

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАУКОВО-НАВЧАЛЬНИЙ ІНСТИТУТ
КОМП'ЮТЕРНОЇ ФІЗИКИ ТА ЕНЕРГЕТИКИ
Кафедра інформаційних технологій в фізико-енергетичних системах

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

до дипломної роботи
за освітньо-кваліфікаційним рівнем магістр
«Теплові структури в тонких стрижнях»

Виконав: студент 6 курсу, групи НФ-63

Корнієнко А.В.

спеціальність:

105 Прикладна фізика та наноматеріали

освітня програма:

Прикладна фізика енергетичних систем

Керівник: доктор. фіз.-мат. наук , професор

Кокодій М.Г.

Рецензент: доц. кафедри квантової

радіофізики ХНУ ім. В.Н. Каразіна,

кандидат фіз.-мат. наук Дегтярьов А.В.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Навчально-науковий інститут комп'ютерної фізики та енергетики
Кафедра інформаційних технологій у фізико-енергетичних системах
Рівень вищої освіти (освітньо-кваліфікаційний рівень) бакалавр
Спеціальність 105 Прикладна фізика та наноматеріали

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

_____ Руслан СУХОВ

підпис

“ _____ ” _____ 2024 року

ЗАВДАННЯ НА ДИПЛОМНУ РОБОТУ

Корнієнко Андрій Вікторович

1. Тема роботи «Теплові структури в тонких стрижнях» керівник роботи: Кокодій Микола Григорович, доктор фізико-математичних наук, професор
Затверджено наказом по університету від 27.09. 2024 року № 4201-5/3081
2. Строк подання студентом роботи 1.12.2024
3. Перелік питань, які потрібно розробити:
 - 1) Вивчення та аналіз літератури (літературні джерела, дисертаційний фонд, мережа «Інтернет»), теоретичні основи теплопровідності, Фізичні властивості матеріалів, закон Фур'є. Методи моделювання теплових процесів.
 - 2) Моделювання теплових процесів у сучасному програмному забезпеченні.
 - 3) Розробка програми, збір та аналіз отриманих даних. Практичне застосування та оптимізація.

4. План роботи

№ з/п	Назви етапів роботи
1	Вибір теми.
2	Затвердження теми на кафедрі
3	Робота над літературою та іншими джерелами
4	Написання вступу до роботи та першого розділу
5	Написання другого розділу
6	Написання третього розділу
7	Завершення написання дипломної роботи (висновки та література)
8	Подача науковому керівнику
9	Відгук, рецензія, підготовка до захисту
10	Попередній захист
11	Захист

5. Дата видачі завдання 27.09. 2024 року

Студент _____ Андрій Корнієнко
підпис

Керівник роботи _____ Микола Кокодій
підпис

РЕФЕРАТ

Андрій Корнієнко «Теплові структури в тонких стрижнях»

Кваліфікаційна робота магістра з прикладної фізики. – Х.: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024. – 89 с.

Робота присвячена дослідженню теплових процесів у тонких стрижнях, зокрема: моделюванню температурних полів.

Розглянуто та проаналізовано основні принципи теплопровідності. Ці принципи базуються на законі Фур'є, який описує тепловий потік через матеріал, розглянуто стаціонарні та нестаціонарні випадки теплопровідності.

Дослідження теплових процесів у тонких стрижнях проводилися з використанням чисельних методів. Для рішення задачі теплопровідності використано метод розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних (PDE) в програмі MATCAD.

У ході дослідження отримано графіки розподілу температурних полів у різних матеріалах стрижнів та режимів нагріву. Аналіз показав, що інтенсивність нагріву та матеріал, з якого зроблено стрижень суттєво впливають на розподіл температури. Зокрема, для випадків із загостренням спостерігався так званий «ефект метастабільної локалізації тепла».

Кваліфікаційна робота «Теплові структури в тонких стрижнях» присвячена дослідженню теплопровідності у тонких стрижнях за допомогою чисельних методів. Отримані результати підтверджують важливість врахування інтенсивності нагріву та матеріалів стрижня при моделюванні теплових процесів. Результати роботи можуть бути використані для підвищення ефективності та надійності теплових систем у різних галузях промисловості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: режим із загостренням, теплові структури, теплопровідність, моделювання, програмне заперечення, закон Фур'є.

ABSTRACT

Andriy Kornienko «Thermal structures in thin rods» Qualification work of the bachelor of applied physics. – Kharkiv. – V.N. Karazin KhNU, 2024. – 89 p.

The work is devoted to the study of thermal processes in thin rods, namely modelling of temperature fields.

The basic principles of heat conduction are considered and analysed. These principles are based on Fourier's law, which describes the temperature flow through the material, the stationary and non-stationary cases of heat conduction are considered.

Thermal processes in thin rods were investigated using multiple methods. To solve the heat conduction problem, the method of solving partial differential equations (PDE) in MATCAD programme was used.

During the modelling, the distribution of temperature fields in different materials of rods and heating modes was plotted. The analysis showed that the heating intensity and the material from which the rod is made significantly affect the temperature distributions. In particular, the so-called «metastable heat localisation effect» is observed for cases with aggravation.

The qualifying paper «Thermal Structures in Thin Rods» is devoted to the study of heat conduction in thin rods using multiple methods. The results obtained confirm the importance of taking into account the heating intensity and the rod material in modelling thermal processes. The results of the work can be used to improve the efficiency and reliability of thermal systems in different industries.

KEY WORDS: mode with aggravation, thermal structures, thermal conductivity, modelling, software, Fourier's law.

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ

м – метр

м² – метр квадратний

t – температура, °С

Q – тепловий потік, Вт

q – густина теплового потоку, Вт/м²

k – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/м²·К

c – питома теплоємність Дж/кг·К

α - Коефіцієнт температуропровідності, м²/с

ρ - щільність, кг /м³

ПЗ - програмне забезпечення

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СКОРОЧЕНЬ, ТЕРМІНІВ

ВСТУП

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи.....	14
1.1. Основи теплопередачі.....	14
1.1.1 Основи теплопередачі. Кондукція, конвекція, радіація. Коефіцієнти теплопередачі. Теплові структури. Види теплових структур в стрижнях.....	14
1.1.2 Матеріали тонких стрижнів. Властивості матеріалів. Вплив температури на матеріали.....	19
1.2 Теплові процеси із загостренням.....	21
1.2.1 Закон Фур'є та його застосування до теплопровідності.....	21
1.2.2. Теплові хвилі та їх поширення у середовищах із загостреннями...	23
1.2.3. Методи вирішення теплових завдань із загостреннями	26
РОЗДІЛ 2. Моделювання процесів теплових структур у тонких стрижнях.....	35
2.1. Модель тонкого стрижня. Граничні умови.....	35
2.2. Геометричні параметри стрижня. Метод розв'язання задачі.....	37
РОЗДІЛ 3. Моделювання процесів теплових структур у тонких стрижнях.....	43
3.1. Опис програмного забезпечення та функціонального призначення..	43
3.2 Опис структури програми та технічних засобів для створення ПО...	44
3.3 Початкові та вихідні дані.....	46
3.4 Основні розрахунки, графіки та аналіз моделювання.....	49
ВИСНОВКИ	65
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	66
ДОДАТКИ	67

ВСТУП

Явище теплопровідності має велике значення в багатьох галузях сучасної техніки. Суттєву роль відіграють процеси теплопровідності в енергетиці, авіації, суднобудуванні, ракетобудуванні, промисловості та газотранспортній системі. Розрахунок енергетичних установок, робочих процесів, теплового захисту повністю ґрунтується на теорії теплопровідності. Саме тому теплопровідність є фундаментальним поняттям для майбутнього спеціаліста в галузі енергетичних систем[10].

У сучасному світі теплові процеси відіграють важливу роль у різних галузях науки та техніки. Знання про розподіл температури в матеріалах, особливо у тонких стрижнях, є ключовим для розуміння багатьох фізичних і технічних явищ. Вивчення теплових процесів дозволяє розробляти ефективніші методи управління теплом, що важливо для створення нових матеріалів та конструкцій з поліпшеними характеристиками [2].

Тонкі стрижні є поширеними елементами в багатьох технічних системах, включаючи мікроелектроніку, нанотехнології, будівництво та машинобудування. Їхні теплові характеристики значною мірою впливають на надійність і довговічність цих систем. Тому важливо вивчати теплові структури та моделювати теплові процеси в тонких стрижнях для оптимізації їх роботи і розробки нових технологій.

Аналіз попередніх досліджень. У задачах про різного роду теплові процеси виділяється клас завдань про теплові процеси в режимах «з загостренням». Під цими режимами розуміються сильно нестационарні процеси, коли величини, що характеризують їх, змінюються в часі за законами, що приводять їх у нескінченність в кінцевий момент часу. Вивчення цих процесів почали ще в 50х роках 20-го сторіччя. На той момент була велика зацікавленість цим в різних країнах світу, основними країнами, які вивчали ці процеси, були: Сполучені Штати Америки та колишній Радянській Союз. Одним з основних тем, це було вивчення процесів пов'язане з вирішенням проблеми лазерного термоядерного синтезу, це було пов'язано з економічною

вигодою. Але ця теорія не тільки охоплювала теорії термоядерного синтезу, але мала ще і філософський розвиток у режимі із загостренням нині відбувається зростання населення Землі, ця теорія теж була підкріплена різного роду дослідженнями та математичними моделями цього процесу та порівняння з графіками, побудованими на основі історичних даних про чисельність населення у різні епохи. Тому вивчення теплових режимів із загостренням є актуальною та не до кінця вивченою проблемою. Якщо казати про актуальність дослідження теплових структур в тонких стрижнях, то ця тема обумовлена кількома ключовими аспектами[1,3]:

1. Розвиток мікро- та нанотехнологій: Сучасні мікросистеми та нанопристрої вимагають глибокого розуміння теплових процесів на мікро- та нанорівнях. Тонкі стрижні часто є основою таких пристроїв, тому їх теплові характеристики є критичними для стабільності і функціонування.
2. Підвищення енергоефективності: одним із пріоритетів сучасної науки є пошук шляхів зменшення енергоспоживання. Вивчення теплових структур у тонких стрижнях дозволяє розробити методи ефективного управління теплом, що сприятиме підвищенню енергоефективності у промисловості та побуті.
3. Покращення надійності та довговічності матеріалів: теплові навантаження значно впливають на довговічність матеріалів. Дослідження теплових процесів у тонких стрижнях допомагає визначити оптимальні умови експлуатації та розробити матеріали з підвищеною термостійкістю.
4. Екологічні аспекти: оптимізація теплових процесів сприяє зниженню негативного впливу на довкілля. Це включає зменшення викидів парникових газів та підвищення ефективності використання енергетичних ресурсів.

5. Зростаючий інтерес до відновлювальних джерел енергії: Використання теплових процесів в сонячних батареях і термоелектричних генераторах вимагає точного моделювання і управління тепловими структурами.

Вивчення та розподіл температур в тонких стрижнях має дуже важливе значення в багатьох сферах науки та техніки.

Мета дипломної роботи полягає в дослідженні процесів теплопередачі в тонких стрижнях різних матеріалів, аналіз впливу температурних змін на теплові властивості матеріалів, а також у розробці ефективних методів моделювання теплових структур з використанням сучасних програмних засобів для оптимізації теплових характеристик стрижнів у різних інженерних застосуваннях.

Основні задачі для досягнення мети:

1. Дослідження властивостей матеріалів:

- Аналіз фізичних і механічних властивостей різних матеріалів для тонких стрижнів, таких як мідь, сталь та алюміній
- Вивчення впливу температурних змін на теплопровідність, щільність та питому теплоємність матеріалів.

2. Моделювання теплових процесів:

- Створення числових моделей для дослідження теплопередачі в тонких стрижнях з використанням програмного забезпечення MATCAD.
- Проведення числових експериментів для вивчення температурних полів в стрижнях при різних джерелах тепла.

3. Аналіз результатів:

- Оцінка ефективності різних матеріалів у відповідь на температурні впливи.
- Визначення оптимальних джерел

4. Розробка методики:

- Розробка ефективної методики моделювання та аналізу теплових процесів у тонких стрижнях, яка може бути застосована для різних типів матеріалів.

- Написання рекомендацій щодо вибору матеріалів та методів обчислень для покращення теплових характеристик інженерних систем.

Очікувані результати

Очікуваними результатами дипломної роботи є глибоке розуміння процесів теплопередачі в тонких стрижнях, а також розробка ефективних методів моделювання цих процесів, що дозволить оптимізувати теплові структури для різних інженерних застосувань. Також можна порівняти мою модель з вже існуючими теоретичними та практичними роботами інших науковців[6,7,8].

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи

1.1. Основи теплопередачі.

1.1.1 Основи теплопередачі. Кондукція, конвекція, радіація.

Коефіцієнти теплопередачі

Теплопередача — це процес переносу теплової енергії від одного тіла до іншого внаслідок різниці температур. Існує три основні механізми теплопередачі: кондукція, конвекція та радіація. На рис 1.1 Зображено різні види простих процесів теплопередачі.

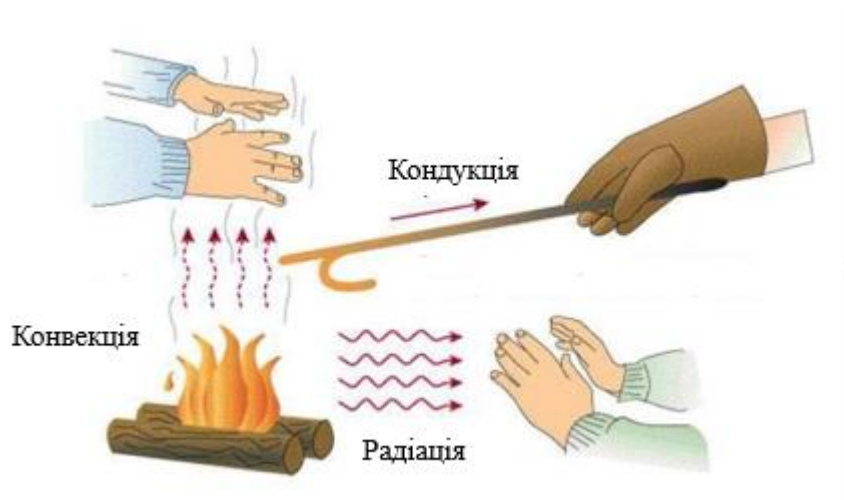


Рис.1.1 Прості приклади процесів теплообміну.

Кондукція — це процес безпосереднього переносу тепла через матеріал у результаті зіткнення його молекул. Цей механізм діє, коли є градієнт температури у твердих тілах. Основним законом передачі тепла теплопровідністю є закон Фур'є. Далі ми більш детально розглянемо цей закон та його різні модифікації, які використовуються для вирішення конкретних задач при теплообміні.

Цей закон можна використовувати для конструкції будівель, теплоізованих трубопроводів, радіаторів для охолодження та нагріву, а також у виготовленні електронних пристроїв (для запобігання перегріву) всі ці та ще інші процеси вимагають врахування кондукції. [3,7]

Конвекція — це процес переносу тепла у рідині або газі, який відбувається внаслідок руху самого середовища. Природна конвекція — виникає внаслідок різниці температури, в результаті якої виникає різниця щільності. Прикладами такої конвенції може бути рух гарячого повітря до верху, а холодного — до низу. Примусова конвекція — відбувається через зовнішні сили, такі як вентилятори або насоси, які створюють рух рідини або газу). [7]

При конвективному теплообміні між твердим тілом та теплоносієм (рис. 1.2) зв'язок між густиною потоку теплоти q з температурами поверхні тіла T_w та рідини T_f встановлюється формулою Ньютона:

$$q = \alpha(T_f - T_w) \quad (1.1)$$

де T_f — температура теплоносія; T_w — температура стінки; α — коефіцієнт тепловіддачі в конвекції, який може також враховувати радіаційний теплообмін. [10]

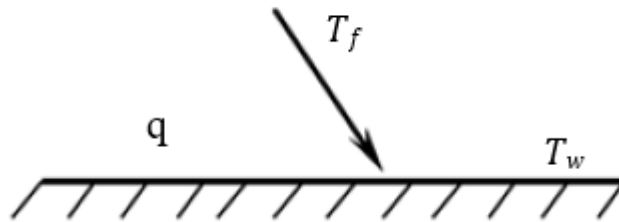


Рис. 1.2. Поверхня твердого тіла

Коефіцієнт тепловіддачі конвекцією, чисельно характеризує тепловий потік, який розсіює або поглинає одиниця поверхні твердого тіла, при різниці температур між твердим тілом та теплоносієм в один Кельвін. Розмірність

$$\alpha = \frac{\text{Вт}}{\text{К} \cdot \text{м}^2}. \text{ Коефіцієнт } \alpha \text{ є складною функцією багатьох величин: швидкості}$$

рідини w , її густини ρ , в'язкості μ , теплоємності c , теплопровідності λ , інших фізичних властивостей теплоносія, геометричних параметрів стінки (труби) — довжини L , діаметра d та інших параметрів. Таким чином, α розраховується згідно з узагальненим емпіричним критеріальним рівнянням для типових випадків тепловіддачі та є нетаблична величина. Конвективний теплообмін

включає не тільки теплові, але й гідродинамічні явища. Коли рух рідини викликаний дією зовнішніх сил (подача насосом, дія надлишкового тиску), тоді при передачі тепла має місце вимушена конвекція. А рівняння для розрахунку α визначаються, в цілому, значенням критерію Рейнольдса $\alpha_{\text{вимуш}}=f(Re)$. Об'єми рідини можуть рухатись і за рахунок різниці густини в різних точках неізотермічного потоку. Біля гарячої поверхні густина рідини менша, ніж біля холодної, в результаті цього виникає потік у сторону меншої густини. Таке явище називається природною або вільною конвекцією. В цьому випадку рівняння для розрахунку α визначаються добутком критерію Грасгофа (Gr) та критерію Прандтля (Pr): $\alpha=f(Gr \cdot Pr)$. Окремим випадком розглядають тепловіддачу при зміні агрегатного стану теплоносія: конденсація пари, кипіння рідини. Узагальнені рівняння для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі α при плівковій, краплинній, змішаній конденсації та при кипінні.[17]

Вивчення та аналіз таких процесів часто використовується у системах обігріву, системах охолодження автомобілів, розрахунках для вентиляційних систем і у багатьох інших інженерних та наукових додатках.

Радіація — це процес теплопередачі, що відбувається безпосередньо через електромагнітні хвилі, які випромінюються від одного тіла до іншого. Температура тіла визначає інтенсивність випромінювання[7]:

$$Q = \varepsilon \sigma F (T^4 - T_{\text{середовища}}^4) \quad (1.2)$$

де ε — емісійний коефіцієнт,

σ — стала Стефана-Больцмана,

T — температура тіла,

$T_{\text{середовища}}$ — температура навколишнього середовища.

Емісійний коефіцієнт варіюється від 0 до 1; чорне тіло (ідеальне випромінююче тіло) має емісійний коефіцієнт рівний 1, тоді як дзеркальні поверхні мають його близьким до 0.

Радіаційний теплообмін можна спостерігати в печах, сонячних колекторах, системах теплопередачі, а також оцінці теплоізоляційних матеріалів.[1]

Коефіцієнт теплопровідності визначає, наскільки добре матеріал проводить тепло. Для металевих матеріалів він може бути від 100 до 400 Вт/(м·К), тоді як для ізоляційних матеріалів — в межах від 0.02 до 0.1 Вт/(м·К).

Коефіцієнт конвекції визначає, наскільки ефективно йде теплообмін між поверхнею тіла і його середовищем. Він може коливатись в залежності від умов (наприклад, для ламінарного потоку — приблизно 10-100 Вт/(м²·К), а для турбулентного — вище 100 Вт/(м²·К)).

Для точних розрахунків цих коефіцієнтів зазвичай використовуються емпіричні дані, що публікуються в технічних довідниках або в міжнародних стандартах. [9,10]

Теплові структури — це структурні системи, де тепло передається, розподіляється і накопичується в матеріалі або між матеріалами у відповідь на температурні градієнти та зовнішні навантаження. Такі структури формуються внаслідок різних механізмів теплопередачі (кондукція, конвекція, радіація) та можуть мати суттєвий вплив на характеристику матеріалів і загальну ефективність системи. [1]

Теплові структури мають критичне значення у багатьох інженерних застосуваннях, включаючи:

- Енергетика: для оптимізації ефективності теплообміну в котлах та теплообмінниках.
- Машинобудування: для запобігання перегріву компонентів і підвищення довговічності деталей.
- Будівельні матеріали: для проектування теплоізоляційних матеріалів.

Далі можна вже поділити на основні та додаткові види теплових структур в стрижнях. Теплові структури в стрижнях можуть мати різні характеристики залежно від умов та параметрів застосування.

Основні види теплових структур, які варто виділити:

Одномірні теплові структури, їх можна описати, як процес, коли температура змінюється в одному напрямку, зазвичай по довжині стрижня. Це типово для ситуацій, коли один кінець стрижня піддається нагріванню, а інший

оохолоджується. Температурний профіль у такій структурі може бути лінійним чи квадратичним, в залежності від умов. Наприклад, коли, тонкий стрижень, нагрітий з одного кінця, може продемонструвати одномірний розподіл температури, еквівалентний лінійній залежності[6,9]. *Цей випадок, як раз буде розглядатися при моделюванні процесу в тонкому стрижні.*

Двовимірні теплові структури - цей процес описує, більш складні випадки, такі структури, коли вже температура може бути змінена не лише по довжині, а й вже у поперечному напрямку. Це часто спостерігається у системах з комплексною геометрією, де тепло буде переміщатися через поверхні та шари стрижня.

Основні приклади, це коли стрижень з отвором або здатністю відводити тепло через задані отвори.

Тривимірні теплові структури, це вже буде більш складною задачею, у таких структурах температура змінюється в усіх трьох напрямках (x,y,z). Вже такі процеси виникають у ситуаціях, коли визначальним буде внутрішній тепловий процес, де теплові джерела знаходяться всередині, це можна спостерігати у великих обсягах матеріалу, зокрема в роботі електронних компонентів, де важливо враховувати конвекційні та радіаційні ефекти. Прикладом є теплові структури у великих багатосекційних стрижнях, де важливо забезпечити одночасну віддачу тепла з усіх боків.

