

Координатизація площини да допомогою гомотетій

Курінний Г.Ч, Невмержицька О.М, Шугайло О.О.

Травень 2015 року

Зміст

1 Колінеації, рухи та гомотетії афінної площини.	1
1.1 Гомотетії та їх властивості	1
1.2 Властивості групи паралельних перенесень.	8
1.3 Побудова числового поля.	10
1.4 Введення координат.	16
1.5 Теорема Дезарга.	18

1 Колінеації, рухи та гомотетії афінної площини.

1.1 Гомотетії та їх властивості

Досвід математичної діяльності показав, що дослідження симетрій геометричних утворень приводить до досить глибоких результатів, що суттєво прояснюють будову цих утворень. Симетріями площини є колінеації, серед яких виявилися корисними рухи і гомотетії. Рухи переводять трикутник у конгруентний (рівний) йому, а гомотетії переводять трикутник у подібний йому — це у тій площині, в якій є відрізки і є довжини відрізків. В афінній площині немає відрізків (немає тернарного відношення “точка A лежать між точками B і C ”) і немає рівних чи подібних трикутників, оскільки з площиною не асоціюється жодним чином числове поле. Але рухи і гомотетії маєть властивості, що формулюються без використання рівності відрізків чи рівності кутів. От ці властивості можна взяти визначальними і узагальнити поняття руху та гомотетії так, що їх можна використовувати в афінній площині.

В шкільній практиці гомотетії мають нерухому точку, а спільної назви для паралельних перенесень (без нерухомих точок) і перетворень подібності з нерухомою точкою не використовують. Ми будемо згідно з міжнародною практикою перетворення подібності з нерухомою точкою називати дилатаціями (розширеннями), а перетворення подібності без нерухомої точки будемо називати паралель-

ними перенесеннями. Спільною назвою для дилатацій і паралельних перенесень буде гомотетія.

Нижче будемо розглядати колінеації площини, тобто колінеації із заданої площини в себе

Означення 1.1 Нехай є дві площини π_1, π_2 з множинами точок $Point_1, Point_2$ і множинами прямих $Line_1, Line_2$ відповідно. Відображення

$$f : Point_1 \longrightarrow Point_2$$

називається колінеацією із площини π_1 в площину π_2 , якщо для будь-яких трьох колінеарних точок (всі вони належать певній прямій $l_1 \in Line_1$) їх образи $f(A), f(B), f(C)$ знову колінеарні (належать певній прямій $l_2 \in Line_2$).

Колінеація називається ізоморфізмом, якщо вона бієктивна і обернене відображення знову є колінеацією.

Колінеація називається виродженою, якщо вона всі точки прообраза переводить в одну й ту ж точку образа.

Теорема 1.1 (Необхідна і достатня умова ізоморфності площин) Колінеація є ізоморфізмом тоді і тільки тоді, коли вона бієктивна.

Звернемо увагу на те, що наведена теорема не настільки очевидна, як може видатися. Зокрема, її неможливо довести без використання єдиності прямої, яка паралельна даній прямій і проходить через точку поза межами цієї прямої.

Наведемо приклад бієктивної колінеації, для якої обернене відображення не є колінеацією. В цьому прикладі розглядаються дві площини, в яких точкам є пари (x, y) , $x, y \in GF(3)$ чисел x, y із поля $GF(3)$ класів лишків за модулем 3 — цих точок 9. В першій площині π_1 прямими є двоелементні підмножини множини

$$GF(3)^2 = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}.$$

В другій площині π_2 прямими є триелементні підмножини множини $GF(3)^2$, що складаються із розв'язків рівнянь вигляду

$$ax + by + c = 0, \quad a, b, c \in GF(3), \quad (a, b) \neq (0, 0).$$

В першій площині порушується аксіома єдиності прямої, що паралельна даній і проходить через задану точку. Тому перша площина не є афінною. А друга площина афінна. Будь-яка бієкція із множини точок $GF(3)^2$ першої площини в множину $GF(3)^2$ точок другої площини буде колінеацією, а колінеацій із другої площини в першу не існує — причиною є відсутність трьох різних колінеарних точок в першій площині.

Теорема 1.2 (Про те, що кожна бієктивна колінеація є ізоморфізмом)
 Кожна бієктивна колінеація афінної площини в іншу афінну площину є ізоморфізмом,

Доведення. Доведення теореми проводимо методом від протилежного. Отже, припускаємо що є дві афінні площини π_1, π_2 з множинами точок відповідно $\text{Point}_1, \text{Point}_2$, і є бієктивна колінеація $f : \text{Point}_1 \rightarrow \text{Point}_2$, така, що обернене відображення не є колінеацією, тобто для деяких колінеарних точок $f(A), f(B), f(C) \in \text{Point}_2$ їх прообрази A, B, C не колінеарні (див. рис. 1.1).

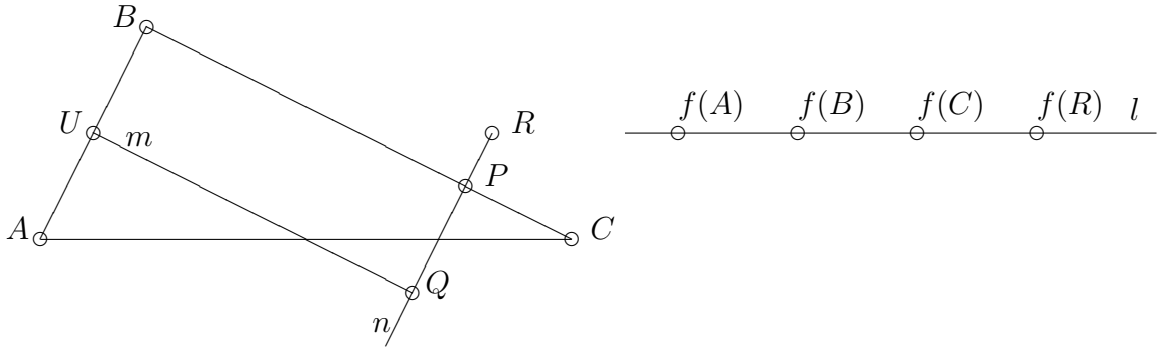


Рис. 1: Якщо образи трьох неколінеарних точок A, B, C лежать на одній прямій l , то образ будь-якої точки R лежить на цій прямій

Потрібно довести, що припущення про бієктивність колінеації f приводить до суперечності.

