

где X — переменная матрица, имеем

$$TAT^{-1} + TBP_1 = \left(\begin{array}{c|c} \frac{A_{11}}{0} & \frac{A_{12}}{X + A_{22}} \\ \hline & A_{23} \end{array} \right).$$

С другой стороны, если матрица CT^{-1} имеет вид

$$CT^{-1} = (\tilde{C}_{11}^{l_1} | C_{12}),$$

то из условия 2 все столбцы A_{21}^* включены в подпространство $L(c_{11}^*)$. Поэтому, соответствующим образом выбирая матрицу P_2 вида

$$P_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ v \\ 0 \end{array} \right) \}^{l_1},$$

имеем

$$TAT^{-1} + P_2CT^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{A_{11}}{0} & \frac{A_{12}}{G} \\ \hline & A_{23} \end{array} \right),$$

где G — некоторая фиксированная матрица. Подбирая X так, чтобы $X + A_{22} = G$, имеем $TBP_1 = P_2CT^{-1}$. Способом, указанным ранее, выбираем P_3 такую, что $TBP_1 = P_2CT^{-1} = TBP_3CT^{-1}$. Следовательно,

$$T(A + BP_3C)T^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{A_{11}}{0} & \frac{A_{12}}{G} \\ \hline & A_{23} \end{array} \right),$$

отсюда P_3 — искомая матрица.

3. Подпространство m и его существование.

Лемма о подпространстве

Пусть на систему (1) — (4) наложено условие (6). Заметим, что вследствие критерия [4] для стабилизируемости системы необходимо, чтобы подпространство $M + L_y$ включало все векторы I рода оператора A . Пусть это условие выполнено.

Определение. Назовем m — подпространством системы (1) — (4), на которую наложено условие (6), минимальное по включению подпространство χ , удовлетворяющее условиям:

1) $\chi \subset M$; 2) $A(\chi) \subset \chi + \mathcal{L}(B)$; 3) $\chi + L_y$ включает все положительные векторы I рода оператора A .

Лема 1. Подпространство m существует, если $M + L_y$ включает все векторы I рода оператора A .

Доказательство. Пусть L — проектор на M параллельно некоторому дополнению M , включающему $\mathcal{L}(B)$ (в силу (6) и условия леммы этот оператор определен). Рассмотрим оператор LAL . Пусть χ_0 — сумма всех его положительных собственных и корневых векторов из M , не вошедших в L_y . Возьмем в качестве m минимальное по включению инвариантное подпространство оператора LAL , включающее χ_0 . Покажем, что m — искомое подпространство. Действительно, $m \subset M$, так как все ненулевые собственные и корневые векторы оператора A лежат в M , и M — инвариантно относительно LAL и включает χ_0 .

Далее, $LAL(m) \subset m$, но $L(m) = m$, следовательно, $LA(m) \subset m$ (3.1). Но если вектор $\xi \in m$, то $\xi \in M$, следовательно, $A\xi = \eta + b_0$, где $\eta \in M$, $b_0 \in \mathcal{L}(B)$. Тогда из (3.1) имеем $LA\xi = \eta \subset m$, то есть $A\xi \in m + \mathcal{L}(B)$. Отсюда пространство $m + L_y$ — инвариантно относительно A и спектр ограничения A на это пространство состоит из части спектра, лежащей в пространстве управляемости и собственных значений оператора LAL , соответствующих собственным и корневым векторам, лежащим в m . Следовательно, по построению пространство $m + L_y$ содержит все положительные собственные значения оператора A .

Покажем минимальность m . Пусть χ обладает условиями 1—3 и $\chi \supseteq m$. Тогда χ инвариантно относительно LAL и, следовательно, так как $\chi \supseteq m$, то положительные собственные и корневые векторы оператора LAL не включены в χ . Тогда из инвариантности $\chi + L_y$ спектр ограничения оператора A не содержит хотя бы одного положительного собственного значения.

Лемма доказана.

Лемма 2. (Лемма о подпространстве). Рассмотрим систему (1)—(4) с наложенным на нее условием (6).

Пусть подпространство $\chi \subset M$ обладает следующими свойствами.

$$1) A(\chi) \subset \chi + \mathcal{L}(B); \quad 2) A^*(\chi^\perp) \subset \chi^\perp + \mathcal{L}(C^*).$$

Пусть подпространство χ_1 обладает свойствами: 3) $\chi_1 \subset \chi$; 4) $A(\chi_1) \subset \chi_1 + \mathcal{L}(B)$. Тогда $A^*(\chi_1^\perp) \subset \chi_1^\perp + \mathcal{L}(C^*)$.

Доказательство. Пусть $\dim \chi = k$, $\dim \chi_1 = k_1$, $\dim L(B) = r$. Тогда $\dim[(\chi_1 + \mathcal{L}(B))^\perp \cap \chi^\perp] = n - \dim(\chi_1 + \mathcal{L}(B) + \chi) = n - k - r$ (в силу того, что $\chi \supset \chi_1$ и условия (6)). Но $\dim(\chi_1 + \mathcal{L}(B))^\perp = n - \dim(\chi_1 + \mathcal{L}(B)) = n - k_1 - r$ (в силу условия (6)). Отсюда если W — дополнение $\chi^\perp$ до $(\chi^\perp + \mathcal{L}(B))^\perp$, то

$$\dim W = n - k_1 - r - n + k + r = k - k_1. \quad (3.2)$$

Заметим, что $\dim \chi_1^\perp = n - k_1$, $\dim \chi^\perp = n - k$, $\chi_1^\perp \supset \chi^\perp$. Но $W \in \chi_1^\perp$, $W \cap \chi^\perp = \{0\}$ (по определению). Отсюда и из (3.2) получим

$\dim(\chi^\perp + W) = n - k + k - k_1 = n - k_1 = \dim \chi_1^\perp$, $(\chi^\perp + W) \subset \chi_1^\perp$, следовательно, $\chi^\perp + W = \chi_1^\perp$ (3.3).

С другой стороны, если $w \in W$, а $z_1 \in \chi_1$, то $(A^*w, z_1) = (w, Az_1)$. Но $Az_1 \in \chi_1 + B$ (по условию), а $w \in (\chi_1 + \mathcal{L}(B))^\perp$ (по построению), следовательно, $(A^*w, z_1) = 0$, отсюда в силу (3.3) имеем $A^*(\chi_1^\perp) \subset \chi_1^\perp + \mathcal{L}(C^*)$, что и требовалось доказать.

Список литературы: 1. Коробов В. И., Луценко А. В. Критерий стабилизируемости линейных систем // Вестн. Харьк. ун-та, 1989. № 315. Управл. системы. С. 3—12. 2. Kimura H. Pole Assignment by Gain Output Feedback // IEEE Trans. Automat. Control. 1975. AC-20. № 4. P. 509—516. 3. Скляр Г. М., Ширман В. Я. О задаче стабилизации стационарных систем при неполной информации о состоянии // Вестн. Харьк. ун-та. 1981. № 221. Приклад. математика и механика. Вып. 46. С. 25—30. 4. Уонем М. Линейные многомерные системы управления. М., 1980. 375 с. 5. Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н. Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства. I, II // Вестн. Харьк. ун-та. 1976. № 134: Математика и механика. С. 114—123; 1977. № 148. С. 3—11.

Поступила в редколлегию 25.12.89

УДК 517.934.1

В. Е. ЧУПРИНА

ε -УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ НА ПОДПРОСТРАНСТВО С УДЕРЖАНИЕМ

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(x(k) + Bu(k)), \\ x(0) &= x_0, \quad k=0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

где A, B — вещественные постоянные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, $x(k) \in E_n$, $u(k) \in \Omega = E_r$. Наряду с системой (1) будем рассматривать неуправляемую систему

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k), \\ x(0) &= x_0, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Приведем некоторые определения.

Определение 1. Систему (1) назовем ε -управляемой на множество $G \subset E_n$ за свободное число шагов, если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x_0 \in E_n$ существует целое число $N = N(\varepsilon, x_0) \geq 0$ и управления $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ такие, что траектория системы (1), исходящая из точки x_0 , за N шагов попадет на множество $(G + V_n(0, \varepsilon))$, где $V_n(0, \varepsilon)$ — n -мерный замкнутый шар из E_n с центром в нуле радиуса ε .

Определение 2. Множество $G \subset E_n$ назовем ε -достижимым из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2), если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x_0 \in E_n$ существует целое число $N = N(\varepsilon, x_0) \geq 0$ такое, что траектория системы (2), исходящая из точки x_0 , после N шагов достигнет множества $(G + V_n(0, \varepsilon))$.

Определение 3. Систему (1) назовем ε -управляемой на множество $G \subset E_n$ за свободное число шагов с последующим удержанием траектории системы (1) в ε -окрестности множества G , если для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x_0 \in E_n$, существует целое число $N = N(\varepsilon, x_0) \geq 0$ и управления $u(0), \dots, u(k), \dots$ такие, что траектория системы (1) исходящая из точки x_0 , удовлетворяет условию $x(k) \in (G + V_n(0, \varepsilon))$ при всех $k \geq N$.

