Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: ***магістр***

на тему: ***Деякі властивості перетворення Лапласа геометричної прогресії***

Виконав: студент групи М-162 II курсу (другий магістерський рівень), спеціальності 111 "Математика" освітньо-професійної програми "Математика"
Голубєв І. О.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри фундаментальної математики
Гефтер С.Л.

Харків — 2025 рік

Анотації

У кваліфікаційній роботі отримано згорточне рівняння для ряду Ейлера $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{s^{n+1}}$, яке можна розглядати як аналог класичного функціонального рівняння для показникової функції. Також досліджені властивості класичного перетворення Лапласа функції $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Abstract

A convolution equation for Euler's series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{s^{n+1}}$, which can be considered as an analogue of the classical functional equation for an exponential function is established in the thesis. The properties of the classical Laplace transform of the function $f(x) = \frac{1}{1+x}$ are also investigated.

Зміст

Анотації 2

Вступ 4

1. Попередні відомості 5

1.1. Формальні степеневі ряди [1, гл. II] 5

1.2. Формальні ряди Лорана [2, 3] 6

1.3. Класичне перетворення Лапласа [4, гл.19] 7

2. Властивості ряду Ейлера 12

2.1. Перетворення Лапласа в кільці формальних степеневих рядів над довільним полем нульової характеристики 12

2.2. Згорточне рівняння для ряда Ейлера 16

3. Властивості функції Ейлера 18

3.1. Функція Ейлера на дійсній піввісі 18

3.2. Функція Ейлера як перетворення Лапласа 21

3.3. Аналітичне продовження перетворення Лапласа. 23

Висновки 28

Список використаних джерел 29

Вступ

Як добре відомо, перетворенням Лапласа показникової функції є раціональна функція $\dfrac{1}{x-1}$: $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^t e^{-xt} dt = \frac{1}{x-1}$, $x > 1$. З іншого боку, при $|x| < 1$ функція $\dfrac{1}{1-x}$ є сумою геометричної прогресії:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \ , \ \ |x| < 1.$$

Якщо тепер ми розглянемо формальне перетворення Лапласа цієї геометричної прогресії, то отримаємо всюди розбіжний ряд Лорана $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{s^{n+1}}$ (див. розділ 2 даної роботи). Цей формальний ряд Лорана будемо називати рядом Ейлера. Різні перетворення розбіжних рядів такого типу розглядались у роботах Ейлера, Бореля та у роботах багатьох інших математиків (див. [7]).

У представленій кваліфікаційній роботі отримано згорточне рівняння для ряду Ейлера, яке можна розглядати як аналог класичного функціонального рівняння для показникової функції (див. теорему 2.8 у підрозділі 2.2). Відмітимо, що операція згортка рядів Лорана була введена Гурвицем у кінці 19 сторіччя для вивчення аналитичного продовжения голоморфных функций (див. [6]).

У розділі 3 кваліфікаційної роботи розглядається деякий аналітичний аналог ряду Ейлера, а саме, класичне перетворення Лапласа $F(s)$ функції $\dfrac{1}{1+x}$: $F(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{1+x} dx$. Основним результатом цього розділу є отримання асимптотичного представлення аналітичного продовження функції $F(s)$ (див. теорему 3.6 у підрозділі 3.3).

Розділ 1

Попередні відомості

1.1. Формальні степеневі ряди [1, гл. II]

Означення 1.1. Нехай K - довільне поле нульової характеристики. Формальний степеневий ряд за змінною X над полем K є формальним виразом $\sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$, причому не передбачається, що всі коефіцієнти a_n, за виключенням скінченної кількості, дорівнюють нулю. Сума двох формальних рядів визначається за формулою:

$$(\sum_{n\geq 0} a_n X^n) + (\sum_{n\geq 0} b_n X^n) = \sum_{n\geq 0} c_n X^n, c_n = a_n + b_n,$$

а добуток формального ряду на скаляр - за формулою

$$\lambda(\sum_{n\geq 0} a_n X^n) = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n) X^n.$$

Означення 1.2. Множина $K[[x]]$ формальних степеневих рядів є векторним простором над полем K. Позначимо символом 0 елемент цього простору, додавання якого до будь-якого формального ряду не змінює останнього; це формальний ряд, усі коефіцієнти якого дорівнюють нулю. Добуток двох формальних рядів, як і добуток двох поліномів, визначається за формулою

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q,$$

яка зберігає сенс, так як у ній для кожного n коефіцієнт c_n визначається, як сума скінченної кількості числа додатнків. Добуток в цьому випадку теж комутативно, асоціативно та білінійно за відношенням до операцій векторного простору. Множина $K[[x]]$, як і множина $K[x]$, є алгеброю над полем K з одиничним елементом, який позначається, як 1 (це є ряд $\sum\limits_{n\geq 0} a_n X^n$, такий, що $a_0 = 1, a_n = 0$ при $n \geq 0$). Алгебра $K[x]$ ототожнюється з підалгеброю алгебри $K[[x]]$, що складається з формальних рядів, усі коефіцієнти яких, за виключенням скінченної кількості, дорівнюють нулю.

1.2. Формальні ряди Лорана [2, 3]

Нехай K - довільне поле нульової характеристики. Зазначимо за допомогою $K[[z, \frac{1}{z}]]$ множину усіх двустороніх рядів Лорана, тобто рядів вигляду $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, де $c_n \in K$. Множина $K[[z, \frac{1}{z}]]$ є векторним простором над полем K. В просторі $K[[z, \frac{1}{z}]]$ розглянемо наступний лінійний функціонал (формальний лишок): якщо $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, то $Resg(z) = c_{-1}$.