Спочатку розглянемо випадок, коли площина π_1 має на деякій прямій рівно дві точки. Тоді будемо вважати зрозумілим, що і площина π_1 і площина π_2 мають всього чотири точки і шість прямих. Теорема в такому випадку виконується.

Переходимо до випадку, коли прямі площини π_1 мають на кожній прямій більше двох точок. На прямій $A + B$ вибираємо точку $U \neq A, U \neq B$. Із означення колінеації одержуємо, що образи всіх точок прямої $A + B$ (включаючи U) і образи всіх точок прямої $B + C$ лежать на l .

Через точку U проводимо пряму m паралельно прямій $B + C$. Пряма m не паралельна прямій $A + C$, отже прямі m і $A + C$ перетинаються. Ми маємо на прямій m дві точки, чий образ лежить на прямій l . Із означення колінеації бачимо, що образи всіх точок прямої m лежать на прямій l .

Вибираємо довільну точку R площини π_1 . Через точку R проводимо пряму n паралельно прямій $A + B$. Ця пряма перетне пряму $B + C$ і пряму m в двох різних точках P, Q , чий образ лежить на l . Тому образ $f(R)$ довільної точки R також лежить на l , що суперечить наявності трьох неколінеарних точок площини π_2 і бієктивності f

■

Нижче розглядаємо колінеації із площини π в себе.

Означення 1.2 Нехай *Point* множина точок площини π . Колінеація

$$f : \text{Point} \longrightarrow \text{Point}$$

називається

- гомотетією, якщо для будь-яких двох різних точок A, B і прямих l_1, l_2

$$(l_1 \parallel l_2, \quad A, B \in l_1, \quad f(A) \in l_2) \Rightarrow f(B) \in l_2;$$

- дилатацією, якщо колінеація є гомотетією і є нерухома точка, тобто така точка A , що $f(A) = A$;
- паралельним перенесенням, якщо колінеація є гомотетією і немає нерухомих точок.
- Тотожна колінеація id , тобто така колінеація, що $id(A) = A$ для будь-якої точки $A \in \text{Point}$ є, за означенням, і рухом, і дилатацією і паралельним перенесенням.
- дилатацію, що переводить всі точки площини в одну назвемо виродженою. Не вироджена дилатація називається невиродженою.

Прикладом колінеації декартової площини над полем k є так звані афінні перетворення $(x, y) \rightarrow (x', y')$

$$\begin{aligned}x' &= a_1x + b_1y + c_1, \\y' &= a_2x + b_2y + c_2,\end{aligned}$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in k$. Якщо

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то це афінне перетворення є ізоморфізмом.

Афінне перетворення

$$\begin{aligned}x' &= ax + b_1, \\y' &= ax + b_2,\end{aligned}$$

є гомотетією; якщо $a = 0$, то гомотетія вироджена; якщо $a = 1$, то гомотетія буде паралельним перенесенням; якщо $a \notin \{0, 1\}$, то гомотетія буде дилатацією.

Але в декартових площинах існують і інші колінеації — крім афінних перетворень. Так колінеацією буде перетворення $(x, y) \rightarrow (x', y')$

$$\begin{aligned}x' &= a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1, \\y' &= a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2,\end{aligned}$$

де $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in k$, а $x \rightarrow \bar{x}$ — автоморфізм поля k .

Пряму, що проходить через дві різні точки A, B позначаємо $A + B$.

Теорема 1.3 (Про визначеність гомотетії образами двох точок) *Нехай A, B дві різні точки площини π і f, g — гомотетії цієї площини. Якщо*

$$f(A) = g(A), \quad f(B) = g(B), \quad (1)$$

то для будь-якої точки C площини π

$$f(C) = g(C). \quad (2)$$

Доведення. Припукаємо, що виконуються рівності (1) і доводимо (2). Ми можемо вважати, що точка C не лежить на прямій $A + B$ і, відповідно, $A + C, B + C$ не паралельні. Якщо ж $C \in A + B$, то спочатку доводимо теорему для всіх точок $D \notin A + B$, а потім в припущенні змінюємо A на D так, щоб $C \notin D + B$ і цим завершуємо доведення.

У випадку, коли прямі $A + C, B + C$ не паралельні, точка $f(C)$ лежить на перетині двох непаралельних прямих — одна проходить через $f(A)$ паралельно $A + C$, а друга проходить через $f(B)$ паралельно $B + C$ (див. рис. 2).

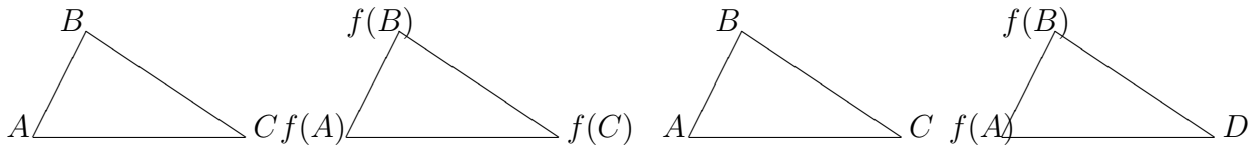


Рис. 2: Образи двох точок однозначно визначають образ третьої

Рис. 3: Образи двох точок однозначно визначають прообраз будь-якої точки

■

Теорема 1.4 *Якщо $f(A) = f(B)$ для деяких двох різних точок A, B площини π і гомотетії f цієї площини, то для будь-якої точки X цієї площини $f(X) = f(A)$ і гомотетія вироджена. Якщо $f(A) \neq f(B)$ для деяких двох різних точок A, B , то гомотетія f є ізоморфізмом.*

Доведення. Вироджена гомотетія, що переводить всі точки в точку $U = f(A) = f(B)$ переводить також наші виділені дві точки A, B в U . За попередньою теоремою гомотетія однозначно визначається образами двох різних точок. Звідси випливає, що задана гомотетія є виродженою.

Оскільки неін'єктивність зразу ж призводить до виродженості, то із сказаного вище випливає, що невироджена гомотетія ін'єктивна.

Доведемо сюр'єктивність невиродженої гомотетії.