Определение 4. Множество $G \subset E_n$ назовем ε -достижимым из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2) с последующим удержанием траектории системы (2) в ε -окрестности множества G , если для любого $\varepsilon > 0$ и для любой точки $x_0 \in E_n$ существует целое число $N = N(\varepsilon, x_0) \geq 0$ такое, что траектория системы (2), исходящая из точки x_0 , удовлетворяет условию $x(k) \in (G + V_n(0, \varepsilon))$ при всех $k \geq N$. Если точка $x_0 \in (G + V_n(0, \varepsilon))$, то в определениях 1, 2, 3, 4 будем считать $N = 0$.

Пусть C — комплексная плоскость, $C^- = \{\lambda \in C : |\lambda| < 1\}$, $C^+ = \{\lambda \in C : |\lambda| \geq 1\}$, $m(\lambda) = m^-(\lambda) \cdot m^+(\lambda)$ — минимальный полином матрицы A , $\deg m(\lambda) = p$, корни $m^-(\lambda)$ принадлежат C^- , корни $m^+(\lambda)$ принадлежат C^+ . Обозначим $K_1^- = \{x : m^-(A)x = 0\}$, $K_1^+ = \{x : m^+(A)x = 0\}$, $\dim K_1^- = p_1$, $\dim K_1^+ = q_1$. Тогда $K_1^- + K_1^+ = E_n$, $p_1 + q_1 = n$. Пусть $L = \text{Lim}\{B, AB, \dots, A^{n-1}B\}$ — линейная оболочка, натянутая на вектор-столбцы матрицы управляемости.

Задача ε -управляемости в нуль линейных непрерывных и дискретных стационарных систем рассматривалась в ряде работ, например [1, 2].

В данной работе рассматривается задача ε -управляемости линейной дискретной стационарной системы (1) на произвольное подпространство $F \subset E_n$. Эта работа является распространением результатов точной управляемости системы (1) на произвольное подпространство, полученных в работе [4]. Нами дается критерий ε -достижимости произвольного подпространства $F \subset E_n$ из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2), критерий ε -управляемости системы (1) на подпространство $F \subset E_n$ за свободное число шагов, а также критерий ε -управляемости системы (1) на подпространство $F \subset E_n$ за свободное число шагов с дальнейшим удержанием траектории системы (1) в ε -окрестности подпространства F .

Имеет место следующая

Теорема 1. Система (1) ε -управляема на множество G за свободное число шагов (за p шагов) тогда и только тогда, когда

множество $(L + G)$ ε -достижимо из всех точек E_n за свободное число шагов (за p шагов) в силу системы (2).

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1) ε -управляема на множество G за свободное число шагов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x_0 \in E_n$ существуют целое число $N = N(\varepsilon, x_0) \geq 0$ и управления $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ такие, что решение системы (1), исходящее из точки x_0 , через N шагов попадет на множество $(G + V_n(0, \varepsilon))$, т. е.

$$x(N) = (A^N x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-1-j} B u(j)) \in (G + V_n(0, \varepsilon)).$$

Следовательно, $A^N x_0 = g + z - l$, где $g \in G$, $\sum_{j=0}^{N-1} A^{N-1-j} B u(j) = l \in L$, $z \in V_n(0, \varepsilon)$. Так как L — подпространство, то $-l \in L$, поэтому

$$x(N) = A^N x_0 = (g - l + z) \in (L + G + V_n(0, \varepsilon)).$$

Следовательно, множество $(L + G)$ ε -достижимо из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы (2).

Достаточность. Пусть множество $(L + G)$ ε -достижимо из всех точек E_n за свободное число шагов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x_0 \in E_n$ существует целое число $N = N(\varepsilon, x_0) \geq 0$ такое, что решение системы (2), исходящее из точки x_0 , достигнет после N шагов множества $(L + G + V_n(0, \varepsilon))$, т. е. $x(N) = A^N x_0 \in (L + G + V_n(0, \varepsilon))$. Не ограничивая общности, можно считать, что $N \geq p$. Действительно, если $N < p$, то, рассмотрев в качестве начальной точки $x_1 = A^{N+s} x_0$, где $N + s = p$, мы за N_1 шаг достигнем множества $(L + G + V_n \times \times (0, \varepsilon))$, т. е.

$$A^{N_1} x_1 = A^{N_1+p} x_0 = x(N_1 + p) \in (L + G + V_n(0, \varepsilon)).$$

Итак, $x(N) = A^N x_0 = l + g + z$, где $l \in L$, $g \in G$, $z \in V_n(0, \varepsilon)$, $N \geq p$. Выберем управления $u(0), \dots, u(N-1)$ так, что $-l = \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-1-j} B u(j)$. Тогда

$$x(N) = A^N x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-1-j} B u(j) = (g + z) \in (G + V_n(0, \varepsilon)),$$

т. е. система (1) ε -управляема на множество G за свободное число шагов.

Аналогичные рассуждения в теореме справедливы, когда число шагов равно p .

Для задачи ε -управляемости на множество G с последующим удержанием имеет место следующая

Теорема 2. Система (1) ε -управляема на множество $G \subset E_n$ за свободное число шагов с последующим удержанием траектории системы (1) в ε -окрестности множества G тогда и только тогда, когда множество $(L+G)$ ε -достижимо из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2) с последующим удержанием траектории системы (2) в ε -окрестности множества $(L+G)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Следующая теорема дает критерий ε -достижимости подпространства F из всех точек $x_0 \in E_n$ за свободное число шагов.

Теорема 3. Для того чтобы подпространство F было ε -достижимо из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2) необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее собственным значениям $\lambda \in C^+$, «содержалось» в подпространстве F , т. е. $K_1^+ \subset F$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть подпространство F ε -достижимо из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2), но $K_1^+ \not\subset F$. Тогда существует корневой вектор v_j высоты j , отвечающий $\lambda \in C^+$, такой, что $v_j \notin F$, а корневые векторы v_k , высоты $k=1, 2, \dots, j-1$, отвечающие тому же λ , принадлежат F . Если корневой вектор v_k — комплексный, т. е. $v_k = (A - \lambda I)^{i-k} v_j = v_{1k} + i v_{2k}$, то он „принадлежит“ вещественному подпространству F , если $v_{1k} \in F$ и $v_{2k} \in F$, и „не принадлежит“, если не выполняется хотя бы одно из включений.

Из структуры цепочки корневых векторов следует, что

$$A v_k = \lambda v_k + v_{k-1}, \quad k=1, \dots, j, \quad v_0=0;$$

$$A^N v_j = \sum_{k=0}^N C_N^k \lambda^{N-k} v_{j-k}, \quad N=1, \dots, j;$$

$$A^N v_j = \sum_{k=0}^j \alpha_k \lambda^{N-k} v_{j-k}, \quad N > j,$$

где α_k — константы.

Пусть λ — вещественное. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и единичный вектор $\eta \in F^\perp$. Возьмем $\nu > 0$ таким, что $|(\eta, v_j) \nu| > 2\varepsilon$. Рассмотрим решение системы (2), исходящее из точки $x_0 = \nu \eta$:

$$x(N) = \nu \lambda^N v_j + a_0(\lambda, N, v_1, \dots, v_{j-1}),$$

где

$$a_0(\lambda, N, v_1, \dots, v_{j-1}) \in F,$$

так как $v_1, \dots, v_{j-1}$ принадлежат F . Тогда $|(x(N), \eta)| = |\lambda^N \nu| \times |(\eta, v_j)| > 2\varepsilon$ для всех $N \geq 0$, так как $|\lambda| \geq 1$. Следовательно, в этом случае подпространство F не является ε -достижимым при любом $N \geq 0$.

Во втором случае $\lambda = \alpha + i\beta = e^{\gamma}(\cos \delta + i \sin \delta)$, $\delta \neq 0$. Тогда

$$A^N v_j = e^{\gamma N} (\cos \delta N + i \sin \delta N) (v_{1j} + i v_{2j}) + a_1(\gamma, \delta, N, v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1j-1}, v_{2j-1}),$$

где a_1, a_2 — линейные комбинации реальных и мнимых частей корневых векторов v_k , $k = 1, \dots, j-1$. Поэтому $a_1 \in F, a_2 \in F$. Тогда

$$A^N v_{1j} = e^{\gamma N} (v_{1j} \cos \delta N - v_{2j} \sin \delta N) + a_1(\gamma, \delta, N, v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1j-1}, v_{2j-1}),$$

$$A^N v_{2j} = e^{\gamma N} (v_{1j} \sin \delta N + v_{2j} \cos \delta N) + a_2(\gamma, \delta, N, v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1j-1}, v_{2j-1}).$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть v_j «не принадлежит» F . Тогда возможны два случая:

$$1) \dim(\text{Lin}(v_{1j}, v_{2j}) \cap F) = 0,$$

$$2) \dim(\text{Lin}(v_{1j}, v_{2j}) \cap F) = 1.$$

В первом случае выберем в подпространстве $\text{Lin}(v_{1j}, v_{2j})$ двумерный шар $V_2(0, R) = V_n(0, R) \cap \text{Lin}(v_{1j}, v_{2j})$ такой, что для любой точки $x_0 \in \text{Lin}(v_{1j}, v_{2j})$, $x_0 \in V_2(0, R)$ выполняется $\rho(x_0, F + V_n(0, \varepsilon)) > c_0 > 0$. Очевидно, что

$$\min_{N \geq 0} \|v_{1j} \cos \delta N - v_{2j} \sin \delta N\| \geq \min_{t \geq 0} \|v_{1j} \cos \delta t - v_{2j} \sin \delta t\| = \\ = \min_{0 \leq t < 2\pi/\delta} \|v_{1j} \cos \delta t - v_{2j} \sin \delta t\| = c_1 > 0.$$

Выберем $\nu > 0$ таким, что $\nu c_1 > R$. Тогда

$$\rho(e^{\gamma N \nu} (v_{1j} \cos \delta N - v_{2j} \sin \delta N), F + V_n(0, \varepsilon)) > c_0$$

при всех $N \geq 0$, так как $e^{\gamma} \geq 1$. Следовательно, для решения системы (2), исходящего из точки $x_0 = \nu v_{1j}$, получим $\rho(x(N), F + V_n(0, \varepsilon)) > c_0$ при всех $N \geq 0$.

