

розділ 7.

ДОВГОХВИЛЬОВІ НЕСИМЕТРИЧ- НІ ПОВЕРХНЕВІ МОДИ ПЛАЗМО- ВИХ ХВИЛЕВОДІВ

В усіх попередніх розділах даної книги досліджувалися виключно поперечні власні хвилі, напрямок їхнього поширення був точно перпендикулярним до осі симетрії відповідної хвильової структури: хвильоводу з плазмовим наповненням, чи металевий стрижень, що був занурений у плазму. Це, зрозуміло, обмежувало сферу використання здобутих теоретичних результатів, бо найчастіше електромагнітний сигнал має певне аксіальне хвильове число. Тому у цьому розділі представлено результати дослідження поширення у плазмових хвильоводах незвичайно поляризованих електромагнітних збурень, які характеризуються не тільки азимутальним, але й аксіальним хвильовим числом.

Як і хвилі, що вивчалися у Розділі 5, дані хвилі не є азимутальними, але при їхньому вивченні ми будемо спиратися на теорію азимутальних поверхневих хвиль. Це цілком можна зробити для випадку довгохвильових несиметричних мод. Задачу про поширення таких несиметричних хвиль можна розв'язувати методами теорії збурень, використовуючи за нульове наближення теорію АПХ. Здобуті результати стосуються властивостей довгохвильових несиметричних ПХ, які поширюються у цилінд-

ричних хвильоводах із ізотропним та магнітоактивним плазмовим наповненням.

7.1. Довгохвильові несиметричні поверхневі хвилі (ПХ) у плазмових хвильоводах за відсутності зовнішнього магнітного поля

У цьому підрозділі теоретично досліджено дисперсійні властивості електромагнітних ПХ з довільними значеннями азимутального номера моди і малим значенням аксіального хвильового числа k_z , що поширюються у металевих циліндричних хвильоводах радіуса R_2 з тонким діелектричним покриттям внутрішньої поверхні, в яких коаксіально розташовано плазму радіусу R_1 за відсутності зовнішнього магнітного поля [117]. Задачу розв'язано у гідродинамічному наближенні, плазма вважалася холодним радіально неоднорідним середовищем. Аксіальні фазові швидкості цих довгохвильових ПХ перевищують швидкість світла в діелектрику, при зменшенні товщини діелектрика до нуля ці моди не поширюються. Дані дослідження продовжили та узагальнили дослідження, що були започатковані в [41], на випадок малих значень k_z , для яких виконується нерівність $k_z R_2 < 1$. Залежність полів цих ПХ від часу t , азимутального кута φ та аксіальної координати z обираємо у вигляді $\exp[i(k_z z + m\varphi - \omega t)]$, де m – азимутальний номер моди, ω – частота ПХ. При цьому поля ПХ задовольняють крайовим умовам (5.3)-(5.5), що записані у Розділі 5. Врахування $k_z \neq 0$ призводить до зачеплення E - і H - мод на відміну від випадку АПХ [41]. Тому із системи рівнянь Максвелла для ПХ із скінченним значенням k_z дістаємо зв'язані рівняння для всіх шести компонентів поля цієї несиметричної хвилі.

У радіально неоднорідній плазмі ці рівняння зводяться до системи диференціальних рівнянь другого порядку, які є зачепленими одне з одним, для аксіальних компонентів електричних і магнітних полів [181]:

$$\frac{\varepsilon_p - N_z^2}{\varepsilon_p r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varepsilon_p r}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_p - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] E_z = P H_z, \quad (7.1)$$

$$\frac{\varepsilon_p - N_z^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_p - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} \right] H_z = Q E_z, \quad (7.2)$$

де аксіальний показник заломлення $N_z = ck_z / \omega$. Праві частини рівнянь (7.1) та (7.2) відповідно дорівнюють,

$$P = i \frac{\varepsilon_p - N_z^2}{\varepsilon_p} N_z \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{I}{N_z^2 - \varepsilon_p}; \quad (7.3)$$

$$Q = i(\varepsilon_p - N_z^2) N_z \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{I}{\varepsilon_p - N_z^2}. \quad (7.4121)$$

Інші компоненти полів несиметричних ПХ виражаються через E_z, H_z та азимутальний показник заломлення $N_g = cm / (\omega r)$ [181]. У випадку слабкої радіальної неоднорідності плазми розв'язок рівнянь (7.1) та (7.2), що задовольняє крайовій умові про обмеженість величини поля на осі хвилеводу, можна знайти методом варіації сталої в наступному вигляді:

$$E_z = \varphi \left(A_1 - A_2 \int_{R_1}^r \frac{\tilde{\varphi} P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})} \right) + A_2 \tilde{\varphi} \int_0^r \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})}, \quad (7.5)$$

$$B_z = \psi \left(A_2 - A_1 \int_{R_1}^r \frac{\tilde{\psi} Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} \right) + A_1 \tilde{\psi} \int_0^r \frac{\psi Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})}. \quad (7.6)$$

Тут $A_{1,2}$ – константи інтегрування, функції $\varphi(r)$ та $\psi(r)$ – розв'язки рівнянь (7.1) та (7.2) з нульовими правими частинами, які обмежено на осі хвилеводу, а функції $\tilde{\varphi}(r)$ та $\tilde{\psi}(r)$ – лі-

нійно незалежні від $\varphi(r)$ і $\psi(r)$ розв'язки цих же рівнянь, що мають особливість на осі. Вронськіани цих функцій пропорційні до r^{-1} [117]. Оскільки для збурень з $k_z^2 > \varepsilon_d \omega^2 c^{-2}$ дисперсійне рівняння не має розв'язків у вигляді ПХ, тому надалі обмежимося випадком: $\kappa^2 = \varepsilon_d \omega^2 / c^2 - k_z^2 > 0$.