За допомогою позначення$\frac{1}{z}K[[\frac{1}{z}]]$ ми будемо визначати підпростір простору $K[[z, \frac{1}{z}]]$ усіх формальніх рядів, що складаються з рядів Лорана вигляду

$$\frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \frac{c_3}{z^3} + \dots \ .$$

Відзначимо, що для формальних рядів Лорана з підпростору $\frac{1}{z}K[[\frac{1}{z}]]$ звичайним чином визначен їх добуток. Таким чином, цей підпростір є алгеброю над полем K. Крім того, лінійний підпростір $\frac{1}{z}K[[\frac{1}{z}]]$ є ідеалом в алгебрі $K[[\frac{1}{z}]]$ усіх формальних рядів Лорана з недодатніми степенями.

Якщо тепер V- довільний векторний простір над полем K, то ми будемо роздивляти й простір $V[[z, \frac{1}{z}]]$ усіх формальних рядів Лорана з коефіцієнтами з V. Формальний лишок в цьому просторі визначається аналогічно: якщо

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, c_n \in V,$$

то

$$Res g(z) = c_{-1} \in V.$$

1.3. Класичне перетворення Лапласа [4, гл.19]

Нехай вимірна функція f дійсної змінної t визначена на півосі $t \geq 0$. Її перетворенням Лапласа є наступна функція комплексної змінної:

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Її область визначення складається з значень комплексоного параметра p, для яких розглядаємий інтеграл існує. Ми будемо роздивляти комплексно-значні функкіх $f(t)$, задані на всій дійсній осі t і задовільняющі таким умовам:

1. На будь-якому скінченному інтервалі функція $f(t)$ неперервна окрім, можливо, скінченної кількості точок розриву першого роду.

2. $f(t) = 0$ при $t < 0$.

3. Існують такі сталі C і α, що для всіх $t \geq 0$ виконується нерівність $|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}$ (1)

Означення 1.3. Функцію $f(t)$, задовільняючу умовам 1-3, будемо називати оригіналом, а її зображення Лапласа, тобто функцію $F(p)$ - зображенням функції $f(t)$. Зв'язок між зображенням та відповідним оригіналом часто зазначається так:

$$f(t) \risingdotseq F(p),$$

або

$$F(t) \risingdotseq f(p)$$

Якщо функція $f(t)$ на півосі $t \geq 0$ має скінченну кількість точок розриву першого роду и задовільняє умові (1), то функція $F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt$ голоморфна в півплощині $Rep > \alpha$. Назвемо точну нижню грань тих значень α, при яких для функції $f(t)$ виконується умова (1), показником експоненційного росту функції $f(t)$.Тоді справедлива наступня теорема

Теорема 1.4. *Нехай* α_0 *- показник експоненційного росту оригіналу* $f(t)$*. Тоді його зображення* $F(p)$ *є голоморфною функцією в півплощині* $Rep > \alpha_0$*.*

Означення 1.5. Згорткою $f * g$ функцій f і g називається функція, яка визначається рівністю

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\xi) f(t - \xi) d\xi.$$

При згортці оригіналов зображення перемножуються, тобто якщо

$$f(t) \risingdotseq F(p), g(t) \risingdotseq G(p),$$

то

$$(f * g)(t) \risingdotseq F(p)G(p).$$

Теорема 1.6 (Теорема про згортку.)**.** *Якщо* $L[f_1(t)] = F_1(p), \;\; L[f_2(t)] = F_2(p)$, *то* $F_1(p)F_2(p) = L[f_1(t) * f_2(t)]$, *де* $Rep > max\{S_0^1, S_0^2\}$

Має місце наступна формула обернення, тобто є формула, яка відновлює оригінал за його зображенням.

Теорема 1.7. *Нехай $f(t)$ - оригінал, а $F(p)$- його зображення. Якщо функція $f(t)$ неперервна в точці t і має в цій точці скінченні односторонні похідні,то*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} e^{pt}F(p)dp \qquad (2)$$

Цей інтеграл розуміється у сенсі головного значення, і береться уздовж будь-якої вертикальної прмої $Rep = b > \alpha_0$, де α_0 - показник росту функції $f(t)$.

Формулу (2) називають формулой обернення перетворення Лапласа або формулой Мелліна.

Зауваження 1.8. Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ -ціла функція експоненційного типу δ і $F(p)$ - її перетворення Лапласа. Тоді функція $F(p)$ голоморфна поза кругом $|p| \le \delta, F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{p^{n+1}}, |p| > \delta$, і для будь-якого $\epsilon > 0$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\epsilon} e^{pz}F(p)dp,$$

де C_ϵ - коло $|P| = \delta + \epsilon$. Цю формулу називають формулой обернення Бореля.

Нехай тепер $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$- довільна ціла функція

Теорема 1.9. *Якщо одностороннє перетворення Лапласа $F(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$ функції f визначено при достатньо великих дійсних s, то* *для $F(s)$ на дійсній півосі має місце наступнє асимптотичне розкладення:*

$$F(s) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k!a_k}{s^{k+1}} = \overline{o}(\frac{1}{s^{n+1}}), s \to +\infty$$

для всіх $n \in N$.

Є правильною наступна формула для знаходження зображення добутку 2-х функцій-оригіналів за відомими зображеннями його множників.