Образи $f(A), f(B), f(C)$ трьох неколінарних точок A, B, C є неколінеарними точками, оскільки

$$f(A) + f(B) \parallel A + B, \quad f(A) + f(C) \parallel A + C, \quad f(C) + f(B) \parallel C + B.$$

Звідси випливає, що для заданої точки D можна вказати дві точки A, B такі, що $f(A), f(B), D$ неколінеарні. Точка C , образом якої є точка D , знаходиться як точка перетину двох непаралельних прямих l_1, l_2

$$A \in l_1, l_1 \parallel f(A) + D, \quad B \in l_2, l_2 \parallel f(B) + D.$$

(див. рис. 3). Сюр'єктивність доведена.

Неколінеарність прообразів приводить до неколінеарності образів, отже колінеарність образів приводить до колінеарності прообразів. Звідси випливає, що обернене відображення до гомотетії є колінеацією. Симетричність відношення паралельності приводить до того, що обернене відображення до гомотетії є гомотетією.

■

Наслідком теореми 1.4 є те, що коли гомотетія має дві нерухомі точки, тоді це тотожна гомотетія.

Означення 1.3 Якщо P точка площини π і f — гомотетія цієї площини, $f(P) \neq P$, то слідом точки P при гомотетії f називають пряму

$$P + f(P).$$

Теорема 1.5 Нехай π — площина, f — невироджена гомотетія цієї площини, P, Q — дві точки, $P \neq f(P)$, $Q \in P + f(P)$. Тоді $f(Q) \in P + f(P)$.

Доведення. Якщо $Q = P$, $Q = f(Q)$, то $Q \in P + f(P)$ за умовою. Якщо $Q \neq P$, $Q \neq f(Q)$, то прямі $P + Q = P + f(P)$, $f(P) + f(Q)$ паралельні і мають спільну точку $f(P)$, отже співпадають, $f(Q) \in P + f(P)$.

■

Наслідком теореми 1.5 є те, що точка перетину двох непаралельних слідів є нерухомою точкою гомотетії.

Відмітимо ще декілька наслідків теореми 1.5.

Якщо гомотетія має єдину нерухому точку, то пряма є слідом тоді і тільки тоді, коли ця пряма проходить через нерухому точку.

Якщо гомотетія не має нерухомої точки, то всі сліди належать одному пучку паралельних прямих.

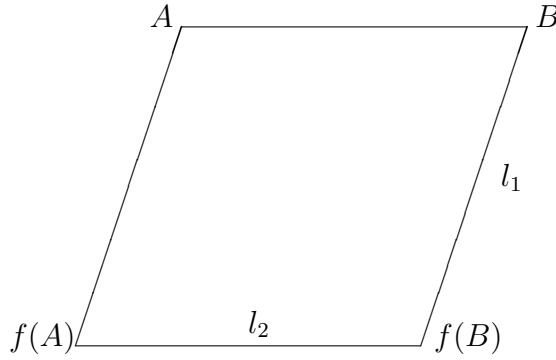


Рис. 4: Образ точки B однозначно визначений образом точки A .

Теорема 1.6 *Паралельне перенесення однозначно визначається образом однієї точки.*

Доведення.

Нехай f — не тотожне паралельне перенесення, A — точка, і $A + f(A)$ — слід точки A . Потрібно довести, що образ будь-якої точки однозначно визначений. Доведення розбивається на дві частини — в першій частині розглядаємо точку $B \notin A + f(A)$, а в другій розглядаємо точки $C \in A + f(A)$.

Якщо $B \notin A + f(A)$, то $f(B)$ знаходиться на перетині двох непаралельних прямих l_1, l_2 : l_1 проходить через B паралельно $A + f(A)$, а l_2 проходить через $f(A)$ паралельно $A + B$,

Якщо точка C лежить на прямій $A + f(A)$, то ми можемо (з огляду на вже доведене) замінити точку A на певну точку B так, щоб виконувалась умова $C \notin B + f(B)$ (див. рис. 1.1).

■

Теорема 1.7 *Невироджені гомотетії разом з операцією композиції відображень утворюють групу, а паралельні перенесення утворюють підгрупу в цій групі.*

Доведення. Асоціативність операції композиції відображень перевіряти не потрібно — вважаємо це уже відомим. Нейтральний елемент — тотожне відображення є як серед гомотетій, так і серед паралельних перенесень. Наявність обернених гомотетій та паралельних перенесень гарантується теоремою 1.4.

Перевіримо замкненість підгрупи паралельних перенесень відносно операції множення.

Припустимо, що f, g — два паралельні перенесення. Потрібно перевірити, що або $f \cdot g$ тотожна колінеація, або $f \cdot g$ не має нерухомих точок. Справді, якщо для деякої точки A виконується рівність

$$(f \cdot g)(A) = A,$$

то скористаємося тим, що паралельне перенесення визначається образом однієї точки (теорема 1.6), і з того, що

$$f(g(A)) = A, \quad g(A) = f^{-1}(A),$$

робимо висновок, що $g = f^{-1}$

■

1.2 Властивості групи паралельних перенесень.

Далі групу гомотетій будемо позначати D , а групу паралельних перенесень будемо позначати T .

Означення 1.4 *Напрямок нетотожного паралельного перенесення це пучок паралельних прямих, якому належать сліди точок.*

Теорема 1.8 *Якщо α — гомотетія і f — не тотожне паралельне перенесення, то гомотетія $g = \alpha f \alpha^{-1}$ є паралельним перенесенням, що має той же напрямок, що і f .*

Доведення. Припущення, що $g = \alpha f \alpha^{-1}$ має нерухому точку A приводить до суперечності — з одного боку нетотожне паралельне перенесення f не має нерухомої точки, а з другого

$$g(A) = \alpha f \alpha^{-1}(A) = A \Rightarrow f(\alpha^{-1}(A)) = \alpha^{-1}(A).$$

Отже $g = \alpha f \alpha^{-1}$ є паралельним перенесенням.

Нехай A довільна точка і $B = \alpha^{-1}(A)$. Тоді пряма $B + f(B)$ є слідом точки B для паралельного перенесення f . Оскільки гомотетія переводить точки прямої в точки паралельної прямої, то

$$B + f(B) \parallel \alpha(B) + \alpha(f(B)) = A + (\alpha f \alpha^{-1})(A).$$

Із того, що слід точки B для паралельного перенесення f паралельний сліду точки A для паралельного перенесення $\alpha f \alpha^{-1}$, випливає, що ці два паралельні перенесення — f і $\alpha f \alpha^{-1}$ мають один і той же напрямок.