У діелектричному шарі радіальна залежність полів довгохвильових ПХ, яка задовольняє зазначеним вище крайовим умовам на металевій стінці камери, визначається функціями Бесселя $J_m(x)$ та Неймана $N_m(x)$ [136,137] та однією константою інтегрування. Внаслідок підпорядкування полів даних ПХ крайовим умовам (3)-(5) дістаємо дисперсійне рівняння у вигляді:

$$\det |a_{ij}| = 0, \quad (7.7)$$

де індекси i, j - натуральні числа від 1 до 4,

$$a_{11} = \frac{N_z N_g \varphi}{N_z^2 - \varepsilon_p} - \frac{ic \omega^{-1}}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \int_0^{R_1} \frac{\psi Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.8)$$

$$a_{12} = \frac{N_z N_g \tilde{\varphi}}{N_z^2 - \varepsilon_p} \int_0^{R_1} \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})} - \frac{ic \omega^{-1}}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.9)$$

$$a_{13} = \frac{\omega}{ic \kappa} [J'_m(\kappa R_1) N'_m(\kappa R_2) - J'_m(\kappa R_2) N'_m(\kappa R_1)], \quad (7.10)$$

$$a_{14} = -\frac{k_z m}{\alpha \kappa^2} a_{24}, \quad a_{21} = \varphi(R_1), \quad a_{22} = \tilde{\varphi}(R_1) \int_0^{R_1} \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})}, \quad (7.11)$$

$$a_{23} = a_{44} = 0, \quad a_{24} = J_m(\kappa R_1) N_m(\kappa R_2) - J_m(\kappa R_2) N_m(\kappa R_1), \quad (7.12)$$

$$a_{31} = \frac{N_z N_g}{N_z^2 - \varepsilon_p} \tilde{\psi} \int_0^{R_1} \frac{\psi Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})} - \frac{ic \omega^{-1} \varepsilon_p}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.13)$$

$$a_{32} = \frac{N_z N_g}{N_z^2 - \varepsilon_p} \psi + \frac{ic}{\omega} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p - N_z^2} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} \int_0^{R_1} \frac{\varphi P \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})} \Big|_{r=R_1}, \quad (7.14)$$

$$a_{34} = \frac{i\omega}{c\kappa} [J'_m(\kappa R_1)N_m(\kappa R_2) - J_m(\kappa R_2)N'_m(\kappa R_1)], \quad (7.15)$$

$$a_{41} = \tilde{\psi}(R_1) \int_0^{R_1} \frac{\psi Q \varphi dr}{W(\psi, \tilde{\psi})}, \quad a_{42} = \psi(R_1), \quad a_{33} = -\frac{k_z m}{R_1 \kappa^2} a_{43}, \quad (7.16)$$

$$a_{43} = J_m(\kappa R_1)N'_m(\kappa R_2) - J'_m(\kappa R_2)N_m(\kappa R_1). \quad (7.17)$$

Виявляється, що при розкритті визначника (7.7) відсутні доданки, що пропорційні непарним ступеням k_z та m . Отже, поправка до частоти даних ПХ є квадратичною за k_z . Нагадаємо, що АПХ у таких хвилеводах також є виродженими щодо знака m [41].

Якщо плазма є радіально однорідною, то рівняння (7.1) та (7.2) звертаються в однорідні рівняння Бесселя [136]. При цьому радіальний розподіл полів E_z та B_z визначається модифікованими функціями Бесселя, а всі елементи матриці a_{ij} обчислюються у явному вигляді. Глибина проникнення поля ПХ до плазми k_{\perp}^{-1} визначає радіальний масштаб неоднорідності поля:

$$k_{\perp}^2 = k_z^2 - \varepsilon_p \omega^2 c^{-2}. \quad (7.18)$$

Умова $k_{\perp}^2 > 0$ визначає діапазон частот, де існують ці несиметричні ПХ:

$$\omega^2 < \Omega_e^2 + c^2 k_z^2. \quad (7.19)$$

Діапазон частот (7.19) є ширшим за частотний діапазон існування АПХ [41]. Подальший аналіз рівняння (7.7) виконано для випадку вузького діелектричного шару, $\omega(R_2 - R_1) \ll |m|c$, бо у протилежному випадку вплив плазмового заповнення хвилеводу на дисперсійні властивості хвилі стає малим.

Якщо діелектрична проникливість прошарку ε_d не є близькою до одиниці, врахування малого значення k_z призводить до появи ще одного розв'язку, який є низькочастотним порівняно з АПХ. Надалі в цьому підрозділі цей розв'язок будемо називати повільною модою. Її частота ω_- слабко залежить від m та практично є пропорційною до k_z , а групова швидкість $\partial\omega_- / \partial k_z > 0$ за модулем зазвичай перевершує абсолютне значення групової швидкості швидкої моди, частота якої ω_+ при $k_z \rightarrow 0$ переходить у частоту АПХ.