Теорема 1.10. *Нехай $f_1(t) := F_1(p), Re\ \ p > a_1$ і $f_2(t) := F_2(p), Re\ \ p > a_2$. Тоді $h(t) = f_1(t)f_2(t) := H(p) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(q)F_2(p-q)dp = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} F_1(p-q)F_2(q)dp.$ (3)*

У книзі Е. Титчмарша [5]. стор.144 наведено наступне твердження про контурний інтеграл, який є аналогом інтегралів у своїй частині формули (3).

Теорема 1.11. *Нехай $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} (z \neq 0)$ і Γ - замкнутий контур, який охоплює початок координат. Якщо $\phi(z)$ - ціла функція, тоді для всіх $z \in \mathbb{C}$ має місце наступна рівність*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(\omega)\phi(z-\omega)d\omega = a_0\phi(z) - a_1\phi'(z) + \frac{a_2}{2!}\phi''(z) - \dots\ .$$

Теорема 1.12. *(Перша теорема розвинення.) Нехай функція F(p) розвивається в околі точки $p_0 = 0$ у ряд Лорана: $F(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{p^k}$ збіжний для деякого скінченного p, тоді функція $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1}$ є аналітичною функцією й оригіналом зображення F(p).*

Теорема 1.13. *(Друга теорема розвинення.)*

Нехай зображення F(p) є дробово-раціональною функцією

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + ... + a_n p^{n-1}}{b_0 + b_1 p + ... + b_m p^m},$$

де n<m *і всі полюса* $p_1, p_2, ..., p_m$ *функції* $F(p)$ *прості й відмінні від нуля.*

Тоді оригінал f(t) за зображенням F(p) визначається формулою

$$f(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{F_1(p_n)}{F_2'(p_n)} e^{p_n t}.$$

Розділ 2

Властивості ряду Ейлера

2.1. Перетворення Лапласа в кільці формальних степеневих рядів над довільним полем нульової характеристики

Нехай K - довільне поле нульової характеристики і $K[[x]]$ - кільце формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з поля K. Нагадаємо, що операція добутку в кільці формальних степеневих рядів $K[[x]]$ визначається наступним чином:
якщо $f, g \in K[[x]], f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...; g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...$, то $(f \cdot g)(x) = (a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(\sum\limits_{k=0}^{n} a_kb_{n-k})x^k$.

Визначемо тепер перетворення Лапласа формального степеневого ряду. Нехай $f \in K[[x]], f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ Покладемо $F(s) = \frac{a_0}{s} + 1!\frac{a_1}{s^2} + 2!\frac{a_2}{s^3} + ... = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\frac{a_n}{s^{n+1}}$. Ми отримали формальний ряд Лорана $F(s)$, який є перетворенням Лапласа формального степеневого ряду $f(x)$.

Приклад 2.1. Покажемо, що якщо

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...a_mx^m-$$

поліном з дійсними коефіцієнтами, то формальне перетворення Лапласа полінома $f \in R[[x]]$ співпадає з класичним перетворенням Лапласа функції $f(x)$. Для цього знайдемо класичне перетворення Лапласа функції $f(x)$:

$$\int_0^{+\infty} f(x)e^{-sx}dx = \int_0^{+\infty} (\sum_{k=0}^{m} a_x x^k)e^{-sx}dx = \sum_{k=0}^{m} a_k \int_0^{+\infty} x^k e^{-sx}dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} a_k \frac{k!}{s^{k+1}} = F(s),$$

так як $\int_0^{+\infty} x^k e^{-sx}dx = \frac{k!}{s^{k+1}}, k = 0, 1, ...$.

Наступний приклад має фундаментальне значення для представленної роботи.

Приклад 2.2. (формальне перетворення Лапласа геометричної прогресії).

Нехай a – довільний елемент поля K і $f(x) = 1 + ax + a^2x^2 + a^3x^3 + ...$. Тоді $F(s) = \frac{1}{s} + 1!\frac{a}{s^2} + 2!\frac{a^2}{s^3} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k k!}{s^{k+1}}$. Відмітимо, що у випадку, коли $K = \mathbb{R}$, або $K = \mathbb{C}$ формальний ряд Лорана $F(s)$ розбігається для всіх дійсних, або комлексних значеннях s.

Позначимо тепер за $\frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$ векторний простір всіх формальних рядів Лорана наступного вигляду:

$$\frac{c_0}{s} + \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_2}{s^3} + ...,$$

де $c_n \in K$. Тоді ми маємо лінійне відображення векторних просторів:

$$L : K[[x]] \to \frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]], L(f) = F.$$

Очевидно, що відображення L здійснює ізоморфізм векторних просторів $K[[x]]$ та $\frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$. Відмітимо тепер, що векторний простір формальних степеневих рядів $K[[x]]$ з операцією множення є ще й комутативною алгеброю над полем K.Тому цікавим є питання про те, куди формальне перетворення Лапласа переводить добуток двох формальних степеневих рядів.