Теорема доведена.

■

Теорема 1.9 *Паралельні перенесення, що мають заданий напрямок, разом з тотожним паралельним перенесенням, утворюють інваріантну підгрупу (нормальний дільник) групи паралельних перенесень.*

Доведення. Нехай f, g — два паралельні перенесення з одним і тим же напрямком. Це означає, що сліди кожної точки для цих паралельних перенесень збігаються. Отже для заданої точки A

$$A + f(A) = f(A) + (gf)(A) = A + gf(A), \quad A + f(A) = f^{-1}(A) + A,$$

що доводить замкненість множини паралельних перенесень із заданим напрямком відносно множення і знаходження оберненого.

Нагадаємо, що підгрупа T групи D називається інваріантною, або нормальним дільником, коли для будь-яких $f \in T, \alpha \in D$ можна стверджувати, що $\alpha \cdot f \cdot f^{-1} \in T$. А ця властивість впливає із теореми 1.8.

Теорема доведена. ■

Приклад площини, в якій група паралельних перенесень не комутативна, невідомий.

Теорема 1.10 *Якщо в групі T паралельних перенесень існують два паралельні перенесення з різними напрямками, то група T комутативна.*

Доведення. Вибираємо два нетотожні паралельні перенесення f, g і доводимо рівність

$$fg = gf. \quad (3)$$

Доведення розбиваємо на дві частини — в першій частині ми вважаємо, що f, g мають різні напрямки, а в другому — однакові.

Отже припускаємо, що паралельні перенесення f, g мають два різні напрямки. Розглядаємо добуток паралельних перенесень $h = f \cdot g \cdot f^{-1} \cdot g^{-1}$ і розставляємо в ньому дужки двома способами:

$$h = h_1 = (f \cdot g \cdot f^{-1}) \cdot g^{-1}, \quad h = h_2 = f \cdot (g \cdot f^{-1} \cdot g^{-1}).$$

Використовуючи теореми 1.8, 1.9 ми можемо стверджувати, що паралельні перенесення $f \cdot g \cdot f^{-1}, g^{-1}$ отже і h_1 мають той же напрям, що і g , а паралельні перенесення $g \cdot f^{-1} \cdot g^{-1}, f$, отже і h_2 мають той же напрям, що і f . Оскільки нетотожне паралельне перенесення не може мати два різні сліди, то h є тотожним відображенням — $h = \text{id}$.

Рівності

$$f \cdot g \cdot (f^{-1} \cdot g^{-1}) = \text{id}, \quad f \cdot g \cdot (g^{-1} \cdot f^{-1}) = \text{id}$$

показують, що елемент $f \cdot g$ в групі T має два обернені — $f^{-1} \cdot g^{-1}$ і $g^{-1} \cdot f^{-1}$. Елемент групи може мати лише один обернений. Тому

$$f^{-1} \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot f^{-1}.$$

Знаходячи обернені до лівої і правої частини одержаної рівності переконуємося в правильності (3).

Далі розглядаємо другу частину доведення, — випадок, коли f і g мають один і той же напрямок. Оскільки існують два паралельні перенесення з різними напрямками, то можна знайти паралельне перенесення h з напрямком, що відрізняється від напрямків f і g . Тоді за доведеним

$$fh = hf, \quad gh = hg, \quad h \cdot (fg) = (fg) \cdot h.$$

Паралельне перенесення fh не може мати той же напрям, що і f чи g — в протилежному випадку h і f мали б однаковий напрям. Тому також

$$(fh)g = g(fh), \quad (gh)f = f(gh).$$

Звідси випливає, що

$$(fg)h = f(gh) = (gh)f = g(hf) = g(fh) = (gf)h.$$

Домноживши рівність $(fg)h = (gf)h$ справа на h^{-1} одержуємо 3.

Терема доведена. ■

1.3 Побудова числового поля.

Далі будемо цікавитися питанням, за яких умов площина ізоморфна декартовій площині над деяким (можливо, некомутативним) полем.

Наступна аксіома виконується в декартовій площині.

Аксіома 6-1. Для будь-яких точок A, B існує паралельне перенесення (позначимо його f_{PQ}), яке переводить точку P в точку Q .

Далі будемо розглядати нові відображення

$$\alpha : T \rightarrow T, \quad f \xrightarrow{\alpha} f^\alpha, \tag{4}$$

які будемо називати ендоморфізмами, що зберігають напрямки.

Означення 1.5 Відображення (4) називається ендоморфізмом, що зберігає напрямки, якщо воно є гомоморфізмом, тобто узгоджене з операціями в групі T :

$$id^\alpha = id, \quad f \in T \Rightarrow (f^{-1})^\alpha = (f^\alpha)^{-1}, \quad f, g \in T \Rightarrow (fg)^\alpha = f^\alpha g^\alpha$$

і якщо $f, f^\alpha \neq id$, то напрямки цих паралельних перенесень f, f^α збігаються.

Відмітимо, що відображення $f \xrightarrow{\alpha} id$ є гомоморфізмом, який зберігає напрямки - позначимо його 0. І відображення $f \xrightarrow{\alpha} f$ є гомоморфізмом, що зберігає напрямки - позначимо його 1.

Далі вважаємо, що в площині виконується аксіома 6-1, відповідно, є паралельні перенесення з різними напрямками, і група T комутативна. Це дозволяє стверджувати, що відображення $f \xrightarrow{\alpha} f^{-1}$ є гомоморфізмом, що зберігає напрямки - позначимо його -1 .

Ще один ендоморфізм, що зберігає напрямки, задає елемент $\alpha \in D$:

$$f^\alpha = \alpha \cdot f \cdot \alpha^{-1}. \quad (5)$$

Відома наступна теорема

Теорема 1.11 *Ендоморфізми комутативної групи утворюють кільце з одиницею.*

Доведення.

Відтворимо ключові моменти доведення.

