

Універсальні алгебри

Курінний Г.Ч., Невмержицька О.М., Шугайло О.О.

Травень-2015

1 Універсальні алгебри.

Множина з операціями називається універсальною алгеброю. Множина з операціями і відношеннями називається алгебричною системою. Сама множина при цьому називається носієм, а множина операцій і відношень називається сигнатурою. І носій і сигнатура можуть бути порожніми множинами. Частково впорядкована множина є алгебраїчною системою, сигнатурою цієї системи є відношення порядку.

Нижче нас будуть цікавити лише універсальні алгебри.

Універсальна алгебра $\mathcal{A}$ з носієм A і сигнатурою Σ позначається $\mathcal{A} = \langle A; \Sigma \rangle$. Практика вжитку позначень дозволяє використовувати для різних речей — для алгебри і для носія одне і те ж позначення (так буває зручно) і писати $A = \langle A; \Sigma \rangle$. Звичайно і для множини цілих чисел, і для множини цілих чисел з

операціями додавання та множення, і для множини цілих чисел з операціями додавання, множення та відношенням порядку можна вживати одне і те ж позначення — $\mathbb{Z}$.

Оскільки сигнатура може бути порожньою, то множина без операцій також є універсальною алгеброю.

Розберемося із ситуацією, коли різні універсальні алгебри мають різні операції з однією і тією ж назвою, наприклад, множення є і на множині натуральних чисел, і на множині відображень. Коли назви операцій в різних сигнатурах однакові, то можна вважати (це не приводить до непорозумінь) що маємо одну і ту ж сигнатуру. Отже множина натуральних чисел з операціями додавання та множення і множина цілих чисел з операціями додавання та множення мають одну і ту ж сигнатуру. Звичайно, арність різних операцій з однією назвою повинна бути одна і та ж.

2 Морфізми

Нехай $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ і $\mathcal{B} = \langle B, \Sigma \rangle$ — дві універсальні алгебри з однією і тією ж сигнатурою. Відображення $f : A \rightarrow B$ називається морфізмом, коли для будь-якої операції $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Sigma$ і для будь-яких елементів $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ виконується рівність

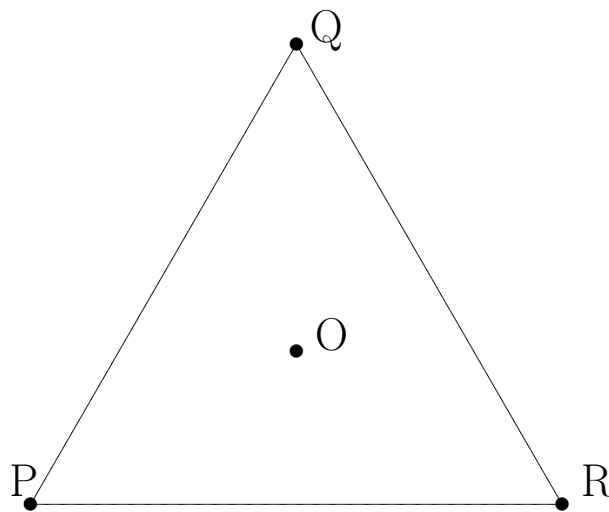
$$f(\varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)) = \varphi(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n)). \quad (1)$$

Словами про виконання тотожності (1) кажуть

- відображення f узгоджене з операцією φ ;
- відображення f перестановне з операцією φ ;
- відображення f комутує з операцією φ ;

Коли f — ін'єктивне відображення, то кажуть про мономорфізм, коли f — сюр'єктивне відображення, то кажуть про епіморфізм, коли f — бієктивне відображення, то кажуть про ізоморфізм. Візоморфність (одна алгебра ізоморфна другій) є відношенням еквівалентності на множині універсальних алгебр з однією сигнатурою, і звичайно міркування проводять “з точністю до ізоморфізму”

Розглянемо приклад ізоморфних універсальних алгебр. Перша алгебра має носієм множину $\{0, 1, 2\}$. Бінарна операція $x \oplus y$ задана таблицею 1



