

Дії з матрицями

Курінний Г.Ч. Невмержицька О.М. Шугайло О.О.

Травень — 2015

1 Дії з матрицями.

Нагадаємо, що матриця (над кільцем K) це прямокутна таблиця елементів із K . Матриці будемо позначати великими латинськими буквами, а їх елементи відповідними малими буквами з індексами - перший індекс вказує на номер рядка а другий - на номер стовпчика, в яких стоїть цей елемент.

Про матрицю, що має n рядків і m стовпчиків, кажуть що вона має розмір $n \times m$, або має порядок $n \times m$. Коли йде розмова про квадратну матрицю n -го порядку, то мають на увазі, що ця матриця має n рядків і n стовпців.

Матриці, що розглядаються нижче, мають елементи із певного асоціативного, комутативного кільця з одиницею K , — наприклад, із кільця цілих чисел $K = \mathbb{Z}$, або кільця дійсних многочленів $K = \mathbb{R}(x)$. Звичайно, замість словосполучення “елемент кільця” там, де не виникає небезпека плутанини, вживаємо слово “число”

На множині усіх матриць над кільцем K визначена одна унарна (або одномісна) операція — транспонування, унарні операції множення на елементи кільця K (їх стільки ж, скільки і елементів кільця), і дві часткові бінарні (або двомісні) операції — додавання та множення.

Будь-яку матрицю A можна помножити на елемент λ кільця K ,

$$\lambda A = B, \quad b_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Після множення матриці на число ми одержуємо матрицю такого ж самого розміру. Можна сказати, що при множенні матриці на число всі її елементи множаться на це число. Наведемо приклади

$$3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (x+1) \cdot \begin{pmatrix} -2 & x+1 \\ x^3 - x + 3 & 5x \\ -x^2 + 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2(x+1) & (x+1)^2 \\ (x^3 - x + 3)(x+1) & 5x(x+1) \\ (-x^2 + 1)(x+1) & 0 \end{pmatrix},$$

Будь-яку матрицю можна транспонувати:

$$A \mapsto A^T = B, \quad b_{ij} = a_{ji}.$$

Можна сказати, що рядками транспонованої матриці є стовпчики заданої матриці. Таким чином, коли

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = (-2 \ 5 \ 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & x+1 \\ x^3-x+3 & 5x \\ -x^2+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} -2 & x^3-x+1 & -x^2+1 \\ x+1 & 5x & 0 \end{pmatrix}$$

Сума двох матриць визначена тільки у випадку, коли розміри доданків збігаються.

$$A + B = C, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \dots & & & \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,n} + b_{2,n} \\ \dots & & & \\ a_{m,1} + b_{m,1} & a_{m,2} + b_{m,2} & \dots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Сума двох матриць має той же розмір, що і доданки.

Якщо кількість стовпчиків у матриці A (тобто довжина рядка) дорівнює кількості рядків у матриці B (тобто довжині стовпчика), тоді визначений добуток AB . Якщо кількість рядків правого множника і кількість стовпчиків лівого множника дорівнюють n , то

$$AB = C, \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

добутком AB буде матриця

$$\begin{pmatrix} -2 - 6 - 3 & 2 + 0 + 15 \\ +2 + 0 - 4 & -2 + 0 + 20 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} -11 & 17 \\ -2 & 18 \end{pmatrix}.$$

Добутком BA цих матриць буде

$$BA = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2 & -4 + 0 & -6 + 8 \\ -3 + 0 & -6 + 0 & -9 + 0 \\ -1 - 5 & -2 + 0 & -3 + 20 \end{pmatrix} == \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ -3 & -6 & -9 \\ -6 & -2 & 17 \end{pmatrix}$$

Якщо для двох матриць A, B виконується співвідношення

$$AB = BA, \quad (1)$$

то кажуть, що матриці A та B комутують. Якщо матриці комутують, то вони обов'язково квадратні одного розміру.