Нехай G — комутативна група з операцією додавання (адитивна абелева група) і k — множина її ендоморфізмів. Введемо на k операції додавання та множення наступни чином: для $\alpha, \beta \in k$, $x \in G$

$$(\alpha + \beta)(x) = \alpha(x) + \beta(x), \quad (\alpha \cdot \beta)(x) = \alpha(\beta(x)). \quad (6)$$

Формули (6) дають коректно визначені додавання та множення ендоморфізмів, і ці операції задовольняють аксіоми кільця, тобто

додавання та множення ендоморфізмів асоціативні:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in k \quad (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma), \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in k \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma);$$

додавання комутативне:

$$\forall \alpha, \beta \in k \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha;$$

є нейтральний елемент по додаванню - нуль 0:

$$\exists 0 \in k \quad \forall \alpha \in k \quad 0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha;$$

є протилежний елемент по додаванню:

$$\forall \alpha \in k \quad \exists \beta \in k \quad \alpha + \beta = \beta + \alpha = 0;$$

є нейтральний елемент по множенню — одиниця 1:

$$\exists 1 \in k \quad \forall \alpha \in k \quad 1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha;$$

між собою додавання та множення зв'язані двома дистрибутивними законами — лівим:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in k \quad \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, \quad (7)$$

та правим:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in k \quad (\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Із усіх вказаних властивостей перевіримо лише дві — коректність визначення додавання ендоморфізмів та лівий дистрибутивний закони. Решта властивостей перевіряються подіюним чином.

Нехай $\alpha, \beta \in k$ і $x, y \in G$. Потрібно перевірити, що $\alpha + \beta \in \text{ендоморфізм}$, тобто $(\alpha + \beta)(0) = 0$, $(\alpha + \beta)(-x) = -(\alpha\beta)(x)$ і

$$(\alpha + \beta)(x + y) = (\alpha + \beta)(x) + (\alpha + \beta)(y). \quad (8)$$

Із трьох властивостей ендоморфізму перевіримо лише (8).

Дійсно,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x + y) &\stackrel{1}{=} \alpha(x + y) + \beta(x + y) \stackrel{2}{=} \alpha(x) + \beta(x) + \alpha(y) + \beta(y) \stackrel{3}{=} \\ &\alpha(x) + \alpha(y) + \beta(x) + \beta(y) \stackrel{4}{=} \alpha(x + y) + \beta(x + y). \end{aligned} \quad (9)$$

В (9) (1) і (3) виконуються за означенням суми ендоморфізмів; (2) виконується за означенням ендоморфізма, а (3) виконується тому, що група G комутативна. Перевірка (8) завершена.

Переходимо до перевірки лівого дистрибутивного закону (7). Для $\alpha, \beta \in k$ і $x \in G$ використовуючи означення суми та добутку гомоморфізмів маємо

$$\alpha(\beta + \gamma)(x) = \alpha(\beta(x) + \gamma(x)) = \alpha(\beta(x)) + \alpha(\gamma(x)) = (\alpha\beta)(x) + (\alpha\gamma)(x).$$

Перевірка (7) завершена

■

Теорема 1.12 *Ендоморфізми групи T паралельних перенесень, що зберігають напрямки, утворюють підкільце кільця всіх ендоморфізмів цієї групи.*

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що для будь-якого паралельного перенесення $f \in T$ і для будь-яких ендоморфізмів α, β , які зберігають напрямки,

паралельне перенесення $f^{\alpha\beta}$ має той же напрямок, що і f^α , а f^α має той же напрямок, що і f — отже $f^{\alpha\beta}$ має той же напрямок, що і f і ендоморфізм $\alpha\beta$ зберігає напрямки;

паралельне перенесення $f^{\alpha+\beta} = f^\alpha \cdot f^\beta$ має той же напрямок, що і f і ендоморфізм $\alpha + \beta$ зберігає напрямки;

паралельне перенесення $f^{-\alpha} = (f^{-1})^\alpha$ має той же напрямок, що і f і ендоморфізм $-\alpha$ зберігає сліди;

Цим завершується перевірка того, що всі ендоморфізми групи T , які зберігають напрямки, утворюють кільце.

Далі через k будемо позначати кільце всіх ендоморфізмів групи T , які зберігають напрямки. Нулем в цьому кільці є 0_k

$$\forall f \in T \ 0_k(f) = \text{id}.$$

Позначимо через D_A напівгрупу дилатацій з нерухомою точкою A . Нулем в цій напівгрупі є вироджена дилатація 0_A , яка переводить всі точки в точку A , а одиницею є гомотетія id : для будь-якої точки B

$$0_A(B) = A, \quad \text{id}(B) = B.$$

Без окремого нагадування будемо користуватися теоремою (1.4), згідно з якою всі ненульові дилатації мають обернені дилатації.

Теорема 1.13 *Для будь-якої заданої точки A площини мультиплікативна напівгрупа k ізоморфна мультиплікативній напівгрупі D_A . Ізоморфізм*

$$\alpha \mapsto \hat{\alpha}$$

із D_A в k визначається правилами $0_A \mapsto 0_k$ і для будь-якого $\alpha \in D_A$, $\alpha \neq 0_A$, $f \in T$

$$\hat{\alpha}(f) = \alpha \cdot f \cdot \alpha^{-1}. \quad (10)$$

Доведення. Коректність задання відображення впливає із теореми (1.8). А узгодженість цього відображення з операціям множення впливає з рівності

$$f, g \in T, \quad \alpha \in D_A, \quad \alpha \neq 0 \Rightarrow \alpha \cdot (fg) \cdot \alpha^{-1} = (\alpha \cdot f \cdot \alpha^{-1})(\alpha \cdot g \cdot \alpha^{-1}).$$

Лишилося перевірити бієктивність цього відображення.

Перевіряємо ін'єктивність, тобто

$$\alpha \in D_A, \alpha \neq 0_A \Rightarrow \hat{\alpha} \neq 0_k \quad (11)$$

і

$$\alpha, \beta \in D_A, \quad \alpha, \beta \neq 0_A, \quad \alpha \neq \beta \Rightarrow \hat{\alpha} \neq \hat{\beta}. \quad (12)$$

Для будь-якої ненульової дилатації α гомоморфізм $\hat{\alpha}$ має обернений $\hat{\alpha}^{-1}$, а гомоморфізм 0_k оберненого не має. Отже $\hat{\alpha} \neq 0_k$ і (11) виконується.