Нестаціонарні теплові структури. Ці структури характеризуються зміною температури з часом, що є важливим у динамічних системах, де температура може варіюватися через зміни навантаження або умов навколишнього середовища. Більш розповсюдженим прикладом є нагрівання або охолодження стрижнів в ході технологічних процесів, якими є, наприклад, обробка матеріалів.

Стаціонарні теплові структури. Ці процеси є більш простіші, в таких структурах температура не змінюється з часом, оскільки досягається термодинамічна рівновага. Це є типовим явищем для стрижнів, у яких тепло подається безперервно, але в рівноважному стані. Прикладом може бути

стрижень, який тривалий час знаходиться при сталих температурних умовах без зовнішніх впливів. [6,9]

1.1.2 Матеріали тонких стрижнів. Властивості матеріалів. Вплив температури на матеріали.

Тонкі стрижні можуть бути виготовлені з різних матеріалів, включаючи метали, полімери, кераміку та композити. Вибір матеріалу істотно впливає на поведінку стрижня під час термічних і механічних навантажень, а також на його теплові характеристики.

Властивості матеріалів

Механічні властивості

Модуль Юнга (E): Визначає наскільки матеріал деформується під навантаженням. Для тонких стрижнів важливо, щоб модуль Юнга був достатньо високим, щоб уникнути пластичної деформації.

Міцність на розрив (σ_b): Показує максимальну напругу до руйнування. Нетрадиційні матеріали, як, наприклад, вуглецеві волокна, можуть мати високу міцність на розтягування.

Пластичність і крихкість: Властивості, що характеризують поведінку матеріалів під впливом навантаження. Для стрижнів, що підлягають термічним змінам, важливо обирати матеріали, які не стануть крихкими при низьких температурах[13].

Теплові властивості

Коефіцієнт теплопровідності (k): Визначає, як швидко тепло передається через матеріал. Метали, як правило, мають високий коефіцієнт теплопровідності, тоді як полімери значно нижчий. Коефіцієнт теплопровідності k - є фізичним параметром речовини. В загальному випадку він залежить від температури, тиску та роду речовини. Діапазони зміни k для різних матеріалів можна знайти в різного роду довідниках та в мережі «Інтернет».

Теплоємність (c): Кількість тепла, необхідна для підвищення температури одиниці маси матеріалу на один градус. Вона визначає, як матеріал реагує на зміну температури.

Коефіцієнт теплового розширення (α): Показує, як довжина (або об'єм) матеріалу змінюється з температурою. Це критично важливо для уникнення деформацій в стрижнях під час зміни температури[14].

Вплив температури на матеріали

Температура має значний вплив на механічні і термічні властивості матеріалів, що можуть привести до їх зміни внаслідок термічних навантажень.

Вплив на механічні властивості

Зміна механічної міцності: Багато матеріалів втрачають міцність при підвищенні температури. Наприклад, сталі та алюміній можуть мати знижену міцність, якщо температура перевищує певні пороги.

Крихкість: При зниженні температури деякі матеріали (особливо полімери та метали) можуть ставати крихкими, що викликає їх раптове руйнування при навантаженнях.[15]

Теплове розширення

Зміна температури викликає теплове розширення, що може призвести до напруження у стрижні, якщо, наприклад, як в моєму випадку, один кінець стрижня нагрівається, а інший залишається охолодженим, виникають внутрішні напруження, які можуть призвести до деформацій.

Також важливим є процес термічної обробки, якщо взяти такі методи, як загартування або відпустка, використовуються для покращення властивостей металів за рахунок контролю температурних режимів.[16]

Підсумовуючи опис матеріалів, можна зробити висновок, що вибір матеріалів для тонких стрижнів є критично важливим, оскільки механічні та теплові властивості безпосередньо впливають на їхню ефективність в застосуваннях. Треба розуміти, як зміна температури впливає на ці властивості, чи дозволять ці матеріали інженерам спроектувати системи з урахуванням реальних умов експлуатації. Як раз в цій дипломній роботі я збираюсь більш

детально розглянути та детально аналізувати конкретні матеріали та їх характеристики, а також провести моделювання процесів у стрижні.

1.2 Теплові процеси із загостренням

1.2.1 Закон Фур'є та його застосування до теплопровідності

Теплопровідність – перенесення тепла в наслідок хаотичного (теплого) руху мікрочасток, які безпосередньо торкаються один одного. Цей рух може бути або рухом самих молекул (гази, краплинні рідини), або коливанням атомів (у кристалічній решітці твердих тіл), або дифузією вільних електронів (у металах). У твердих тілах теплопровідність є зазвичай основним видом розповсюдження тепла.

Основним законом передачі тепла теплопровідністю є закон Фур'є . Відповідно до закону Фур'є, кількість тепла (Q), що проходить через одиницю площі (A) матеріалу за одиницю часу (t), пропорційна градієнту температури (ΔT)[6].

$$Q = -k * F * \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (1.3)$$

де Q - кількість тепла, що передається,

t - час,

F -площа поперечного перерізу,

ΔT - зміна температури

k - коефіцієнт теплопровідності матеріалу (залежить від матеріалу),

Δx - зміна температури.

Знак мінус, що стоїть перед правою частиною рівнянь (3), вказує на те, що тепло переміщається у бік падіння температури, так як теплота завжди передається від більш гарячих частин тіла до холодних. Тому, якщо казати про *теплообмін*, то це є самовільний незворотній процес поширення теплоти в просторі від більш нагрітих тіл до менш нагрітих. Під процесом поширення теплоти розуміють обмін внутрішньою енергією між окремими елементами, областями середовища, що розглядається. Теплообмін розділяється на простий і складний. Вище, ми вже описували такі прості процеси, як теплопровідність,

конвекція, радіаційний теплообмін та якими формулами можливо в загальному вигляді це описати. Складні види теплообміну комбінуються з простих. До складного виду теплообміну належать:

- тепловіддача – конвективний теплообмін між теплоносієм і поверхнею (теплопровідність + конвекція);
- теплопередача – передача теплоти від одного теплоносія до іншого через стінку, що розділяє (теплопровідність + конвекція);
- радіаційно-конвективний теплообмін, що обумовлений випромінюванням, конвекцією та теплопровідністю одночасно.[10]

В загальному вигляді можливо описати так , тепловий потік, що характеризує зміну кількості теплоти в просторі з часом.

$$Q = \frac{\delta Q}{d\tau} \quad (1.4)$$

де δQ - зміна кількості теплоти за час $d\tau$.

Густина теплового потоку q – тепловий потік, віднесений до одиниці площі поверхні.

$$q = dQ/dF \quad (1.5)$$

Температурне поле $t(x,y,z,\tau)$ – сукупність миттєвих значень температур в просторі. Розрізняють стаціонарне $t(x,y,z)$ та нестаціонарне температурні поля.

Коли температура змінюється з часом від однієї точки простору до іншої, таке поле відповідає тепловому режиму теплопровідності, що не встановився, і називається нестаціонарним температурним полем. Якщо тепловий режим встановився, то температура в кожній точці поля залишається сталою в часі і таке температурне поле називається стаціонарним (рис. 1.3). В цьому випадку температура є функцією лише координат.

Температурне поле, відповідає рівнянню $t=t(x,y,z)$ і є просторовим, так як температура є функцією трьох координат. Якщо температура є функцією двох просторових координат, то поле називається двовимірним нестаціонарним, а його запис має вигляд:

$$t=t(x,y,\tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = 0.$$

Якщо температура є функцією однієї просторової координати, таке поле називається *одновимірним*[10]:

$$t=t(x,\tau); \quad \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\partial t}{\partial y} = 0.$$

Вже розділі 3, при моделюванні процесу, як раз такий процес буде розглядатися та моделюватись

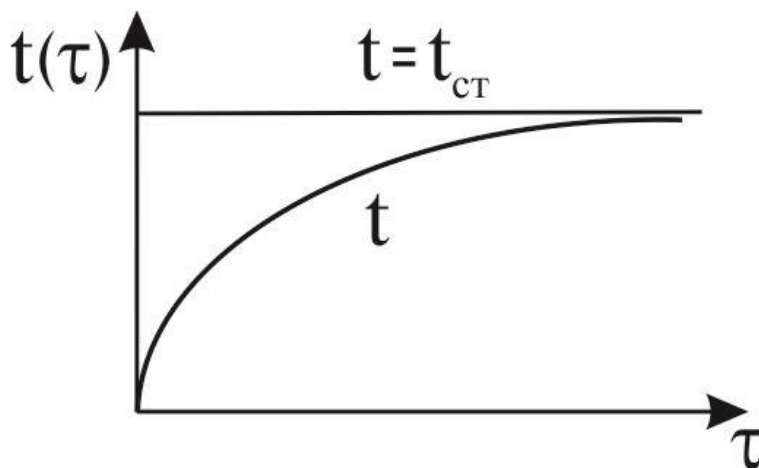


Рис. 1.3. Зміна температури з часом

Якщо розглядати поверхні, то температура залишається, як раз, сталою, такі процеси можна назвати - *ізотермічними*. Тому через кожну точку цього тіла можливо провести в цей момент часу тільки одну ізотермічну поверхню. І дивлячись на розташування ізотерм, можна оцінити інтенсивність змін температури в різних напрямках та чим густіше розташування ізотерм, тим і температура буде змінюватися інтенсивніше.[10]

1.2.2. Теплові хвилі та їх поширення у середовищах із загостреннями.

Теплові хвилі, як фізичне явище, представляють собою поширення теплової енергії в просторі та часі. Це явище має фундаментальне значення для багатьох природних процесів та інженерних застосувань. Особливий інтерес представляє вивчення поширення теплових хвиль у середовищах із загостреннями, тобто таких, де фізичні властивості матеріалу різко змінюються в просторі. Під режимом «із загостренням» мається на увазі сильно

нестационарні процеси, коли величини, що характеризують їх, змінюються в часі за законами, які приводять їх у нескінченність у кінцевий момент часу. Режим із загостренням – це такий режим розвитку системи, при якому один або кілька параметрів прагнуть нескінченності за кінцевий проміжок часу. Звичайно, що реальні фізичні величини, не набувають нескінченних значень, але можуть, при певних умовах, різко збільшуватися за короткий час. Аналіз цих режимів показує, що необмежені рішення виявляють свої характерні властивості до досягнення нескінченних величин. Це дає можливість оцінювати параметри таких режимів у моменти часу, близькі до «катастрофічних». Режими з загостреннями існують і в фізиці, і в живій природі [22]

Теплові хвилі — це процеси, при яких зміни температури поширюються через матеріал. Ці коливання можуть виникати в результаті періодичних або імпульсних змін температури в середовищі. На відміну від електромагнітних хвиль, які можуть поширюватися у вакуумі, теплові хвилі потребують матеріального носія. Їхнє поширення зумовлене процесами теплопровідності, конвекції та випромінювання. Хвилі можуть бути як стаціонарними, так і трансформованими в часі, залежно від виду електромагнітного, теплового, або механічного збурення, яке викликає їх. У однорідних середовищах теплові хвилі поширюються досить просто, однак у середовищах із загостреннями (різними матеріалами, геометричними формами) їх поведінка стає більш складною.

Факторами, які можуть впливати на поширення хвиль в середовищах із загостренням, можуть бути такими:

- Фізичні властивості матеріалу: Теплопровідність, теплоємність, щільність матеріалу визначають швидкість поширення теплової хвилі та її затухання.

- Геометрія загострення: Форма та розміри області зі зміненими властивостями впливають на характер відбиття та заломлення теплової хвилі.

- Граничні умови: умови теплообміну на межах середовища визначають інтенсивність теплових потоків.

Деякі з цих факторів, наприклад, матеріали, різні імпульси, як раз я буду розглядати та досліджувати в моїй дипломній роботі.

Для опису поширення теплових хвиль використовується загальний вираз закону Фур'є, записати ми можемо його в такому вигляді[19]:

$$\rho * C_p * \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k\nabla T) + Q \quad (1.6)$$

де ρ - густина матеріалу

C_p - питома теплоємність при постійному тиску

T - температура

t - час

k - коефіцієнт теплопровідності

∇ - оператор градієнта

Q - об'ємна щільність теплових джерел

При розгляді поширення теплових хвиль у середовищах із загостреннями необхідно враховувати такі фактори:

- Концентрація теплового потоку: у місцях загострення температура може підвищуватися через високі градієнти температури. Це явище, відоме як «ефект загострення», потребує вивчення специфічних умов рівняння теплопровідності.
- Неоднорідність матеріалу: якщо матеріал має неоднорідну структуру (наприклад, різні теплоємності, теплопровідності), це також вплине на характер розповсюдження тепла.
- Анізотропність: властивості матеріалу можуть змінюватись в залежності від напрямку. Це характерно для композитних матеріалів, деревини та кристалів, де теплопровідність може бути значно різною в різних напрямках.[18]

Якщо розглядати теоретичні дослідження, то вони показали, що при таких режимах «із загостренням» повинні виникати нові фізичні явища - локалізація тепла на певних ділянках тіла, що нагрівається, і виникнення теплових структур областей з великою концентрацією енергії, різко відокремлених від холодних областей. Структури підтримують себе самі, вони існують, доки надходить

енергія від зовнішніх джерел. Це явище отримало назву «ефекту метастабільної локалізації тепла»[23-26]. У режимі з загостренням тепловий фронт (координата точки з температурою, що дорівнює половині максимальної температури) спочатку рухається від джерела тепла, а потім у зворотний бік, і розмір області, що нагрівається, зменшується. У режимі без загострення розмір нагрітої області постійно збільшується[22].

1.2.3. Методи вирішення теплових завдань із загостреннями

Теплові задачі із загостреннями, тобто задачі, в яких фізичні властивості матеріалу різко змінюються в просторі, є одними з найскладніших у теплофізиці. Це пов'язано з необхідністю врахування таких факторів, як:

- Неоднорідність матеріалу: коефіцієнт теплопровідності, питома теплоємність та інші властивості можуть змінюватися в широких межах.
- Складні геометричні форми: наявність виступів, западин, отворів ускладнює аналітичне розв'язання задач.
- Нелінійні процеси: фазові переходи, випромінювання, конвекція можуть суттєво впливати на розподіл температури.

Основні методи вирішення

1. Аналітичні методи:

1.1 Метод розділення змінних: ефективний для простих геометричних форм та однорідних матеріалів, приводить до розв'язку у вигляді рядів або інтегралів.

1.2 Метод конформних відображень: застосовується для задач з простою геометрією. Дозволяє звести задачу до більш простої форми.

1.3 Метод інтегральних перетворень: використовується для розв'язання задач з різними граничними умовами.

- #### **2. Чисельні методи, за звичай ці методи базуються на розв'язанні диференціального рівняння теплопровідності і це рівняння ускладнюється при загостренні. Приклади таких підходів:**

2.1 Метод скінченних елементів (МСЕ)- це потужний чисельний метод, широко використовуваний для розв'язання різноманітних задач інженерної фізики, зокрема задач теплопровідності в неоднорідних середовищах. Його популярність зумовлена універсальністю, можливістю моделювання складних геометричних форм та різноманітних граничних умов.

Основна ідея МСЕ

- Дискретизація області: область, в якій розв'язується задача, розбивається на дрібні елементи (трикутники, чотирикутники для 2D задач, тетраедри, шестигранники для 3D задач). Ці елементи називаються скінченними елементами.
- Апроксимація розв'язку: в межах кожного елемента невідома функція (температура) апроксимується простими функціями (лінійними, квадратичними тощо).
- Формування системи алгебраїчних рівнянь: для кожного вузла скінченної елементної сітки складається рівняння теплового балансу. В результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку можна розв'язати стандартними чисельними методами [18,19,21].

Застосування МСЕ для розв'язання задач теплопровідності.

- Формулювання задачі. Записується рівняння теплопровідності в диференціальній формі для кожного елемента.
- Вибір типу елементів. В залежності від геометрії області та необхідної точності розрахунків обираються відповідні типи скінченних елементів (трикутні, чотирикутні, тетраедричні тощо).
- Апроксимація функцій. Вибираються апроксимуючі функції для температури в межах кожного елемента (лінійні, квадратичні тощо).
- Складання матриці жорсткості та вектору навантажень. Інтегруючи рівняння теплопровідності по об'єму кожного елемента, отримуємо систему алгебраїчних рівнянь.

- Розв'язання системи рівнянь: отримана система рівнянь розв'язується за допомогою стандартних чисельних методів (метод Гаусса, метод спряжених градієнтів тощо)[21,29,31].

Переваги МСЕ

- Універсальність: може бути застосований для розв'язання широкого класу задач.
- Гнучкість: дозволяє моделювати складні геометричні форми та неоднорідні матеріали.
- Точність: забезпечує високу точність розрахунків при використанні достатньо дрібної сітки.
- Можливість автоматизації. Існують численні програмні комплекси, які реалізують МСЕ. Основним програмним комплексом для МСЕ є COMSOL Multiphysics: Один з найпопулярніших програмних комплексів для розв'язання задач інженерної фізики, включаючи задачі теплопровідності [18,26,29,32].

2.2 Метод скінченних різниць (МСР): простий у реалізації метод, але менш точний за МСЕ для складних геометрій. Цей метод дозволяє дискретизувати просторові та тимчасові змінні на сітці. Для рівняння теплопровідності, дискретизація може виглядати так[18, 21]:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} = \alpha \left(\frac{T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right) \quad (1.7)$$

де Δx , Δy — дискретизації по простору

Δt — дискретизація по часу,

n — номер часу

i, j — координати вузлів сітки.

2.3 Метод граничних елементів: ефективний для задач з обмеженою областю.

2.4 Метод скінченних об'ємів: заснований на законі збереження енергії для кожного елементарного об'єму

2.5 Аналіз методом моментів: цей метод дозволяє проводити аналіз стійкості та динамічних аспектів теплопередачі. [18]:

2.6 Експериментальні методи:

- Інфрачервона термографія: дозволяє візуалізувати розподіл температури на поверхні тіла.
- Термопари: використовуються для вимірювання температури в окремих точках.
- Лазерна термометрія: безконтактний метод вимірювання температури. [18,19].

Вибір методу залежить від:

- Геометрії області: для простих форм доцільно використовувати аналітичні методи, для складних – чисельні.
- Фізичних властивостей матеріалу: Для неоднорідних матеріалів більш підходять чисельні методи.
- Граничних умов: Для складних граничних умов також краще використовувати чисельні методи.
- Необхідної точності результатів: Для отримання точних результатів рекомендується використовувати МСЕ. [18,21,26,28,32]:

Взявши теоретичні та практичні висновки при вивченні режимів із загостренням, про які вже говорилося вище, можна зробити певні висновки, що цей режим породжує ряд нових явищ, зокрема: локалізацію тепла на певних ділянках нагрітого тіла, виникнення теплових структур та ін. Ці структури самопідтримуються, використовуючи тепло, що надходять в систему. Цім системам дали назву току, як метастабільна локалізація тепла[22].

Локалізація тепла може бути розглянута в задачах про розповсюдження тепла в холодний напівпростір при нагріванні кордону або внутрішньої ділянки простору в режимі із загостренням. В одновимірному випадку процес розповсюдження тепла описується рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(a(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (1.8)$$

де T – температура, $a(T) = k/c\rho$ – коефіцієнт температуропровідності середовища (наголошується, що він залежить від температури), k – коефіцієнт теплопровідності, c – питома теплоємність, ρ – щільність середовища [22-26].

В роботі [20] було встановлено, що якщо температура на межі середовища з коефіцієнтом температуропровідності, що росте з температурою, збільшується, прагнучи нескінченності при наближенні до кінцевого моменту часу, то поширення тепла вглиб середовища протягом проміжку часу, коли підводиться тепло, відсутня. Якщо розглянути детальніше, то температура буде зростати по закону :

$$T(0, t) = \frac{T_0}{(t_f - t)^n} \quad (1.9)$$

Враховуючи, що $a(T) = a_0 T^\sigma$, де $\sigma > 0$, початкова температура середовища - $T(z, 0) = 0$, t_f – час, так званий у цих процесах, це час фокусування.

Розглянемо режими нагріву, їх тут існує три:

1. Якщо $n > 1/s$ (HS - режим) – локалізація тепла відсутня. Тепло в холодне середовище поширюється у вигляді хвилі з напівшириною температурного фронту, що просто росте.

2. Якщо $n = 1/s$ (S – режим) задача має аналітичне вирішення:

$$T(x, t) = \begin{cases} T_0^{-\frac{1}{\sigma}} \left(1 - \frac{x}{x_F}\right)^{\frac{2}{\sigma}}, & 0 \leq x \leq x_F \\ 0, & x > x_F \end{cases} \quad (1.10)$$

де x_F – глибина прогрівання речовини тепловою хвилею. Вона не змінюється з часом, хоча кількість тепла у зоні локалізації необмежено збільшується. Але далі в середовище тепло не поширюється.

3. Якщо $n < 1/s$ (LS – режим) глибина проникнення тепла у середовище згодом зменшується, фронт хвилі далі не просувається, півширина фронту скорочується.

Який можна зробити с цього висновок, що якщо теплова дія граничного S – режиму та LS – режиму на середовище буде локалізована[20].

В роботі [20] , як раз описані ці режими та експериментально доведено, що такі процеси існують та мають велике значення для подальшого розвитку . Також було розглянуто та описано тепловий процес «із загостренням» в інших літературних виданнях та статтях і як було описано вище. Я к інших випадках градієнт температури в загостренні матиме вигляд схожий на формули описані вище:

$$Q = -k\nabla T \quad (1.8)$$

де Q — тепловий потік через одиницю площі. У місцях загострення, градієнти температури можуть ставати великими, що призводить до збільшення теплового потоку. Температура в області загострення: при обчисленні температури в точці загострення може використовуватись розв'язок для випадку однорідної теплопередачі[20,21,24,27]:

$$T(x, t) = T_0 + \frac{Q}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{c\rho}} \right) \quad (1.9)$$

де T_0 — початкова температура

ρ - густина матеріалу

C - питома теплоємність

t - час

Модель, яка описує хвильове явище, може включати:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 T \quad (1.10)$$

де $c = \sqrt{\frac{k}{\rho c}}$ — швидкість поширення теплової хвилі [19,21].

Доречно сказати, що формули (1.3,1.6) використовуються в таких дуже відомих програмних комплексах програми COMSOL Multiphysics для базового розрахунку теплопровідності в стандартній бібліотеці модуля Heat Transfer in Solids.