Справді, нехай для деяких матриць A, B виконується рівність (??), при цьому матриця A має n_1 рядок і m_1 стовпчик, а матриця B має n_2 рядків і m_2 стовпчиків. Щоб добуток AB існував, необхідно, щоб виконувалася рівність $m_1 = n_2$, при цьому матриця AB матиме n_1 рядок m_2 стовпчиків. Щоб добуток BA існував, необхідно, щоб виконувалася рівність $m_2 = n_1$, при цьому матриця BA матиме n_2 рядків m_1 стовпчик. Щоб матриці AB та BA мали однакові розміри, потрібно, щоб виконувалися рівності $n_2 = n_1, m_2 = m_1$. Отже при виконанні умови (??) будуть виконуватися рівності

$$n_1 = n_2 = m_1 = m_2.$$

Теорема 1.1 (Теорема про кільце матриць) *Квадратні матриці одного розміру над комутативним кільцем з одиницею утворюють кільце. Якщо матриці мають більше одного рядка чи стовпчика, то це кільце некомутативне.*

Доведення. Потрібно доводити асоціативність додавання, асоціативність множення, наявність нуля, наявність протилежної матриці, ліву та праву дистрибутивність. При доведенні кожної властивості використовуємо відповідну властивість елементів матриці, які належать кільцю, в якому всі властивості виконуються.

Доведемо асоціативність множення квадратних матриць розміру $n \times n$ над K . Беремо три матриці A, B, C і доводимо, що $(AB)C = A(BC)$. Позначаємо $AB = D, BC = F, DC = U, AF = V$. В цих позначеннях потрібно довести, що $u_{ij} = v_{ij}$. Для доведення виписуємо потрібні елементи, потім перетворюємо один у другий за допомогою властивостей елементів матриць.

$$d_{iq} = \sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pq}, \quad u_{ij} = \sum_{q=1}^n d_{iq}c_{qj} = \sum_{q=1}^n \left(\sum_{p=1}^n a_{ip}b_{pq} \right) c_{qj} = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{ip}b_{pq}c_{qj}.$$

$$f_{pj} = \sum_{q=1}^n b_{pq}c_{qj}, \quad v_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip}f_{pj} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \left(\sum_{q=1}^n b_{pq}c_{qj} \right) = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a_{ip}b_{pq}c_{qj}.$$

Подібним чином перевіряється решта властивостей операцій. Кінець доведення теореми.

■

Теорема 1.2 (Теорема про зв'язок між транспонуванням та множенням матриць) *Якщо A, B дві такі матриці, що добуток AB існує, то добуток $B^T A^T$ також існує і*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Доведення. Нехай матриця A має n рядків і m стовпчиків, а матриця B має k рядків і l стовпчиків. Щоб добуток AB існував, порівно щоб виконувалася рівність $m = k$. Матриця A^T має m рядків і n , а матриця B^T має l рядків і k стовпчиків. Для існування $B^T A^T$ також необхідно і достатньо, щоб виконувалася рівність $m = k$. Отже, коли одна з двох матриць AB , $B^T A^T$ існує, тоді і друга матриця також існує.

Нехай матриця A має n рядків і m стовпчиків, а матриця B має m рядків і k стовпчиків. Позначимо

$$AB = C, \quad (AB)^T = C^T = U, \quad A^T = D, \quad B^T = F, \quad B^T A^T = FD = V.$$

Потрібно довести, що для будь-яких $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ виконується рівність

$$u_{ij} = v_{ij}.$$

За означеннями

$$u_{ij} = c_{ji} = \sum_{p=1}^m a_{jp} b_{pi} = \sum_{p=1}^m f_{ip} d_{pj} = v_{ij}.$$

Потрібна рівність доведена.

■

Теорема 1.3 Для будь-яких двох матриць A, B однакового розміру

$$(A + B)^T = A^T + B^T.$$

Доведення. Для доведення досить виписати відповідні елементи матриць $A^T + B^T$ і $(A + B)^T$.

■