Теорема 2.3. *Нехай* $f, g \in K[[x]]$,

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ...,$$

$$h(x) = f(x)g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + ...,$$

і

$$H = L(f \cdot g).$$

Тоді

$$H(s) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\tilde{d}_n}{s^{n+1}},$$

де

$$\tilde{d}_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \tilde{a}_k \tilde{b}_{n-k}$$

і

$$\tilde{a}_k = k!a_k, \tilde{b}_k = k!b_k.$$

Доведення. Нехай $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, тобто $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$, де $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Тоді маємо:

$$H(s) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{d_n}{s^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} (k!a_k)(n-k)!b_{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^{n+1}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^k \tilde{a}_k \tilde{b}_{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{d}_n}{s^{n+1}}.$$

Теорему доведено. $\square$

Означення 2.4. [6]

Нехай $F, G \in \frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$, $F(s) = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s^2} + \frac{a_2}{s^3} + ...$ і $G(s) = \frac{b_0}{s} + \frac{b_1}{s^2} + \frac{b_2}{s^3} + ...$ Згорткою Гурвіца $F * G$ формальних рядів Лорана F і G будемо називати наступний формальний ряд Лорана:

$$(F * G)(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k a_k b_{n-k}) \cdot \frac{1}{s^{n+1}}.$$

Очевидно, що операція згортки Гурвіца є комутативною, тобто $F * G = G * F, F, G \in \frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$. Не важко перевірити, що ця операція є й асоціативною, тобто $(F * G) * H = F * (G * H)$ для всіх $F, G, H \in \frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$. Це також фактично випливає з теореми 2.3, оскільки операція множення у кільці поліномів є комутативною та асоціативною.

Приклад 2.5. Нехай $F(s) = \frac{1}{s}$ і $G(s) = \frac{b_0}{s} + \frac{b_1}{s^2} + \frac{b_2}{s^3} + ...$
Тоді $(F * G)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{s^{n+1}} = G(s)$. Отже, моном $F(s) = \frac{1}{s}$ є одиницею відносно операції згортки Гурвіца.

Тепер з теореми 1.16 та означення 1.17 ми отримуємо наступне твердження. Якщо $f, g \in K[[x]]$, тоді $L(f \cdot g) = L(f) * L(g)$. Отже ми маємо наступне суттєве уточнення твердження про ізоморфізм векторних просторів $K[[x]]$ та $\frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$.

Теорема 2.6. *Векторний простір $\frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$ з операцією згортки Гурвіца є комутативною асоціативною алгеброю з одиницею над полем K. Крім того, перетворення Лапласа здійснює ізоморфізм алгебр $K[[x]]$ та $\frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$.*

Розглянемо тепер питання про перетворення Лапласа похідної формального степеневого ряду.

Теорема 2.7. *Нехай $f \in K[[x]]$. Тоді в кільці формальних рядів Лорана $K[[\frac{1}{s}]]$ є правильною наступна рівність:*

$$L(f')(s) = sL(f)(s) - f(0).$$

Доведення. Нехай $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$. Тоді $F(s) = \frac{0!}{s} + \frac{1!}{s^2} + \frac{2!}{s^3} + \frac{3!}{s^4} + \ldots$ і $L(f')(s) = \frac{a_1}{s} + \frac{1!2a_2}{s^2} + \frac{2!3a_3}{s^3} + \frac{3!4a_4}{s^4} + \ldots = \frac{a_1}{s} + \frac{2!a_2}{s^2} + \frac{3!a_3}{s^3} + \frac{4!a_4}{s^4} + \ldots$. З цього ми отримуємо, що $\frac{1}{s}L(f') = \frac{a_1}{s^2} + \frac{2!a_2}{s^3} + \frac{3!a_3}{s^4} + \ldots = F(s) - \frac{a_0}{s}$, тобто $L(f')(s) = sf(s) - a_0 = sF(s) - f(0)$. □

2.2. Згорточне рівняння для ряда Ейлера

Розглянемо перетворення Лапласа геометричної прогресії

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \in K[[x]].$$

Маємо:

$$F(s) = \frac{0!}{s} + \frac{1!}{s^2} + \frac{2!}{s^3} + \ldots \in \frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]].$$

Формальний ряд Лорана $F(s)$ будемо називати рядом Ейлера. Знайдемо згорточний квадрат ряда Ейлера: $(F * F)(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} C_n^k k!(n-k)!)\frac{1}{s^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n} n!)\frac{1}{s^{n+1}} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(n+1)!}{s^{n+1}}$. Тому $\frac{1}{s}(F * F)(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)!}{s^{n+2}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{s^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{s^{n+1}} - \frac{1}{s} = F(s) - \frac{1}{s}$, тобто

$$\frac{1}{s}(F * F)(s) = F(s) - \frac{1}{s}. \qquad (3)$$

Основним результатом дипломної роботи є наступне твердження. Воно показує, що ряд Ейлера є єдиним розв'язком рівняння (3)

Теорема 2.8. *Нехай* $F \in \frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$ *і* $\frac{1}{s}(F * F)(s) = F(s) - \frac{1}{s}$. *Тоді* $F(s)$ *є рядом Ейлера, тобто* $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{s^{n+1}}$.

Доведення. Нам залишилось показати, що ряд Ейлера є єдиним розв'язком рівняння $\frac{1}{s}(F * F)(s) = F(s) - \frac{1}{s}$ у просторі $\frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$. Перепишимо це рівняння у просторі формальних рядів Лорана $K[[\frac{1}{s}]]$ у вигляді $(F * F)(s) = sF(s) - 1$. Нехай тепер $F(s)$ є перетворенням Лапласа формального степеневого ряду $f \in K[[x]]$, тобто $F = L(f)$. Тоді $(F * F)(s) = (L(f) * L(f))(s) = L(f^2)(s)$, а $sF(s) - 1 = L(f')(s)$, оскільки $sF(s) - 1 = a_0 - 1 + \frac{1!a_1}{s} + \frac{2!a_2}{s} + ...$, якщо $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$ З урахуванням того, що $sF(s) - 1 = (F * F)(s) \in \frac{1}{s}K[[\frac{1}{s}]]$, ми маємо, що $a_0 - 1 = 0$, тобто $f(0) = 1$. Отже, $L(f^2)(s) = L(f')(s)$, а тому $f(x)^2 = f'(x)$. Тепер відмітимо, що єдиним розв'язком задачі Коші $f'(x) = f(x)^2, f(0) = 1$ у просторі формальних степеневих рядів є степеневий ряд

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

З цього випливає, що

$$F(s) = \frac{0!}{s} + \frac{1!}{s^2} + \frac{2!}{s^3} + \frac{3!}{s^4} + ...,$$

тобто $F(s)$ є рядом Ейлера.