Якщо діелектрична проникливість шару ε_d не є занадто близькою до одиниці, дисперсійна залежність швидкої моди характеризується негативною дисперсією, $\partial\omega_+ / \partial k_z < 0$. При цьому врахування малого значення k_z призводить до певного зниження частоти цих ПХ у порівнянні з частотою АПХ. Це дозволяє обчислити частоту швидкої моди методом послідовних наближень, використавши за нульове наближення теорію АПХ [41]. Мала від'ємна поправка до частоти виявляється при цьому квадратичною за k_z . Аналітичні розв'язки дисперсійного рівняння (7.7) вдається здобути у двох граничних випадках: широким $R_1 \gg |m| \delta$ та вузьким $R_1 \ll |m| \delta$ плазмових хвилеводів. З їхнього аналізу можна зробити висновки: якщо ε_d не є занадто близькою до одиниці, то частота довгохвильових ПХ є нижчою за частоту відповідних АПХ (за інших рівних умов); групова швидкість швидкої моди дорівнює нулю в загальному випадку тільки при $k_z=0$; якщо $\varepsilon_d = 1$, то частота ω_+ визначається як сума частоти АПХ та малої поправки $\propto k_z^4$. У цьому полягає якісна відмінність здобутих результатів від результатів роботи [182], де помилково встановлено зростання частоти ПХ у порівнянні з частотою АПХ у випадку вакуумного прошарку.

Зростання величини k_z призводить до того, що частоти швидкої та повільної мод наближаються одна до одної, і при певному значенні $k_z = k_0$ обидві моди мають однакову частоту ω_0 . Виходить, що для ПХ із частотами, близькими до ω_0 , їхня групова швидкість необмежено зростає і втрачає фізичний зміст. Цю обставину слід розуміти в такий спосіб. Для ПХ із частотою та аксіальним хвильовим числом, близькими до ω_0 та k_0 , обране тут представлення електромагнітного збурення у вигляді однієї гармоніки стає некоректним. Поблизу цієї точки на дисперсійній кривій залежність $k_z(\omega)$ можна приблизно описати квадратичною параболою,

$$k_z(\omega) = k_0 - (\omega - \omega_0)^2 / \beta, \quad (7.20)$$

де $k_0 = k_z(\omega_0)$, β - певна константа, що має розмірність прискорення. Тоді електромагнітний імпульс $\propto \exp[-t^2 / (2\tau^2)] \cos(k_0 z - \omega_0 t)$ тривалістю τ розпливається на відстанях порядку $\beta\tau^2 / 2$ від точки, де він був сформований.

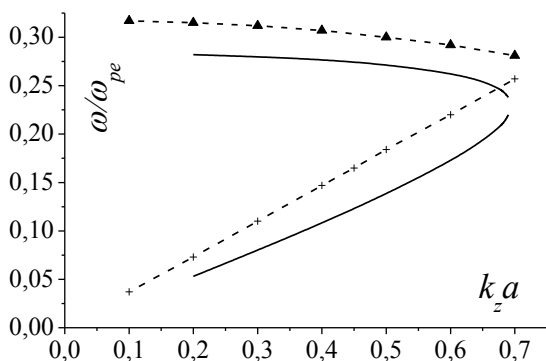


Рис. 36. Частота ПХ, нормована на ленгмюрівську частоту, як функція аксіального хвильового числа, помноженого на радіус плазмового

стовпа, у випадку широкого хвилеводу: $m=3$, $\varepsilon_d=2$, $\delta/R_1=0.3$. Суцільна і пунктирна лінії побудовані, відповідно, за результатами числового розв'язання дисперсійного рівняння і аналітичними формулами

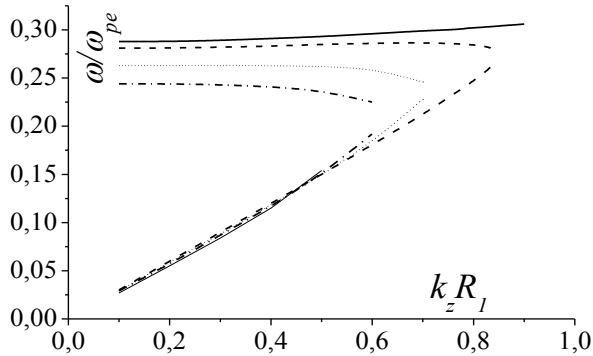


Рис. 37. Частота ПХ, нормована на ленгмюрівську частоту, як функція аксіального хвильового числа, помноженого на радіус плазмового стовпа, у випадку широкого хвилеводу: $\delta/R_1=0.3$. Суцільною, штриховою, крапковою і штрих-пунктирною лініями представлені результати у випадках $\varepsilon_d=1$, $\varepsilon_d=1.05$, $\varepsilon_d=1.2$ і $\varepsilon_d=1.4$, відповідно

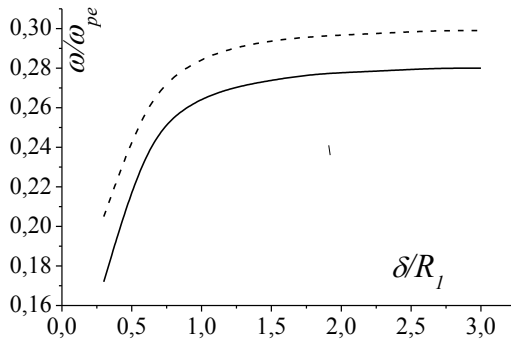


Рис. 38. Нормовані на ленгмюрівську частоту частоти ПХ (суцільна лінія) і АПХ (штрихова лінія) як функції кривизни межі плазма-діелектрик, помноженої на глибину скін-шару, у випадку $m=2$, $\varepsilon_d=2$

Результати числового дослідження рівняння (7.7) представлено у вигляді графіків на Рис. 36-38. На Рис. 36 суцільною лінією показані результати, що здобуто для ПХ з азимутальним номером $m=3$. При цьому були обрані наступні значення параметрів хвилеводу: $\delta = 0.3R_1$; $\varepsilon_d = 2$; ширина діелектричного прошарку $R_2 - R_1 = 0.1R_1$. Відзначимо слабку залежність дисперсійних кривих повільної моди від m : значення частот ω_- навіть при $k_z R_1 = 0.4$ розрізняються не більше, ніж на 6%. Штриховими лініями зображено криві, що побудовано за асимптотичними формулами для швидкої і повільної мод, вони позначені трикутниками і хрестами, відповідно. Точність асимптотичних формул для частоти ω_- складає 12%.