Во втором случае $\dim(\text{Lin}(v_{1j}, v_{2j}) \cap F) = 1$. Следовательно, существуют вещественные числа $d_1, d_2, |d_1| + |d_2| \neq 0$ такие, что

$$f_2 = (d_2 v_{1j} - d_1 v_{2j}) \in F. \text{ Выберем } \xi_1 \text{ и } \xi_2, |\xi_1| + |\xi_2| \neq 0, \text{ такие, что } \xi_1 v_{1j} + \xi_2 v_{2j} = f_1 \in F.$$

Рассмотрим решение системы (2), исходящее из точки $x_0 = \nu f_1$:

$$x(N) = A^N \nu f_1 = \nu e^{\gamma N} ((\xi_1 \cos \delta N + \xi_2 \sin \delta N) v_{1j} + \\ + (\xi_2 \cos \delta N - \xi_1 \sin \delta N) v_{2j}) + a_3(\gamma, \delta, N, v_{11}, v_{21}, \dots, v_{1j-1}, v_{2j-1}),$$

где $a_3 \in F$, причем величины $(\xi_1 \cos \delta N + \xi_2 \sin \delta N)$, $(\xi_2 \cos \delta N - \xi_1 \sin \delta N)$ в нуль одновременно не обращаются при любом целом $N \geq 0$.

Возьмем единичный вектор $\eta \in F^\perp$. Вектор v_j имеет ненулевую проекцию на вектор η , т. е. $(\eta, v_{1j})^2 + (\eta, v_{2j})^2 > 0$, так как v_j „не принадлежит“ F . Тогда

$$(x(N), \eta) = v e^{iN} ((\xi_1(v_{1j}, \eta) + \xi_2(v_{2j}, \eta)) \cos \delta N + (\xi_2(v_{1j}, \eta) - \xi_1(v_{2j}, \eta)) \sin \delta N).$$

Коэффициенты при $\cos \delta N$ и $\sin \delta N$ в нуль одновременно не обращаются.

Предположим, что

$$(\xi_1(v_{1j}, \eta) + \xi_2(v_{2j}, \eta)) \cos \delta N + (\xi_2(v_{1j}, \eta) - \xi_1(v_{2j}, \eta)) \sin \delta N = 0.$$

Тогда $\delta N + \varphi = (2k \pm 1/2) \pi$, где $\varphi = \arccos((\xi_1(v_{1j}, \eta) + \xi_2(v_{2j}, \eta)) / \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)((v_{1j}, \eta)^2 + (v_{2j}, \eta)^2)})$. Если δ соизмеримо с π , т. е. $\delta = \pi p_0/q_0$, то выбрав ξ_1 и ξ_2 так, что $\varphi = \pi p_2/q_2$, $0 < \varphi < \pi$, получим противоречие, если δ несоизмеримо с π , т. е. $\delta = \pi \lambda$, λ — иррациональное число, то выбрав ξ_1 и ξ_2 так, что $\varphi = \pi p_3/q_3$, $0 < \varphi < \pi$, получим, что $\lambda = (-p_3/q_3 + (2k \pm 1/2))/N$. Противоречие. Здесь $p_0, p_2, p_3, q_0, q_2, q_3$ — целые, отличные от нуля числа.

Итак, $|(\xi_1(v_{1j}, \eta) + \xi_2(v_{2j}, \eta)) \cos \delta N + (\xi_2(v_{1j}, \eta) - \xi_1(v_{2j}, \eta)) \sin \delta N| > 0$ при всех целых $N \geq 0$.

Рассуждая, как и выше, имеем

$$|(\xi_1(v_{1j}, \eta) + \xi_2(v_{2j}, \eta)) \cos \delta N + (\xi_2(v_{1j}, \eta) - \xi_1(v_{2j}, \eta)) \sin \delta N| \geq c_2 > 0.$$

Выбрав $v > 0$ таким, что $vc_2 > 2\varepsilon$, получим $|(x(N), \eta)| > 2\varepsilon$, т. е. подпространство F не является ε -достижимым из всех точек E_n . Противоречие.

Достаточность. Пусть $K_1^+ \subset F$. Покажем, что подпространство F ε -достижимо из любой точки $x_0 \in E_n$. Для любого $x_0 \in E_n$ справедливо представление $x_0 = x_{10} + x_{20}$, где $x_{10} \in K_1^-$, $x_{20} \in K_1^+$.

Тогда $x(N) = A^N x_{10} + A^N x_{20}$. Так как $x_{10} \in K_1^-$, при достаточно больших $N \geq N_0$ $A^N x_{10} \in V_n(0, \varepsilon)$. Но $A^N x_{20} \in K_1^+ \subset F$ при всех $N \geq 0$, следовательно, $x(N) \in (F + V_n(0, \varepsilon))$ при всех $N \geq N_0$, т. е.

подпространство F ε -достижимо из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2). Более того, подпространство F ε -достижимо с последующим удержанием траектории системы (2) в ε -окрестности подпространства F .

Теорема доказана полностью.

Следствие 1. Для того чтобы нуль был ε -достижим за свободное число шагов в силу системы (2), необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее собственным значе-

ниями $\lambda \in C^-$, «совпадало» со всем пространством E_n , т. е. $K_1^- = E_n$, что равносильно условию $\sigma(A) \subset C^-$ или $K_1^+ = 0$.

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. Для того чтобы подпространство F было ε -достижимо из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2) с последующим удержанием траектории системы (2) в ε -окрестности подпространства F , необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство матрицы A , отвечающее собственным значениям $\lambda \in C^+$, «содержалось» в подпространстве F , т. е. $K_1^+ \subset F$.

Из теоремы 1 и теоремы 3 следует

Теорема 5. Для того чтобы система (1) была ε -управляема на подпространство G за свободное число шагов, необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство матрицы A , отвечающее собственным значениям $\lambda \in C^+$, «содержалось» в подпространстве $(L+G)$, т. е. $K_1^+ \subset (L+G)$.

Следствие 2. Для того чтобы система (1) была ε -управляемой в нуль из всех точек $x_0 \in E_n$ за свободное число шагов, необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее собственным значениям $\lambda \in C^+$, «содержалось» в L , т. е. $K_1^+ \subset L$.

Следствие 2 и критерий стабилизируемости [5] системы (1) дает нам следующее.

Следствие 3. Для того чтобы система (1) была ε -управляема в нуль из всех точек $x_0 \in E_n$ за свободное число шагов, необходимо и достаточно, чтобы она была стабилизируемой.

Из теоремы 2 и теоремы 4 следует

Теорема 6. Для того чтобы система (1) была ε -управляемой на подпространство $G \subset E_n$ за свободное число шагов с последующим удержанием траектории системы (1) в ε -окрестности подпространства G , необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство матрицы A , отвечающее собственным значениям $\lambda \in C^+$, «содержалось» в подпространстве $(L+G)$, т. е. $K_1^+ \subset (L+G)$.

Список литературы: 1. Коробов В. И., Нгуен Хоа Шон. ε -управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управления // Диф. уравнения. 1980. 16, № 3. С. 395—404. 2. Коробов В. И., Нгуен Хоа Шон. Управляемость линейных систем в банаховом пространстве при наличии ограничений на управление 1,11 // Диф. уравнения. 1980. 16, № 5. С. 806—817; № 6. С. 1010—1022. 3. Чуприна В. Е. ε -управляемость линейной автономной системы на подпространство // Вестн. Харьк. ун-та. 1977. № 177. Прикладная математика и механика. Вып. 44. С. 41—44. 4. Чуприна В. Е. Управляемость линейной стационарной дискретной системы на подпространство с удержанием // Вестн. Харьк. ун-та. 1991. № 36. Прикладная математика и механика. Вып. 287. С. 71—78. 5. Луценко А. В., Чуприна В. Е. О стабилизации итерационных систем // III Всесоюз. симпозиум. «Метод дискретных особенностей в задачах математической физики и его роль в развитии численного эксперимента на ЭВМ». Тез. докл. Х., 1987. С. 196—197.