Висновки до першого розділу

Теплові структури в стрижнях є важливим об'єктом для дослідження в теплотехніці та матеріалознавстві. Розуміння різних типів теплових структур допомагає інженерам проектувати більш ефективні системи, здатні витримувати термічні навантаження і оптимізувати робочі умови. У вашій дипломній роботі ви можете вивчити цю тему детальніше, аналізуючи конкретні приклади та проведення експериментів для підтвердження теорій.

Розуміння основ теплопередачі, механізмів кондукції, конвекції і радіації, а також комплексне використання коефіцієнтів теплопередачі є важливими для проектування ефективних систем у різних областях техніки та промисловості. Ці знання дозволяють оптимізувати теплові процеси, поліпшувати енергоефективність та підвищувати якість продукції[10,21,32].

Закон Фур'є має широке застосування в різних галузях, зокрема:

- Теплоізоляція: вибір матеріалів з низьким коефіцієнтом теплопровідності для зменшення теплових втрат.
- Теплообмінники: розрахунок ефективності теплообміну між різними середовищами.
- Мікроелектроніка: аналіз теплового режиму мікросхем.
- Геотермальна енергетика: оцінка теплових потоків у земній корі.

Вивчення поширення теплових хвиль у середовищах із загостреннями є актуальним і перспективним напрямком досліджень. Глибоке розуміння цих процесів дозволяє розробляти нові матеріали та технології, що мають широке застосування в різних галузях науки і техніки, наприклад деякі з них:

- природні явища: багато природних процесів пов'язані з поширенням теплових хвиль у середовищах із різкими змінами властивостей. Це стосується, наприклад, геотермальних процесів, теплопередачі в ґрунті, поширення тепла в атмосфері;
- інженерні застосування: розуміння процесів теплопередачі в неоднорідних матеріалах є критично важливим для розробки ефективних

теплоізоляційних матеріалів, систем охолодження електроніки, а також для аналізу теплових напружень у конструкціях;

- медицина: поширення тепла в біологічних тканинах з різними властивостями відіграє важливу роль у багатьох медичних процедурах, таких як гіпертермія та кріохірургія.

Вибір методу вирішення теплових задач із загостреннями залежить від конкретної задачі та необхідної точності результатів. Сучасні комп'ютерні технології дозволяють ефективно розв'язувати складні теплові задачі, що має велике значення для багатьох галузей науки і техніки.

А також удосконалювання існуючих методів моделювання та розвиток обчислювальної техніки приводить до того, що моделювання процесів переходить на більш сучасні тенденції, такі як:

- Розробка ефективних чисельних алгоритмів: постійно з'являються нові алгоритми, що дозволяють зменшити час розрахунків та підвищити точність результатів.

- Використання паралельних обчислень: для розв'язання великомасштабних задач застосовують кластери та суперкомп'ютери.

- Інтеграція з іншими фізичними полями: розробляються моделі, що враховують взаємодію теплових процесів з іншими фізичними явищами (наприклад, механічними деформаціями).

Який можна зробити висновок? Треба більш детально розглядати модель та вивчати різні методи, тому що невірне обрання методу або рішення, може привести до невірних дій та дати хибні надії на вирішення поставленої задачі.

Постановка моєї задачі складається в моделюванні тонкого стрижня, який має форму циліндра (D -діаметр, L -довжина), є три форми імпульсу (прямокутний, трикутний, з загостренням) довжина імпульсу t , також ми маємо три матеріали (мідь, сталь, графіт). Є ще й інші вхідні данні, але ми їх будемо розглядати пізніше, коли будемо повністю розбирати саму програму. Все що ми раніше розглядали в теоретичній частині, я буду використовувати для моделювання. Основою моїх обчислень буде використання, для мого випадку,

закону Фур'є та розв'язання задачі теплопровідності з використанням методу розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних (PDE). Зокрема, в цьому випадку використовують метод Pdesolve, який часто застосовується в математичному програмному забезпеченні для розв'язання таких рівнянь. Метод Pdesolve я буду використовувати в програмному продукті MATCAD[23,27,28].

РОЗДІЛ 2. Моделювання процесів теплових структур у тонких стрижнях.

2.1. Модель тонкого стрижня. Граничні умови

Моделювання теплових процесів у тонких стрижнях є важливою темою, яка може включати кілька ключових аспектів.

Основні рівняння теплопровідності в тонких стрижнях U загальному випадку для одномірного випадку:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

де T – температура, t - час, x - координата вздовж стрижня, α - температуропровідність.

Закон Фур'є описує теплопровідність і виражається рівнянням:

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

де q - тепловий потік, k - теплопровідність матеріалу, $\partial T/\partial x$ - градієнт температури.

Граничні та початкові умови.

Початкові умови задаються розподілом температури в стрижні на початковий момент часу:

$$T(x,0)=T_0(x)$$

Граничні умови визначаються температурою або тепловим потоком на краях стрижня:

Гранична умова першого роду (задана температура):

$$T(0,t)=T_L \text{ та } T(L,t)=T_R$$

Гранична умова другого роду (заданий тепловий потік):

$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=q_L \text{ та } \frac{\partial T}{\partial x}(L,t)=q_R.$$

Вплив граничних та початкових умов на теплові процеси. Вплив граничних та початкових умов на теплові процеси має дуже велике значення. Граничні та початкові умови значно впливають на розподіл температури в стрижні. Наприклад, задана температура на краях стрижня визначає напрямок і величину теплового потоку, тоді як початковий розподіл температури впливає

на швидкість досягнення термодинамічної рівноваги. Далі при розробці моделі також будемо вводити початкові та граничні умови і якщо це зробити невірнo, то розрахунки можуть бути геть несподіваними та, зрозуміло, дуже «аномальними», це як раз і впливає на розробку та моделювання системи[23,24].

Ми вже в розділі 1. розглянули моделювання теплових процесів різними методами, але основні тут ми можемо виділити та використати, це чисельні методи, такі як метод кінцевих різниць та метод кінцевих елементів. Метод кінцевих різниць дозволяє розв'язувати диференціальні рівняння, замінюючи їх різницевиими рівняннями:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T(x,t+\Delta t) - T(x,t)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T(x+\Delta x,t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2} \quad (2.4)$$

Цей метод часто використовується при програмуванні на таких мовах, Python (PyCharm Community Edition) та MATLAB, але, як я вже згадував, MATCAD є функція **Pdesolve**, для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних, але подібна цій функції є також функція в MATLAB. Також для моделювання може підійти такий універсальний програмний продукт, як COMSOL Multiphysics, який я неодноразово згадував, тому що там багато є вже готових та також можна використовувати для моделювання своїх рівнянь[25,28,29]

Для моделювання ми використовуємо стрижень, геометрію якого вказано на рис.2.1. Круговий стрижень діаметром D та довжиною L нагрівається джерелом тепла, розташованим на початку стрижня на ділянці от $x = 0$ до $x = d$. Рівняння теплопровідності за наявності джерел тепла має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\frac{A}{k} \quad (2.3)$$

де A – об’ємна щільність джерел тепла, $\text{Вт}/\text{м}^3$, $a = k/(c\rho)$ – температуропровідність, $\text{м}^2/\text{с}$, k – теплопровідність, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{град})$, c – питома теплоємність, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{град})$, ρ – щільність, $\text{кг}/\text{м}^3$, T – температура нагріву в градусах, x – координата вздовж осі стрижня, м , t – час, с [27].

2.2 Геометричні параметри стрижня. Метод розв’язання задачі.

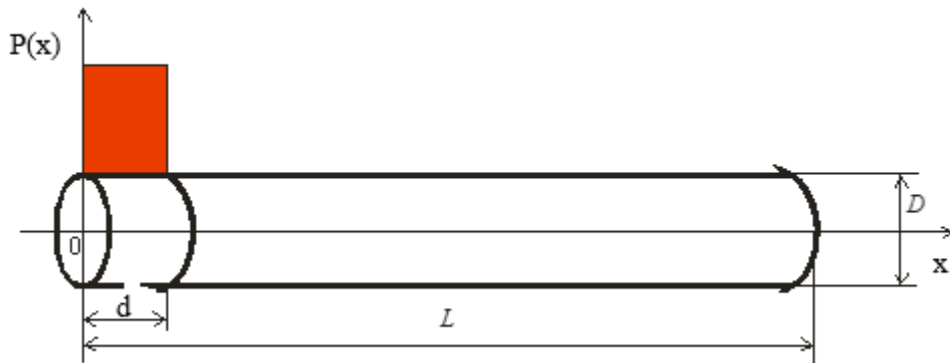


Рис. 2.1 Геометрія задачі

Можемо припустити, що P - потужність джерел тепла. Тоді їхня об’ємна щільність дорівнює:

$$A_{abs} = \frac{P}{V} = \frac{4P}{\pi D^2 d}, \quad (2.4)$$

де $V = \frac{\pi D^2}{4} d$ - об’єм ділянки, що нагрівається, де d довжина ділянки.

Частина цієї енергії йде підвищення температури циліндра, частина йде у зовнішнє середовище. Здійснюється цей догляд двома механізмами – конвекцією та випромінюванням.

1. Конвекція. Потужність, що йде з ділянки dx , дорівнює

$$dP_{conv} = \alpha_p (T - T_0) dx \quad (2.5)$$

де T_0 – температура довкілля, α_p - погонний коефіцієнт теплообміну (з одиниці довжини стрижня). У тонких стрижнів коефіцієнт теплообміну залежить від їх діаметра.

Об’ємна щільність цих теплових втрат:

$$A_{conv} = \frac{dP_{conv}}{dV} = \frac{4\alpha_p (T - T_0)}{\pi D^2}. \quad (2.6)$$

2. Випромінювання. Потужність, що йде з ділянки dx , дорівнює

$$dP_{rad} = \varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4)\pi D dz \quad (2.7)$$

де ε - коефіцієнт випромінювання,

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ - стала Стефана-Больцмана.

Об'ємна щільність цих теплових втрат:

$$A_{rad} = \frac{dP_{rad}}{dV} = \frac{4\varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4)}{D} \quad (2.8)$$

тут T – температура у кельвінах. При розв'язанні задачі, коли температура – у градусах Цельсія, цей вираз виглядає так:

$$A_{rad} = \frac{4\varepsilon\sigma[(T+273)^4 - (T_0+273)^4]}{D}. \quad (2.9)$$

Тепер рівняння (2.3) можна записати так:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = - \frac{A_{abs} - A_{conv} - A_{rad}}{k} \quad (2.10)$$

Підставивши сюди вирази (2.8) та (2.9), отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} - \frac{4\alpha_p}{\pi k D^2} (T(x,t) - T_0) - \frac{4\varepsilon\sigma}{kD} [(T(x,t) + 273)^4 - (T_0 + 273)^4] - \frac{1}{a} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \\ = - \frac{4P(x,t)}{\pi k D^2 l}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вважаємо, що потужність нагріву розподілена рівномірно на ділянці стрижня от $x=0$ до $z=d$:

$$P(z,t) = \begin{cases} P_0 & \text{if } 0 < x \leq l \\ 0 & \text{if } d < x \leq L \end{cases} \quad (2.12)$$

Початкову умову та граничні умови покладемо такими:

$$T(x,0) = T_0, \quad \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T(L,t)}{\partial x} = 0. \quad (2.13)$$

Вони показують, що через торці стрижня, якщо вона тонка, тепла йде мало[20].

Виходячи з загальної формули (2.3), для моделювання нашого процесу ми можемо сформулювати рівняння теплопровідності (2.14), Воно є розширеним варіантом рівняння, що описує розподіл температури $T(x,t)$ в одновимірному стержні. Це рівняння включає комбінацію простих та змішаних похідних, що означає наявність різних механізмів теплопередачі і, можливо, зовнішнього теплового впливу[6,20,28]:

$$T_{xx}(x, t) - \gamma^2 T(x, t) - \frac{1}{\alpha} T_t(x, t) = \frac{-4I(x, t)}{\pi \cdot k \cdot D} \quad (2.14)$$

де T_{xx} — друга похідна температури по просторовій координаті x .

T_t — перша похідна температури по часу t .

γ , α , k , D — матеріальні параметри.

$I(x, t)$ — інтенсивність теплового імпульсу, що може змінюватись у часі та просторі.

Граничні умови (2.13) вказують на теплову ізоляцію обох кінців стержня, а в нашому моделюванні будемо використовувати такі умови:

1. початкова умова: $T(x, 0) = 0$, це означає, що на початку часу температура в усій області стержня дорівнює нулю.

2. граничні умови: $T_x(0, t) = 0$ та $T_x(L, t) = 0$

Інтерпретація членів рівняння:

- T_{xx} - друга похідна температури по просторовій координаті x та описує кривизну температурного поля. Вона відображає, наскільки швидко змінюється температура в просторі..
- $\gamma^2 T(x, t)$ цей член вводиться для опису додаткових фізичних ефектів, таких як: теплові втрати через випромінювання або конвекцію. Параметр γ характеризує інтенсивність цих процесів
- $(1/\alpha) T_t(x, t)$ перша похідна температури по часу t описує швидкість зміни температури в часі. Параметр α , як правило, пов'язаний з тепловою дифузійністю матеріалу.
- $(-4 \cdot I(x, t)) / (\pi \cdot k \cdot D)$ - цей член описує вплив зовнішнього теплового джерела на температурне поле. Функція $I(x, t)$ визначає інтенсивність цього джерела, а параметри k і D можуть бути пов'язані з теплопровідністю матеріалу та іншими характеристиками [29, 31, 32].

В наступному розділі ми вже будемо виконувати моделювання процесу в стержні за допомогою програмного забезпечення MATCAD та Pdesolve – це вбудована функція в Mathcad для розв'язання PDE. PDE – це абревіатура від англійського терміна Partial Differential Equation, що в перекладі на українську означає «Диференціальне рівняння в частинних похідних». Розв'язання

рівняння теплопровідності за допомогою PDE є саме таким диференціальним рівнянням в частинних похідних. Тому для цього розв'язання природно використовувати методи, спеціально розроблені для таких рівнянь[33,34].

Висновки до другого розділу.

Моделювання теплових процесів у тонких стрижнях є фундаментальною задачею в багатьох галузях науки та інженерії. Воно дозволяє зрозуміти, як тепло розподіляється в таких системах, передбачити їх поведінку в різних умовах та оптимізувати їх роботу

1. Моделювання процесу, який ми обрали можливо зробити різними методами, та з використанням різного ПО.

2. При моделюванні теплового процесу можна використовувати різні формули, але основною формулою, яку використовують для розрахунку процесу можна вважати формули, як загальних так і конкретних випадках це формули, які відносяться до закону Фур'є.

3. Програмне забезпечення.

Для проведення чисельного моделювання теплових процесів використовуються різноманітні програмні продукти, такі як:

- COMSOL Multiphysics: Потужний інструмент для моделювання різних фізичних явищ, включаючи теплопередачу.
- MATLAB: Математичний пакет, що дозволяє розв'язувати різноманітні задачі, включаючи задачі теплопередачі.
- Mathcad: Програма для інтерактивних математичних обчислень, яка також може бути використана для моделювання теплових процесів. Mathcad традиційно розглядається більше як інструмент для інтерактивних обчислень та візуалізації даних, а не як повноцінне середовище розробки програмного забезпечення [31].

4. Методи моделювання. Для моделювання теплових процесів у тонких стрижнях зазвичай використовують такі методи:

- Аналітичні методи: застосовуються для простих геометричних форм і граничних умов.
- Чисельні методи: метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод граничних елементів. Ці методи дозволяють

розв'язувати складні задачі з довільною геометрією і граничними умовами.

РОЗДІЛ 3. Моделювання процесів теплових структур у тонких стрижнях.

3.1. Опис програмного забезпечення та функціонального призначення .

Mathcad – це багатофункціональна інтерактивна обчислювальна система, призначена для автоматизації математичних, інженерно-технічних та наукових розрахунків. Програма дозволяє виконувати як чисельні, так і символічні обчислення, будувати різноманітні графіки та створювати інтерактивні документи.

Основні функціональні можливості Mathcad:

Введення математичних виразів: Mathcad використовує звичайні математичні позначення, що робить його використання інтуїтивно зрозумілим. Ви можете вводити формули, рівняння, матриці та вектори так, як ви їх записуєте на папері[31].

Чисельні розрахунки: Програма дозволяє виконувати різноманітні чисельні обчислення, включаючи арифметичні операції, тригонометричні функції, експоненти, логарифми, інтеграли, похідні та багато іншого.

Символьні обчислення: Mathcad може виконувати символічні перетворення виразів, знаходити аналітичні розв'язки рівнянь, спрощувати вирази та виконувати інші операції символічної математики.

Розв'язання рівнянь: програма дозволяє розв'язувати алгебраїчні, диференціальні та інтегральні рівняння, як чисельно, так і аналітично.

Побудова графіків: Mathcad дозволяє будувати різноманітні графіки функцій, даних, векторних полів та інших математичних об'єктів.

Програмування: Mathcad має власну мову програмування, що дозволяє створювати користувацькі функції та процедури[30,34].

Інтерактивність: результати розрахунків можна легко змінювати, змінюючи вхідні дані. Це дозволяє проводити аналіз "що якщо" та оптимізувати моделі.

Документування: Mathcad дозволяє створювати добре структуровані документи, які містять як математичні вирази, так і текстові пояснення.

Переваги Mathcad:

Інтуїтивний інтерфейс: програма використовує звичайні математичні позначення, що робить її легкою у вивченні.

Багатофункціональність: Mathcad об'єднує в собі можливості численних математичних пакетів.

Візуалізація: можливість побудови різноманітних графіків дозволяє наочно представити результати розрахунків.

Інтерактивність: легко змінювати вхідні дані та аналізувати результати.

Документування: створення добре структурованих документів з математичними виразами і текстовими поясненнями[33].

Mathcad є потужним інструментом для інженерів, науковців і студентів, який дозволяє швидко і ефективно вирішувати широкий спектр математичних задач. Завдяки своїй інтуїтивності і багатофункціональності, Mathcad є одним з найпопулярніших програмних продуктів для технічних розрахунків[30,33].

3.2 Опис структури програми та технічних засобів для створення ПО.

Як було зазначено вище, для моделювання використовується програмне забезпечення Mathcad. Всі операції в моїй програмі Mathcad виконуються послідовно. Основні кроки програми.

1. Ввід початкових даних:

L – довжина стрижня, м

D – діаметр стрижня, м

k – коефіцієнт температуропровідності, m^2/c

c - питома теплоємність, Дж/(кг*град)

ρ – плотність, kg/m^3

d – довжина ділянки нагріву, м

q_0 – інтенсивність пучка, W/m^2

α_p – погонний коефіцієнт теплообміну, $W/m^*град.$

t_p – тривалість нагріву, с.

2. Початкові розрахунки:

$a = \frac{k}{\rho \cdot c}$ - коефіцієнт теплопровідності, м²/с.

$\tau = \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \rho \cdot c}{4 \cdot a \cdot \rho}$ - теплова постійна часу, с.

$$\gamma = \sqrt{\frac{4 \cdot a \cdot \rho}{\pi \cdot k \cdot D^2}}$$

$Tt = 5 \tau$ - інтервал часу, с.

t= від 0 до $2t_p$, крок $t_p/100$.

3. Пучок випромінювання

$f_1(t)$ – прямокутний імпульс.

$I(x,t)$ – інтенсивність прямокутного імпульсу.

$f_2(t)$ – трикутний імпульс.

$I(x,t)$ – інтенсивність трикутного імпульсу.

$f_3(t)$ - імпульс із загостренням.

$I(x,t)$ - інтенсивність імпульсу із загостренням.

4. Енергія імпульсу

$\int_0^{t_p} f_1(t) dt$ - енергія прямокутного імпульсу

$\int_0^{t_p} f_2(t) dt$ - енергія трикутного імпульсу

$\int_0^{t_p} f_3(t) dt$ - енергія імпульсу із загостренням

5. Рішення рівняння теплопровідності

$T(x,t)=0$ - початкові умови

$T_x(x,t)=0$, $T_x(L,t)=0$ - граничні умови

$T_{xx}(x,t) - \gamma^2 T(x,t) - \frac{1}{\alpha} T_t(x,t) = \frac{-4I(x,t)}{\pi \cdot k \cdot D}$ - рівняння.

6. Розподіл температури впродовж стрижня (графік температури ($T(x,t)$) від довжини стрижня (x)).

7. Точки ширини теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

Mathcad традиційно розглядається більше як інструмент для інтерактивних обчислень та візуалізації даних, а не як повноцінне середовище розробки програмного[33].

Як вже раніше ми обговорювали великі можливості MATCAD , так є і обмеження для розробки та моделювання.

Обмеження Mathcad як середовища розробки:

- Не призначений для великих проектів: Mathcad більше підходить для створення невеликих програм і скриптів, ніж для розробки великих і складних програмних систем.

- Обмежена бібліотека функцій: Хоча Mathcad має багату бібліотеку вбудованих функцій, вона може бути недостатньою для вирішення складних задач.

- Відсутність деяких сучасних можливостей: Mathcad не має деяких сучасних можливостей, які є в інших середовищах розробки, таких як відлагодження, профілювання та інтегроване середовище розробки (IDE).

Якщо вам потрібне повноцінне середовище розробки програмного забезпечення, то варто розглянути такі альтернативи:

- MATLAB: Має потужний інструментарій для наукових обчислень і візуалізації даних, а також велику кількість додаткових інструментів для різних галузей.
- Python: Універсальна мова програмування з великою кількістю бібліотек для наукових обчислень (NumPy, SciPy, Matplotlib).
- COMSOL Multiphysics: універсальна система для моделювання різних фізичних, теплових, т.д. процесів з використанням різних 1D,2D,3D моделей.

3.3 Початкові та вихідні дані.

В розділі 3.2 основна структура програми дали в таблиці 3.1 буде зведено основні дані для 3-х матеріалів : мідь , сталь, графіт.

Таблиця 3.1.

Основні дані матеріалів для моделювання

	Мідь	Сталь	Графіт
$k, \text{ м}^2/\text{с}$	390	58	200
$\rho, \text{ кг}/\text{м}^3$	8890	7800	1700
$c, \text{ Дж}/(\text{кг}\cdot\text{град})$	385	460	750

Далі ми розглянемо імпульси, за допомогою яких ми будемо моделювати нагрівання стрижня. Таблиці 3.2 зібрано розрахунок енергії імпульсу та його форма існування.

Таблиця 3.2

Розрахунки функцій імпульсів діючих на стрижень.