Числовий аналіз свідчить, що мала поправка, яка обумовлена врахуванням аксіального хвильового числа, є квадратичною за k_z тільки у випадку, якщо $\varepsilon_d \neq 1$. Сімейство дисперсійних кривих довгохвильових ПХ, що поширюються з номером моди $m=2$ у хвилеводах з різним діелектричним покриттям стінок, представлено на Рис. 37, значення інших параметрів хвилеводу такі ж, як для Рис. 36. Якщо плазмовий стовп відокремлено від металеві стінки хвилеводу вакуумним прошарком, тоді існує тільки швидка мода, і дисперсійна залежність ПХ характеризується позитивною дисперсією. Поводження дисперсійної кривої при $\varepsilon_d = 1$ якісно збігається з тим, що наведено в [89] для випадку плазмового хвилеводу, який поміщено в слабке аксіальне магнітне поле й оточено вакуумним шаром, та в [90] – для випадку коаксіального плазмового шару у вакуумі. Повільна мода з'являється тільки при $\varepsilon_d > 1$. У випадку, коли діелектрична стала слабко відрізняється від одиниці, дисперсійна крива швидкої моди містить ділянку з позитивною дисперсією (при $k_z < k_0 / 2$) і ділянку з негативною дисперсією при великих (близьких до k_0) значеннях аксіального хвильового числа. Тобто у цьому випадку існує таке значення $k_z \neq 0$, при якому групова швидкість звертається в нуль, а тому такі ПХ не будуть переносити енергію.

сити енергію в аксіальному напрямку. Поступове збільшення величини ε_d спочатку збільшує діапазон k_z , де ці швидкі ПХ мають приблизно нульове значення групової аксіальної швидкості. При подальшому збільшенні ε_d дисперсійна залежність швидкої моди характеризується тільки негативною дисперсією. Якісне поведження таких дисперсійних кривих вже практично не відрізняється від залежності, представлені на Рис. 36 для $\varepsilon_d = 2$.

На Рис. 38 суцільною лінією показано результат числового аналізу залежності власної частоти ПХ від кривини R_1^{-1} межі поділу плазма - діелектрик. Значення аксіального хвильового числа $k_z \delta = 0.15$, інші параметри мають ті ж значення, що і для Рис. 36. Штриховою лінією для порівняння показано аналогічну залежність для АПХ.

Результати числового розв'язання дисперсійного рівняння для довгохвильових ПХ у вузькому хвилеводі є подібними випадку широкого хвилеводу. Але інтервал значень добутку $k_z R_1$, для якого хвиля має поверхневий характер, у цьому випадку є на порядок меншим, ніж для широкого хвилеводу.

Отже, у циліндричних металевих хвилеводах, які частково заповнено плазмою без магнітного поля, можуть поширюватися ПХ із довільним значенням азимутального номера моди та малим значенням аксіального хвильового числа. Якщо $\varepsilon_d \neq 1$, то наявність скінченного значення k_z у ПХ призводить до зниження частоти швидкої моди в порівнянні з випадком АПХ і появи нового розв'язку, якого не було у випадку АПХ, а саме – повільної моди. Частота повільної моди практично є пропорційною величині k_z .

7.2. Довгохвильові несиметричні ПХ у циліндричних хвилеводах, які повністю заповнено магнітоактивною плазмою

Дисперсійні властивості АПХ, що поширюються точно уздовж азимута поперек зовнішнього магнітного поля в циліндричних плазмових хвилеводах, повністю заповнених плазмою з однорідним радіальним профілем густини, досліджено як у загальному випадку [20] так і у потенціальному наближенні [19]. Вплив малих аксіальних хвильових чисел k_z на дисперсійні властивості електромагнітних ПХ на межі циліндрична плазма-метал було досліджено в [183]. Ця задача при довільних значеннях параметрів може бути розв'язана тільки числовими методами. Але в діапазоні великих аксіальних довжин хвиль вона допускає розв'язання в межах теорії збурень, причому роль нульового наближення грає теорія АПХ [40]. У даному підрозділі наведено результати теоретичних досліджень властивостей електромагнітних ПХ з довільними значеннями азимутального номера моди m та малим значенням k_z , що поширюються в циліндричних металевих хвилеводах, які повністю заповнено холодною магнітоактивною радіально неоднорідною плазмою [183].

Геометрія хвилеводу, крайові умови та вихідні припущення описано у підрозділі 1.1, зовнішнє магнітне поле спрямоване уздовж осі хвилеводу: $\vec{B}_0 \parallel \vec{z}$. У випадку АПХ рівняння Максвелла розпадаються на дві незалежні підсистеми. А для довгохвильових несиметричних ПХ, якщо знехтувати доданками другого і більш високого порядку малості за k_z , то рівняння Максвелла можна звести до двох диференціальних рівнянь другого порядку для аксіальних компонентів електричних і магнітних полів цих ПХ у випадку радіально неоднорідної плазми:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial H_z}{\partial r} - \left[1 + \frac{m^2}{r^2 k_H^2} - \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{k_H^2} \right) \right] H_z = \widehat{K} E_z; \quad (7.21)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial E_z}{\partial r} - \left(k_0^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) E_z = \widehat{M} H_z. \quad (7.22)$$