Переходимо до перевірки (12) (див. рис. 5) Нехай $\alpha, \beta \in D_A$, $\alpha, \beta \neq 0_A$, $\alpha \neq \beta$. Вибираємо паралельне перенесення $f \in T$, $f \neq \text{id}$, $f(A) = B \neq A$. Оскільки дилатація із D_A визначається образом однієї точки, що відрізняється від A , то $\alpha \neq \beta \Rightarrow C_1 = \alpha(B) \neq \beta(B) = C_2$ і

$$\alpha f \alpha^{-1}(A) = \alpha f(A) = \alpha(B) = C_1 \neq C_2 = \beta(B) = \beta f(A) = \beta f \beta^{-1}(A),$$

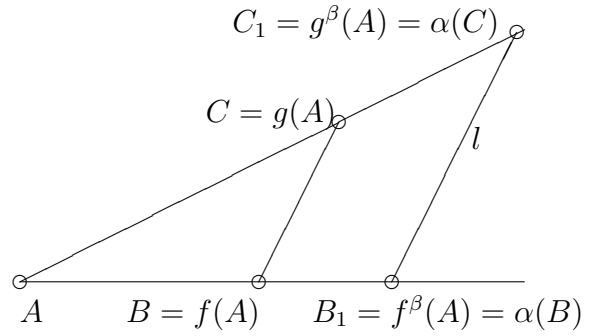
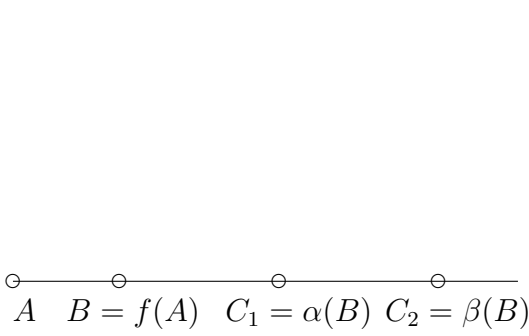


Рис. 5: Різні дилатації задають різні ендоморфізми групи паралельних перенесень
Рис. 6: Кожен ендоморфізм β дорівнює $\hat{\alpha}$ для деякої дилатації α

$$\hat{\alpha}(f) = \alpha f \alpha^{-1} \neq \beta f \beta^{-1} = \hat{\beta}(f), \quad \hat{\alpha} \neq \hat{\beta}.$$

Перевірка ін'єктивності відображення $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ із D_A в k завершена. Для перевірки сюр'єктивності цього відображення виберемо довільний ендоморфізм $\beta : T \rightarrow T$, що зберігає напрямки. Для кожної точки B беремо паралельне перенесення $f \in T$, для якого

$$f(A) = B,$$

застосовуємо до нього ендоморфізм $\beta \in k$, результат застосування позначаємо $f^\beta \in T$, і за означенням беремо

$$\alpha(B) = B_1 = f^\beta(A)$$

(див. рис. 6) Для звершення доведення сюр'єктивності відображення $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ із D_A в k потрібно перевірити, що побудоване відображення α є дилатацією з нерухомою точкою A і те, що $\hat{\alpha} = \beta$.

Оскільки паралельне перенесення, що переводить A в A , є нулем в групі паралельних перенесень, то ендоморфізм β переводить його в себе (лишає на місці) і, відповідно, $\alpha(A) = A$.

Для перевірки того, що α є дилатацією, вибираємо дві різні точки B і C , розглядаємо три паралельні перенесення $f, g, h \in T$

$$f(A) = B, \quad g(A) = C, \quad h(B) = C = g f^{-1}(B).$$

Позначимо

$$B_1 = \alpha(B) = f^\beta(A), \quad C_1 = \alpha(C) = g^\beta(A).$$

Потрібно довести, що

$$B + C \parallel \alpha(B) + \alpha(C). \quad (13)$$

Оскільки $h = g f^{-1}$, то

$$h^\beta(B_1) = (g f^{-1})^\beta = g^\beta((f^{-1})^\beta(B_1)) = g^\beta(A) = C_1$$

і $B_1 + C_1$ слідом паралельного перенесення h^β . Враховуючи, що ендоморфізм зберігає напрямки, і слідом паралельного перенесення $h \in B + C$, то (13) виконується.

Із (13) випливає, що $\alpha \in \text{колінеація}$, тобто коли B, C, D — три різні точки на прямій $B + C = C + D$ і $B_1 = \alpha(B)$, $C_1 = \alpha(C)$, $D_1 = \alpha(D)$ їх образи під дією α , то ці три точки знову лежать на одній прямій. Дійсно, згідно (13)

$$B_1 + C_1 \parallel B + C, \quad C_1 + D_1 \parallel C + D$$

і

$$B + C = C + D \Rightarrow B_1 + C_1 = C_1 + D_1.$$

В наведених вище позначеннях

$$f^\beta(A) = B_1, \quad \alpha f \alpha^{-1}(A) = \alpha f(A) = \alpha(B) = B_1.$$

Отже, $\beta = \hat{\alpha}$.

Ми завершили перевірку сюр'єктивності відображення $\alpha \mapsto \hat{\alpha}$ із D_A в k і, таким чином, завершили доведення теореми.

■

Теорема 1.14 *Ендоморфізми групи паралельних перенесень, що породжені дилатаціями із заданою нерухомою точкою, утворюють поле (можливо, некомутативне, тобто тіло).*

Доведення. Твердження теореми є безпосереднім наслідком теорем 1.11 і 1.13 — теорема 1.11 забезпечує, те, що ендоморфізми утворюють кільце, а теорема 1.13 забезпечує те, що кожен ненульовий елемент в цьому кільці має обернений. А тіло і є кільце, в якому ненульові елементи мають обернені.

■

Теорема 1.15 *Якщо для деяких двох ендоморфізмів $\beta_1, \beta_2 \in k$ і для деякого паралельного перенесення $f \in T, f \neq \text{id}$ виконується рівність $f^{\beta_1} = f^{\beta_2}$, то $\beta_1 = \beta_2$.*

Доведення. Знаходимо дві дилатації α_1, α_2 з нерухомою точкою A такі, що для будь-якого паралельного перенесення $g \in T$

$$g^{\beta_1} = \alpha_1 g \alpha_1^{-1}, \quad g^{\beta_2} = \alpha_2 g \alpha_2^{-1}.$$

Припустимо, що для деякого паралельного перенесення $f \in T, f \neq \text{id}$ виконується рівність $f^{\beta_1} = f^{\beta_2}$, і, відповідно,

$$\alpha_1 f \alpha_1^{-1} = \alpha_2 f \alpha_2^{-1}.$$

Тоді

$$\alpha_1 f \alpha_1^{-1}(A) = \alpha_1 f(A) = \alpha_2 f \alpha_2^{-1}(A) = \alpha_2 f(A),$$

тобто

$$\alpha_1(f(A)) = \alpha_2(f(A)).$$

Звідси, враховуючи, що дилатація визначається образом однієї точки (крім нерухомої), одержуємо $\alpha_1 = \alpha_2$ і $\beta_1 = \beta_2$.