Назва імпульсу	Дія імпульсу	Енергія імпульсу
Прямокутний	$f_1(t) := \begin{cases} 10 & \text{if } 0 \leq t \leq t_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\int_0^{t_p} f_1(t) dt = 1 \times 10^7$
Трикутний	$f_2(t) := \begin{cases} \frac{2 \cdot 10 \cdot t}{t_p} & \text{if } 0 \leq t \leq t_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\int_0^{t_p} f_2(t) dt = 1 \times 10^7$
Із загостренням	$f_3(t) := \begin{cases} \frac{52 \cdot 10 \cdot 10^{11}}{(200 - t)^6} & \text{if } 0 \leq t \leq t_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\int_0^{t_p} f_3(t) dt = 1.008 \times 10^7$

Якщо поглянути на таблицю, то ми побачимо, що функції, коли діють імпульси зроблені так, щоб їх енергія була однаковою, а вже пікові значення та інтенсивність були різні. В таблиці 3.3, зображено самі вже форми та інтенсивність імпульсів, які діють на стрижень.

Якщо розглянути більш детально цю таблицю, то можна побачити, що як вже раніше я казав енергія імпульсу є практично однаковою, це ми бачимо в таблиці 3.2, але інтенсивність та форма імпульсів є різною, що дає нам зробити висновок, що в випадку використання різних імпульсів з однаковою енергією інтенсивність дію на стрижень буде різною і якщо глянути на

графіки імпульсів в таблиці 3.3, то побачимо, що при прямокутному імпульсі інтенсивність буде більш чим в п'ять разів нижчою ніж при імпульсі з загостренням.

Таблиця 3.3

Таблиця розрахунку інтенсивності та форми імпульсу

Назва імпульсу	Інтенсивність	Форма імпульсу
Прямокутний	$I(x, t) := \begin{cases} 10 & \text{if } (0 \leq x \leq d) \cdot (0 \leq t \leq tp) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
Трикутний	$I(x, t) := \begin{cases} \frac{2 \cdot 10 \cdot t}{tp} & \text{if } (0 \leq x \leq d) \cdot (0 \leq t \leq tp) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	
Із загостренням	$I(x, t) := \begin{cases} \frac{10 \cdot 52 \cdot 10^{11}}{(200 - t)^6} & \text{if } (0 \leq x \leq d) \cdot (0 \leq t \leq tp) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	

3.4 Основні розрахунки, графіки та аналіз моделювання.

В попередніх розділах ми розглянули структуру програми, основні формули, які використовуються при моделюванні, а зараз розглянемо вже саме рішення, точніше рішення рівняння буде виконувати сам MATCAD, своїми внутрішніми ресурсами, але потім ми зможемо використовувати ці ресурси для створення графіків та подальшого розрахунку. На рис.3.4 зображено, як за допомогою MATCAD можна обчислити рівняння (2.14) використовуючи тільки декілька команд.

Розв'язання рівняння теплопровідності

Given

$$T_{xx}(x, t) - \gamma^2 \cdot T(x, t) - \frac{1}{a} \cdot T_t(x, t) = \frac{-4 \cdot l(x, t)}{\pi \cdot k \cdot D}$$

$$T(x, 0) = 0 \quad T_x(0, t) = C \quad T_x(L, t) = C$$

$$T := \text{Pdsolve} \left[T, x, \left(\begin{array}{c} 0 \\ L \end{array} \right), t, \left(\begin{array}{c} 0 \\ Tt \end{array} \right), 600, 100 \right]$$

Рис.3.4 Розв'язання рівняння засобами MATCAD.

Основний опис програми та моделювання можна тут завершити, але як вже було вказано, нам треба моделювати стрижень з різними матеріалами, які вказані в таблиці 3.1.

1. Для початку ми вносимо в початкові дані основні параметри для міді.

І отримаємо такі проміжні дані:

- коефіцієнт температуропровідності $a = 1.139 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.
- теплова постійна часу $\tau = 358,419 \text{ с}$.
- $\gamma = 4.948$

Далі програма розраховує для кожного імпульсу з таблиці 3.3 (мідь, сталь, графіт) і рівняння рис. 3.4, потім відображаються розподіл температур на рисунках рис.3.7, рис.3.10, рис.3.12 (прямокутного, трикутного, з загостренням). Далі на всіх подальших рисунках розподілу температури крок по $\Delta x = L/600$. Крок на графіках для часового розподілу температури в

подальшому теж буде однаковим і рівнятися 10 с, а вся вісь t буде від 0 то Tt . На рисунках позначено точками ширину теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

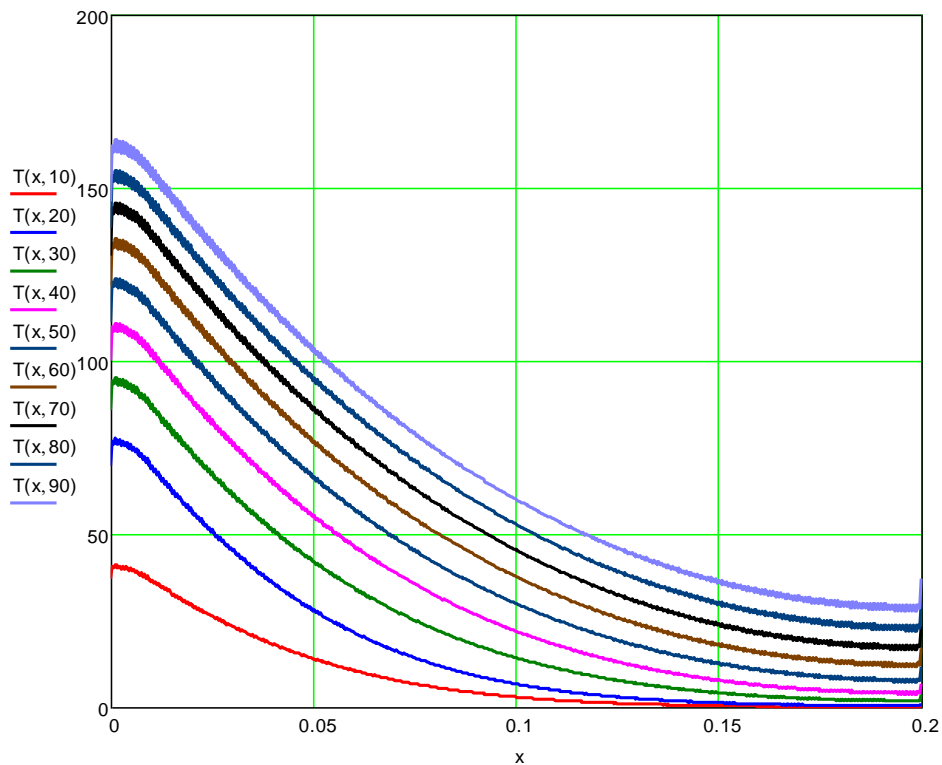


Рис 3.5 Розподіл температури матеріал – мідь, імпульс – прямокутний.

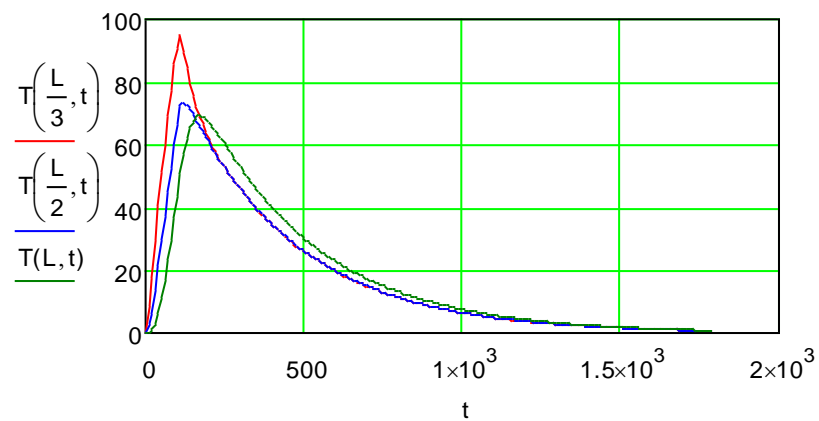


Рис. 3.6 Часовий хід температури, матеріал – мідь, імпульс – прямокутний.

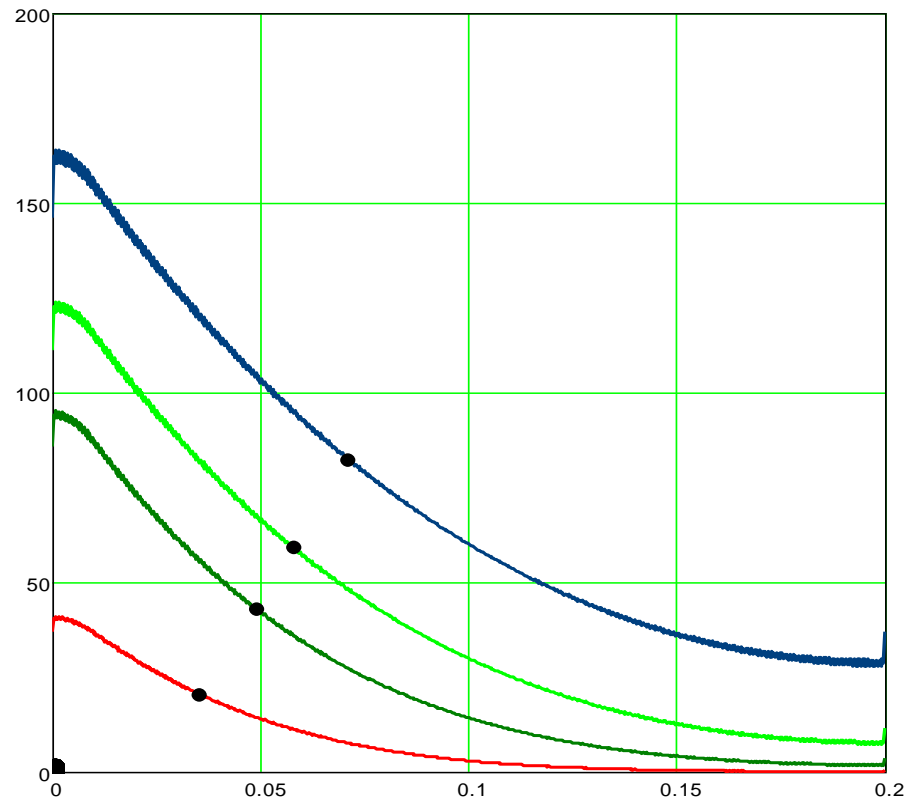


Рис 3.7 Розподіл температури продовж стрижня. (мідь, прямокутний)

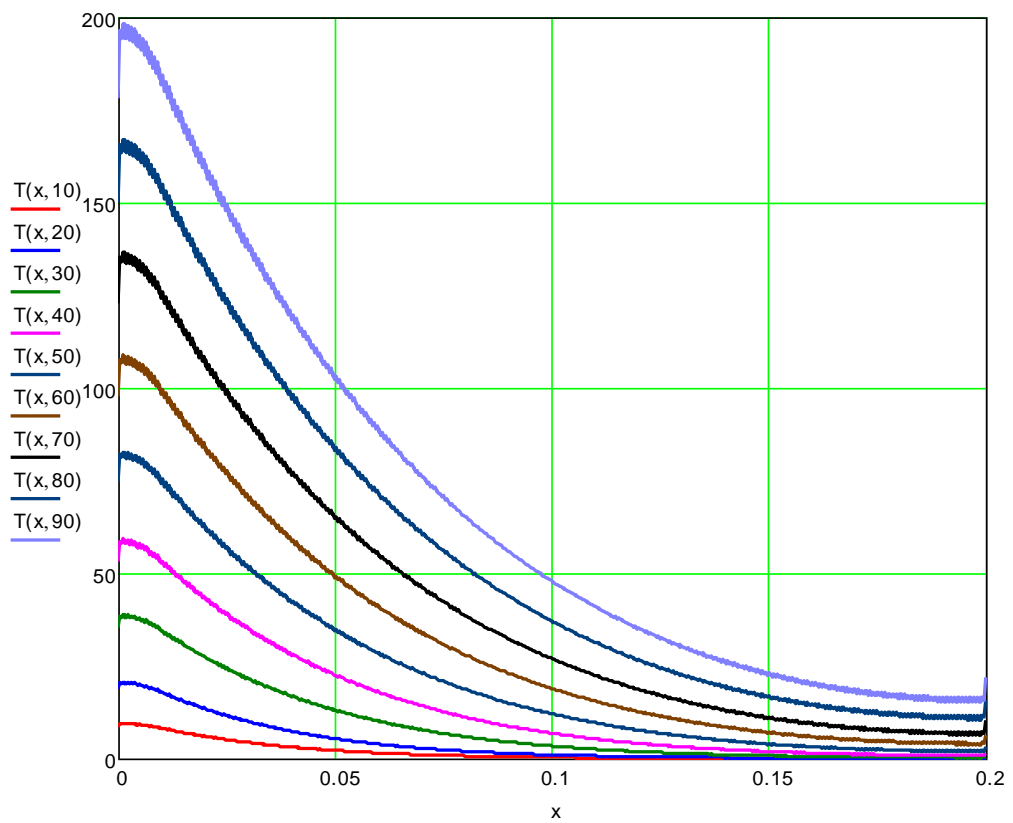


Рис 3.8 Розподіл температури продовж стрижня (мідь, трикутний).

На рис. 3.7 точками позначена ширина теплового фронту за половинним значенням максимальної температури

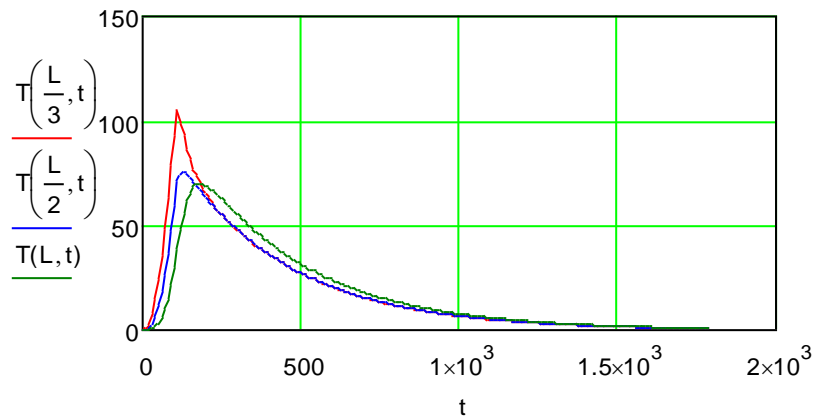


Рис. 3.9 Часовий хід температури, матеріал – мідь, імпульс – трикутний.

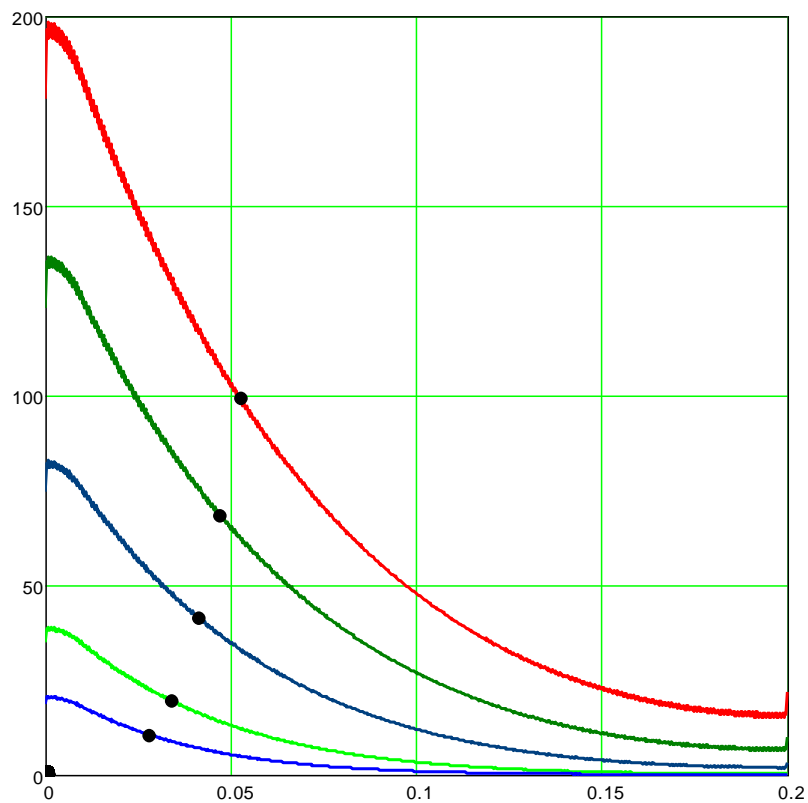


Рис 3.10. Розподіл температури продовж стрижня. (мідь, трикутний). Точки це ширина теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

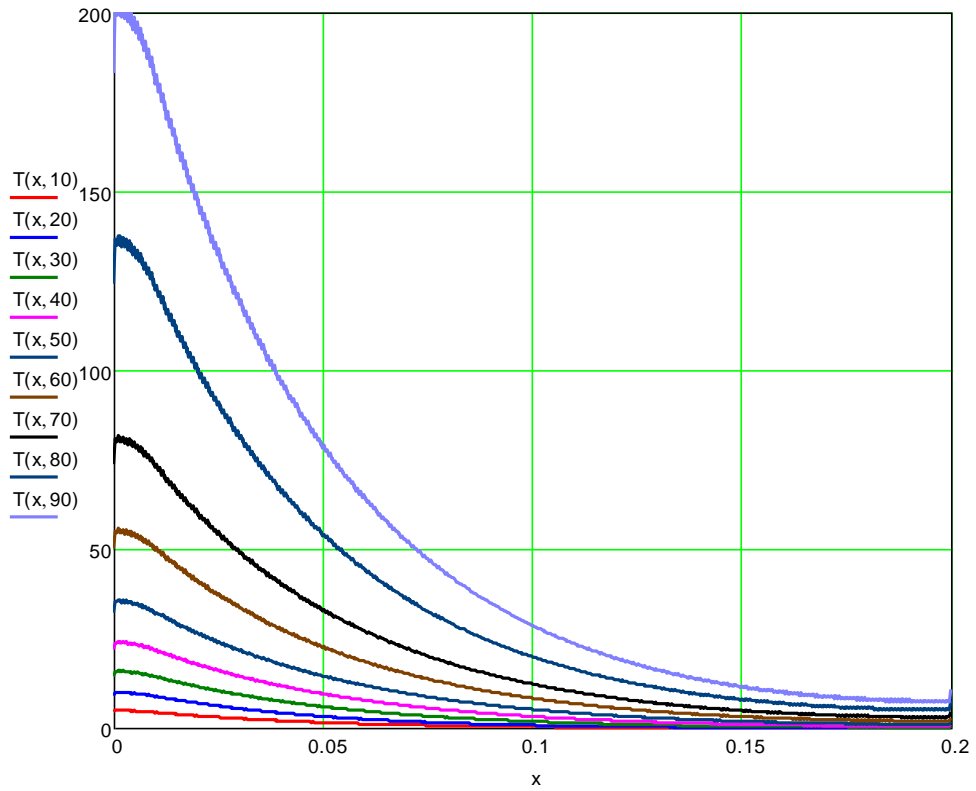


Рис. 3.11 Розподіл температури продовж стрижня (мідь, з загостренням).

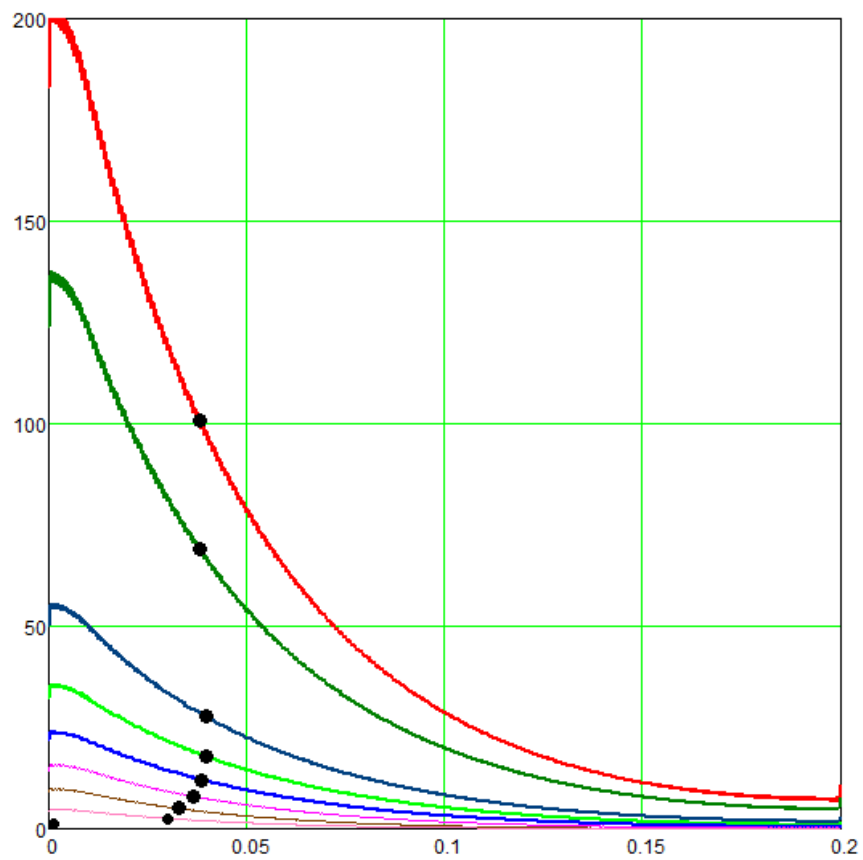


Рис 3.12. Розподіл температури продовж стрижня. (мідь, із загостренням).

Дали вже йдуть графіки розподілу температури матеріал - мідь, імпульс з загостренням (рис. 3.11-3.13). Також є графік де точками буде позначено ширина теплового фронту за половинним значенням максимальної температури, ці графіки вже в подальшому будемо аналізувати та робити висновки.