Малі праві частини (7.21) та (7.22) мають наступний вигляд:

$$\widehat{K}E_z = iN_z \left\{ \frac{m}{r} E_z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{k_H^2} \right) + \frac{\mu k_0^2}{k_H^2} E_z + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{k_H^2} \right) \frac{\partial E_z}{\partial r} \right\}, \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} \widehat{M}H_z = iN_z \left\{ \frac{1}{N_H^2} \frac{\partial \mu}{\partial r} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right. \\ \left. + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \mu + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{N_H^2} \right) - \frac{\mu m}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\mu}{N_H^2} \right) \right] H_z \right\}. \quad (7.24) \end{aligned}$$

Глибини проникнення H - моди k_0^{-1} та E - моди k_H^{-1} визначаються через компоненти тензора ε_{ik} ,

$$\begin{aligned} k_0^2 = -\omega^2 c^{-2} \varepsilon_3, \quad k_H^2 = \omega^2 c^{-2} N_H^2, \\ N_H^2 = (\varepsilon_1 - N_z^2)(\mu^2 - 1), \quad \mu = \varepsilon_2 / (\varepsilon_1 - N_z^2). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Систему рівнянь (7.21) та (7.22) для повздовжніх компонентів електромагнітного поля E_z і H_z для випадку довільних значень k_z та радіально однорідної плазми в аксіальному магнітному полі було отримано співробітниками ІЗФ РАН [184]. А її аналітичні розв'язки в наближенні довгохвильових несиметричних ПХ здобуто науковцями ХНУ ім. В.Н. Каразіна [183].

Розв'язки рівнянь (7.21) та (7.22) знаходимо методом варіації сталої, вони співпадають з (7.5) та (7.6) при заміні оператора \widehat{P} на \widehat{K} та оператора \widehat{Q} на \widehat{M} . Азимутальний компонент електричного поля виражається через E_z та H_z відповідно до [184]. Накладання крайових умов на тангенціальні складові електричного поля E_θ та E_z на внутрішній поверхні металевого хвилеводу дає можливість здобути дисперсійне рівняння довгохвильових несиметричних ПХ [183]:

$$A_{12}A_{21} = A_{11}A_{22}, \quad (7.26)$$

де

$$A_{21} = \varphi(R_1), \quad (7.27)$$

$$A_{11} = \left\{ \frac{ic}{\omega N_H^2} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial r} \int_0^{R_1} \psi k_H^2 \tilde{K} \varphi dr + \frac{i \mu N_g}{N_H^2} \tilde{\psi} \int_0^{R_1} \psi k_H^2 \tilde{K} \varphi dr + \frac{N_z N_g}{N_H^2} \varphi + \frac{\mu N_z c}{\omega N_H^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right\}_{|r=R_1}, \quad (7.28)$$

$$A_{12} = \left\{ \frac{ic}{\omega N_H^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\mu N_g}{N_H^2} \psi \right\}_{|r=R_1}, \quad (7.29)$$

$$A_{22} = \tilde{\varphi}(R_1) \int_0^{R_1} \frac{\varphi \hat{M} \psi dr}{W(\varphi, \tilde{\varphi})}. \quad (7.30)$$

Слід зазначити, що з одного боку, дисперсійне рівняння (7.26) є узагальненням дисперсійного рівняння, отриманого в [40], на випадок малих k_z , а з іншого боку - є частинним випадком загального дисперсійного рівняння, отриманого в [184] для визначення спектру власних частот коаксіального плазмового хвилеводу в скінченному магнітному полі. Структура рівняння (7.26) є типовою до випадку слабо зв'язаних хвиль, у ньому умова $A_{12}=0$ відіграє роль дисперсійного рівняння АПХ, розв'язок якого ω_0 вважаємо відомим. Множник A_{12} в діапазоні частот існування досліджуваних ПХ змінює знак [20]. Умова $A_{21}=0$ представляє собою дисперсійне рівняння звичайно поляризованих азимутальних об'ємних мод. Права частина дисперсійного рівняння (7.26) є квадратичною за малим k_z , вона відіграє роль параметра слабого зв'язку між E - та H - модами. Отже, поправка $\Delta\omega$ до власної частоти довгохвильових ПХ у загальному випадку $\Delta\omega \propto k_z^2$.

Розглянемо спочатку наближення однорідного радіального профіля густини плазми. Ця модель добре описує випадок твердотільної плазми та задовільно описує випадок, коли густина слабо змінюється на відстанях порядку глибини проникнення хвилі до плазми, що має місце у випадку підтримання газового розряду різними ПХ [31,32]. Розв'язки відповідних однорідних рівнянь виражаються через модифіковані функції Бесселя. Умова $k_H^2 > 0$ визначає частотні діапазони існування даних ПХ,

що при $k_z=0$ збігаються з діапазонами існування АПХ [40]: ПХ із номерами $m > 0$ поширюються в діапазоні, який назовемо в цьому підрозділі низькочастотним (НЧ),

$$|\omega_e| \sqrt{\frac{\Omega_i^2 + c^2 k_z^2}{\Omega_e^2 + \omega_e^2}} < \omega < |\omega_e|, \quad (7.31)$$

а з негативними азимутальними номерами - у діапазоні, який називатимемо в цьому підрозділі високочастотним (ВЧ),

$$\sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2 + c^2 k_z^2} < \omega < 0.5|\omega_e| + \sqrt{0,25\omega_e^2 + \Omega_e^2 + c^2 k_z^2}. \quad (7.32)$$

Така властивість ПХ: поширюватися тільки в одному напрямку поперек зовнішнього магнітного поля, - добре відома для хвилеводів із межею плазма-метал [8,17-19]. Вона називається односпрямованістю і може бути дуже корисною у різних радіотехнічних пристроях, де необхідно забезпечити відсутність відбитого сигналу. Величина k_0^2 має різні знаки в діапазонах (7.31) та (7.32): так, у НЧ діапазоні $k_0^2 > 0$, а у ВЧ діапазоні вона стає від'ємною, $k_0^2 < 0$.