ВРис. 1: Обертання трикутника

Друга алгебра має носієм множину обертань рівностороннього трикутника PQR (див. рис. 1)

навколо центра O — вершини переходять у вершини. Обертань 3. Перше лишає вершини на місці — позначимо його id , друге переводить вершину Q в вершину P — позначимо його α , і третє переводить вершину Q в вершину R — позначимо його β . Множення (композиція) обертань задана таблицею 2

Порівнюючи таблиці 1 та 2 бачимо, що вони відрізняються лише позначеннями елементів. Отже ці

$x \setminus y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

ВТабл. 1: Таблиця операції $\oplus$

$x \setminus y$	id	α	β
id	id	α	β
α	α	β	id
β	β	id	α

ВТабл. 2: Таблиця композиції $*$ обертань рівностороннього трикутника

дві алгебри ізоморфні. Ізоморфізмом є відображення

$$0 \mapsto \text{id}, \quad 1 \mapsto \alpha, \quad 2 \mapsto \beta.$$

Множина дійсних додатніх чисел $\mathbb{R}^+$ з операцією множення ізоморфна множині $\mathbb{R}$ всіх дійсних чисел з операцією додавання. Ізоморфізм $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ і обернений ізоморфізм $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ задаються функціями

$$f(a) = e^a \text{ для } a \in \mathbb{R}, \quad f^{-1}(b) = \ln b \text{ для } b \in \mathbb{R}^+.$$

3 Підалгебри

Розглянемо множину дійсних чисел з операцією додавання і множину натуральних чисел з операцією додавання. Сума двох натуральних чисел буде одна і та ж незалежно від того, в якій множині ми обчислюємо цю суму. В загальному випадку кажуть, що підмножина $B \subseteq A$ носія універсальної алгебри $\mathcal{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ замкнена відносно операції $f \in \Sigma$, коли для будь-яких елементів $a_1, a_2, \dots, a_n \in B$ також

$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \in B$. Так множина натуральних чисел замкнена відносно операцій додавання та множення, але не замкнена відносно операції віднімання.

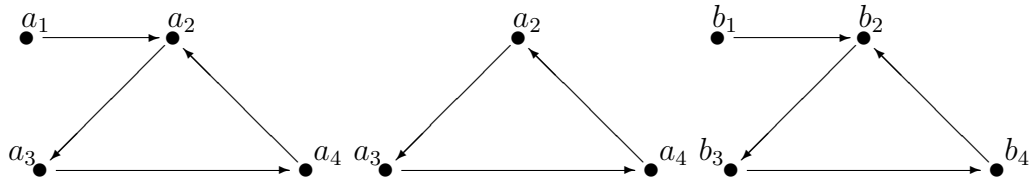
Якщо підмножина $B \subseteq A$ носія універсальної алгебри $\mathcal{A} = \langle A; \Sigma \rangle$ замкнена відносно всіх операцій із Σ , тоді цю підмножину разом з операціями із Σ (точніше, з їх обмеженнями на B) називають підалгеброю алгебри $\mathcal{A}$. Отже в підалгебрі $\mathcal{B} = \langle B; \Sigma \rangle$

1. носій B є підмножиною носія A ;
2. операції алгебри $\mathcal{B}$ мають ті ж назви, що і операції алгебри $\mathcal{A}$, але у них менша область визначення.

Нижче розглянемо кілька прикладів універсальних алгебр і наведемо приклади підалгебр.