Теорема доведена.

■

1.4 Введення координат.

Як і вище, через k позначаємо тіло ендоморфізмів комутативної групи паралельних перенесень, що зберігають напрямки. Також будемо користуватися тим, що існує природний ізоморфізм між тілом k і тілом D_A дилатацій із заданою нерухомою точкою A .

Аксіома 6-2. Для будь-яких паралельних перенесень

$$f, g \in T, \quad f \neq \text{id} \tag{14}$$

в тілі k знайдеться такий елемент $\alpha \in k$, що $g = f^\alpha$.

Теорема 1.16 (Про існування дилатацій) *Для будь-яких трьох колінеарних точок P, Q, R , $P \neq Q$ існує така дилатація α , що*

$$\alpha(P) = P, \quad \alpha(Q) = R.$$

Доведення.

Якщо $R = P$, то $\alpha = 0_P$ — вироджена дилатація з нерухомою точкою P . Якщо $R = Q$, то $\alpha = 1 = \text{id}$ — тотожне відображення.

Нехай P, Q, R три різні колінеарні точки. Будуємо два паралельні перенесення f, g такі, що

$$f(P) = Q, \quad g(P) = R.$$

Так побудовані паралельні перенесення задовольняють (14), тому існує гомоморфізм $\beta : T \rightarrow T$ такий, що $f^\beta = g$. Згідно з теоремою 1.13 існує дилатація α із заданою нерухомою точкою P така, що для будь якого $h \in T$ буде $h^\beta = \alpha h \alpha^{-1}$. Для так вибраної дилатації можна записати

$$f^\beta = \alpha f \alpha^{-1} = g, \quad \alpha f = g \alpha, \quad g \alpha(P) = \alpha f(P), \quad g(P) = \alpha(Q), \quad \alpha(Q) = R,$$

і α — потрібна нам дилатація.

■

Теорема 1.17 (про введення координат) *Нехай маємо два паралельні перенесення $f, g \in T$ з різними напрямками (отже, ненульові і комутують). Тоді для будь-якого перенесення h можна знайти, і до того ж єдиним чином, два елементи $\alpha, \beta \in k$ такі, що*

$$h = f^\alpha g^\beta = g^\beta f^\alpha.$$

Доведення. Нехай паралельні перенесення f, g, h такі, як вказані в умові теореми. Вибираємо довільну точку P і позначимо

$$R = f(P), \quad Q = h(P).$$

Будуємо дві прямі — $m = P + R$ і l , що проходить через Q в напрямку паралельного перенесення g . Прямі l, m не паралельні. Позначаємо S точку перетину цих прямих, і нехай $T = g(S)$ (див. рис. 7)

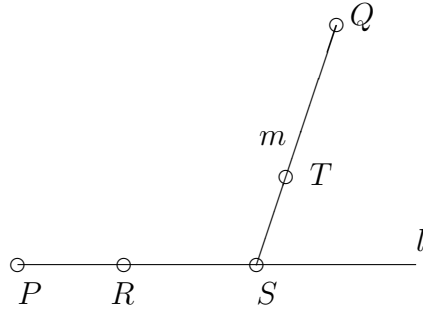


Рис. 7: Розкладення паралельного перенесення в добуток.

За аксіомою 6-2 існують ендоморфізми $\alpha, \beta \in k$ такі, що

$$f^\alpha(P) = S, \quad g^\beta(S) = Q.$$

Для так вибраних $\alpha, \beta \in k$

$$g^\beta f^\alpha(P) = Q = h(P), \quad g^\beta f^\alpha = h,$$

Існування потрібних ендоморфізмів $\alpha, \beta \in k$ довели.

Припустимо, що для деяких $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in k$

$$g^{\beta_1} f^{\alpha_1} = g^{\beta_2} f^{\alpha_2}.$$

Тоді можна сказати, що паралельне перенесення $e = g^{\beta_1 - \beta_2} = f^{\alpha_2 - \alpha_1}$ повинно мати той же напрям, що і f і g . А це можливо лише коли $\beta_1 - \beta_2 = 0 = \alpha_2 - \alpha_1$ і $\beta_1 = \beta_2, \quad \alpha_2 = \alpha_1$.

Теорема доведена. ■

Системою координат називаємо репер $\langle P; f, g \rangle$, а координатами точки Q називаємо $\alpha, \beta \in k$, що задовольняють умовам теореми 1.17

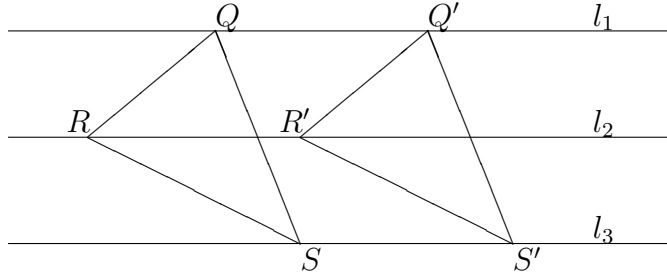


Рис. 8: Креслення до аксіоми D1.

1.5 Теорема Дезарга.

Аксіоми 6-1 та 6-2 стосуються відображень, а відображення, починаючи з Евкліда і донедавна, вважалися хистким ґрунтом для побудови геометрії. В аксіоматичних побудовах площин, що не використовують колінеацій, вводять так звану аксіому Дезарга, що стосується певних конфігурацій (взаємного розташування точок і прямих площини). Нам будуть потрібні дві такі конфігурації, так звані конфігурації дезарга (див. рис. 8, 9).