У випадку довгохвильових НЧ ПХ в однорідному плазмовому хвилеводі дисперсійне рівняння (7.26) спрощується, його коефіцієнти можна записати в явному вигляді [183]. Врахування малого значення k_z призводить до появи ще одного (порівняно з випадком АПХ) розв'язка дисперсійного рівняння. Надалі в цьому підрозділі цей розв'язок будемо називати повільною модою. Для НЧ діапазону її частота ω_- практично є пропорційною до величини k_z , тобто величина ω_- прямує до нижньої межі діапазону при $k_z \rightarrow 0$ (див. Рис. 39). Групова швидкість повільної моди завжди позитивна і за модулем перевершує абсолютне значення групової швидкості швидкої моди. Як і для випадку вільної плазми, частота ω_+ швидкої моди при $k_z \rightarrow 0$ переходить у частоту АПХ. Дисперсійна крива швидкої моди містить при ду-

же малих значеннях k_z ділянку з позитивною дисперсією. При цьому врахування малого значення k_z призводить до певного підвищення частоти цих ПХ порівняно з частотою АПХ. Це дозволяє обчислити частоту швидкої моди методом послідовних наближень у вигляді $\omega_+ = \omega_0 + \Delta\omega$, використавши за нульове наближення теорію АПХ [40]. Мала поправка $\Delta\omega$ до частоти АПХ виявляється при цьому квадратичною за k_z ,

$$\Delta\omega \approx \left(\frac{A_{11}A_{22}}{A_{21}} - \frac{\partial A_{12}}{\partial k_z^2} \Big|_{\omega=\omega_0} k_z^2 \right) \left[\frac{\partial A_{12}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right]^{-1} \propto k_z^2. \quad (7.33)$$

Прості аналітичні розв'язки дисперсійного рівняння (7.26) вдається здобути у двох граничних випадках: у широких, $R_1 \gg |m| \delta$, та вузьких, $R_1 \ll |m| \delta$, хвилеводах. На практиці виявилось (і це підтверджують результати числових розрахунків), що теорію послідовних наближень можна застосовувати для вивчення дисперсійних властивостей швидкої моди довгохвильових несиметричних НЧ ПХ у досить широкому діапазоні аксіальних хвильових чисел. У випадку широких хвилеводів цей діапазон визначається наступною нерівністю:

$$k_z^2 \ll 8(m/a)^2, \quad (7.34)$$

У випадку вузьких хвилеводів він ще збільшується:

$$k_z^2 \ll 8 \left(m(m+1)\delta/a^2 \right)^2. \quad (7.35)$$

Як і для випадку вільної плазми, при зростанні k_z частота ω_+ спочатку сягає максимуму, потім зменшується, надалі частоти швидкої і повільної мод наближаються одна до одної, і при певному значенні $k_z=k_m$ обидві моди характеризуються однаковою частотою ω_m . Для довгохвильових несиметричних ПХ із частотою та аксіальним хвильовим числом, які є близькими до

ω_m та k_m , відповідно, обране тут представлення електромагнітного збурення у вигляді однієї гармоніки стає некоректним. Як і у випадку вільної плазми для даних ПХ також можна оцінити аксіальну відстань, на якій початковий електромагнітний імпульс розпливається [183].

Порівняємо результатами аналітичного та числового дослідження дисперсійного рівняння (7.26). На Рис. 39 представлено залежність $\omega(k_z)$ для цих ПХ із НЧ діапазону (7.31). Обрано наступні значення параметрів плазмової системи: $m=3$, $\Omega_e = 5|\omega_e|$, $R_1 = 10\delta$. Суцільною лінією зображено дисперсійну криву швидкої моди, штриховою лінією – повільної моди. Пунктирна лінія, яка позначена кільцями, указує межу частотного діапазону (7.31). Пунктирну лінію, яку позначена хрестами, побудовано за асимптотичними формулами для частот довгохвильових несиметричних ПХ. У випадку вузького хвилеводу залежність $\omega_+(k_z)$ виражена дуже слабо, тому цей графік не наведено.

Дослідимо тепер випадок ВЧ довгохвильових несиметричних ПХ в однорідному плазмовому хвилеводі. У ВЧ діапазо-

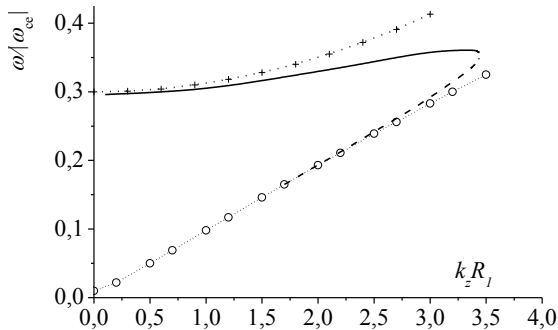


Рис. 39. Залежність частоти, нормованої на модуль електронної циклотронної частоти, незвичайно поляризованої хвилі в НЧ діапазоні від аксіального хвильового числа, помноженого на радіус хвилеводу.

Азимутальний номер моди $m=3$, $\omega_{pe}=5|\omega_e|$, $R_1=10\delta$

ні (7.32) реалізуються умови для поширення об'ємних H - мод. Аналіз дисперсійного рівняння (7.26) показує, що ці ВЧ ПХ поширюються тільки у широких хвилеводах з радіусом:

$R_1 \delta^{-1} > \Omega_e |m / \omega_e|$. Для ВЧ АПХ з азимутальним номером моди $m = -2$ у випадку $\Omega_e = 3|\omega_e|$ ця нерівність виконується у хвилеводах, радіус яких приблизно у шість разів більший за δ . Числовий аналіз підтверджує справедливість аналітичних розрахунків.