$\square$

Розділ 3

Властивості функції Ейлера

3.1. Функція Ейлера на дійсній піввісі

Якщо формально знайти перетворення Лапласа наступної геометричної прогресії

$$1 + t + t^2 + t^3 + ... \ ,$$

то ми отримаємо всюди розбіжний ряд

$$\frac{0!}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{4^3} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

З іншого боку, якщо $|t| < 1$, то $1 + t + t^2 + t^3 + ... = \frac{1}{1-t}$, але для функції $\frac{1}{1-t}$, ми не можемо розглядати звичайне перетворення Лапласа, оскільки інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1-t} dt$$

розбгаєтся у точці $t_0 = 1$.

Будемо тепер розглядати таку геометричну прогресію:

$$1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - ... = \frac{1}{1+t}; |t| < 1.$$

Для функції $\frac{1}{1+t}$ вже існує звичайне класичне перетворення Лапласа. Для $x > 0$ розглянемо інтеграл $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$. Так як $\frac{e^{-xt}}{1+t} \leq$

e^{-xt} для усії $x > 0$ та $t \geq 0$, та $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt}dt$ збігається, то функція $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ визначена на всій піввісі $(0, +\infty)$. Функцію $F(x)$ будемо називати функцією Ейлера.

Теорема 3.1. *$F(x)$ - неперервна додатня функція на інтервалі $(0, +\infty)$, причому $F(x) \to 0$, коли $x \to +\infty$, і $F(x) \to +\infty$, коли $x \to 0$.*

Доведення. Вочевидь, що $F(x) > 0$. Покажемо, що функція $F(x)$ є неперервною на інтервалі $(0, +\infty)$.

Нехай $\delta > 0$. Перевіримо, що інтеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ збігається рівномірно на проміжку $[\delta, +\infty)$. Оскільки $|\dfrac{e^{-xt}}{1+t}| \leq e^{-\delta t}$ і для всіх $x \in [\delta, +\infty)$ і $t \geq 0$ $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\delta t}dt < \infty$, то за ознакою Вейєрштраса інтеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ збігається абсолютно та рівномірно на $[\delta, +\infty)$. Ми отримали, що функція $F(x)$ є неперервною на проміжку $[\delta, +\infty)$, а це означає, що вона неперервна і на і на всьому інтервалі $(0, +\infty)$, оскільки δ є довільною додатною сталою.

Покажемо тепер, що $F(x) \to 0$, коли $x \to +\infty$. Нехай $x_n \subset (0, +\infty)$ довільна послідовність, для якої $x_n \to +\infty$, $n \to +\infty$. Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x_{n_0}t}}{1+t}dt$, де $x_{n_0} = min(x_n, n \in \mathbb{N})$.
Тоді $|\dfrac{e^{-x_n t}}{1+t}| \leq \dfrac{e^{-x_{n_0}t}}{1+t}$, для усіх $n \in \mathbb{N}$ і $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x_{n_0}t}}{1+t}$ збігається. Таким чином, за теоремою Лебега про мажоровану збіжність, ми маємо, що

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x_n t}}{1+t}dt = \int_0^\infty \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-x_n t}}{1+t}dt = 0.$$

Залишилося перевірити, що $F(x) \to +\infty$, коли $x \to +0$. Відзначимо, що $F(x)$ зростає при $x \to +0$, тобто, для $0 < x_1 < x_2$, виконується $F(x_1) < F(x_2)$. З цього випливає, що існує границя $\displaystyle\lim_{x\to+0} \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$. Нехай $\displaystyle\lim_{x\to+0} \int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt < +\infty$. Тоді існує така додатна тала М, що для усіх натуральних n є правильною така нерівність:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{n}t}}{1+t}dt \leq M.$$

Тому за теоремою Б. Леві про обмежену збіжність ми отримуємо:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{n}t}}{1+t}dt = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{n}t}}{1+t}dt \leq M$$

- це суперечність, оскільки отриманий інтеграл розбігається:

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t}dt = +\infty.$$

Отже,

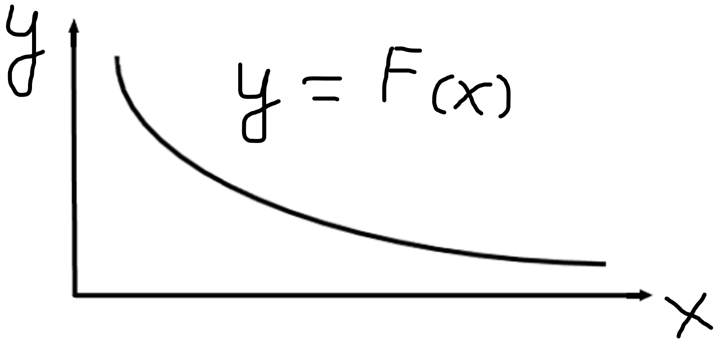
$$\lim_{x\to+0}\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt = +\infty.$$

$\square$

Зауваження. Відмітимо, що на усьому проміжку $(0,+\infty)$ інтеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ збігається неравномірно, оскільки він є розбіжним при $x = 0$.