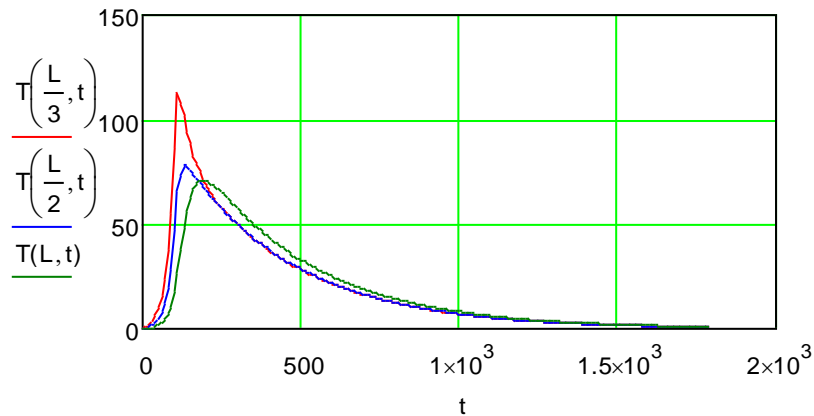


Рис. 3.13 Тимчасовий хід температури, матеріал – мідь, імпульс – з загостренням.

На рис.3.12 точками позначено ширину теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

2. Будимо використовувати матеріал стрижня сталь.

І отримаємо такі проміжні дані: коефіцієнт температуропровідності

$$a = 1.616 * 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с};$$

теплова постійна часу $\tau = 375,734 \text{ с};$

$$\Upsilon = 12.831$$

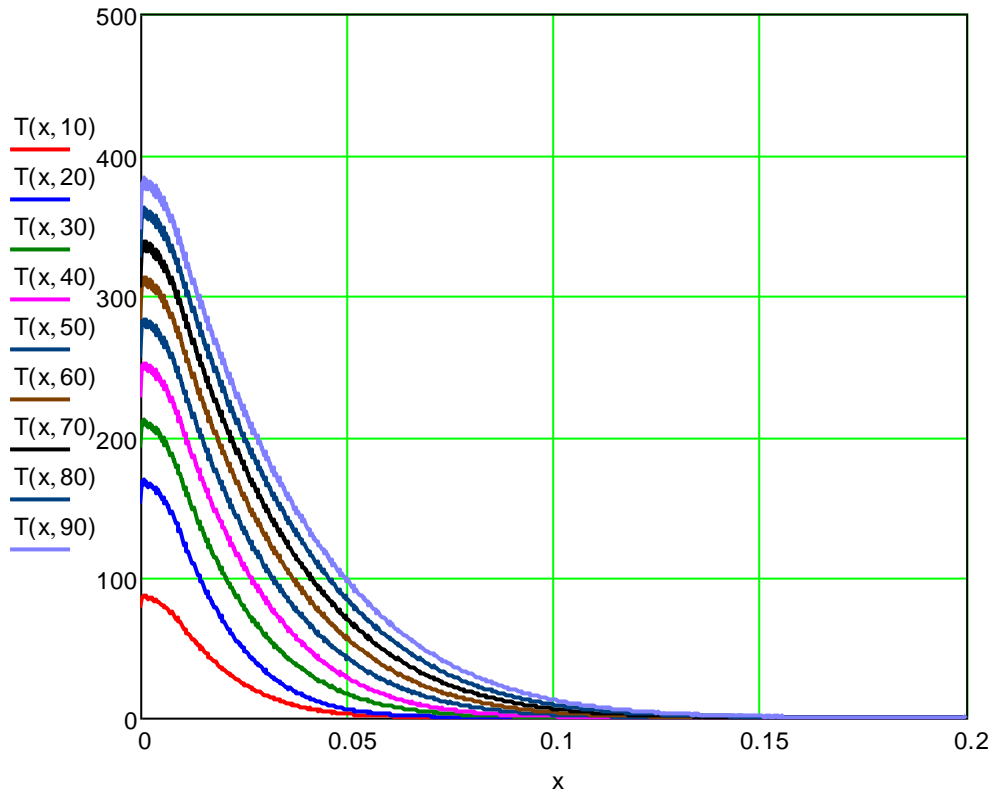


Рис. 3.14 Розподіл температури продовж стрижня(сталь, прямокутний).

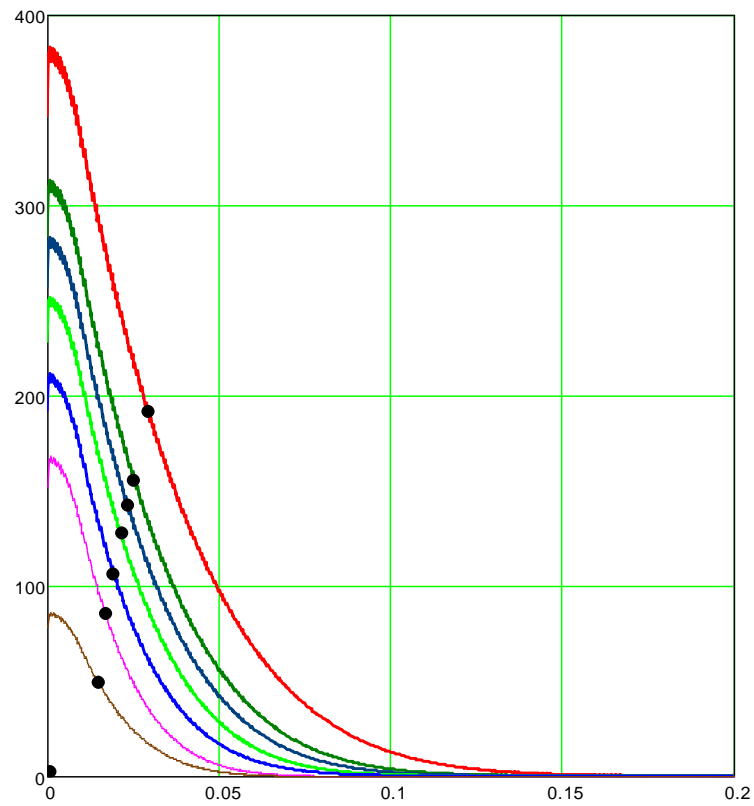


Рис 3.15. Розподіл температури продовж стрижня. (сталь, прямокутний).

На рис.3.15 точками позначено ширину теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

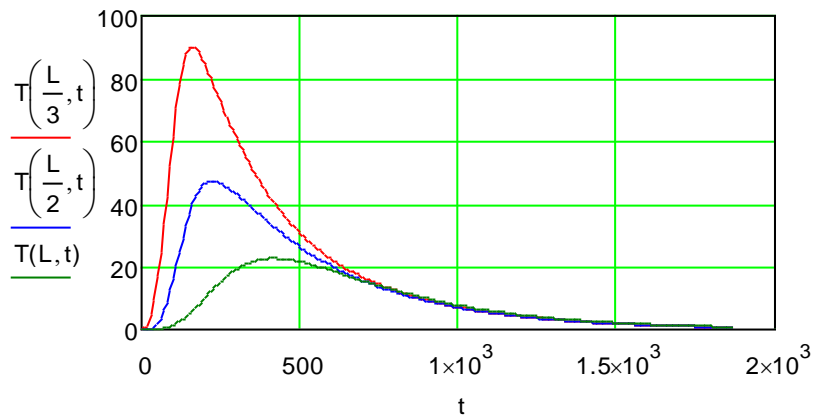


Рис. 3.16 Тимчасовий хід температури, матеріал – сталь, імпульс – з прямокутний.

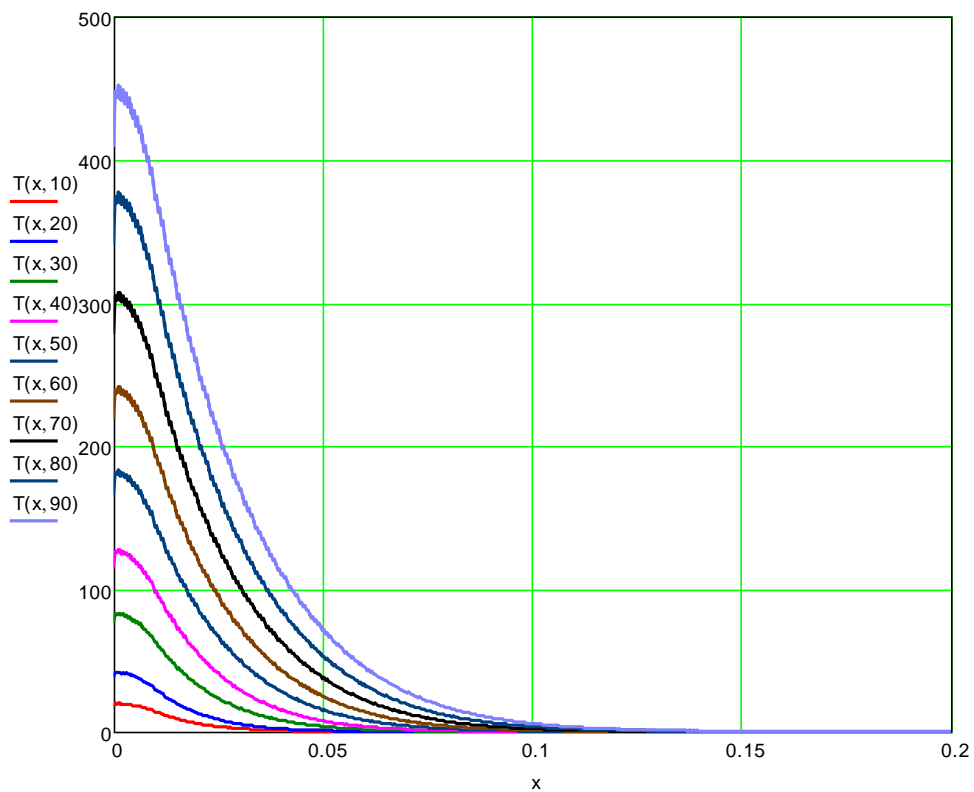


Рис. 3.17 Розподіл температури продовж стрижня. (сталь, трикутний).

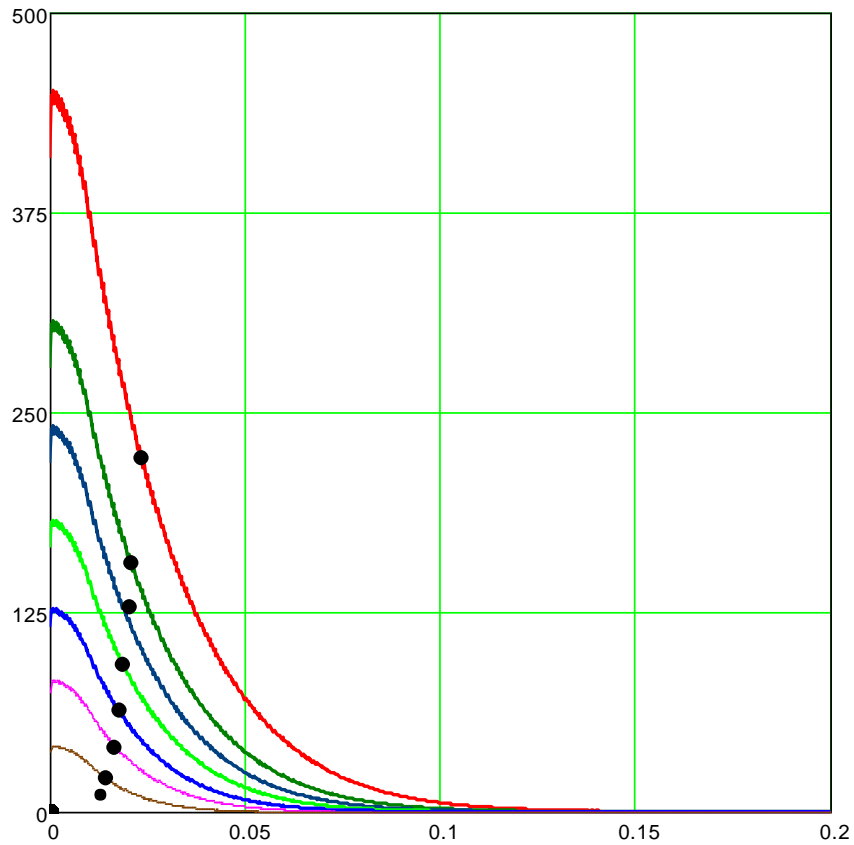


Рис 3.18. Розподіл температури продовж стрижня. (сталь, трикутний).

На рис.3.18 точками позначено ширину теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

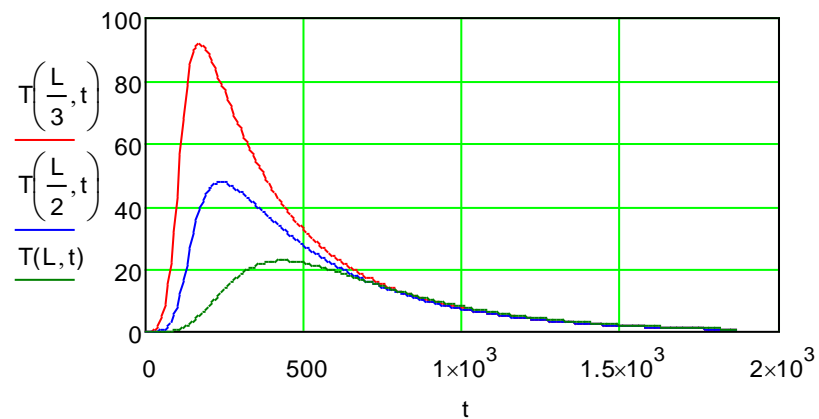


Рис. 3.19 Часовий хід температури (сталь, трикутний).

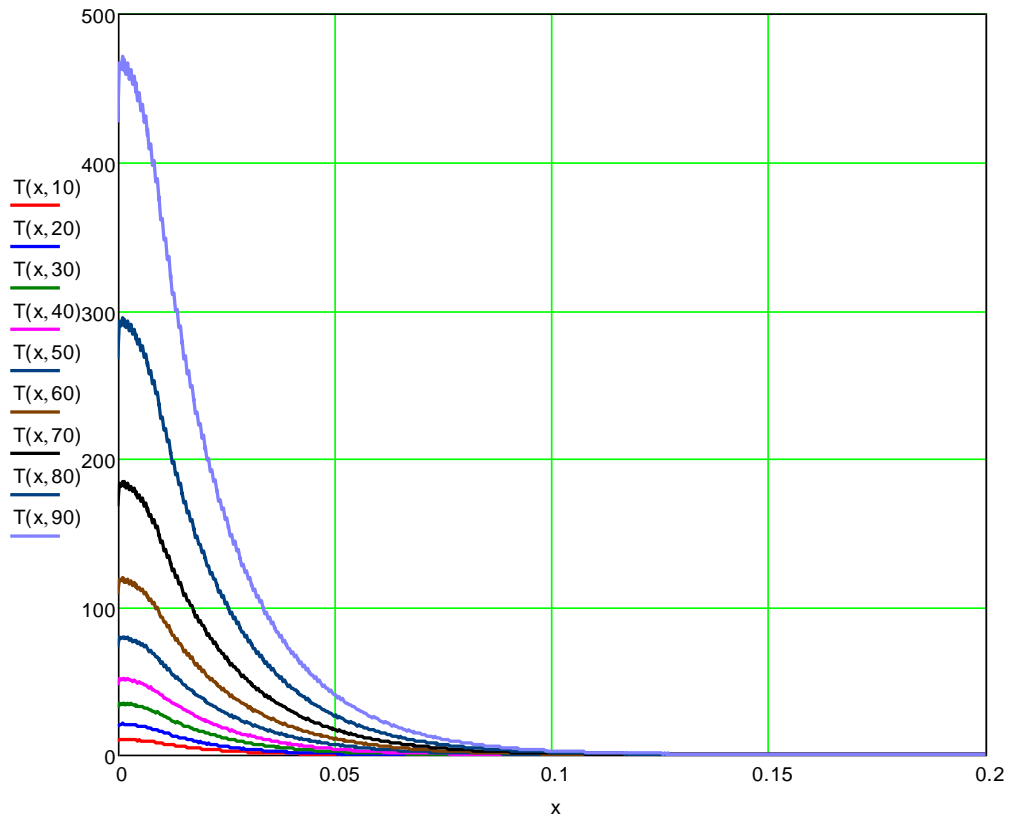


Рис. 3.20 Розподіл температури продовж стрижня. (сталь, із загостренням).

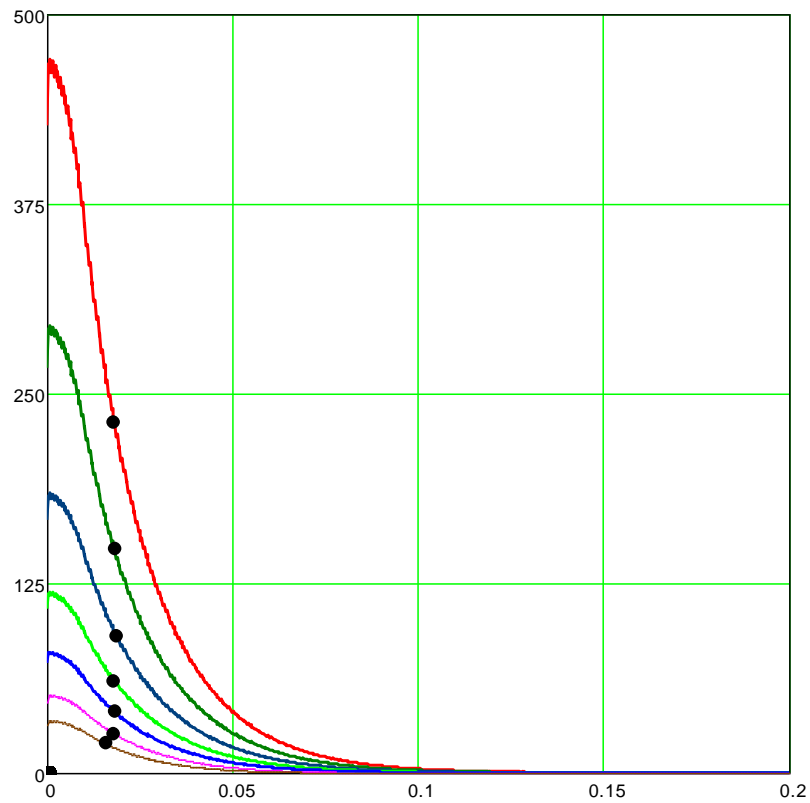


Рис 3.21. Розподіл температури продовж стрижня. (сталь, із загостренням).

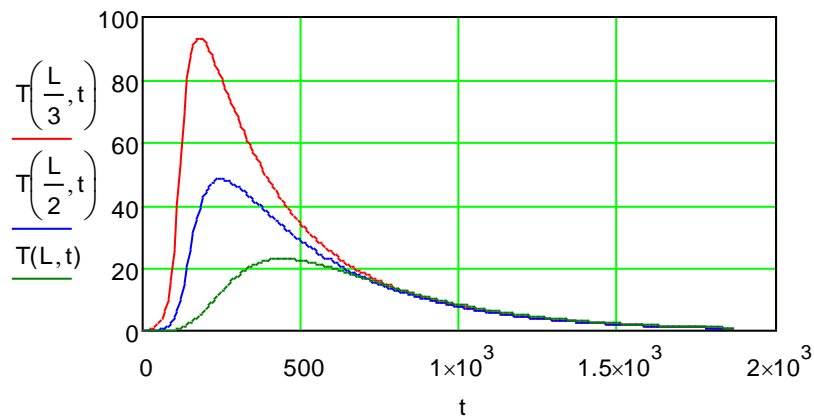


Рис. 3.22 Часовий хід температури, матеріал – сталь, імпульс – з загостренням.

3. Матеріал графіт, проміжні данні такі:

- коефіцієнт теплопровідності $a = 1.616 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.
- теплова постійна часу $\tau = 375,734 \text{ с}$.
- $\Upsilon = 12.831$

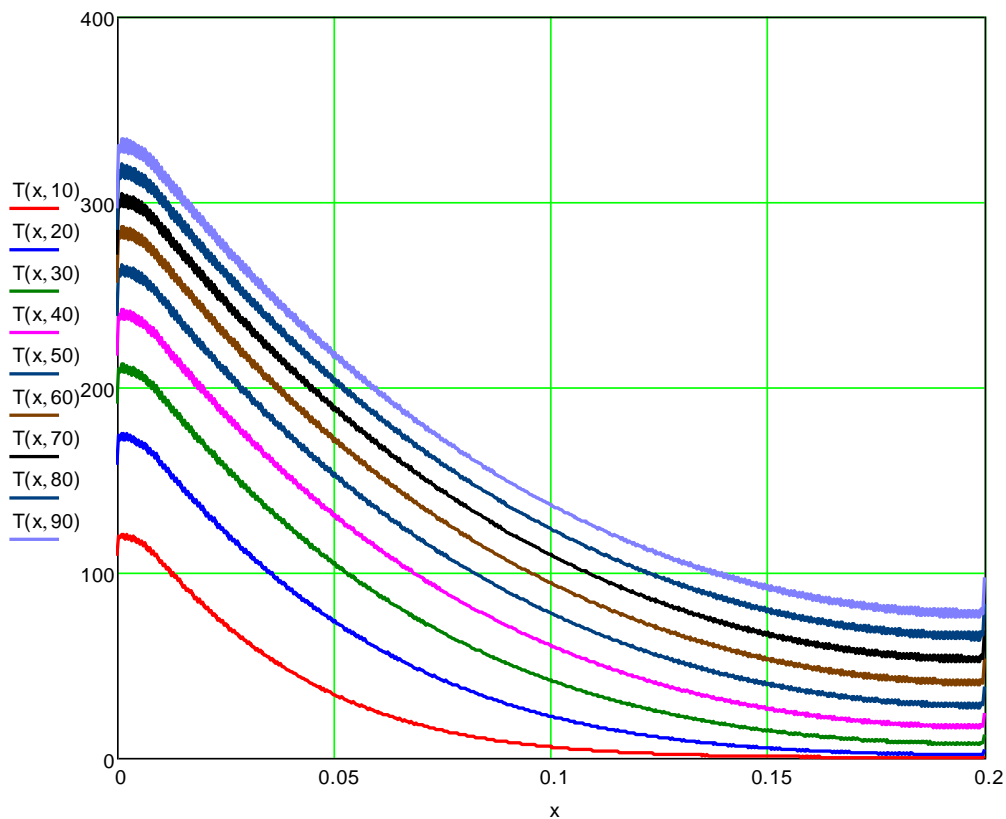


Рис. 3.23 Розподіл температури продовж стрижня (графіт, прямокутний).