4 Унари

Множина разом з однією унарною операцією — відображенням цієї множини в себе, називають унаром. На рис. 2, 3, 4 задані три унари. Унар $\mathcal{A}_1$ на рис. 3 є підунаром унара, що заданий на рис. 2. А унар $\mathcal{B}$, що заданий на рис. 4, ізоморфний унару $\mathcal{A}$, що заданий на рис. 2



ВРис. 2: Унар $\mathcal{A}$ з чотириелементним носієм. Дія відображення показана стрілочками

ВРис. 3: Унар $\mathcal{A}_1$ з триелементним носієм. Дія відображення показана стрілочками

ВРис. 4: Унар $\mathcal{B}$ з чотириелементним носієм. Дія відображення показана стрілочками

5 Напівгрупи

Множини разом з однією довільною бінарною операцією, так званий бін або магма, розглядають і досліджують. Але ці дослідження носять вузькоспеціальний характер. На бінах зупинятися не будемо. Якщо ж бінарна операція $*$ асоціативна, тобто виконується тотожність

$$(x * y) * z = x * (y * z), \quad (2)$$

то відповідна універсальна алгебра, з такою бінарною операцією, називається напівгрупою. Є багато змістовних, важливих прикладів напівгруп, вони активно досліджуються. Отже, напівгрупа, це універсальна алгебра $\mathcal{S} = \langle S; * \rangle$ з однією бунарною операцією (позначимо її $*$) такою, що для будь-яких $x, y, z \in S$ виконується рівність (2).

Напівгрупа може бути порожньою.

В напівгрупах $\mathcal{S} = \langle S; * \rangle$ розглядають особливі

елементи: лівий нуль, правий нуль, двосторонній нуль, ліву одиницю, праву одиницю, двосторонньою одиницю. Елемент $0_l \in S$ називається лівим нулем, якщо для будь-якого елемента $x \in S$ виконується рівність

$$0_l * x = 0_l.$$

Елемент $0_r \in S$ називається правим нулем, якщо для будь-якого елемента $x \in S$ виконується рівність

$$x * 0_r = 0_r.$$

Якщо елемент напівгрупи є в один і той же час і лівим нулем і правим нулем, то його називають двостороннім нулем, або просто нулем.

Подібним чином елемент $1_l \in S$ називається лівою одиницею, коли для будь-якого елемента $x \in S$ виконується рівність

$$1_l * x = x.$$

Елемент $1_r \in S$ називається правою одиницею, якщо для будь-якого елемента $x \in S$ виконується рівність

$$x * 1_r = x.$$

Якщо елемент напівгрупи є в один і той же час і лівою одиницею і правою одиницею, то його називають двосторонньою одиницею, або просто одиницею.

Чи не найважливішим прикладом напівгрупи є напівгрупа усіх відображень непорожньої множини в себе. В цій напівгрупі є двостороння одиниця — id ,

є ліві нулі, вони всі елементи множини переводять в один, односторонніх одиниць немає, правосторонніх нулів також немає. Якщо множини рівнопотужні, то напівгрупи усіх відображень цих множин в себе ізоморфні. Всі відображення, що переводять заданий елемент в себе, утворюють піднапівгрупу.

Прикладом напівгрупи з правими нулями є напівгрупа із множенням

$$x * y = y.$$

Напівгрупами є множина натуральних чисел з додаванням, множина натуральних чисел з множенням, множина натуральних чисел з операцією вибору меншого елемента.

6 Група

Групою називають універсальну алгебру з двома операціями — нульмісною і двомісною. Двомісна операція асоціативна, а нульмісна операція — виділений елемент, є нейтральним для цієї операції. Оскільки є нульмісна операція, то насій цієї алгебри не може бути порожнім — порожніх груп не буває.

Якщо операцію називають множенням, то нейтральний елемент називають одиницею, а саму групу називають мультиплікативною, записи тотожностей також називають мультиплікативними. Практика дозволяє не виписувати знак множення.

Аксіоми групи $\mathcal{G} = \langle G; \cdot \rangle$ в мультиплікативному записі такі:

$$\forall x, y, z \in G (xy)z = x(yz); \quad (3)$$

$$\exists 1 \in G \forall x \in G (1 \cdot x = x \cdot 1 = x); \quad (4)$$

$$\forall x \in G \exists y \in G (xy = yx = 1). \quad (5)$$

Ми уже говорили, що аксіома (3) — це аксіома асоціативності бінарної операції, а аксіома (4) — це аксіома існування одиниці. Аксіому (5) називають аксіомою існування оберненого елемента. Якщо $xy = yx = 1$, то елементи $x, y \in G$ називають взаємно оберненими, чи оберненими один до одного і пишуть

$$x = y^{-1}, \quad y = x^{-1}.$$

Якщо операцію називають додаванням, то нейтральний елемент називають нулем, а саму групу називають адитивною, записи тотожностей також називають адитивними.