Теорема 3.2. *Функція Ейлера* $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$ *є двічі неперервно диференційованою на інтервалі* $(0,+\infty)$, *причому* $F'(x) < 0$, *а* $F''(x) > 0$. *Отже,* $F(x)$ *спадає та є строго опуклою на інтервалі* $(0,+\infty)$.

Доведення. Розглянемо інтеграл $\displaystyle\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-xt}}{1+t}\right)dt = -\int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t}dt$. Він збігається рівномірно на $[\delta,+\infty)$, для будь-якого $\delta > 0$ (див. доведення теореми 3.1). З цього випливає, що $F'(x) = -\displaystyle\int_0^\infty \frac{te^{-xt}}{1+t}dt, x \in (0,+\infty)$, тобто $F'(x) < 0$. Розглянемо тепер такий інтеграл: $-\displaystyle\int_0^\infty \frac{d}{dx}\left(\frac{te^{-xt}}{1+t}\right)dt = \int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{1+t}dt$. Він також за ознакою Вейєрштраса збігається рівномірно на проміжку $[\delta,+\infty)$. Отримали, що $F''(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2e^{-xt}}{1+t}dt > 0$, для усіх $x \in$



$(0, \infty)$. Отже, функція $F(x)$ є строго опуклою. $\square$

З огляду на твердження 3.1 та 3.2 ми отримаємо, що функція $F(x)$ має наступний графік (див. малюнок вище).

3.2. Функція Ейлера як перетворення Лапласа

Означення 3.3. Нехай функція $f(t)$ дійсної змінної визначена на всій піввісі $t \geq 0$. Її перетворенням Лапласа називається наступна функція комплексної змінної

$$F(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$

Будемо розглядати комплекснозначні функції $f(t)$, що заданні на всій дійсній вісі t та задовольняють наступним умовам:

1. На будь-якому скінченному інтервалі осі t функція $f(t)$ неперервна, окрім, можливо, скінченної множини точок розрива першого роду.
2. $f(t) = 0$ при $t < 0$.
3. Існують такі сталі $C\alpha$, що для всіх $t \geq 0$ є правильною нерівність $|f(x)| \leq Ce^{\alpha t}$.

Функцію $f(t)$, що задовольняє умовам 1-3, будемо називати оригіналом, а її перетворення Лапласа, тобто функцію $F(z)$ - зображенням функції

$f(t)$. Зв'язок між зображенням та відповідним оригіналом будемо позначати так:

$$f(t) \doteqdot F(z)$$

або

$$F(z) \doteqdot f(t).$$

Нехай тепер $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ (при $t < 0$, ми вважаємо, що $f(t) = 0$).

Тоді перетворенням Лапласа функції $f(t)$ буде функція

$$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-zt}}{1+t} dt.$$

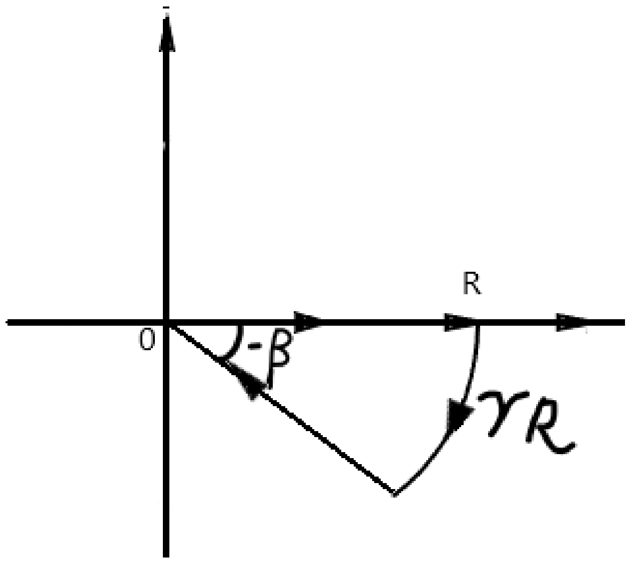
Отже, на дійсній піввісі $x \in (0, +\infty)$ ми отримуємо вже розглянуту функцію Ейлера.

Згідно із загальною теорією, якщо $|f(x)| \leq Ce^{\alpha t}$, то перетворення Лапласа $F(z)$ розглянутої функції голоморфно у півплощині $Rez > \alpha_0$, де α_0 - точна нижня межа всіх сталих α, для яких є правильною розглянута нерівність (див. [4]).

Для досліджуємої функції Ейлера, отримуємо такий наслідок:

Функція $F(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zt}}{1+t} dt$ є голоморфною у правій півплощині, тобто $\alpha_0 = 0$.

Доведення. Так як функція $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ є обмеженою, то нерівність $|f(x)| \leq Ce^{\alpha t}$ з правильною для всіх α. Тому $\alpha_0 = 0$. □



3.3. Аналітичне продовження перетворення Лапласа.