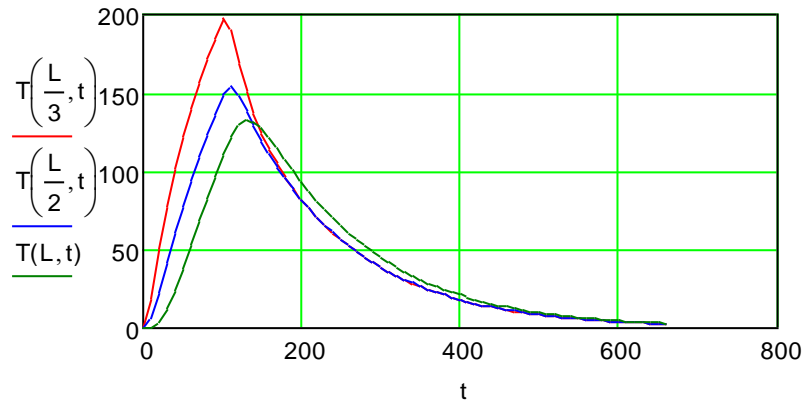


Рис. 3.24 Часовий хід температури, матеріал – графіт, імпульс – прямокутний.

На рис.3.25 точками позначено ширину теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

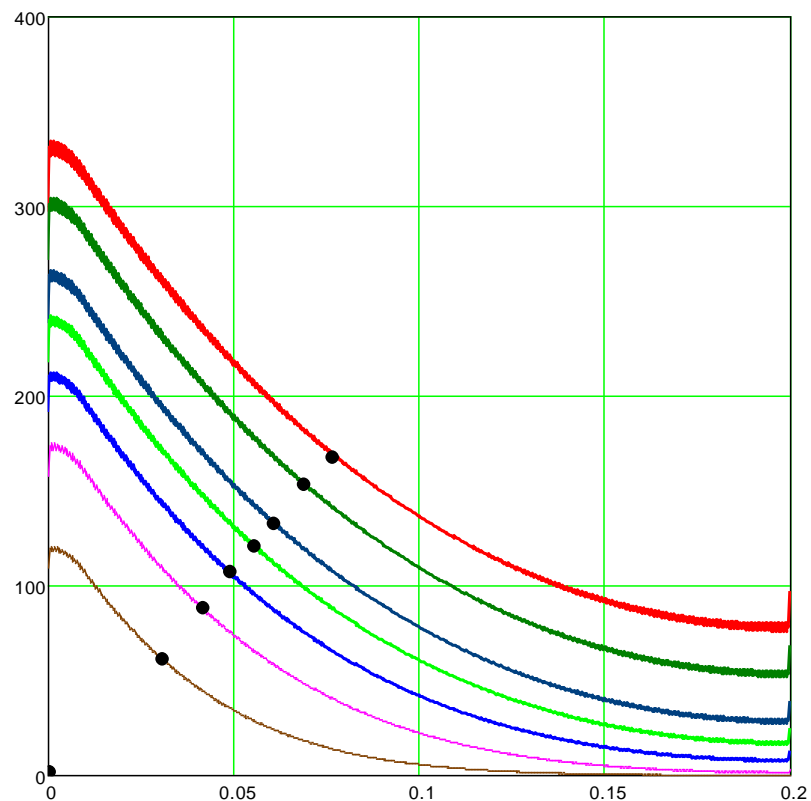


Рис. 3.25. Розподіл температури продовж стрижня. (графіт, прямокутний).

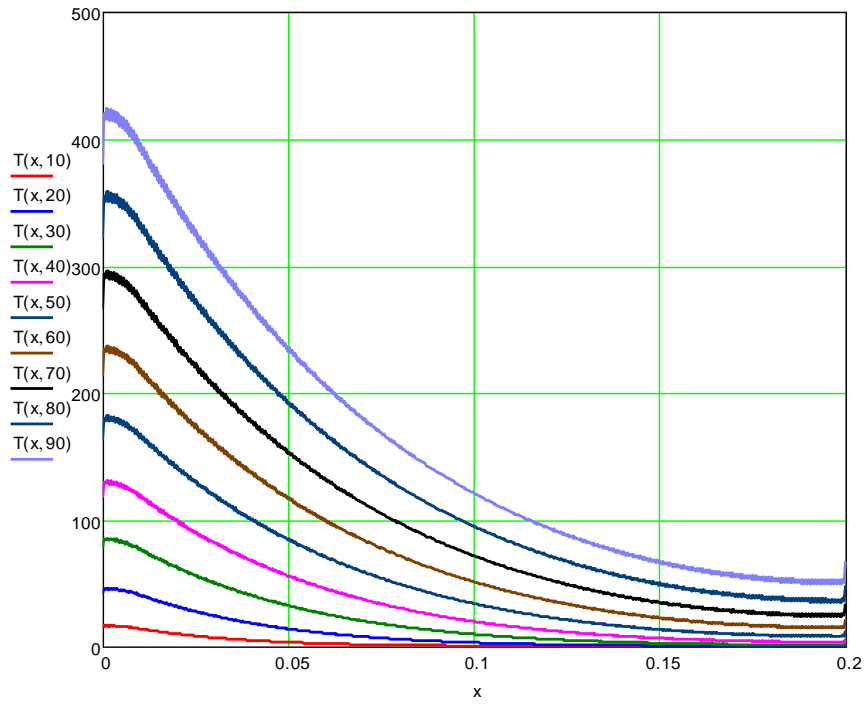


Рис. 3.26 Розподіл температури продовж стрижня(графіт, трикутний).

На рис.3.27 точками позначено ширину теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

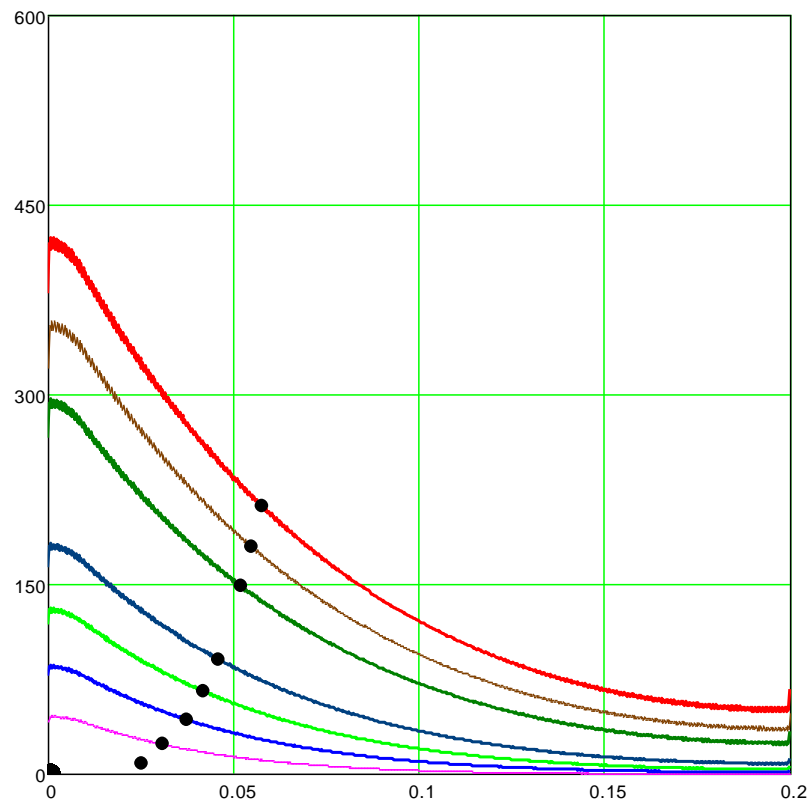


Рис. 3.27. Розподіл температури продовж стрижня. (графіт, трикутний).

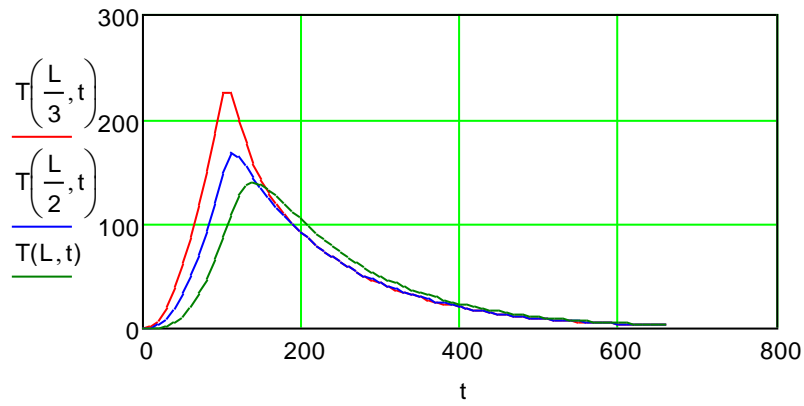


Рис. 3.28 Часовий хід температури, матеріал – графіт, імпульс – трикутний

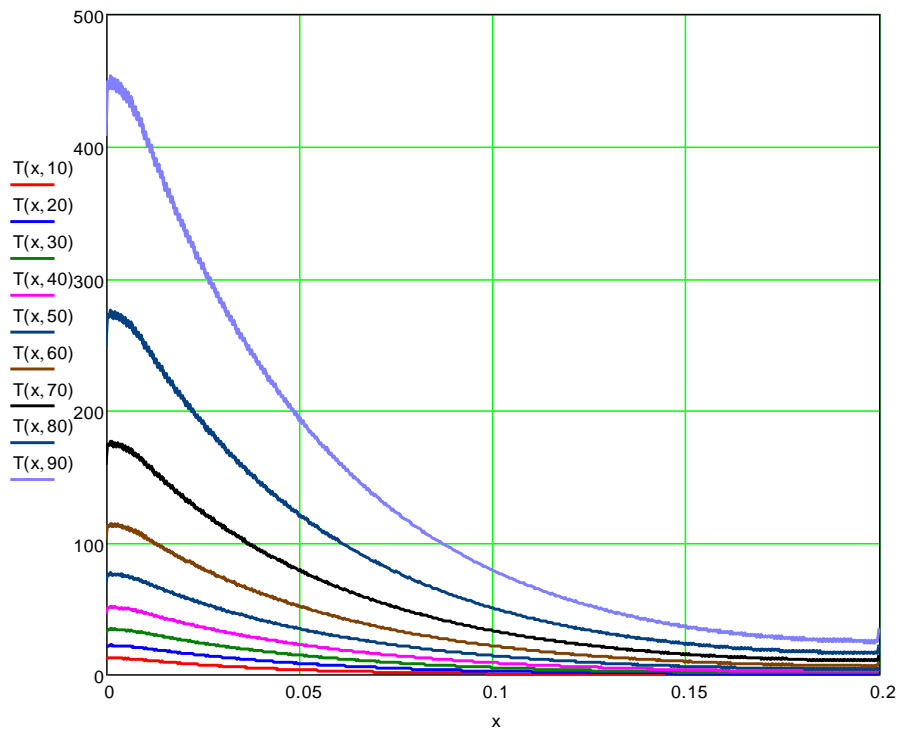


Рис. 3.29 Розподіл температури продовж стрижня. (графіт, із загостренням).

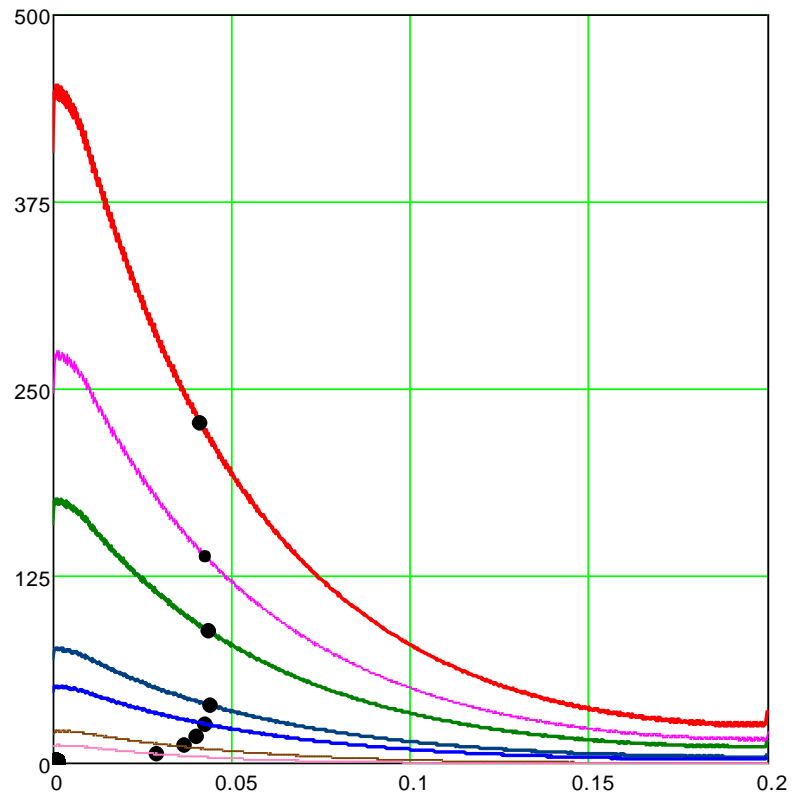


Рис. 3.30 Розподіл температури продовж стрижня. (графіт, із загостренням).

На рис.3.30 точками позначено ширину теплового фронту за половинним значенням максимальної температури.

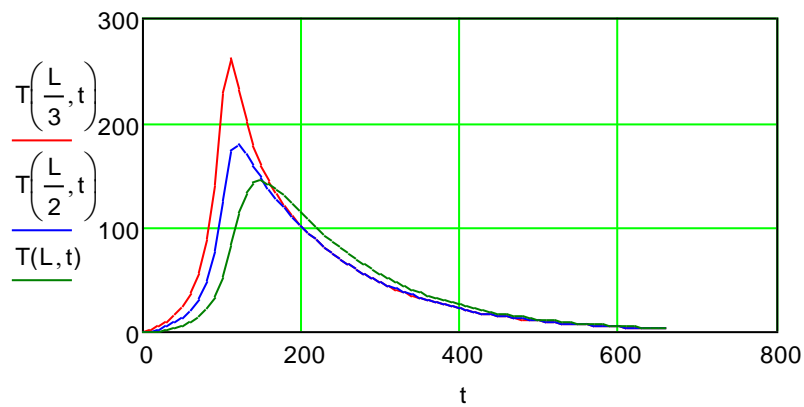


Рис. 3.31 Часовий хід температури, матеріал – графіт, імпульс – з загостренням.

Висновки до третього розділу

Після моделювання и відтворення графіків, можна перейти до аналізу цієї інформації. Я вже раніше описував процес *локалізації тепла* на певних ділянках тіла, що нагріваються та деякий час ці структури самопідтримуються, використовуючи тепло, що надходить до системи, а потім в цій системі вже втрачають це явище. Як 50-60х роках минулого сторіччя, так і зараз є експериментальні роботи з цього режиму. Завдяки цим роботам я зможу оцінити свою модель та порівняти її зі своєю моделлю. [20].

Якщо поглянути на графіки, які зображені на рис. 3.7, 3.10, 3.12, 3.15, 3.18, 3.21, 3.25, 3.27 та на 3.30, можна побачити, що моя модель співпадає з практичними роботами науковців різних часів[20].

До я кого висновку ми зараз прийшли? Якщо взяти різні матеріали (мідь, сталь, графіт) та використати імпульс прямокутний(постійний), то фронт теплового поля буде розповсюджуватися практично лінійно або близько до цього, але вже імпульс трикутний дає нам більш цікаві графіки, а якщо узяти уже імпульс «із загостренням», то побачимо (поєднати точки, так званої ширини теплового фронту за половинним значенням максимальної температури на рис. 3.12, 3.21, 3.30), що на трьох матеріалах спостерігається локалізація тепла, а якщо поглянути на графіт або мідь, там можливо провести практично пряму лінію, що говорить про те, що в цьому режимі є такий ефект локалізації тепла.

ВИСНОВКИ

При дослідженні теплових процесів у тонких стрижнях було розглянуто та зроблено модель процесу за допомогою програмного забезпечення MATCAD.

Дослідження показали, що є ефект локалізації тепла в режимі «із загостренням» в продовж деякого часу.

При однаковій енергії імпульсу максимальна температура більша в режимі із загостренням. Після закінчення процесу розмір нагрітої області збільшується. Але максимальна температура нагріву в будь-якій точці середовища у разі режиму із загостренням менше, ніж у режимі без загострення, оскільки вкладена енергія менша.

Ефект може використовуватися за необхідності сильного локального нагріву деякої області тіла, коли сусідні області повинні нагріватися мало.

Результати таких досліджень можна використовувати для проєктування теплових систем, які повинні працювати в умовах високих температур. Також важливо для інженерних застосувань, де необхідно забезпечити рівномірний розподіл температури для уникнення перегріву. Можливо використовувати це дослідження у виробництві елементної бази.

Ці висновки показують, що глибокий аналіз теплопередачі в тонкому стрижні із загостренням допомагає зменшити ризик перегріву та підвищити ефективність теплових систем.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. В.І. Іванов, "Теплові процеси в матеріалах", Видавництво Наукова думка, Київ, 2010.
2. П.І. Петренко, "Моделювання теплових структур у мікросистемах", Журнал технічної фізики, 2015.
3. С.М. Кравченко, "Теоретичні основи теплопередачі", Видавництво Академія, Київ, 2012.
4. В.А. Павлов, "Теплові процеси в електронних пристроях", Журнал нанотехнологій, 2018.
5. О.М. Грищенко, "Енергозбереження і теплові процеси", Видавництво Політехніка, Харків, 2016
6. Incropera, F.P., & DeWitt, D.P. (2007). Fundamentals of Heat and Mass Transfer. Wiley.
7. Peles, Y., & Sidi, M. (2005). Convective Heat Transfer. Wiley.
8. Stefan, J., & Boltzmann, L. (1884). Die Prinzipien der Wärmeübertragung. Z. für Physik
9. Holman, J.P. (2010). Heat Transfer. McGraw-Hill.
10. Теорія теплопровідності: підручник: підручник. для студ. спец. 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / А. В. Гільчук, А. А. Халатов, Т. В. Доник; КПІ ім. Ігоря Сікорського.
11. Yunus Çengel, A., & Ghajar, A.J. (2011). Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications. McGraw-Hill.
12. Eastman, J. A., & Subramanian, P. (2013). Thermal Properties of Materials. In Materials Science and Technology. Wiley Online Library
13. Ashby, M.F. (2005). Materials Selection in Mechanical Design. Butterworth-Heinemann
14. Callister, W.D. Jr. (2007). Materials Science and Engineering: An Introduction. Wiley.
15. O'Dowd, N.P. (2012). The Influence of Temperature on the Mechanical Properties of Materials. Journal of Materials Science

16. Zener, C. (1959). Thermal Expansion of Solids. Physical Review.
17. "Fundamentals of Heat and Mass Transfer" Frank P. Incropera, David P. DeWitt.
18. "Heat Transfer: A Problem-Solving Approach" Frank P. Incropera, David P. DeWitt.
19. "Introduction to Heat Transfer" Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera.
20. Кокодій Н.Г. Погорелов С.В. «Локалізація тепла у середовищі в режимі із загостренням» ХНУ імені В.Н.Каразіна, НФУ, 2020р..
21. Carslaw, H. S., & Jaeger, J. C. "Conduction of Heat in Solids."
22. Тепломасообмін в прикладах і задачах: навчальний посібник М.М. Чепурний, Н.В.Резидент.- Вінниця: ВНТУ, 2011.-128с.
23. Бондаренко, М.І., Клименко, О.В. "Теплопровідність твердих тіл". Київ: Наукова думка, 2015.
24. Гончаренко, О.С. "Основи теорії теплопровідності". Харків: ХНУ, 2017.
25. Іваненко, П.П., Марчук, А.А. "Моделювання теплових процесів". Одеса: ОНУ, 2018.
26. Мартиненко, Я.В., Бойко, В.В. "Чисельні методи у теплопровідності". Дніпро: ДНУ, 2019
27. Петров, І.І., Іванов, В.В. "Термодинаміка та теплопередача". Запоріжжя: ЗНУ, 2016
28. Романюк, М.І. "Комп'ютерне моделювання теплових процесів". Тернопіль: ТДТУ, 2018.
29. Heat Transfer: A Practical Approach" by Yunus A. Cengel
30. Користувацький посібник Mathcad: PTC Mathcad User Guide
31. "Introduction to Heat Transfer" by Frank P. Incropera, David P. DeWitt
32. Юрченко, В.П. "Сучасні проблеми теплопровідності". Львів: ЛНУ, 2019
33. Mathcad Community Forums: Mathcad Community.
34. Офіційна документація на вебсайті PTC (виробника Mathcad): Mathcad Documentation

ДОДАТОК А. Програмний код на MATCAD.

Нагрівання Al стрижня (лінійний режим)

Матеріал стрижня – мідь із щільністю $\rho = 8890$ кг/м³,
теплопровідністю $k = 390$ Вт/(м*град),
питомою теплоємністю $c = 385$ Дж/(кг*град).