Якщо прикладене магнітне поле і розміри хвилеводу не занадто великі, так що має місце нерівність:

$$R_1^2 \omega_e^2 / c^2 < j_{|m|,s}^2 - m^2, \quad (7.36)$$

тоді власні об'ємні звичайно поляризовані азимутальні хвилі в такому хвилеводі не поширюються. Тут $j_{|m|,s}$ - значення s -го кореня функції Бесселя порядку $|m|$ [136]. У цьому випадку поправка до частоти даних ВЧ ПХ, яка обумовлена врахуванням скінченноного k_z , є додатною,

$$\begin{aligned} \Delta\omega = & 0.5 N_z^2 \omega_0 + 0.5 \pi |m| N_z^2 J'_{|m|} \left(\sqrt{m^2 + R_1^2 \omega_e^2 / c^2} \right) \\ & \times N_{|m|} \left(\sqrt{m^2 + R_1^2 \omega_e^2 / c^2} \right) \omega_0. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Представляється важливим порівняти результати, що наведено у цьому підрозділі, з положеннями роботи [185], у якій виконано великий обсяг числових розрахунків дисперсійних властивостей квадрупольних ($m = \pm 2$) і октопольних ($m = \pm 3$) поверхневих мод, у тому числі для хвилеводів з вузьким вакуумним шаром (аж до $R_2 - R_1 = 0.1 R_1$) і для хвиль з малим аксіальним хвильовим числом (аж до $k_z R_1 = 0.1$). На перший погляд, у цьому випадку можна було б очікувати, що наведені в [185] дисперсійні властивості ПХ виявляться близькими до властивостей АПХ на межі плазма-метал. Але, як показано в роботі [39],

наявністю вакуумного шару між металевою стінкою хвилеводу і плазмою можна знехтувати тільки в тому випадку, якщо досліджуються дисперсійні властивості АПХ у хвилеводі з настільки вузьким шаром, що виконується наступна нерівність:

$$\sqrt{b-a} \ll |\omega_{ce}| \sqrt{a} / (2\sqrt{|m|\Omega_e}). \quad (7.38)$$

Незважаючи на великий обсяг виконаних у [185] числових розрахунків для різної товщини вакуумного шару, у жодному з них умова (7.38) не реалізується. Тому жоден із графіків, наведених у [185], не підходить для порівняння з результатами, що представлено у цьому підрозділі. Разом з тим, наведені в [185] результати числового розв'язання дисперсійного рівняння у довгохвильовому наближенні добре узгоджуються з результатами роботи [39], де досліджені дисперсійні властивості АПХ за наявності вакуумного прошарку між плазмовим циліндром і металевою камерою.

Дослідимо тепер резонансну взаємодію довгохвильових незвичайних ПХ із об'ємними звичайними хвилями. Зі збільшенням радіуса хвилеводу та/або магнітного поля можуть реалізуватися умови збігу власних частот АПХ і звичайної азимутальної об'ємної хвилі. Ці умови можна оцінити з формули (7.36), якщо у ній знак нерівності замінити знаком рівності. За цих умов дисперсійне рівняння (7.26) набуває вигляду квадратного рівняння відносно поправки $\Delta\omega$,

$$\left(\frac{\partial A_{12}}{\partial k_z^2} \Big|_{\omega=\omega_0} k_z^2 + \frac{\partial A_{12}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega \right) \frac{\partial A_{21}}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega = A_{11} A_{22}. \quad (7.39)$$

При його розв'язанні можна знехтувати першим доданком у дужках у лівій частині, що є квадратичним за k_z , у порівнянні з другим доданком, який є лінійним за k_z . Тоді розв'язок

дисперсійного рівняння набуває вигляду $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$, де

$$\omega_0 = \sqrt{\Omega_e^2 + j_{|m|,s}^2 c^2 R_1^{-2}}, \quad (7.40)$$

$$\Delta\omega = \pm \omega_0 N_z N_g \times \sqrt{\frac{\pi}{2|m|} j_{|m|,s} N_{|m|} (j_{|m|,s}) Q_1 k_H / (R_1 I_m(k_H R_1))}. \quad (7.41)$$

За цих умов вплив малих аксіальних хвильових чисел на власну частоту несиметричних ПХ виявляється сильнішим, ніж у попередньому, нерезонансному випадку, бо поправка до частоти тепер: $\Delta\omega \propto k_z$. Мінімальне магнітне поле, яке є необхідним для досягнення резонансних умов, відповідає хвилі з азимутальним номером моди $m = -1$. Воно визначається в такий спосіб: $R_1^2 \omega_e^2 / c^2 = j_{1,1}^2 - 1 \approx 13.68$. Оцінимо, при яких значеннях магнітного поля B_0 і радіуса хвилеводу можна досягти це співвідношення. Наприклад, для хвилеводу з радіусом $R_1 \approx 20$ см потрібне не дуже сильне магнітне поле $B_0 \approx 300$ Гс. Для широ-