Теорема 3.4. [8] *Нехай функція $f(\zeta)$ голоморфна та обмежена в куті $|arg\zeta| \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Тоді її перетворення Лапласа $F(z)$ можна аналітично продовжити в кут $|argz| < \dfrac{\pi}{2} + \alpha$.*

Доведення. Розглянемо наступний інтеграл

$F_\beta(z) = \displaystyle\int_{l_\beta} e^{-z\zeta} f(\zeta) d\zeta$, де l_β - промінь $0 \leq |\zeta| < \infty$, $arg\zeta = -\beta$, і $0 \leq \beta < \alpha$. Покажемо, що

$F_\beta(x) = F_0(x) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$

при $x > 0$. Розглянемо тепер замкнений контур C_R, що складається з відрізків $[0, R], [Re^{-i\beta}, 0]$ і дуги кола $\gamma_R : |\zeta| = R, -\beta \leq arg\zeta \leq 0$. З огляду на інтегральну теорему Коші $\displaystyle\int_{C_r} e^{-x\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0$. Покажемо, що інтеграл по γ_R прямує до нуля коли $R \to \infty$. За умовою $|f(\zeta)| \leq M$ при $0 \leq |\zeta| < \infty, |arg\zeta| \leq \alpha$. Далі, $\zeta = Re^{if\phi}, -\beta \leq \phi \leq 0$ при $\zeta \in \gamma_R$. Отже,

$\displaystyle\int_{\gamma_R} e^{-x\zeta} f(\zeta) d\zeta \leq M \int_{\gamma_R} |e^{-x\zeta}||f(\zeta)d|\zeta = MR \int_{-\beta}^0 e^{-xRcos\phi} d\phi < MR\beta e^{-xRcos\beta} \to 0$

$(R \to \infty, x > 0)$. Переходячи до границі при $R \to \infty$ в тотожності

$$\int_0^R + \int_{\gamma_R} + \int_{Re^{-i\beta}}^0 e^{-x\zeta} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

отримаємо $F_\beta(x) = F_0(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t) ft$. Далі, $\zeta = \rho e^{-i\beta}, 0 \leq \rho < \infty$ на промені l_β, так що

$$F_\beta(z) = \int_0^\infty e^{-\rho(ze^{-i\beta})} f(\rho e^{-i\beta} e^{-i\beta}) d\rho.$$

□

Теорему 3.4 можна посилити.

Теорема 3.5. [8] *Функцію $F(z)$ можна аналітично продовжити в площину з розрізом по негативній півосі, тобто вона є голоморфною в $(-\infty, 0]$.*

Доведення. Так як функція $f(\zeta) = \dfrac{1}{1+\zeta}$ голоморфна та обмежена в будь-якому куті $|arctg(arg)\zeta| \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ □

Використовуючи нерівність $|f(\rho e^{-ib})| \leq M$ при $0 \leq \rho < \infty$, отримуємо за теоремою 3.3, що функція $F_\beta(z)$ голоморфна в півплощині $Re(ze^{-i\beta}) > 0$, а функція $F_0(z)$ голоморфною у півплощині $Rez > 0$. Покладемо

$$\Phi(z) = \begin{cases} F_0(z), Rez > 0 \\ F_\beta(z), Re(ze^{-i\beta} > 0). \end{cases}$$

Оскільки $F_0(x) \equiv F_\beta(x)$ при $x > 0$, то функція $\Phi(z)$ голоморфна у поєднанні напівплощин $Rez > 0$ та $Re(ze^{-ib}) > 0$, тобто в куті $-\dfrac{pi}{2} < argz < \dfrac{\pi}{2} + \beta$. Але β - будь-яке таке число, що $0 \leq \beta < \alpha$. Отже, ми продовжили аналітично функцію $F(z)$ в кут $-\dfrac{\pi}{2} < argz < \dfrac{\pi}{2} + \alpha$. Аналогічно, обираючи $-\alpha \leq \beta < 0$, отримаємо, що функцію $F(z)$ можна аналітично продовжити в кут $-\dfrac{\pi}{2} - \alpha < argz < \dfrac{\pi}{2}$. Теорема доведена.

За цією теоремою, функція $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$ допускає аналітичне продовження в кут $|arctg(argz)| < \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ Так як α - довільний гострий кут, то $F(z)$ аналітично продовжується в площину з розрізом за від'ємною півосі.

Наступне твердження є суттєвим посиленням теореми 3.5.

Теорема 3.6. *Функцію* $F(z)$ *можна представити у такому вигляді* $F(z) = -e^z lnz - \gamma e^z + e^z g(z), z \in C\backslash(-\infty, 0]$, *де* γ *- стала Ейлера,* $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n \cdot n!}$ *- ціла функція експоненційного типу 1, а* lnz *- та однозначна гілка логарифму, яка на додатковій півосі співпадає з функцією* $lnx, x > 0$. *Зокрема,* $F(x) = e^x(-lnx - \gamma + \bar{o}(1)), x \to +0$.

Доведення. Використовуючи теорему 3.4. і слідуючи міркуванню з книги Харді([7]), отримаємо при $x > 0$.

$F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = -e^x li(e^{-x})$,

Тоді

$-li(e^{-x}) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t} = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t} - \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}dt}{t} - \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = -lnx - \gamma + x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x}{3 \cdot 3!} - ...$,

так як $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t} - \int_0^1 \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = \gamma$,

(див.[7]).

З формули $F(x) = -e^x li(e^{-x})$ виходить, що

$F(x) = e^x(-lnx - \gamma + x - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - ...), x > 0$. (4)

Зокрема, $F(x) = e^x(-lnx - \gamma + \bar{o}(1)), x \to +0$. Так як рівність (4) справедлива на додатній півосі, а праворуч та ліворуч стоять функції, голоморфні в півплощині з розрізом за від'ємною півосі, то ця рівність виконується у всій області $(-\infty, 0]$. $\square$

Покажемо, що сума ряду $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n \cdot n!}$ є цілою функцією експоненційного типа 1. Маємо:

$\sigma = \sqrt[n]{n!|\frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!}|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$

Наступна теорема дає певне представлення функції $F(z)$ у правій півплощині.