Аксіоми групи $\mathcal{G} = \langle G; + \rangle$ в адитивному записі такі:

$$\forall x, y, z \in G ((x + y) + z = x + (y + z)); \quad (6)$$

$$\exists 0 \in G \forall x \in G (0 + x = x + 0 = x); \quad (7)$$

$$\forall x \in G \exists y \in G (x + y = y + x = 0). \quad (8)$$

Ми уже говорили, що аксіома (6) — це аксіома асоціативності додавання, а аксіома (7) — це аксіома існування нуля. Аксіому (8) називають аксіомою існування протилежного елемента. Якщо $x + y = y + x = 0$,

то елементи $x, y \in G$ називають взаємно протилежними, чи протилежними один до одного, і пишуть

$$x = -y, \quad y = -x.$$

Оскільки нейтральний елемент групи повністю визначається бінарною операцією, то розмовна практика дозволяє казати, що група має єдину операцію — бінарну.

Знову ж, чи не найважливішим прикладом групи є група бієкцій непорожньої множини в себе. Одиницею в ній є тотожне відображення id .

Групами є група цілих чисел з операцією додавання, група дійсних чисел з операцією додавання, група дійсних чисел без нуля з операцією множення, група обертань кола з операцією композиції обертань. Важливим прикладом є група бієкцій скінченної множини в себе — так звана група підстановок.

7 Кільце

Кільцем називають універсальну алгебру з трьох операціями — двома бінарними (їх називають додаванням та множенням) і однією нульовою (виділений елемент — нуль). І додавання і множення асоціативні, разом з додаванням носій утворює групу, між собою додавання та множення зв'язані дистрибутивним законом. Символьно, кільцем $\mathcal{R} = \langle R; +, \cdot, 0 \rangle$

називають множину R з двома бінарними операціями $\cdot, +$ і виділеним елементом 0 , що задовольняють умови

$$\forall x, y, z \in G \quad ((x + y) + z = x + (y + z)); \quad (9)$$

$$\exists 0 \in G \forall x \in G \quad (0 + x = x + 0 = x); \quad (10)$$

$$\forall x \in G \exists y \in G \quad (x + y = y + x = 0); \quad (11)$$

$$\forall x, y, z \in G \quad ((xy)z = x(yz)); \quad (12)$$

$$\forall x, y, z \in G \quad ((x + y)z = xy + xz); \quad (13)$$

$$\forall x, y, z \in G \quad (x(y + z) = xy + xz). \quad (14)$$

Аксіоми (13), (14) називають лівим і правим розподільним законом, або лівим і правим дистрибутивним законом.

Прикладом кільця є кільце цілих чисел з операціями додавання, множення та виділеним елементом 0 .

Поле. Поле має чотири операції — дві бінарні (додавання та множення) і дві нульарні (нуль та одиниця). Носій разом з додаванням множенням та нулем утворює кільце. Ненульові елементи разом з множенням утворюють мультиплікативну групу. В полі обов'язково одиниця відрізняється від нуля. Тому в полі є два різні елементи — нуль та один. Отже ні порожнього ні одноелементного поля не існує. Двоелементне поле існує, його позначають $\mathbb{Z}_2$ або $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Прикладами полів є поле раціональних чисел, поле дійсних чисел.