Розміри стрижня

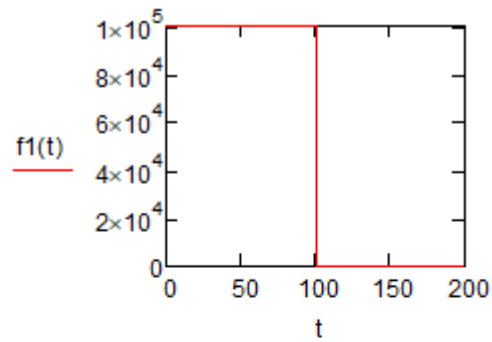
$D := 2 \cdot 10^{-3}$		Діаметр стрижня, м
$L := 0.2$		Довжина стрижня, м
$\rho := 8890$		Щільність, кг/м ³
$k := 390$		Коефіцієнт теплопровідності, м ² /с
$c := 385$		Питома теплоємність, Дж/(кг*град)
$a := \frac{k}{c \cdot \rho}$	$a = 1.139 \times 10^{-4}$	Коефіцієнт температуропровідності, м ² /с
$\alpha p := 0.03$		Погонний коефіцієнт теплообміну, Вт/(м*град)
$\tau := \frac{\pi \cdot D^2 \cdot \rho \cdot c}{4 \cdot \alpha p}$	$\tau = 358.419$	Теплова постійна часу, с
$\gamma := \sqrt{\frac{4 \cdot \alpha p}{\pi \cdot k \cdot D^2}}$	$\gamma = 4.948$	
$Tt := 5\tau = 1.792 \times 10^3$		Інтервал часу, с

Пучок випромінювання

$I_0 := 10^5$	Інтенсивність пучка, Вт/м ²
$t_p := 100$	Тривалість нагріву, с
$d := 0.01$	Довжина ділянки, що нагрівається, м
$t := 0, \frac{t_p}{100} \dots 2 \cdot t_p$	
$f1(t) := \begin{cases} I_0 & \text{if } 0 \leq t \leq t_p \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$I(x, t) := \begin{cases} I_0 & \text{if } (0 \leq x \leq d) \cdot (0 \leq t \leq t_p) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Енергія імпульсу

$$\int_0^{tp} f1(t) dt = 1 \times 10^7$$



+

Рішення рівняння теплопровідності

Given

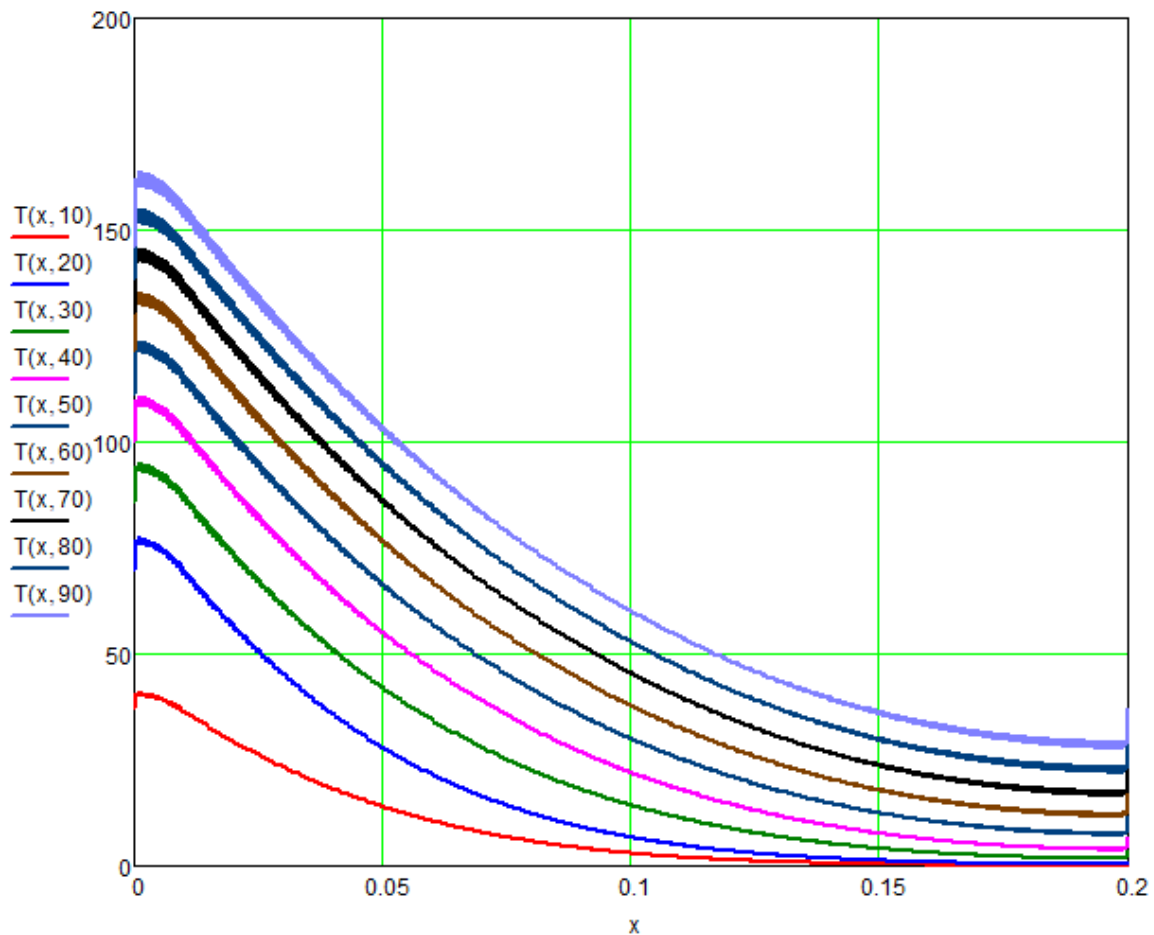
$$T_{xx}(x, t) - \gamma^2 \cdot T(x, t) - \frac{1}{a} \cdot T_t(x, t) = \frac{-4 \cdot I(x, t)}{\pi \cdot k \cdot D}$$

$$T(x, 0) = 0 \quad T_x(0, t) = 0 \quad T_x(L, t) = 0$$

$$T_{ww} := \text{Pdesolve}\left[T, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ Tt \end{pmatrix}, 600, 100\right]$$

Розподіл температури вздовж стрижня

$$x := 0, \frac{L}{600} \dots L$$



$$M := 601$$

$$m := 0..M-1 \quad xx_m := 0 + \frac{L}{M} \cdot m$$

$$N := 2$$

$$n := 0..1$$

$$Ser_0 := 0$$

$$T10_m := T(xx_m, 10)$$

$$Ser2 := 110$$

$$T20_m := T(xx_m, 20)$$

$$Ser1 := 106 \quad Max10 := \max(T10)$$

$$Max10 = 40.938$$

$$Max20 = 77.453$$

$$Max20 := \max(T20)$$

$$\frac{Max10}{2} = 20.469$$

$$\frac{Max20}{2} = 38.726$$

T10 =

	0
0	36.928
1	40.563
2	40.114
3	40.938
4	40.121
5	40.87
6	40.04
7	40.76
8	39.923
9	40.615
10	39.771
11	40.435
12	39.585
13	40.22
14	39.363
15	...

T20 =

	0
0	69.851
1	76.739
2	75.889
3	77.453
4	75.907
5	77.329
6	75.76
7	77.128
8	75.548
9	76.864
10	75.272
11	76.537
12	74.934
13	76.146
14	74.531
15	...

$$T30_m := T(xx_m, 30)$$

$$\text{Max30} := \max(T30)$$

$$\text{Max30} = 95.084$$

$$\frac{\text{Max30}}{2} = 47.542$$

$$\text{Ser3} := 131$$

T30 =

	0
0	85.672
1	94.188
2	93.143
3	95.084
4	93.185
5	94.958
6	93.038
7	94.751
8	92.823
9	94.48
10	92.545
11	94.143
12	92.201
13	93.742
14	91.793
15	...

$$T40_m := T(xx_m, 40)$$

$$\text{Max40} := \max(T40)$$

$$\text{Max40} = 110.918 \quad \frac{\text{Max40}}{2} = 55.459$$

$$\text{Ser4} := 149$$

T40 =

	0
0	99.831
1	109.853
2	108.628
3	110.918
4	108.692
5	110.791
6	108.545
7	110.579
8	108.33
9	110.301
10	108.049
11	109.957
12	107.702
13	109.548
14	107.289
15	...

$$T50_m := T(xx_m, 50)$$

$$\text{Max50} := \max(T50)$$

$$\text{Max50} = 123.815$$

$$\text{Ser5} := 164 \quad \frac{\text{Max50}}{2} = 61.907$$

T50 =

	0
0	111.274
1	122.603
2	121.221
3	123.815
4	121.306
5	123.687
6	121.16
7	123.472
8	120.945
9	123.189
10	120.663
11	122.841
12	120.315
13	122.426
14	119.9
15	...

$$\text{Ser6} := 177 \quad T60_m := T(xx_m, 60)$$

$$\text{Max60} := \max(T60)$$

$$\frac{\text{Max60}}{2} = 67.653$$

T60 =

	0
0	121.386
1	133.955
2	132.424
3	135.306
4	132.529
5	135.178
6	132.384
7	134.959
8	132.169
9	134.674
10	131.887
11	134.322
12	131.539
13	133.903
14	131.124
15	...

$$\text{Ser7} := 192 \quad T70_m := T(xx_m, 70)$$

$$\text{Max70} := \max(T70)$$

$$\frac{\text{Max70}}{2} = 72.867$$

T70 =

	0
0	130.492
1	144.25
2	142.576
3	145.734
4	142.7
5	145.606
6	142.556
7	145.385
8	142.342
9	145.096
10	142.061
11	144.741
12	141.713
13	144.319
14	141.297
15	...

Ser8 := 115
 T80_m := T(xx_m, 80)
 Max80 := max(T80)
 $\frac{\text{Max80}}{2} = 77.505$

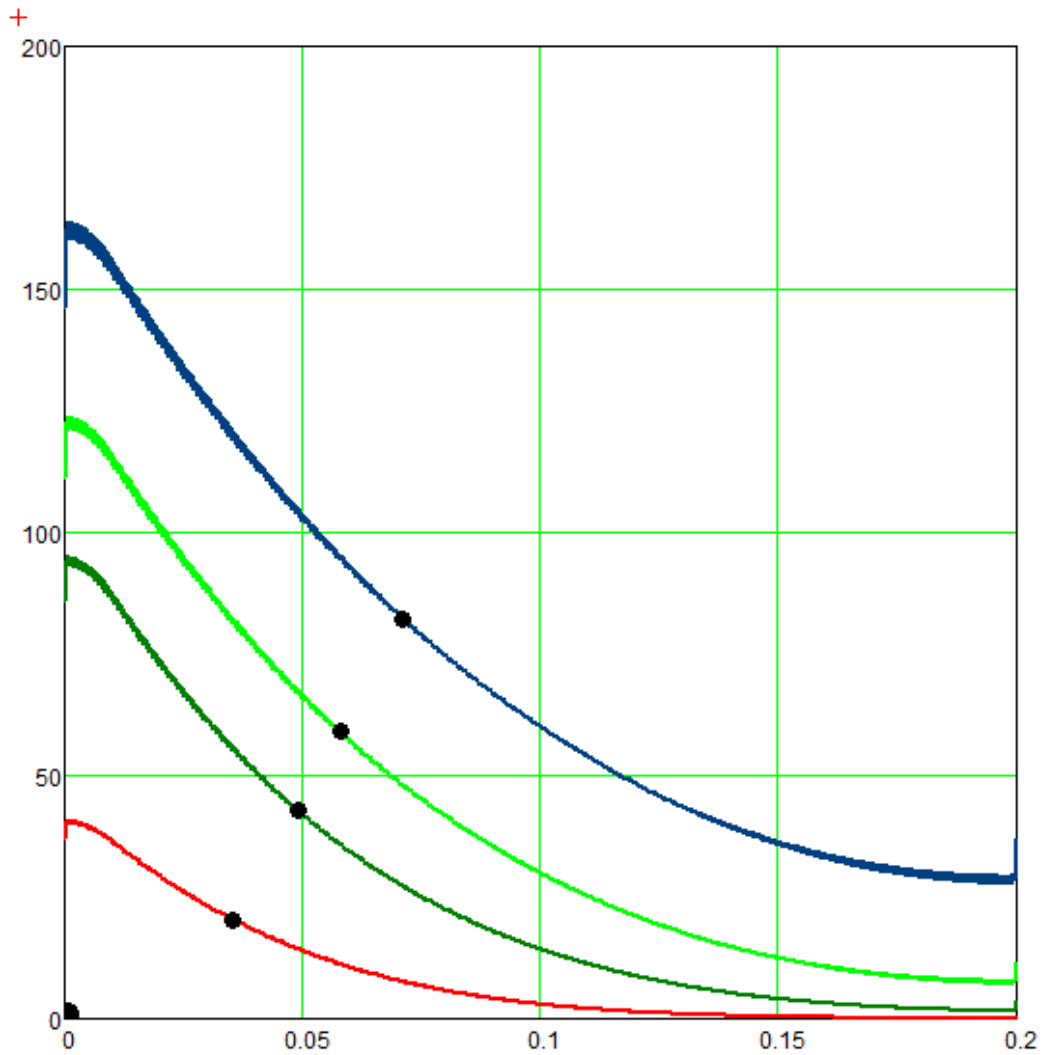
Ser9 := 115
 T90_m := T(xx_m, 90)
 Max90 := max(T90) Max90 = 163.923
 $\frac{\text{Max90}}{2} = 81.961$

T80 =

	0
0	138.506
1	153.399
2	151.59
3	155.011
4	151.732
5	154.883
6	151.589
7	154.66
8	151.376
9	154.369
10	151.096
11	154.011
12	150.748
13	153.585
14	150.333
15	...

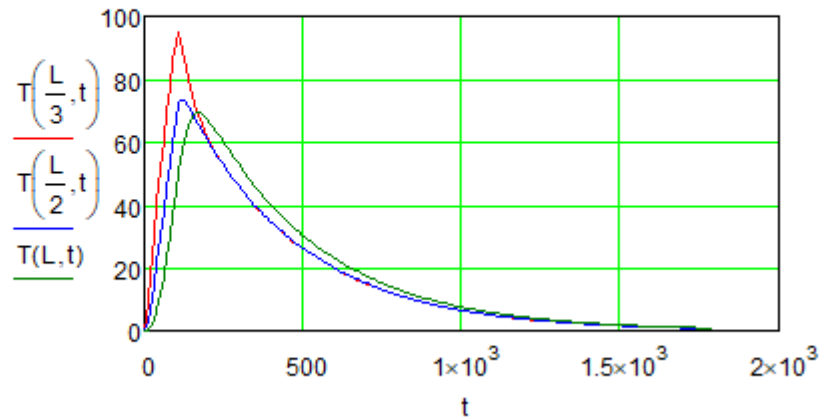
T90 =

	0
0	146.175
1	162.185
2	160.242
3	163.923
4	160.402
5	163.795
6	160.261
7	163.569
8	160.049
9	163.276
10	159.769
11	162.916
12	159.422
13	162.488
14	159.008
15	...



Часовий хід температури в стрижні

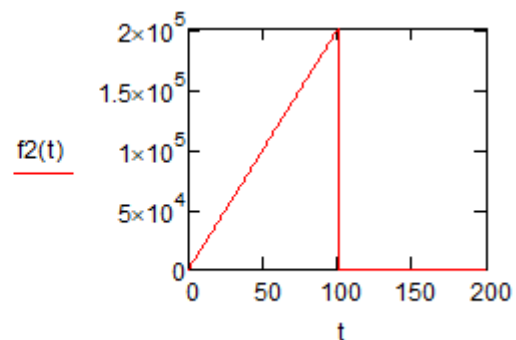
$t := 0, 10 \dots Tt$



$t := 0, \frac{tp}{100} \dots 2 \cdot tp$

$$f2(t) := \begin{cases} \frac{2 \cdot 10 \cdot t}{tp} & \text{if } 0 \leq t \leq tp \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad l(x,t) := \begin{cases} \frac{2 \cdot 10 \cdot t}{tp} & \text{if } (0 \leq x \leq d) \cdot (0 \leq t \leq tp) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_0^{tp} f2(t) dt = 1 \times 10^7$$



Рішення рівняння теплопровідності

Given

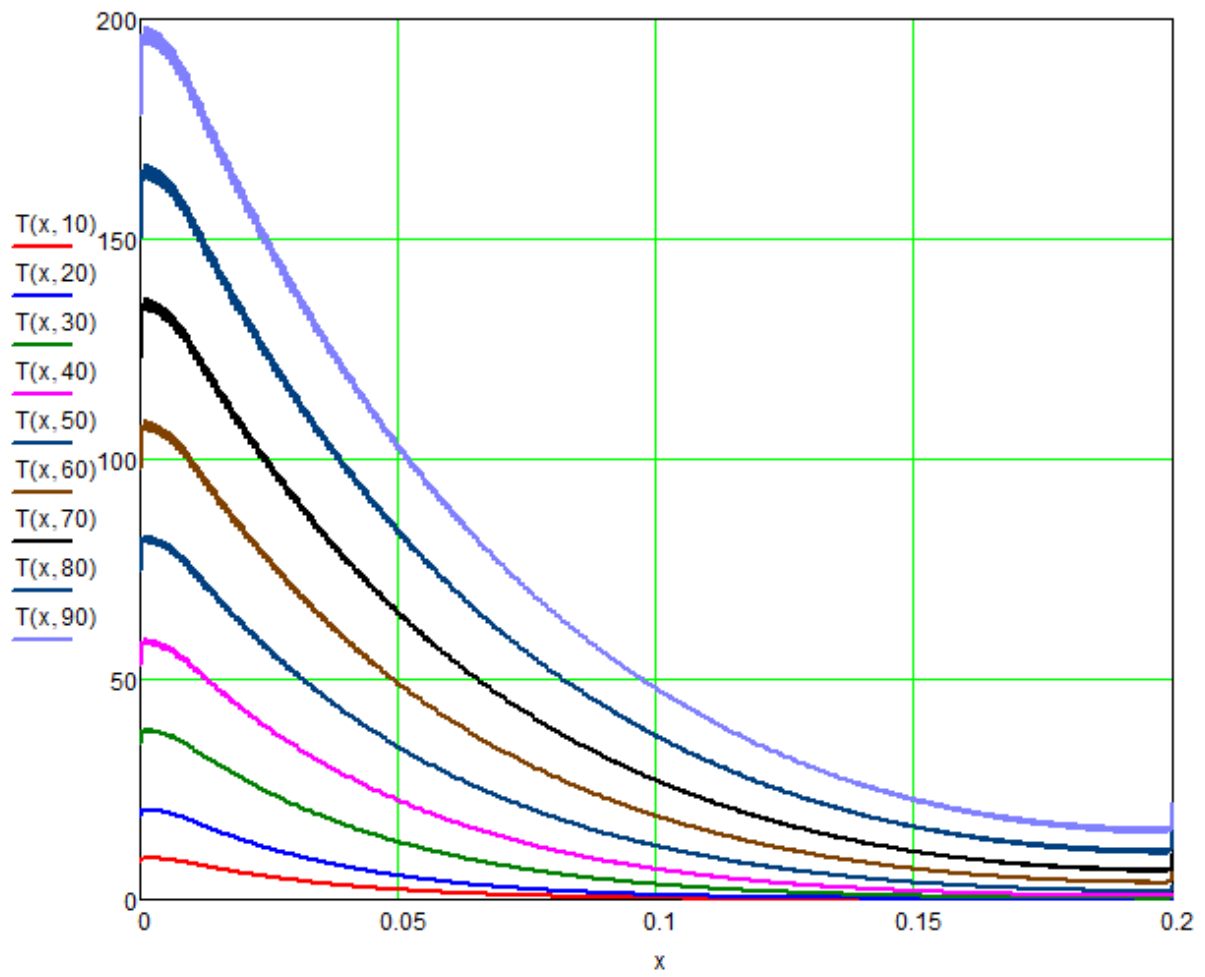
$$T_{xx}(x,t) - \gamma^2 \cdot T(x,t) - \frac{1}{a} \cdot T_t(x,t) = \frac{-4 \cdot l(x,t)}{\pi \cdot k \cdot D}$$

$$T(x,0) = 0 \quad T_x(0,t) = 0 \quad T_x(L,t) = 0$$

$$\underline{T} := \text{Pdesolve} \left[T, x, \left(\begin{matrix} 0 \\ L \end{matrix} \right), t, \left(\begin{matrix} 0 \\ Tt \end{matrix} \right), 600, 100 \right]$$

Розподіл температури продовж стрижня

$$x := 0, \frac{L}{600} .. L$$



$M := 601$
 $m := 0..M-1$ $N := 2$ $n := 0..1$

$xx_m := 0 + \frac{L}{M} \cdot m$
 $T10_m := T(xx_m, 10)$

$Ser_0 := 0$ $Ser1 := 81$ $Max10 := \max(T10)$

$Max10 = 9.499$

$\frac{Max10}{2} = 4.749$

$T10 =$

	0
0	8.581
1	9.416
2	9.311
3	9.499
4	9.308
5	9.477
6	9.281
7	9.442
8	9.243
9	9.396
10	9.194
11	9.338
12	9.133
13	9.27
14	9.062
15	...

$Ser2 := 87$ $T20_m := T(xx_m, 20)$

$Max20 := \max(T20)$

$Max20 = 20.653$

$\frac{Max20}{2} = 10.327$

$T20 =$

	0
0	18.65
1	20.47
2	20.244
3	20.653
4	20.239
5	20.608
6	20.185
7	20.537
8	20.108
9	20.444
10	20.008
11	20.327
12	19.885
13	20.188
14	19.74
15	...

+

$$\text{Ser3} := 110$$

$$\text{Ser4} := 116$$

$$\text{Ser5} := 119$$

$$T30_m := T(\text{xx}_m, 30)$$

$$T40_m := T(\text{xx}_m, 40)$$

$$T50_m := T(\text{xx}_m, 50)$$

$$\text{Max30} := \max(T30)$$

$$\text{Max40} := \max(T40)$$

$$\text{Max50} := \max(T50)$$

$$\text{Max30} = 38.874$$

$$\text{Max40} = 59.15$$

$$\text{Max50} = 82.786$$

$$\frac{\text{Max30}}{2} = 19.437$$

$$\frac{\text{Max40}}{2} = 29.575$$

$$\frac{\text{Max50}}{2} = 41.393$$

T30 =

	0
0	35.073
1	38.521
2	38.094
3	38.874
4	38.097
5	38.804
6	38.013
7	38.692
8	37.893
9	38.544
10	37.738
11	38.361
12	37.546
13	38.141
14	37.319
15	...

T40 =

	0
0	53.332
1	58.604
2	57.954
3	59.15
4	57.967
5	59.055
6	57.854
7	58.901
8	57.691
9	58.698
10	57.48
11	58.447
12	57.219
13	58.147
14	56.91
15	...

T50 =

	0
0	74.592
1	82.011
2	81.098
3	82.786
4	81.126
5	82.665
6	80.984
7	82.468
8	80.778
9	82.209
10	80.51
11	81.889
12	80.18
13	81.506
14	79.788
15	...

Ser6 := 115

$T60_m := T(xx_m, 60)$

Max60 := max(T60)

$\frac{Max60}{2} = 54.401$

T60 =

	0
0	97.948
1	107.77
2	106.565
3	108.803
4	106.612
5	108.656
6	106.441
7	108.416
8	106.192
9	108.101
10	105.867
11	107.71
12	105.468
13	107.244
14	104.993
15	...