Теорема 3.7. [8] *Функція $F(z)$ представима у вигляді $F(z) = \frac{1}{z} + G(z)$, де функція $G(z)$ обмежена в кожній півплощині $Rez > \delta$, ($\delta > 0$) і $\int_{-\infty}^{+\infty} |G(a+iy)|dy < +\infty$, для будь-якого $a > 0$. Крім того $|F(z)| \to 0$ при $R \to \infty$,де $\Gamma_R -\ : |z| = R, Rez \geq \delta$, де $\delta > 0$.*

Доведення. Так як $\frac{1}{1+t} = \frac{1-t^2+t^2}{1+t} = \frac{t^2}{1=t} + 1 - t$, то

$F(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t} e^{-zt} dt + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = \frac{1}{z} + G(z)$, де $G(z) = G_1(z) - \frac{1}{z^2}$, а $G_1(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t} e^{-zt} dt$.

Відмітимо, що функція $\frac{1}{z^2}$ абсолютно інтегруєма на кожній прямій

$x = a, (a > 0) : ||\frac{1}{(a+iy)^2} \leq \frac{1}{a^2+y^2}\ \frac{1}{y^2}$, при $y \to \infty$.

Покажемо тепер, що $G_1(z)$ абсолютно інтегруєма функція на цій прямій. Маємо: $G_1(a+iy) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t} e^{-(a+iy)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-ity} dt$, де

$$g(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ \frac{t^2}{1+t} e^{-at}, t \geq 0. \end{cases}$$

Отже, функція $G_1(a+iy)$ є перетворенням Фур'є функції $g(t)$, причому $g'(0) = 0$.

Покажемо тепер, що $g'(0) = 0 : g'(0) = (\frac{t^2}{1+t} e^{-at})'|_{t=0} = \frac{-at^3 e^{-at} + t^2 e^{-at}(1-a) + 2te^{-at}}{(1+t)^2}|_{t=0} = 0$.

Ми маємо, що $g \in C^1(0, +\infty)$. Крім того $g'' \in L^1(0, +\infty)$.

Тому $G_1(a+iy) = \underline{O}(\frac{1}{y^2})$, коли $y \to \infty$.

З цього випливає, шо $G_1(z)$ є абсолютно інтегрованою функцією на прямій $x = a, a > 0$.

Тепер покажемо, що функції $\frac{1}{z^2}$ і $G_1(z)$ є обмеженими у півплощині $Rez \geq \delta$, де $\delta > 0$:

$|\frac{1}{z^2}| = \frac{1}{|z^2|} \leq \frac{1}{(Rez)^2} \leq \frac{1}{\delta^2}$,

$|G_1(z)| = |\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt} e^{-iyt}}{1+t} dt| \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-\delta t}}{1+t} dt = G_1(\delta)$.

Отже функція $G(z)$ є обмеженою у півплощині, $Rez \geq \delta, (\delta > 0)$.

$|\frac{1}{z^2}| \to 0$ і $|G_1(z)| \to 0$ коли $R \to \infty$, де Γ- дуга кола:

$|z| = R, Rez \geq \delta$, де $\delta > 0$.

$|\frac{1}{z^2}| = \frac{1}{|z|^2} \leq [z = R(cos\phi + isin\phi)] \leq \frac{1}{(Rez)^2} = \frac{1}{(R^2 cos^2\phi)^2} \leq \frac{1}{R^2 cos^2 \phi_\alpha} \to 0$, коли $R \to +\infty, \phi \int [-\phi_\alpha, \phi_\alpha]$.

$|G_1(z)| = |\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-zt}}{1+t} dt| = [z = R(cos\phi + isin\phi)] = |\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-(Rcos\phi + iRsin\phi)t}}{1+t} dt| \leq \int_0^{+\infty} t^2 e^{-Rcos\phi t} dt = \frac{1}{Rcos\phi} \leq \frac{1}{Rcos\phi_\alpha} \to 0$, при $R \to +\infty, \phi \in [-\phi_\alpha; \phi_\alpha]$.

$\square$

Висновки

У представленій кваліфікаційній роботі отримано згорточне рівняння для ряду Ейлера $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{s^{n+1}}$, яке можна розглядати як аналог класичного функціонального рівняння для показникової функції. Досліджені деякі властивості операції згортки формальних рядів Лорана. Для класичного перетворення Лапласа $F(s)$ функції $f(x) = \frac{1}{1+x}$ отримано деяке асимптотичне представлення аналітичного продовження функції $F(s)$.

Список використаних джерел

[1] Henry Cartan. Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables. 1995, Manufactured in the United States of America Dover Publications, Inc., 31 East 2nd Street, Mineola, N. Y. 11501.

[2] I. Frenkel, J. Lepovsky, and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Academic Press, Boston etc. (1988).

[3] S. L. Gefter, Differential Operators of Infinite Order in the Space of Formal Laurent Series and in the Ring of Power Series with Integer Coefficients, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 239, No. 3, June, 2019 pg. 282-291.

[4] В.Г. Самойленко та інші. Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навчальний посібник . К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет" 2010 - 224 с.

[5] E. C. Titchmarsh, Introduction to the Theory of Fourier Integrals, Clarendon Press, Oxford, (1937).

[6] L. Bieberbach, Analytische Fortsetzung [in German], Springer, Berlin etc. (1955).

[7] G. H. Hardy, Divergent Series, Oxford at the Clarendon press (1949).

[8] D. V. Widder. The Laplace Transformation. Princeton University Press (1946).