Поступила в редколлегию 25.01.90

В. Н. ЗЕФИРОВ, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, А. В. СУВОРОВ

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С ЗАДАННОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Представим заданную спектральную плотность — четную, относительно частоты ω , дробно-рациональную функцию в виде

$$S(\omega) = \frac{a \prod_{j=1}^{I_1} (\omega^2 + B_j)^{g_j}}{\prod_{j=1}^I (\omega^2 + A_j)^{f_j}} \left(\sum_{j=1}^{I_1} g_j < \sum_{j=1}^I f_j \right), \quad (1)$$

где в силу вещественности, положительности и ограниченности $S(\omega)$ должны выполняться неравенства

$$\operatorname{Re} A_j > 0 \quad (j = \overline{1, I}), \quad \operatorname{Re} B_j > 0 \quad (j = \overline{1, I_1}), \quad (2)$$

причем комплексные A_j и B_j входят сопряженными парами; f_j и g_j — натуральные числа.

Как известно [1, 2], требуемый стационарный случайный процесс может быть представлен как установившееся решение $y(t)$ дифференциального уравнения со входом $x(t)$ — «белым шумом»

(имеющим спектральную плотность постоянной, равной $\frac{1}{\pi}$) и передаточной функцией $W(p)$, удовлетворяющей соотношению $|W(i\omega)|^2 = \pi S(\omega)$.

Из вида (1) спектральной плотности $S(\omega)$ получаем передаточную функцию

$$W(p) = \frac{\sqrt{a\pi} \prod_{j=1}^{I_1} (p + \beta_j)^{g_j}}{\prod_{j=1}^I (p + \alpha_j)^{f_j}}, \quad (3)$$

где

$$\alpha_j^2 = A_j \quad (\operatorname{Re} \alpha_j > 0), \quad \beta_j^2 = B_j \quad (\operatorname{Re} \beta_j > 0). \quad (4)$$

Действительно, для $A_j > 0$ имеем $\alpha_j = \sqrt{A_j}$ и $(\omega^2 + A_j)^{f_j} = [(i\omega + \alpha_j)(-i\omega + \alpha_j)]^{f_j} = |i\omega + \alpha_j|^{2f_j}$, а для комплексной пары $A_j, \bar{A}_j$ (с одинаковым показателем f_j) имеем $\sqrt{A_j} = \alpha_j$ ($\operatorname{Re} \alpha_j > 0$), $\sqrt{\bar{A}_j} = \bar{\alpha}_j$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} [(\omega^2 + A_j)(\omega^2 + \bar{A}_j)]^{f_j} &= [(i\omega + \alpha_j)(-i\omega + \alpha_j)(i\omega + \bar{\alpha}_j) \times \\ &\times (-i\omega + \bar{\alpha}_j)]^{f_j} = |(i\omega + \alpha_j)^{f_j} (i\omega + \bar{\alpha}_j)^{f_j}|^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим вначале важнейший для практики частный случай, когда все кратности $\bar{f}_j$ равны единице.

В этом случае передаточная функция $W(p)$ разлагается в сумму простейших дробей

$$W(p) = \sum_{j=1}^I \frac{\gamma_j}{p + \alpha_j}, \quad (5)$$

а требуемое решение $y(t)$ может быть представлено в виде суммы

$$y(t) = \sum_{j=1}^I \gamma_j y^{(j)}(t), \quad (6)$$

где $y^{(j)}(t)$ — установившееся решение дифференциального уравнения $y + \alpha_j y = x(t)$.

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$y^{(j)}(t) = C_j e^{-\alpha_j t} + \int_0^t e^{-\alpha_j(t-s)} x(s) ds.$$

Так как все $\operatorname{Re} \alpha_j > 0$, при достаточно большом T_j первым слагаемым для $t \geq T_j$ можно пренебречь и рассматривать

$$y^{(j)}(t) = \int_0^t e^{-\alpha_j(t-s)} x(s) ds. \quad (7)$$

При реализации «белого шума» на ЭВМ предлагается заменить «белый шум» ступенчатой функцией:

$$x(t) = \begin{cases} x_1, & t \in [0, h), \\ x_2, & t \in [h, 2h), \\ \vdots & \vdots \\ x_k, & t \in [(k-1)h, kh), \\ \vdots & \vdots \end{cases} \quad (8)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ — независимые случайные величины с нулевым средним значением и дисперсией D_x , выбор которой будет описан ниже.

Тогда для значений функции $y^{(j)}(t)$ в моменты $0, h, 2h, \dots, kh, \dots$, обозначаемых $y_0^{(j)}, y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_k^{(j)}, \dots$, нетрудно вывести простое разностное уравнение:

$$\begin{aligned} y_k^{(j)} &= \int_0^{kh} e^{-\alpha_j(kh-s)} x(s) ds = \int_0^{(k-1)h} e^{-\alpha_j(h+(k-1)h-s)} x(s) ds + \\ &+ \int_{(k-1)h}^{kh} e^{-\alpha_j(kh-s)} x(s) ds = e^{-\alpha_j h} y_{k-1}^{(j)} + x_k \int_0^h e^{-\alpha_j u} du, \end{aligned}$$

$$y_k^{(l)} = \rho_l y_{k-1}^{(l)} + \delta_l x_k \left(\rho_l = e^{-\alpha_j h}, \delta_l = \frac{\gamma_l (1 - \rho)}{\alpha_j} \right) \quad (9)$$

при начальном условии $y_0^{(l)} = 0$.

После определения $y_k^{(l)} (j = \overline{1, l})$ имеем

$$y(kh) = \sum_{j=1}^l \gamma_j y_k^{(j)} \left(k \geq \frac{T}{h}, T = \max T_j \right).$$

Для определения искомой дисперсии D_x воспользуемся заданной дисперсией процесса $y(t)$: $D_y = M((y(t))^2)$.

Имеем для $k \geq T/h$

$$\begin{aligned} D_y &= M \left(\left(\sum_{j=1}^l \gamma_j y_k^{(j)} \right)^2 \right) = \\ &= \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^l \gamma_j \gamma_i M(y_k^{(j)} y_k^{(i)}) = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^l \gamma_j \gamma_i M_{ji}. \end{aligned} \quad (10)$$

С другой стороны, в силу разностных уравнений (9) и независимости случайных величин $y_{k-1}^{(j)}, y_{k-1}^{(i)}$ от x_k

$$\begin{aligned} M_{ji} &= M((\rho_j y_{k-1}^{(j)} + \delta_j x_k)(\rho_i y_{k-1}^{(i)} + \delta_i x_k)) = \\ &= \rho_j \rho_i M(y_{k-1}^{(j)} y_{k-1}^{(i)}) + \delta_j \delta_i M(x_k^2). \end{aligned}$$

Так как $M(x_k^2) = D_x$, то $M_{ji} = \rho_j \rho_i M_{ji} + \delta_j \delta_i D_x$.

Подставляя полученные M_{ji} в (10), получим уравнение относительно D_x :

$$D_y = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^l \frac{\delta_j \delta_i \gamma_j \gamma_i}{1 - \rho_j \rho_i} D_x. \quad (11)$$

Таким образом, моделирование процесса $y(t)$ сводится к определению D_x , выработке случайной последовательности $\{x_k\}$ и счету по рекуррентным формулам (9).

Через найденные $y_k^{(j)}$ можно найти также и необходимые производные $\dot{y}(t), \ddot{y}(t), \dots$, а также интегралы $z(t) = \int_0^t y(s) ds$, $w(t) = \int_0^t z(s) ds, \dots$ в тех же точках $t_k = kh$.

Например, передаточная функция для $y(t)$ будет, очевидно, $pW(p)$, и ее можно совершенно аналогично разложить на простейшие дроби точно такого же вида, как и в формуле (5), а, значит, $y(kh)$ выражается в виде линейной комбинации величин y_k^i . Мож-

но также пользоваться дифференциальными уравнениями для $y^{(i)}(t)$ и формулой (6).

Для интеграла $z(t)$ передаточная функция имеет вид $\frac{1}{p} W(p)$, и ее разложение содержит дополнительное слагаемое

вида $\frac{\gamma_0}{p}$, которому соответствует слагаемое $\gamma_0 \Phi(t)$. Функция $\Phi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dot{\Phi} = x(t)$.

Его решение $\Phi(t) = \int_0^t x(s) ds$ в точках $t_k = kh$ можно легко вычислить по рекуррентной формуле $\Phi_k = \Phi_{k-1} + hx_k$, $k = 0, 1, \dots$ ($\Phi_0 = 0$).