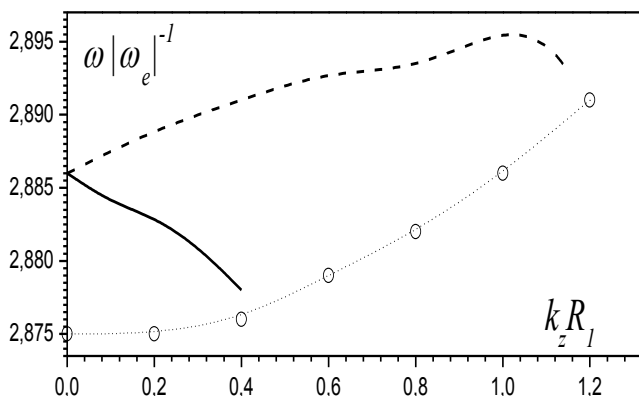


Рис. 40. Залежність частоти, нормованої на модуль електронної циклотронної частоти, незвичайно поляризованої хвилі в ВЧ діапазоні від аксіального хвильового числа, помноженого на радіус хвилеводу, за виконання умови резонансної взаємодії із звичайно поляризованою об'ємною хвилею. Азимутальний номер моди $m = -1$, $\Omega_e = 2.695|\omega_e|$, $R_1 = 10\delta$

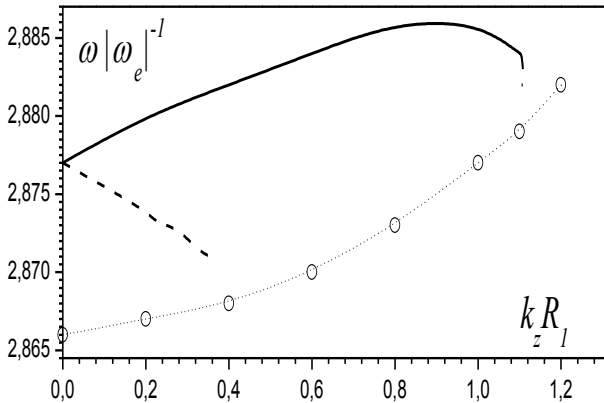


Рис. 41. та сама залежність, що і на рис. 40. Азимутальний номер моди $m = -1$, $\Omega_e = 2.686|\omega_e|$, $R_1 = 10\delta$

ких хвилеводів, у яких $R_1 = 10\delta$, ця умова виконується, якщо $\Omega_e = 2.7|\omega_e|$. На Рис. 40 представлено результати числового аналізу дисперсійного рівняння (7.26) для хвиль з азимутальним номером моди $m = -1$ у резонансному випадку: $R_1 = 10\delta$, $\Omega_e = 2.695|\omega_e|$. Суцільною лінією показано дисперсійну криву довгохвильових несиметричних ПХ, штриховою лінією - криву об'ємної звичайно поляризованої азимутальної хвилі. Якщо ж величина магнітного поля ледве перевищує резонансне значення, то при малих аксіальних хвильових числах дисперсійні криві даних ПХ і об'ємної звичайно поляризованої азимутальної хвилі міняються місцями в порівнянні з випадком, який зображено на Рис. 40. На Рис. 41 продемонстровано результати числового дослідження дисперсійне рівняння (7.26) для хвилеводу з

$\Omega_e = 2.686|\omega_e|$. Інші параметри хвиль і хвилеводу такі ж, як і для розрахунків, які наведено на Рис. 40. Якщо величина магнітного поля перевищує резонансне значення, то залежність частоти хвилі від k_z починає відрізнятися від лінійної. Нелінійна залежність частоти від аксіального хвильового числа спостерігається і при аналогічному зменшенні магнітного поля в порівнянні з резонансним значенням.

Отже, у цьому підрозділі теоретично показано, що уздовж межі холодна магнітоактивна плазма – метал із скінченним радіусом кривини може поширюватися ПХ із довільним значенням азимутального номера моди та малим значенням k_z . Отримано дисперсійне рівняння для цих хвиль у випадку неоднорідного радіального профілю густини плазми. Поправка до власної частоти цих ПХ, яка обумовлена врахуванням малого аксіального числа, у загальному випадку $\Delta\omega \propto k_z^2$. Визначено резонансні умови, за яких урахування малого k_z призводить до поправки до власної частоти цих ПХ, яка є лінійною за аксіальним хвильовим числом. На відміну від робіт [182,185], в яких ПХ досліджені для випадку магнітоактивного плазмового стовпа, який відокремлено від металеві камери скінченням [182] і нескінченням [185] вакуумним шаром, тільки для окремих значень азимутального номера моди і тільки числовими методами, у цьому підрозділі отримано наочні аналітичні вирази для власних частот довгохвильових ПХ із довільним азимутальним номером моди, що дозволяє спростити пошук числових розв'язків дисперсійного рівняння та контролювати появу нефізичних розв'язків.

7.3. Висновки

Досліджено дисперсійні властивості довгохвильових несиметричних ПХ в ізотропних та гіротропних хвилеводах. Доведено, що у наближенні малих аксіальних хвильових чисел k_z це дослідження можна виконати аналітично методами теорії збурень, використовуючи у якості нульового наближення теорію АПХ. Поправки до частоти довгохвильових несиметричних ПХ знайдено для всіх зазначених випадків. Знайдено, що в ізотроп-

ному хвилеводі довгохвильві несиметричні ПХ можуть існувати у вигляді двох різних мод: швидкої моди, яка є аналогом АПХ, та повільної моди, частота якої $\omega_- \propto k_z$, якщо діелектрична проникливість прошарку між металевою стінкою хвилеводу та плазмою $\varepsilon_d > 1$. При збільшенні величини k_z дисперсійні криві цих мод перетинаються. У випадку металевих хвилеводів, що повністю заповнено магнітоактивною плазмою, поведінка дисперсійних кривих швидкої моди, яка є поверхневою та незвичайно поляризованою, та повільної звичайно поляризовано об'ємної моди у НЧ діапазоні нагадує випадок ізотропної плазми. А у ВЧ діапазоні можлива резонансна взаємодія швидкої та повільної мод.