Аксіома D-1. Нехай l_1, l_2, l_3 три різні паралельні прямі, і Q, Q' дві точки прямої l_1 , R, R' точки прямої l_2 , а S, S' точки прямої l_3 . Якщо

$$Q + R \parallel Q' + R', \quad Q + S \parallel Q' + S'.$$

то (див рис. 8)

$$R + S \parallel R' + S'.$$

Аксіома D-2. Нехай l_1, l_2, l_3 три різні прямі, що проходять через точку P . і Q, Q' дві точки прямої l_1 , R, R' точки прямої l_2 , а S, S' точки прямої l_3 , що відрізняються від P . Якщо

$$Q + R \parallel Q' + R', \quad Q + S \parallel Q' + S'.$$

то (див рис. 9)

$$R + S \parallel R' + S'.$$

Аксіоми D-1, D-2 у випадках, коли виконується одна із чотирьох умов

- $R = R'$;
- $Q = Q'$;
- $S = S'$;

- $Q + R = R + S$

не несуть нової інформації, є наслідками аксіом 1, 2, 3, 4, 5. Для прикладу, якщо $Q = Q'$, то $Q + R = Q' + R = Q' + R'$, $R = R'$ і $S = S'$. Тому далі розглядаємо лише випадки, коли точки P, Q, R не колінеарні, і P, Q, R, P', Q', R' — шість різних точок.

Теорема 1.18 *Аксіома D-1 є наслідком аксіоми 6-1, а аксіома 6-1 є наслідком аксіоми D-1.*

Доведення. Нехай виконується аксіома 6-1, а прямі l_1, l_2, l_3 та точки Q, R, P', Q', R' такі, як в умові аксіоми D-1. Розглядаємо паралельне перенесення $f : T \rightarrow T$, для якого $f(Q) = Q'$. Тоді образ $f(R)$ лежить на l_2 і на прямій, що проходить через Q' паралельно $Q + R$, тобто $f(R) = R'$. Тепер образ $f(S)$ лежить на l_3 і на прямій, що проходить через R' паралельно $S + R$, тобто $f(S) = S'$. Звідси випливає, що $Q + S \parallel Q' + S'$.

Нехай виконується аксіома D-1. Вибираємо дві різні точки Q, Q' і доводимо існування паралельного перенесення f , що переводить Q в Q' , тобто $f(Q) = Q'$, — доводимо конструктивно, тобто будуємо це паралельне перенесення.

Образ $f(R)$ будь-якої точки R , яка не лежить на прямій $Q + Q'$, будуємо як точку $f(R)$, що лежить на перетині прямої, що проходить через R паралельно прямій $Q + Q'$, і прямої, що проходить через Q' паралельно $Q + R$. Коректність такого визначення, тобто незалежність побудови образу S' довільної точки S від вибору допоміжної точки Q чи R , забезпечується аксіомою D-1.

Теорема доведена.

■

Теорема 1.19 *Аксіома D-2 є наслідком аксіоми 6-2, а аксіома 6-2 є наслідком аксіоми D-2.*

Доведення. Нехай виконується аксіома 6-1 і прямі l_1, l_2, l_3 та точки P, Q, R, P', Q', R' такі, як вказані в умові аксіоми D-2. Розглядаємо дилатацію f з нерухомою то-

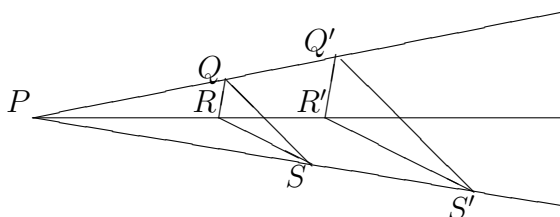


Рис. 9: Креслення до аксіоми D2.

чкою P , яка переводить Q в Q' , тобто $f(Q) = Q'$. Послідовно переконуємося, що $f(R) = R'$ і $f(S) = S'$. Звілси одержуємо, що $Q + S \parallel Q' + S'$.

Нехай виконується аксіома D-2. Вибираємо дві різні точки Q, Q' так, що $P + Q = P + Q'$ і доводимо існування дилатації f з нерухомою точкою P , що переводить Q в Q' , тобто $f(Q) = Q'$, — доводимо конструктивно, тобто будуємо цю дилатацію.

Образ $f(R)$ будь-якої точки R , яка не лежить на прямій $Q + Q'$, будуємо як точку $f(R)$, що лежить на перетині $P + R$ і прямої, що проходить через Q' паралельно $Q + R$. Далі, використовуючи уже побудовані образи точок за межами $Q + Q'$, будуємо образи точок на прямій $Q + Q'$.

Коректність такого визначення, тобто незалежність побудови образу S' довільної точки S від вибору допоміжної точки Q чи R , забезпечується аксіомою D-2.

Теорема доведена.



Література

- [1] А. В. Погорелов “Лекции по основаниям геометрии” — Харьков:ХГУ, 1959.
- [2] А.Д. Александров “Основания геометрии” — М:Наука, 1987.
- [3] Р. Хартсхорн “Основы проективной геометрии” — Современная математика, популярная серия. — Москва:Мир, 1970 (переклад з “Foundation of projective geometry” by Robin Hartshorn — Harvard University, Lecture notes, — New York:W.A.Benjamin, 1967)
- [4] Ф.Картеси “Введение в конечные геометрии” — М:Наука, 198. (Переклад з F.Kárteszi, “Introduction to Finite Geometries” — Budapest:Akadémiai Kiadó, 1976)
- [5] Ф. Бахман “Построение геометрии на основе симметрии” — М:Наука, 1969 (Переклад з Friedrich Bahmann “Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff” — Berlin:Spigel-Verrlag, 1959)
- [6] Gerard A Venema “Foundation of geometry” — Boston:Pearson Education. 2012

Показчик

- автоморфізм поля, 5
- дилатація, 2
- ендоморфізм, 10
- гомоморфізм
 - групи, 10
- гомотетія, 2
- група
 - адитивна абелева, 11
 - гомотетій, 7, 8
 - паралельних перенесень, 7, 8
- ізоморфізм
 - площин, 2
- колінеація, 2
 - вироджена, 2
- конфігурації
 - Дезарга, 18
- координати
 - точки, 17
- напрям
 - паралельного перенесення, 8
- паралельне перенесення, 2
- перетворення
 - афінні, 4
- підгрупа
 - інваріантна, 9
 - нормальний дільник, 9
- площина
 - афінна, 1, 2
 - декартова, 4
- репер, 17
- розширення, 2
- система координат, 17
- слід
 - точки, 6, 7
- тіло, 15
- точки
 - колінеарні, 2