Рассмотрим теперь самый общий случай, когда не все f_j равны единице. В этом случае передаточная функция $W(p)$ представляется в виде суммы простейших дробей

$$W(p) = \sum_{j=1}^I \sum_{i=1}^{f_j} \frac{\Gamma_{ji}}{(p + \alpha_j)^i},$$

а искомым случайный процесс

$$y(t) = \sum_{j=1}^I \sum_{i=1}^{f_j} \Gamma_{ji} y^{(ji)}(t), \quad (12)$$

где $y^{(ji)}(t)$ — установившееся решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{d}{dt} + \alpha_j \right)^i y = x(t).$$

Общее решение этого уравнения

$$y^{(ji)}(t) = \sum_{p=0}^{i-1} C_p^{(ji)} t^p e^{-\alpha_j t} + \int_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\alpha_j(t-s)} x(s) ds.$$

При достаточно большом T_{ji} первым слагаемым можно пренебречь, и мы принимаем

$$y^{(ji)}(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\alpha_j(t-s)} x(s) ds. \quad (13)$$

Если реализовать белый шум $x(t)$ в виде случайной последовательности (8), то для $y_k^{(ji)} = y^{(ji)}(kh)$ получим систему разностных уравнений:

$$y_k^{(ji)} = \int_0^{kh} \frac{(kh-s)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\alpha_j(kh-s)} x(s) ds =$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{(k-1)h} (h + (k-1)h - s)^{i-1} \frac{e^{-\alpha_j(h+(k-1)h-s)}}{(i-1)!} x(s) ds + \\
& + \int_{(k-1)h}^{kh} \frac{(kh-s)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-\alpha_j(kh-s)} x_k ds = \\
& = e^{-\alpha_j h} \sum_{l=0}^{i-1} C_{i-1}^l h^{i-1-l} \frac{l!}{(i-1)!} \int_0^{(k-1)h} \frac{((k-1)h-s)^{l!}}{l!} e^{-\alpha_j((k-1)h-s)} \dot{x}(s) ds + \\
& + x_k \frac{1}{(i-1)!} \int_0^h u^{i-1} e^{-\alpha_j u} du,
\end{aligned}$$

т. е.

$$y_k^{(ji)} = \sum_{l=0}^{i-1} r_l^{ji} y_{k-1}^{(l, l+1)} + d_{ij} x_k, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned}
r_l^{ji} &= \frac{1}{(i-1)!} e^{-\alpha_j h} C_{i-1}^l h^{i-1-l} l!; \\
d_{ij} &= \frac{1}{(i-1)!} \int_0^h u^{i-1} e^{-\alpha_j u} du = \frac{1}{\alpha_j^i} - \sum_{l=0}^{i-1} \frac{r_l^{ji}}{\alpha_j^{l+1}}.
\end{aligned}$$

Для всех последовательностей $y_k^{(ji)}$ начальные условия нулевые: $y_0^{(ji)} = 0$. Для удобства определения дисперсии D_x переобозначим все последовательности $\{y_k^{(ji)}\}$ $j = \overline{1, J}$, $i = \overline{1, f_j}$ через $\{Y_k^{(l)}\}$ $l = \overline{1, F}$ ($F = \sum_{j=1}^J f_j$), а соответствующие величины $\{\Gamma_{ji}\}$ — через $\{\gamma_l\}$.

Тогда рекуррентные формулы (14) перепишем

$$Y_k^{(l)} = \sum_{n=1}^F R_{ln} Y_{k-1}^{(n)} + \Delta_l x_k, \quad l = \overline{1, F} \quad (15)$$

(матрица $\{R_{ln}\}$ имеет квазидиагональную структуру наподобие формы Жордана).

Имеем

$$\begin{aligned}
D_y &= M \left(\left(\sum_{l=1}^F \gamma_l Y_k^{(l)} \right)^2 \right) = \\
&= \sum_{l=1}^F \sum_{L=1}^F \gamma_l \gamma_L M(Y_k^{(l)} Y_k^{(L)}) = \sum_{l=1}^F \sum_{L=1}^F \gamma_l \gamma_L M_{lL}. \quad (16)
\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу рекуррентных формул (15)

$$M_{IL} = M \left(\left(\sum_{n=1}^F R_{ln} Y_{k-1}^{(n)} + \Delta_l x_k \right) \left(\sum_{N=1}^F R_{LN} Y_{k-1}^{(N)} + \Delta_L x_k \right) \right) = \\ = \sum_{n=1}^F \sum_{N=1}^F R_{ln} R_{LN} M_{nN} + \Delta_l \Delta_L D_x. \quad (17)$$

Решая эту систему (которая на самом деле распадается на I систем невысокого порядка) относительно M_{IL} , получим $M_{IL} = \mu_{IL} D_x$. Подставляя в (16), имеем соотношение для определения D_x :

$$D_y = \sum_{j=1}^F \sum_{L=1}^F \gamma_{jL} \mu_{jL} D_x.$$

Аналогично случаю простых корней знаменателя вычисляются значения в точках $t_k = kh$ производных и интегралов функции $y(t)$.

Описанная методика отличается от приведенной в [2] простой вывода и удобством реализации на ЭВМ.

Список литературы: 1. Дуб Дж. Вероятностные процессы. М., 1956. 605 с. 2. Лебедев А. Н. Методы цифрового моделирования и идентификации стационарных случайных процессов в информационно-измерительных системах. Л., 1988. 64 с.

Поступила в редколлегию 28.12.89

УДК 517.925

Т. А. АХИЕЗЕР

СХОДИМОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОГО ЦИКЛИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНОГО ГИПЕРЦИКЛА

Мономиальным гиперциклом с циклической симметрией [1, 2] называется система обыкновенных дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{x} = \Gamma(x) - \sigma(x)x, \quad (1)$$

где $\Gamma_j(x) = k_j x_j x_{j-1} \dots x_{j-p+1} (x_{-k} \equiv x_{n-k})$,

$$k_j > 0 (j = 1, \dots, n), \quad \sigma(x) = \sum_{j=1}^n \Gamma_j(x),$$

n, p — целые, $2 \leq p \leq n$. Можно записать

$$\Gamma_j(x) = k_j \prod_{l=1}^p x_{jl}^p (j = 1, \dots, n),$$

$P = (p_{ij})_{i,j=1}^n$ — матрица показателей. Система рассматривается в открытом симплексе

$$\Delta^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n | x_j > 0 (j = 1, \dots, n), s(x) \equiv \sum_{j=1}^n x_j = 1\}.$$

Ю. И. Любич в [2, 3] исследовал локальную устойчивость системы (1). Там показано, что множество особых точек есть многообразие диффеоморфное $\text{Ker}(P-E)$. Спектр линейного приближения в особой точке x равен $\sigma(\bar{x})[\text{spes}(P-E) \setminus \{p-1\}]$.

Поскольку $P = E + S + S^2 + \dots + S^{p-1}$, где S — матрица циклической подстановки n -го порядка, то описанный выше спектр состоит из чисел вида

$$\lambda_k = \sigma(\bar{x}) \frac{\omega_k^p - \omega_k}{\omega_k - 1} \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad (2)$$

где ω_k — корни n -й степени из единицы. Таким образом, спектр в различных особых точках может отличаться на положительный множитель.

Гиперцикл называется строго устойчивым, если спектр линейного приближения в каждой особой точке лежит в открытой левой полуплоскости. В этом случае существует инвариантная окрестность многообразия особых точек, в которой все траектории сходятся.

Гиперцикл называется квазиустойчивым, если спектр лежит в замкнутой левой полуплоскости и есть точки спектра на мнимой оси.

Гиперцикл называется строго неустойчивым, если есть точки спектра в правой полуплоскости.

В [3] доказано (см. также [2]), что строгая устойчивость имеет место в следующих случаях:

$$a) \ p = n; \ b) \ p = n - 1; \ c) \ p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1; \ d) \ p = 7, \ n = 9$$

и только в этих случаях.

Квазиустойчивость имеет место в случаях:

$$a) \ p = \frac{n}{2} (n - \text{четное});$$

$$\beta) \ p = 6, \ n = 8;$$

$$\gamma) \ p = 9, \ n = 12;$$

$$\delta) \ p = 10, \ n = 12;$$

в остальных случаях имеет место строгая неустойчивость.

Гиперцикл называется невырожденным, если $\det(P-E) \neq 0$. Если гиперцикл (1) невырожден, то особая точка единственна и

равна $\bar{x} = \frac{c}{s(c)}$, где $c = (c_i)_{i=1}^n$ — решение системы

$$k_i \prod_{j=1}^n c_j^{p_{ij}} = c_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Гиперцикл (1) невырожден тогда и только тогда, когда числа n и $p-1$ взаимно просты. Среди квазиустойчивых случаев невырожденными являются а) при четных p и б).

В настоящей работе доказывается сходимость и оценивается скорость сходимости траекторий циклически симметричного гиперцикла при $p=6$, $n=8$. При этом существенно используется нормальная форма Пуанкаре-Дюлака и теорема Г. Р. Белицкого [4] о гладкой эквивалентности векторных полей при наличии ровно двух чисто мнимых собственных значений. Этот метод уже применялся автором в [5] для решения аналогичной задачи в случае $p=2$, $n=4$ (гиперцикл с циклической симметрией при $p=2$ называется элементарным; сходимость траекторий при $p=2$, $n=4$ была доказана в [1] методом функции Ляпунова). Отметим, что случаями $p=2$, $n=4$ и $p=6$, $n=8$ исчерпываются квазиустойчивые гиперциклы с циклической симметрией, у которых особая точка единственна и спектр линейного приближения содержит ровно два чисто мнимых собственных значения.