Ser7 := 118

$T70_m := T(xx_m, 70)$

Max70 := max(T70)

$\frac{Max70}{2} = 68.31$

T70 =

	0
0	122.891
1	135.309
2	133.787
3	136.62
4	133.857
5	136.449
6	133.656
7	136.165
8	133.364
9	135.792
10	132.984
11	135.33
12	132.515
13	134.78
14	131.957
15	...

Ser8 := 115

$T80_m := T(xx_m, 80)$

Max80 := max(T80)

$\frac{Max80}{2} = 83.54$

T80 =

	0
0	150.124
1	165.454
2	163.579
3	167.081
4	163.676
5	166.883
6	163.447
7	166.555
8	163.112
9	166.124
10	162.675
11	165.591
12	162.137
13	164.956
14	161.496
15	...

Ser9 := 115

$T90_m := T(xx_m, 90)$

Max90 := max(T90)

Max90 = 198.38

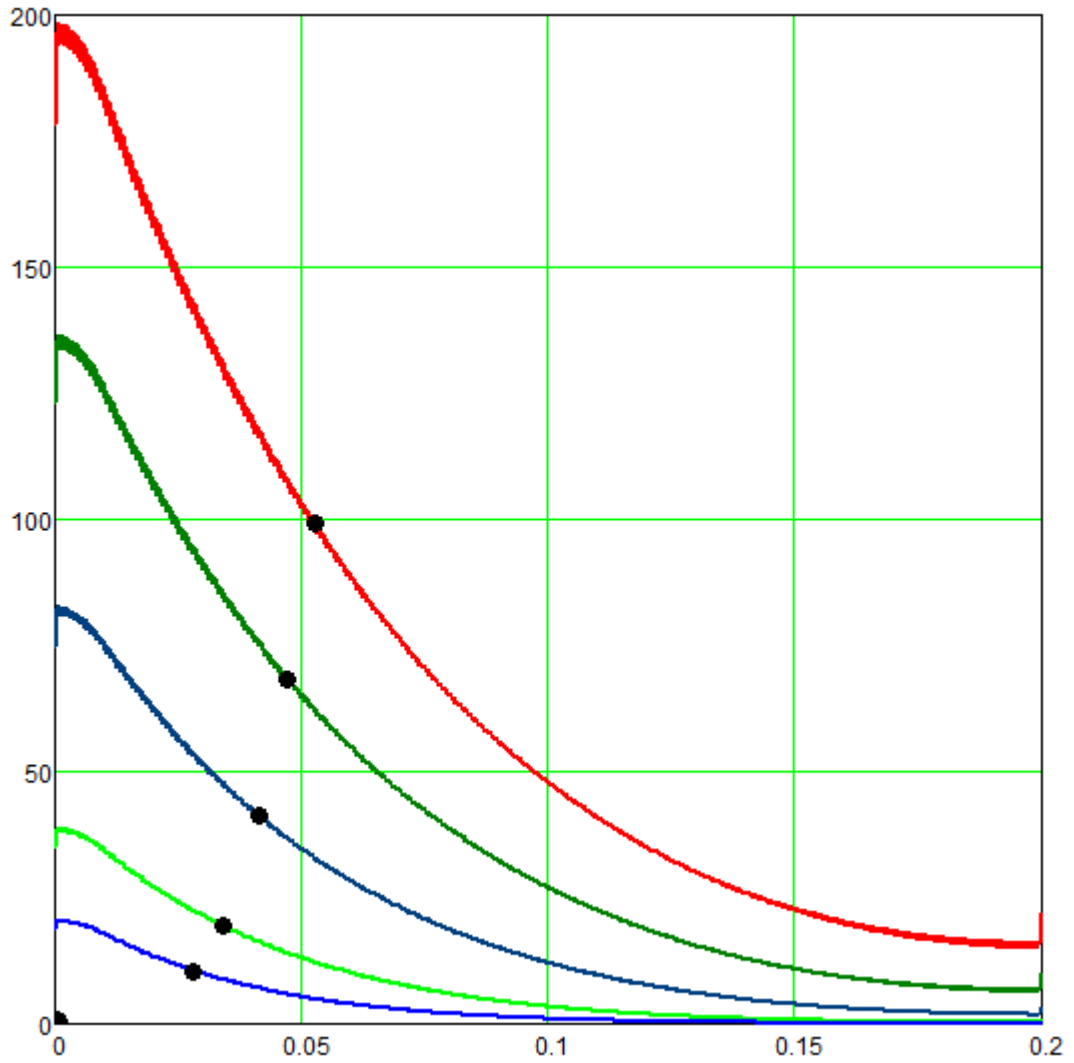
$\frac{Max90}{2} = 99.19$

T90 =

	0
0	178.083
1	196.427
2	194.185
3	198.38
4	194.311
5	198.157
6	194.054
7	197.783
8	193.677
9	197.294
10	193.184
11	196.69
12	192.575
13	195.97
14	191.851
15	...

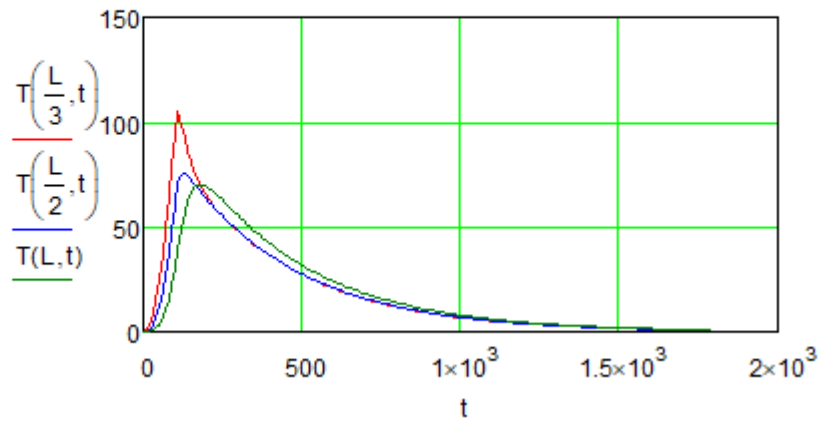
+

+



Часовий хід температури в стрижні

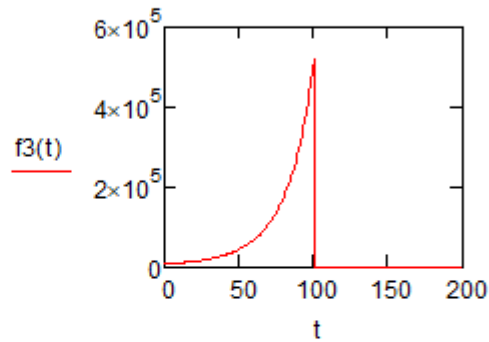
$t = 0, 10 \dots \pi t$



$$t := 0, \frac{tp}{100} .. 2 \cdot tp$$

$$f3(t) := \begin{cases} \frac{52 \cdot 10 \cdot 10^{11}}{(200-t)^6} & \text{if } 0 \leq t \leq tp \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \underline{\underline{f}}(x,t) := \begin{cases} \frac{10 \cdot 52 \cdot 10^{11}}{(200-t)^6} & \text{if } (0 \leq x \leq d) \cdot (0 \leq t \leq tp) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\int_0^{tp} f3(t) dt = 1.008 \times 10^7$$



Рішення рівняння теплопровідності

Given

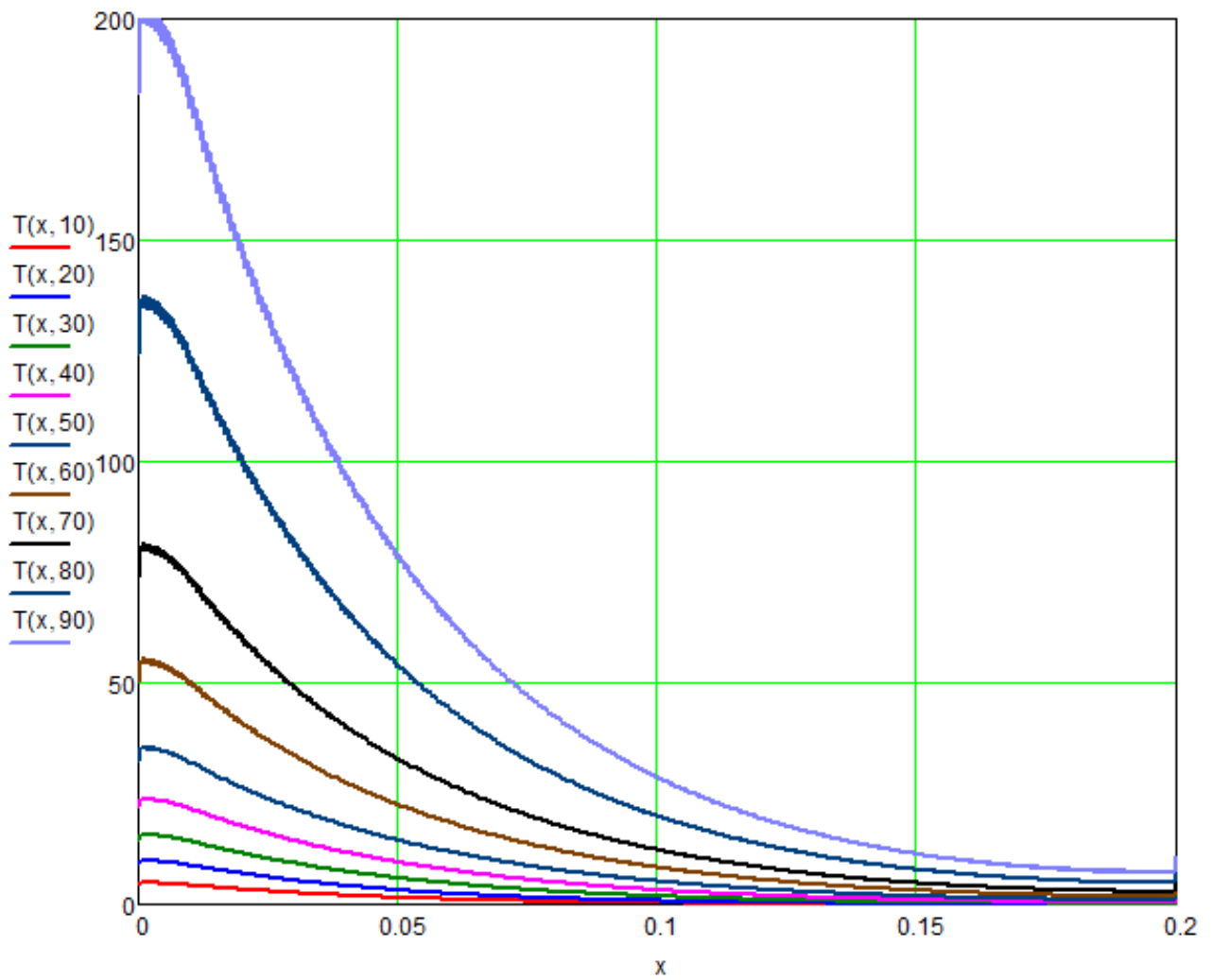
$$T_{xx}(x,t) - \gamma^2 \cdot T(x,t) - \frac{1}{a} \cdot T_t(x,t) = \frac{-4 \cdot l(x,t)}{\pi \cdot k \cdot D}$$

$$T(x,0) = 0 \quad T_x(0,t) = 0 \quad T_x(L,t) = 0$$

$$\underline{\underline{T}} := \text{Pdesolve} \left[T, x, \begin{pmatrix} 0 \\ L \end{pmatrix}, t, \begin{pmatrix} 0 \\ Tt \end{pmatrix}, 600, 100 \right]$$

Розподіл температури вздовж стрижня

$$x := 0, \frac{L}{600} .. L$$



$$\underline{N} := 2 \quad n := 0..1 \quad \underline{M} := 601 \quad m := 0..M-1 \quad xx_m := 0 + \frac{L}{M} \cdot m$$

$$\begin{aligned} \text{Ser}_0 &:= 0 & \text{Ser1} &:= 96 & T10_m &:= T(xx_m, 10) & \text{Ser2} &:= 99 & T20_m &:= T(xx_m, 20) \\ \underline{\text{Max10}} &:= \max(T10) & & & \underline{\text{Max20}} &:= \max(T20) \\ \text{Max10} &= 4.838 & & & \text{Max20} &= 9.9 \\ \frac{\text{Max10}}{2} &= 2.419 & & & \frac{\text{Max20}}{2} &= 4.95 \end{aligned}$$

T10 =

	0
0	4.366
1	4.794
2	4.741
3	4.838
4	4.741
5	4.828
6	4.73
7	4.814
8	4.714
9	4.794
10	4.693
11	4.77
12	4.668
13	4.741
14	4.638
15	...

T20 =

	0
0	8.933
1	9.81
2	9.701
3	9.9
4	9.702
5	9.881
6	9.68
7	9.852
8	9.648
9	9.813
10	9.608
11	9.765
12	9.557
13	9.708
14	9.498
15	...

$$\text{Ser3} := 110 \quad T30_m := T(x_{xm}, 30)$$

$$\text{Ser4} := 116 \quad T40_m := T(x_{xm}, 40)$$

$$\text{Max30} := \max(T30)$$

$$\text{Max40} := \max(T40)$$

$$\text{Max30} = 15.919$$

$$\text{Max40} = 24.092$$

$$\frac{\text{Max30}}{2} = 7.96$$

$$\frac{\text{Max40}}{2} = 12.046$$

+

T30 =

	0
0	14.357
1	15.773
2	15.598
3	15.919
4	15.601
5	15.892
6	15.569
7	15.85
8	15.524
9	15.793
10	15.465
11	15.723
12	15.392
13	15.64
14	15.306
15	...

T40 =

	0
0	21.717
1	23.869
2	23.604
3	24.092
4	23.609
5	24.054
6	23.564
7	23.992
8	23.499
9	23.91
10	23.413
11	23.809
12	23.309
13	23.688
14	23.184
15	...

Ser5 := 119 $T50_m := T(xx_m, 50)$ Max50 := max(T50)

Max50 = 35.785

$$\frac{\text{Max50}}{2} = 17.893$$

T50 =

	0
0	32.244
1	35.452
2	35.057
3	35.785
4	35.066
5	35.729
6	35
7	35.639
8	34.904
9	35.52
10	34.78
11	35.372
12	34.627
13	35.195
14	34.446
15	...

Ser6 := 11 $T60_m := T(xx_m, 60)$ Max60 := max(T60)

Max60 = 55.606

$$\frac{\text{Max60}}{2} = 27.803$$

T60 =

	0
0	50.086
1	55.087
2	54.47
3	55.606
4	54.485
5	55.519
6	54.381
7	55.377
8	54.232
9	55.191
10	54.038
11	54.96
12	53.8
13	54.684
14	53.516
15	...

$\underline{\text{Ser5}} := 119$
 $T50_m := T(\underline{\text{xxm}}, 50)$
 $\underline{\text{Max50}} := \max(T50)$
 $\text{Max50} = 35.785$
 $\frac{\text{Max50}}{2} = 17.893$

T50 =

	0
0	32.244
1	35.452
2	35.057
3	35.785
4	35.066
5	35.729
6	35
7	35.639
8	34.904
9	35.52
10	34.78
11	35.372
12	34.627
13	35.195
14	34.446
15	...

$\underline{\text{Ser6}} := 11$
 $T60_m := T(\underline{\text{xxm}}, 60)$
 $\underline{\text{Max60}} := \max(T60)$
 $\text{Max60} = 55.606$
 $\frac{\text{Max60}}{2} = 27.803$

T60 =

	0
0	50.086
1	55.087
2	54.47
3	55.606
4	54.485
5	55.519
6	54.381
7	55.377
8	54.232
9	55.191
10	54.038
11	54.96
12	53.8
13	54.684
14	53.516
15	...

$\underline{\text{Ser7}} := 118$
 $T70_m := T(\underline{\text{xxm}}, 70)$
 $\underline{\text{Max70}} := \max(T70)$
 $\frac{\text{Max70}}{2} = 40.786$

T70 =

	0
0	73.461
1	80.81
2	79.904
3	81.572
4	79.924
5	81.443
6	79.772
7	81.234
8	79.551
9	80.959
10	79.264
11	80.617
12	78.91
13	80.209
14	78.491
15	...

$$\begin{aligned} \text{Ser8} &:= 115 \\ T80_m &:= T(x_{xm}, 80) \\ \text{Max80} &:= \max(T80) \\ \text{Max80} &= 137.653 \\ \frac{\text{Max80}}{2} &= 68.826 \end{aligned}$$

$$T80 =$$

	0
0	123.97
1	136.369
2	134.839
3	137.653
4	134.869
5	137.427
6	134.602
7	137.064
8	134.217
9	136.585
10	133.716
11	135.99
12	133.1
13	135.281
14	132.368
15	...

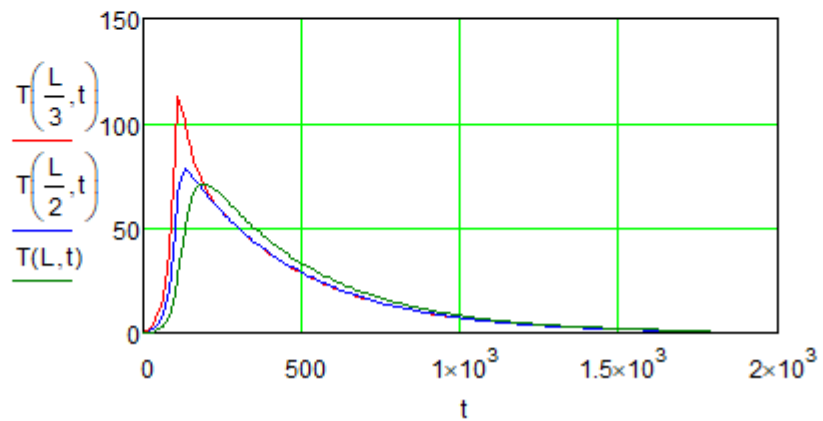
$$\begin{aligned} \text{Ser9} &:= 115 \\ T90_m &:= T(x_{xm}, 90) \\ \text{Max90} &:= \max(T90) \\ \text{Max90} &= 203.284 \\ \frac{\text{Max90}}{2} &= 101.642 \end{aligned}$$

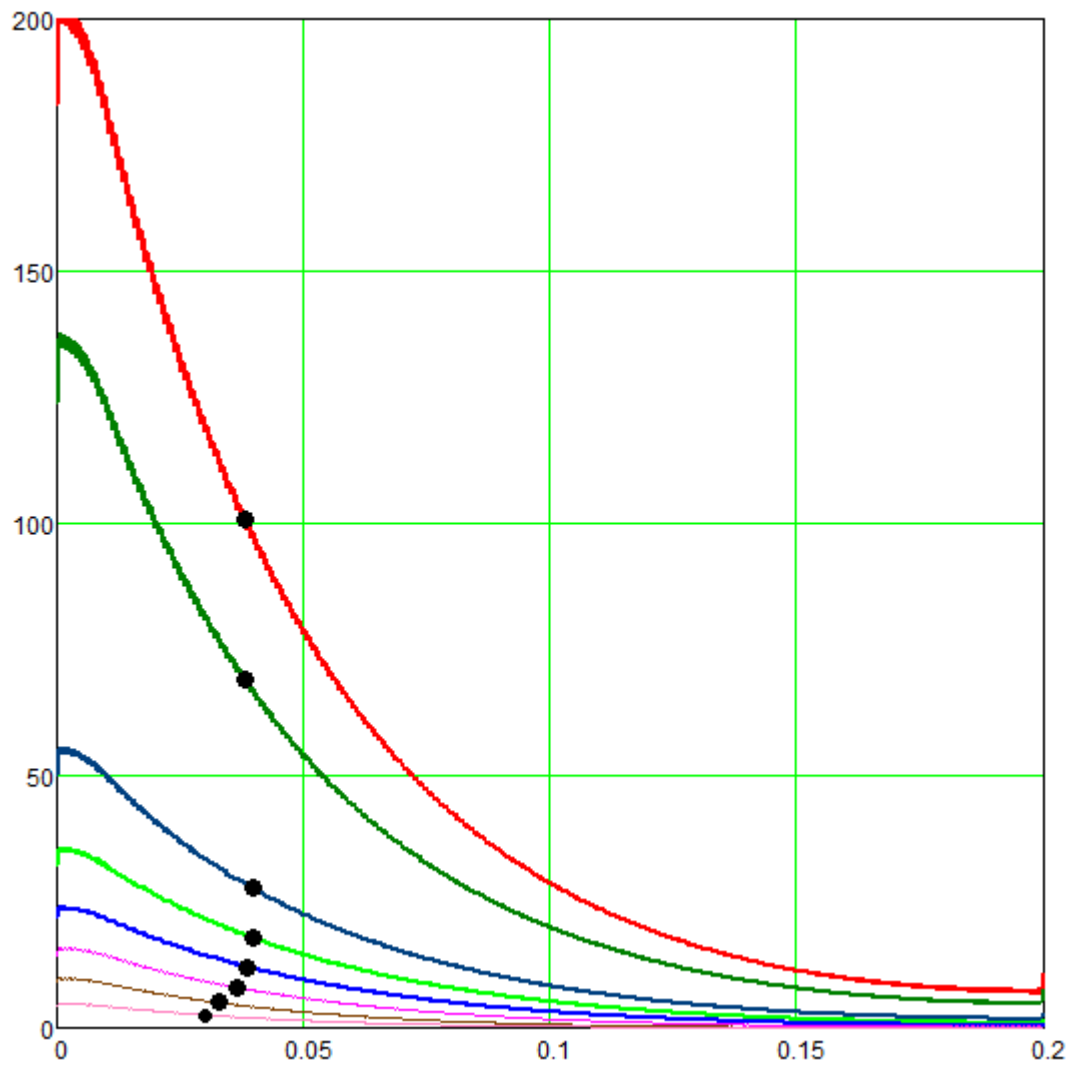
$$T90 =$$

	0
0	183.084
1	201.392
2	199.132
3	203.284
4	199.171
5	202.945
6	198.769
7	202.4
8	198.19
9	201.681
10	197.438
11	200.788
12	196.512
13	199.723
14	195.413
15	...

+

Часовий хід температури в стрижні

 $t := 0, 10 \dots Tt$ 



Структура і обсяг роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи становить 87 сторінок, із них основного тексту 50 сторінок, 32 рисунків за текстом, список використаних джерел із 34 найменування на 2 сторінках, 1 додатку на 18 сторінках.