0$).

Рассмотрим 1°. Если $a_2 \neq 0$, имеем по (54), (53)

$$\tau' = \sqrt{2a_2 \tau + 2a_3}$$

и по (51), (52), (31)

$$U = \frac{9\alpha}{5} u^5 + 3\beta u^2,\ \ V = \frac{9\alpha}{5} v^5 - 3\beta v^2,\ \ U_1 = u^3,\ \ V_1 = v^3,$$
$$144\alpha = c_0\, a_2^2 \quad 12\beta = a_2\ .$$

Эти функции удовлетворяют условию

$$\Big[BA'_u - AB'_v - 2B'_u\, (A - B) \Big]\, (u - v) - (A - B)^2 = 0$$

и поэтому $F=0$, кривые переноса одного семейства плоские и принадлежат пучку $x_1 = x_4 = 0$. Γ_1, Γ_2 определяются уравнениями

$$x_1 = 0,\ \ \left(x_2\, x_4 - \alpha x_3^2 \right)^2 = 12\beta^2\, x_3\, x_4^3 .$$

Уравнение поверхности после исключения параметров запишется так:

$$x_1^4\, x_2\, x_4 = \alpha \left(x_1^2\, x_3\, x_4^3 + x_1^4\ x_3^2 - \tfrac{1}{5}\, x_4^6 \right) + \beta x_1^3 \left(2x_1^2\, x_3 + x_4^3 \right)$$

или, если принять

$$x_2 = \alpha \overset{*}{x}_2 , \quad x_3 = \overset{*}{x}_3 - \lambda x_1 , \quad \lambda = \frac{\beta}{\alpha} .$$

так:

$$x_1^4\left(x_2^* x_4 - x_2^{*2}\right) + \lambda^2 x_1^6 - \frac{1}{5} x_4^6 - x_1^2 x_3^* x_4^3 = 0.$$

Как поверхность переноса относительно плоскости $x_4 = 0$ она допускает представление:

$$x_1 = q, \quad x_2^* = p^2 - \frac{1}{20q^4} - \lambda^2 q^2, \quad x_3^* = p - \frac{1}{2q^2}, \quad x_4 = 1.$$

Здесь Γ_1', Γ_2' состоят из прямой

$$x_1 = x_4 = 0$$

и алгебраической кривой шестого порядка

$$x_4 = 0, \quad x_1^2 x_2^{*3} x_3 = \left(\frac{1}{5} x_3^{*2} - 2\lambda^2 x_1^2\right)^3.$$

Если $a_2 = 0$

$$\tau' = \sqrt{2a_3} = 2h$$

и

$$U = \frac{c_0 h^2}{3} u^3 + hu, \quad V = \frac{c_0 h^2}{3} v^3 - hv, \quad U_1 = hu^2, \quad V_1 = hv^2,$$

получаем поверхность:

$$6x_1^2\left(x_1 x_3 - x_2 x_4\right) + c_0\left(3x_1^2 x_3^2 + h^2 x_4^4\right) = 0.$$

В плоскости $x_1 = 0$ кривые Γ_1 Γ_2 определяются уравнениями

$$c_0 x_2^2 = 4x_3 x_4 \pm 2hx_4^2.$$

Как поверхность переноса относительно плоскости π', она допускает представление:

$$x_1 = q, \quad x_3 = p - \frac{1}{c_0} q, \quad x_2 = \frac{c_0}{2} p^2 - \frac{1}{2c_0} q^2 + \frac{c_0 h^2}{6q^2}, \quad x_4 = 1.$$

Γ_1', Γ_2' прямые

$$x_1 = x_4 = 0 \quad \text{и} \quad x_4 = 0, \quad x_1 + c_0 x_3 = 0.$$

Рассмотрим 2°. $c_0 = 0$, $\sigma = 0$.

В этом случае условие

$$\left.\frac{\partial^8 \Phi}{\partial u^8}\right|_{v=u} = 0$$

даёт:

$$8F^{VIII}(0)\, q^8 - F^{IV}(0)\left[280q^4 + 168a_1 q^3 + 840a_1 q^2 \left(\frac{2q}{d\tau}\right)^2\right] +$$
$$+ 108a_1^3 q \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2 + 21\, a_1^2 \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^4 = 0,$$

где

$$q = \frac{a_1}{2}\tau^2 + a_2\tau + a_3.$$

Отсюда следует $a_1 = 0$.

Пусть $a_2 \neq 0$, тогда $F^{IV}(0)=F^{VIII}(0)=0$. При этом получаем:

$$U=3u^2,\ V=-3v^2,\quad U_1=2u^3,\ V_1=2v^3.$$

Полученные значения обращают (12) в тождество, причем $F=0$. Но оба семейства кривых переноса, определяемые (7′), здесь совпадают и образуют семейство прямолинейных образующих. Это поверхность третьего порядка Cayley:

$$x_1 x_2 x_4 = x_1^2 x_3 + x_4^3.$$

При $a_2=0$ получаем параболоид.

15. Минимальные поверхности, являющиеся поверхностями переноса относительно некоторой плоскости.

Поверхности, полученные в II 5, 7, 8 обладают тем свойством, что у них линии Γ_1 и Γ_2 совпадают и образуют нераспадающееся коническое сечение. Эти поверхности переводятся в минимальные поверхности проективным преобразованием, переводящим это коническое сечение в циклический круг. Это единственные минимальные поверхности, которые являются поверхностями переноса относительно ещё одной плоскости, отличной от бесконечно удалённой [3]).

В случаях II 5, 7 Γ_1', Γ_2' — прямые, в случае II 8 одна из них прямая, вторая—алгебраическая кривая пятого порядка.

Таким образом, не существует поверхности, которая была бы минимальиой одновременно относительно двух плоскостей—утверждение, высказанное S. Lie [4]) без доказательства.

---

[3]) Я. Бланк. Минимальные поверхности как поверхности переноса. Записки Инст. матем. и мех. ХГУ, т. XVI, 1940.

[4]) Gesammelte Abh., Bd I, XXV, s. 427.