Теорема. При $p=6$, $n=8$ в окрестности положения равновесия x каждая траектория $x(t)$ ($t \geq 0$) системы (1) сходится с оценкой $\|x(t) - \bar{x}\| = O(t^{-1/2})$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно принять все $k_i = 1$ (см. [2]). Тогда $\bar{x}$ — центр симплекса. Перенесем начало координат в эту точку

$$x_k = \frac{1}{8} + y_k \quad (k = 1, \dots, 8).$$

Тогда

$$\Gamma(\bar{x} + y) = \frac{1}{8^6} e + \frac{1}{8^5} Py + \frac{1}{8^4} C^{(2)}(y) + \frac{1}{8^3} C^{(3)}(y) + \dots,$$

где $C^{(2)}(y) = (C_k^{(2)}(y))_{k=1}^8$, $C^{(3)}(y) = (C_k^{(3)}(y))_{k=1}^8$, $C_k^{(2)}(y)$ — сумма всех возможных произведений по два, а $C_k^{(3)}(y)$ — сумма всех возможных произведений по три, составленных из переменных y_k , y_{k-1} , ..., y_{k-5} ; e — вектор с единичными координатами.

Поскольку $s(x) = 1$, то $s(y) = 0$ и

$$\sigma(\bar{x} + y) = \frac{1}{8^5} + \frac{1}{8^4} \sigma^{(2)}(y) + \frac{1}{8^3} \sigma^{(3)}(y) + \dots,$$

где

$$\sigma^{(2)}(y) = \sum_{k=1}^8 C_k^{(2)}(y), \quad \sigma^{(3)}(y) = \sum_{k=1}^8 C_k^{(3)}(y).$$

В новых координатах система (1) примет вид

$$\dot{y} = \frac{1}{8^5} (Ay + h(y)),$$

где

$$A = P - E, \quad h(y) = h^{(2)}(y) + h^{(3)}(y) + \dots;$$

$$\begin{aligned} h^{(2)}(y) &= -\sigma^{(2)}(y)e + 8C^{(2)}(y); \\ h^{(3)}(y) &= -8[\sigma^{(2)}(y)y + \sigma^{(3)}(y)e - 8C^{(3)}(y)]. \end{aligned}$$

Сделаем замену времени $t=8^5\tau$, получим

$$\dot{y} = Ay + h(y) \quad (3)$$

(здесь точкой обозначена производная по τ). Далее время будем по-прежнему обозначать через t , а производную по времени точкой.

Диагонализуем матрицу A в пространстве C^8 . Спектр матрицы A состоит из чисел

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}(-1+i), \quad \lambda_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$\lambda_4 = -1, \quad \lambda_5 = \bar{\lambda}_1; \quad \lambda_6 = \bar{\lambda}_2, \quad \lambda_7 = \bar{\lambda}_3, \quad \lambda_8 = 5;$$

из соответствующих собственных векторов $\{v_k\}_{k=1}^8$ можно составить ортонормированный базис. Матрица перехода от стандартного базиса $\{e_k\}_{k=1}^8$ к базису $\{v_k\}_{k=1}^8$ имеет вид

Система (3) в новых координатах примет вид

$$T = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -1 & i \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -i & -i & 1 & -1 & i & i & 1 \\ i \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 & -i \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -i \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 & i \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 & 1 & 1 \\ -1 & i & i & 1 & -1 & -i & -i & 1 \\ i \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & -i \frac{1-i}{\sqrt{2}} & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделаем замену $y = Tz$. Поскольку T унитарна, то $T^{-1} = T^*$.

Заметим, что переменные $z_1, z_2, z_3, z_5, z_6, z_7$ — комплексные, $z_5 = \bar{z}_1, z_6 = \bar{z}_2, z_7 = \bar{z}_3$, а переменные z_4 и z_8 — вещественные.

Система (3) в новых координатах примет вид $\dot{z} = Dz + \tilde{f}(z)$ (4),

где

$$D = T^{-1}AT = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_8);$$

$$\tilde{f}(z) = T^{-1}h(Tz) = \tilde{f}^{(2)}(z) + \tilde{f}^{(3)}(z) + \dots;$$

$$\tilde{f}^{(2)}(z) = -\sigma^{(2)}(Tz)\sqrt{8}e_8 + 8T^{-1}C^{(2)}(Tz);$$

$$\tilde{f}^{(3)}(z) = -8\sigma^{(2)}(Tz)z - 8\sqrt{8}\sigma^{(3)}(Tz)e_8 + 64T^{-1}C^{(3)}(Tz).$$

Сузим систему (4) на инвариантное подпространство $z_8=0$ (гиперплоскость $s(x)=1$ в результате замены $x=x+Tz$ переходит в подпространство $z_8=0$):

$$\dot{z} = \Lambda z + f(z), \quad (5)$$

где

$$z \in \mathbb{C}^7, \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_7),$$

$$f(z) = f^{(2)}(z) + f^{(3)}(z) + \dots,$$

$$f_k^{(2)}(z) = 8T^{-1}C^{(2)}(Tz); \quad (6)$$

$$f_k^{(3)}(z) = -8\sigma^{(2)}(Tz)z_k + 64T_k^{-1}C^{(3)}(Tz) \quad (k=1, \dots, 7). \quad (7)$$

Систему (5) при помощи формальной замены переменных

$$\zeta = z + \hat{\varphi}(z) \quad (\hat{\varphi}(0)=0, \hat{\varphi}'(0)=0)$$

можно привести к нормальной форме Пуанкаре-Дюлака

$$\dot{\zeta} = \Lambda \zeta + \hat{g}(\zeta), \quad (8)$$

где $\hat{g}(\zeta)$ — формальное векторное поле с нулевой линейной частью, содержащее только резонансные члены, т. е.

$$\Lambda^* \hat{g}(\zeta) = \hat{g}'(\zeta) \Lambda^* \zeta;$$

При этом выполняется соотношение

$$\Lambda \hat{\varphi}(z) - \hat{\varphi}'(z) \Lambda z = f(z) + \hat{\varphi}'(z) f(z) - \hat{g}(z + \hat{\varphi}(z)). \quad (9)$$

Лемма. Резонансные вектор-мономы системы (5) имеют вид

$\rho^p z_k e_k$ ($p \in \mathbb{N}$), где $\rho = z_1 z_5 = |z_1|^2$.

Доказательство. Пусть $z^m e_k$ — резонансный вектор-моном, т. е. выполняется резонансное соотношение $\lambda_k = (\lambda, m)$, где $m = (m_1, \dots, m_7)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными компонентами, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_7)$. Имеем $(\lambda, m) - \lambda_k = (\lambda, m - e_k) = 0$. Обозначим $m - e_k = \mu = (\mu_1, \dots, \mu_7)$; заметим, что $\mu_j \geq 0$ ($j \neq k$), $\mu_k \geq -1$. Равенство $(\lambda, \mu) = 0$ эквивалентно системе:

$$\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_6 + \mu_7 = 0,$$

$$\mu_2 - \mu_3 + \mu_6 - \mu_7 = 0,$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 - \mu_5 - \mu_6 - \mu_7 = 0,$$

$$\mu_2 - \mu_3 - \mu_6 + \mu_7 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \mu_3, \\ \mu_6 &= \mu_7, \\ 2\mu_2 + \mu_4 + 2\mu_6 &= 0, \\ \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_5 - 2\mu_6 &= 0.\end{aligned}$$

Поскольку только одна координата μ может быть отрицательной, то $\mu_2, \mu_6 \geq 0$. Так как μ_4 четное, $\mu_4 \neq -1$, следовательно, $\mu_4 \geq 0$ и решение имеет вид $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_6 = \mu_7 = 0$, $\mu_1 = \mu_5 = p$.

Таким образом, $t = p(e_1 + e_5) + e_k$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. В нормальной форме (8) отсутствуют мономы с мультииндексами четного порядка.

Замена $\zeta = z + \hat{\varphi}(z)$ выбирается так, что ряды $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3, \hat{\varphi}_5, \hat{\varphi}_6, \hat{\varphi}_7$ — комплекснозначны, $\hat{\varphi}_5 = \overline{\hat{\varphi}_1}, \hat{\varphi}_6 = \overline{\hat{\varphi}_2}, \hat{\varphi}_7 = \overline{\hat{\varphi}_3}$, а ряды $\hat{\varphi}_4$ и $\hat{\varphi}_8$ — вещественнозначны. Тогда $\zeta_5 = \overline{\zeta_1}, \zeta_6 = \overline{\zeta_2}, \zeta_7 = \overline{\zeta_3}$ и в системе (8) 5-е, 6-е и 7-е уравнения эквивалентны 1-му, 2-му и 3-му уравнениям соответственно.