Нехай маємо поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Декартів квадрат

$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$$

перетворимо у поле ввівши відповідні операції. Визначимо додавання і множення на декартовому квадраті правилом

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Виберемо нуль $(0, 0)$ та одиницю $(1, 0)$. Прямою перевіркою переконуємося, що утворена множина $\mathbb{R}^2$ разом з чотирма введеними операціями є полем. Це поле називають полем комплексних чисел. Його позначають $\mathbb{C}$. полі $\mathbb{C}$ є підполе $\{(a, 0) | a \in \mathbb{R}\}$, , що канонічно ізоморфне полю дійсних чисел — відображення $(a, 0) \mapsto a$ є потрібним канонічним ізоморфізмом.

Нехай маємо поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Множину

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

перетворимо у поле ввівши відповідні операції.

Визначимо додавання і множення на введений множині таблиць (матриць) правилом

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -b - d & a + c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$$

Виберемо нуль $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ та одиницю $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Прямою перевіркою переконуємося, що утворена множина разом з чотирма введеними операціями є полем. Це поле називають полем комплексних чисел. Його позначають $\mathbb{C}$. В полі $\mathbb{C}$ є підполе

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\},$$

що канонічно ізоморфне полю дійсних чисел — відображення

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mapsto a$$

є потрібним канонічним ізоморфізмом.

Нехай маємо поле $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Множину

$$\{a + bi \mid a, b \in R\}$$

(i це символ) перетворимо у поле ввівши відповідні операції. Визначимо додавання і множення введених виразів правилом

$$a+bi+c+di = a+c+(b+d)i, \quad (a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Виберемо нуль $0+0i$ та одиницю $1+0i$. Прямою перевіркою переконуємося, що утворена множина разом з чотирма введеними операціями є полем. Це поле називають полем комплексних чисел. Його позначають $\mathbb{C}$. В полі $\mathbb{C}$ є підполе $\{a + 0i \mid a \in \mathbb{R}\}$, що канонічно ізоморфне полю дійсних чисел — відображення $a + 0i \mapsto a$ є потрібним канонічним ізоморфізмом.

Ми ввели три різні поля, а назвали їх однаково — поле комплексних чисел, тому що всі ці поля ізоморфні, а поля розглядаються з точністю до ізоморфізму.

ВПоказчик

аксіома	підстановок, 11
асоціативності додавання, 11	ізоморфізм, 3
існування нуля, 11	канонічний, 15
існування протилежного, 11	кільце
	цілих чисел, 12
	многочленів, 12
алгебра	міркування
універсальна, 1	з точністю до ізоморфізму, 3
бін, 7	множення, 9
додавання, 9	мономорфізм, 3
елемент	морфізми
нейтральний, 9	універсальних алгебр, 2
протилежний, 11	напігрупа
елементи	порожня, 7
взаємно протилежні, 11	напівгрупа, 7
епіморфізм, 3	натуральних чисел з додаванням, 9
група, 9	натуральних чисел з множенням, 9
адитивна, 9	носій
бієкцій множини, 9	алгебричної системи, 1
цілих чисел, 11	універсальної алгебри, 1
мультіплікативна, 9	
ненульових дійсних чисел, 11	
обертань кола, 11	

нуль	раціональних чисел, 13
двосторонній, 8	сигнатура
групи, 9	алгебраїчної системи, 1
лівий, 8	універсальної алгебри,
правий, 8	1
обмеження	сигнатури
операції, 6	рівні, 2
одиниця	система алгебрична, 1
двостороння, 8	унар, 6
групи, 9	унари
ліва, 8	ізоморфні, 6
права, 8	відображення
операція	комутує з операцією, 3
бінарна асоціативна, 7	перестановне з операцією,
нульмісна, 12	3
підалгебра, 6	тотожне, 11
підмножина	узгоджене з операцією,
замкнена відносно опе-	3
рації, 6	закон
піднапівгрупа, 8	лівий дистрибутивний,
підполе	12
дійсних чисел, 15	лівий розподільний, 12
підунар, 6	правий дистрибутивний,
поле	12
дійсних чисел, 13	правий розподільний,
двоелементне, 13	12
комплексних чисел, 15	запис

адитивний, 9

мультиплікативний, 9