Следствие 2. Система (8) может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_1(i + \alpha\rho + \hat{\gamma}_1(\rho)), \\ \dot{\zeta}_k &= \zeta_k(\lambda_k + \hat{\gamma}_k(\rho)) \quad (k=2, 3, 4),\end{aligned}\tag{10}$$

где $\rho = |\zeta_1|^2$; $\hat{\gamma}_k(\rho)$ — формальные степенные ряды, $\hat{\gamma}_k(0) = 0$ ($k=1, \dots, 4$), $\hat{\gamma}_1(0) = 0$; $\alpha \in \mathbb{C}$.

По формальной системе (10) восстанавливается гладкая система

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \zeta_1(i + \alpha\rho + \gamma_1(\rho)), \\ \dot{\zeta}_k &= \zeta_k(\lambda_k + \gamma_k(\rho)) \quad (k=2, 3, 4),\end{aligned}\tag{11}$$

где $\gamma_k(\rho)$ — функции класса C^∞ , у которых ряды Тейлора в нуле равны $\hat{\gamma}_k(\rho)$ ($k=1, \dots, 4$) (такие функции существуют по известной теореме Бореля).

Системы (5), (11) формально эквивалентны. Для наших целей формального приведения к нормальной форме недостаточно. Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с парой чисто мнимых собственных значений рассматривалась Г. Р. Белицким [4]. Там доказано, что в пространстве таких ростков существует исключительное множество коразмерности бесконечность, вне которого все формально эквивалентные ростки гладко эквивалентны, и дано описание исключительного множества. Если

$\operatorname{Re} \alpha \neq 0$, то система (11) не принадлежит исключительно множеству и системы (5), (11) гладко эквивалентны.

Сделаем преобразование системы (5) вида $z + \varphi(z)$ уничтожающее квадратичную часть. Будем искать $\varphi(z)$ в виде однородного полиномиального отображения степени 2. Приравняем в (9) однородные части порядка 2 при условии, что $g^{(2)}(z) = 0$:

$$\Lambda \varphi(z) - \varphi'(z) \Lambda z = f^{(2)}(z). \quad (12)$$

Приравняем в (9) однородные части порядка 3 $g^{(3)}(z) = f^{(3)}(z) + \varphi'(z) f^{(2)}(z)$.

Выделим резонансный член в первой компоненте

$$g_1^{(3)}(z) = f_1^{(3)}(z) + \varphi_1'(z) f^{(2)}(z) = \alpha z_1^2 z_5 + \dots \quad (13)$$

(многоточием обозначены нерезонансные члены). Определим $\operatorname{Re} \alpha$.

Вычислим $f_1^{(2)}(z)$ по формуле (6)

$$f_1^{(2)}(z) = -2(1+i)[(V\bar{2}+1)z_2^2 + (V\bar{2}-1)z_3^2 + \\ + V\bar{2}z_4z_5 + 2V\bar{2}z_6z_7].$$

Найдем $\varphi_1(z)$ из первого уравнения системы (12)

$$\lambda_1 \varphi_1(z) - \sum_{j=1}^7 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j} \lambda_j z_j = f_1^{(2)}(z).$$

Ищем решение в виде

$$\varphi_1(z) = \alpha z_2^2 + b z_3^2 + c z_4 z_5 + d z_6 z_7;$$

получаем

$$a = -\frac{2(V\bar{2}+1)(1+i)}{\lambda_1 - 2\lambda_2}, \quad b = -\frac{2(V\bar{2}-1)(1+i)}{\lambda_1 - 2\lambda_3},$$

$$c = -\frac{2V\bar{2}(1+i)}{\lambda_1 - \lambda_4 - \lambda_5}, \quad d = -\frac{4V\bar{2}(1+i)}{\lambda_1 - \lambda_6 - \lambda_7}.$$

Выделим резонансный член в выражении $\varphi_1'(z) f^{(2)}(z)$

$$\varphi_1'(z) f^{(2)}(z) = c z_5 f_4^{(2)}(z) + \dots = iV\bar{8} c z_1^2 z_5 + \dots = \\ = -\frac{8}{5}(1+3i) z_1^2 z_5 + \dots \quad (14)$$

и в выражении $f_1^{(3)}(z)$, пользуясь (7),

$$f_1^{(3)}(z) = -32i z_1^2 z_5 + \dots \quad (15)$$

Из (13), (14) и (15) получаем, что $\operatorname{Re} \alpha = -\frac{8}{5}$.

Сделаем еще одно формальное преобразование, приводящее систему к виду (10) (при этом резонансная часть $g^{(3)}(z)$ не изменится), и рассмотрим восстановленную гладкую систему (11). Поскольку $\text{Re} a \neq 0$, то по теореме Г. Р. Белицкого, системы (5), (11) гладко эквивалентны.

Оценим скорость сходимости произвольной траектории $\zeta(t)$ ($t \geq 0$) системы (11). Положим $\rho(t) = |\zeta_1(t)|^2 = \zeta_1(t) \overline{\zeta_1(t)}$. Тогда

$$\dot{\rho}(t) = 2 \text{Re} \zeta_1(t) \overline{\dot{\zeta}_1(t)} = 2 \text{Re} (i + a\rho + \gamma_1(\rho)) \rho = -\frac{8}{5} \rho^2 + O(\rho^3).$$

Отсюда $\rho^{-2} \dot{\rho} < -1$ при $t \geq t_0$ (t_0 достаточно велико) и, следовательно,

$$\frac{1}{\rho(t)} - \frac{1}{\rho(t_0)} > t - t_0,$$

т. е. $\rho(t) = O(t^{-1})$, $|\zeta_1(t)| = O(t^{-1/2})$.

Но тогда $\frac{\dot{\zeta}_k}{\zeta_k} = \lambda_k + O(t^{-1})$ ($k = 2, 3, 4$).

Поскольку $\text{Re} \lambda_k < 0$ ($k = 2, 3, 4$), то функции $\zeta_k(t)$ сходятся к нулю с экспоненциальной скоростью. В итоге получаем $\|\zeta(t)\| = O(t^{-1/2})$ и, так как степенная оценка сохраняется при

линейной замене времени и гладкой обратимой замене переменных, теорема доказана.

Список литературы: 1. Эйген М., Шустер П. Гиперцикл. М., 1982. 270 с. 2. Любич Ю. И. К динамике гиперциклов//Докл. АН СССР. 1986. 288, № 6. С. 1301—1304. 3. Любич Ю. И. К математической теории гиперциклов//Пробл. передачи информ. 1988. 24, вып. 1. С. 89—101. 4. Белицкий Г. Р. Гладкая эквивалентность ростков векторных полей с одним нулевым или парой чисто мнимых собственных значений//Функцион. анализ и его приложения. 1986. 20, вып. 4. С. 1—8. 5. Ахизер Т. А. Оценка скорости сходимости траекторий элементарного гиперцикла//Вестн. Харьк. ун-та. 1988. № 315. Управл. системы, С. 88—93. 6. Ахизер Т. А. Оценка скорости сходимости траекторий некоторых циклически симметричных гиперциклов. Х., 1987. 18 с. Деп. в УкрНИИНТИ 15.09.87, № 2511 — Ук. 87.

Поступила в редколлегию 09.10.89

УДК 532.516

Л. П. ТЕРЕХОВ, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЕ СЛОЯ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ СМАЗКИ

Исследуется плоское нестационарное движение вязкой несжимаемой жидкости (плотности ρ и вязкости μ) в тонком слое между цилиндрическими поверхностями $y=0$ и $y=h(x)$, перпендикулярными плоскости течения xOy , которое в обычном для тео-

рии смазки предположении о малости конвективных сил инерции описывается системой

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (1)$$

В пределах смазочного слоя геометрические координаты x и y удовлетворяют неравенствам: $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq h(x)$.

Считаем, что нестационарность постановки задачи обусловлена практически интересным процессом разгона смазки. Соответствующее изменение скорости движения плоскости $y=0$ аппроксимируется экспоненциальной зависимостью от времени t , входящей в граничные условия для продольной компоненты скорости v_x и давление p :

$$v_x|_{y=0} = -u \exp(\omega t); \quad p|_{x=0} = p|_{x=l} = p_0 \exp(\omega t) \quad (\omega = \text{const} > 0). \quad (2)$$

В других краевых условиях для v_x и поперечной компоненты скорости v_y :

$$v_x|_{y=h(x)} = v_y|_{y=0} = v_y|_{y=h(x)} = 0$$

учитывается неподвижность поверхности $y=h(x)$.

Краевая задача (1) — (3) легко сводится к системе безразмерных соотношений

$$4m^2 v_1 = -\frac{d\Pi_1}{dx_1} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2}; \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} = 0; \quad (3)$$

$$\Pi_1|_{x_1=0} = \Pi_1|_{x_1=1} = \Pi_0; \quad v_1|_{y_1=0} = -1; \quad (4)$$

$$v_2|_{y_1=0} = v_1|_{y_1=h_1(x_1)} = v_2|_{y_1=h_1(x_1)} = 0.$$

При этом

$$x_1 = x/l, \quad y_1 = y/h_0, \quad v_x = uv_1 \exp(\omega t),$$

$$v_y = uh_0 v_2 \exp(\omega t)/l, \quad p = \mu ul \Pi_1 \exp(\omega t)/h_0^2;$$

$$p_0 = \mu ul \Pi_0/h_0^2, \quad 2m = h_0 \sqrt{\omega \rho / \mu},$$

а в качестве характерной толщины смазочного слоя h_0 взято минимальное, задаваемое заранее, значение толщины зазора на входе в слой, т. е. $h(x) = h_0 \cdot h_1(x_1)$, $h_1(0) = 1$; $h_1(x_1) \geq 1$ при $0 \leq x_1 \leq 1$.

Интегрируя систему (3) с учетом условий (4), получаем

$$\frac{d\Pi_1}{dx_1} = \frac{4q}{h_1^3} \cdot \frac{a^3}{\text{th } a - a} + \frac{2}{h_1^2} \cdot \frac{a^2 \text{th } a}{\text{th } a - a},$$

где $a = mh_1$, а $q = \int_0^{h_1} v_1 dy_1$ вычисляем из условия

$$\int_0^1 d\Pi_1 dx_1 = 0.$$

Тогда распределение амплитуды давления

$$\Pi_1(x_1) = 4q \int_0^{x_1} \frac{a^3}{h_1^3(\operatorname{th} a - a)} dx_1 + 2 \int_0^{x_1} \frac{a^2 \operatorname{th} a}{h_1^2(\operatorname{th} a - a)} dx_1 + \Pi_0, \quad (5)$$

а для амплитуды безразмерной грузоподъемности опоры имеем обычное выражение

$$P = \int_0^1 (\Pi_1 - \Pi_0) dx_1. \quad (6)$$

В качестве важного примера реальных расчетов параметров опор трения, работающих в нестационарном режиме разгона, исследуем подробнее вопрос об оптимальной форме смазочного зазора $h_1(x_1)$ в смысле получения максимального значения подъемной силы при заданной минимальной толщине слоя h_0 и фиксированном ω . В силу математической эквивалентности рассматриваемой существенно нестационарной задачи и соответствующей стационарной магнитогидродинамической задачи, получаем результаты, подобные случаю МГД-смазки [1].

Вариация выражения (6) с учетом (5) имеет вид

$$\delta P = - \int_0^1 f(x) \left[x - \frac{\int_0^1 xg(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx} \right] \delta h \cdot dx,$$

$$f(x) = 4q \frac{d}{dh_1} \left[\frac{a^2}{h_1^2(\operatorname{th} a - a)} \right] + 2 \frac{d}{dh_1} \left[\frac{a^2 \operatorname{th} a}{h_1^2(\operatorname{th} a - a)} \right],$$

$$g(x) = \frac{a^3}{h_1^3(\operatorname{th} a - a)}.$$

Элементарный анализ показывает, что оптимальной (т. е. соответствующей максимуму P) является следующая ступенчатая форма смазочного зазора:

$$h_1(x_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < x_1 < \alpha, \\ r, & \text{если } \alpha < x_1 \leq 1. \end{cases}$$

При этом значения чисел α и r определяем из условий

$$x - \frac{\int_0^1 xg(x)dx}{\int_0^1 g(x)dx} = 0 \quad \text{при } x = \alpha,$$

$$f(x) = 0 \quad \text{при } \alpha < x \leq 1.$$

Максимальность амплитуды подъемной силы будет обеспечена тем, что, как легко видеть, $f(x_1)|_{h_1=1} < 0$ и $h_1(x_1) \geq 1$ по условию.

Соотношения (7) можно свести к системе уравнений

$$[mr \operatorname{th}^2 mr + \operatorname{th} mr - mr] \cdot [\alpha (\operatorname{th} mr - mr) (1 - \alpha) (\operatorname{th} m - m)] = \\ = \operatorname{th}^2 mr \cdot [\alpha \cdot \operatorname{th} m (\operatorname{th} mr - mr) + (1 - \alpha) (\operatorname{th} m - m) \operatorname{th} mr];$$

$$\alpha^2 (\operatorname{th} mr - mr) + (\alpha - 1)^2 (\operatorname{th} m - m) = 0,$$

переходящей при $m=0$ в известные условия

$$\alpha = \frac{1}{2r^3 - 3r^2 + 1}; \quad 2\alpha = \frac{\alpha^2 (r^3 - 1) + 1}{\alpha (r^3 - 1) + 1},$$

полученные Рэлеем применительно к случаю стационарного режима работы подшипника.

Результаты вычислений, определяющие основные геометрические характеристики оптимальной формы зазора при различных значениях параметра m , отражены в таблице. Соответствующие количественные оценки необходимо учитывать при конструиро-

m	r	α	P
0,1	1,863	0,283	$2,042 \cdot 10^{-1}$
0,2	1,853	0,288	$1,963 \cdot 10^{-1}$
0,3	1,847	0,295	$1,890 \cdot 10^{-1}$
0,4	1,819	0,303	$1,771 \cdot 10^{-1}$
0,5	1,798	0,313	$1,636 \cdot 10^{-1}$
0,6	1,776	0,323	$1,491 \cdot 10^{-1}$
0,7	1,753	0,332	$1,345 \cdot 10^{-1}$
0,8	1,731	0,342	$1,201 \cdot 10^{-1}$
0,9	1,710	0,351	$1,064 \cdot 10^{-1}$
1,0	1,689	0,360	$9,361 \cdot 10^{-2}$
2,0	1,526	0,451	$2,097 \cdot 10^{-2}$
3,0	1,424	0,439	$3,903 \cdot 10^{-3}$
4,0	1,355	0,452	$6,912 \cdot 10^{-4}$

вании ступенчатых опор трения, имеющих, как известно [2], ряд преимуществ при использовании в реальных нестационарных условиях разгона.

Амплитуда грузоподъемности опоры P монотонно убывает с ростом m и стремится к нулю при неограниченном возрастании m .

Учитывая же наличие экспоненциального множителя в выражении для истинной подъемной силы, возможно более плавное нагружение конструкции в исследуемом теперь нестационарном режиме, что, естественно, приводит к повышению надежности работы узла трения.

Список литературы: 1. Токарь И. Я., Урасов П. Г., Дьяков В. И. О повышении надежности работы подшипников реверсируемых гидрогенераторов // Вестн. машиностр. 1980. № 9. С. 43—44. 2. Osterle J. F., Young F. J. On the load capacity of the hydromagnetically lubricated slider bearing // Wear. 1962. 5, № 3. P. 227—234.

Поступила в редколлегию 18.10.89

УДК 517.955

С. В. ГАДЕЦКАЯ

ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НАГРУЗКАМИ

Задача Коши для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами изучена детально [1—3] и др. Требование корректной разрешимости в пространствах конечного гладких функций продиктовало выделение класса корректных по И. Г. Петровскому (удовлетворяющих условию А [1]) уравнений, а желание расширить возможности роста при $(x) \rightarrow \infty$ решений и начальных функций привели к выделению двух подклассов этого класса: параболических и гиперболических уравнений. При этом в случае параболических уравнений (и только в этом случае [4] происходит увеличение гладкости решения задачи Коши по сравнению с гладкостью начальной функции.

Нами рассматриваются аналогичные вопросы — исследование классов корректной разрешимости задачи Коши, содержащих функции, имеющие экспоненциальный рост при $(x) \rightarrow \infty$, а также выяснение наличия «параболического эффекта» сглаживаемости решения для уравнений, нагруженных по временной координате:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t) + \sum_{k=1}^N Q_k\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t_k), \quad (1)$$

где $(x, t) \in R \times [0, T]$, $0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$, $P(is), Q_k(is) \neq 0$, $k = \overline{1, N}$ — произвольные полиномы с постоянными коэффициентами. К уравнению (1) присоединяется начальное условие Коши: $u(x, 0) = u_0(x)$ (2).

Установлено, что задача (1), (2) корректно разрешима в определенных классах функций экспоненциального роста, если соответствующее (1) уравнение «без нагрузок»: $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \times$

$\times u(x, t)$ является параболическим; при этом сохраняется параболический эффект сглаживаемости. Кроме того, показано, что в случае $t_N = T$ для антипараболических уравнений (т. е. когда уравнение $-\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t)$ — параболическое) также имеет

место корректная разрешимость в классах функций экспоненциального роста, однако теперь порядок гладкости решения, в отличие от предыдущего случая, не возрастает и, в отличие от общей ситуации с корректными по Петровскому уравнениями, не уменьшается.

Вопросы корректной разрешимости задачи (1) — (2) в классах функций, имеющих при $(x) \rightarrow \infty$ степеней порядок роста или убывания, изучались в статьях [5, 6], продолжением которых и является данная работа.

Основные определения. Формулировка основной теоремы 1.

Определение 1 (ср. [2, с. 130]). Уравнение (1) называется параболическим, если полином $P(i\sigma)$ удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} P(i\sigma) \leq -A|\sigma|^k + A', \quad (3)$$

где $A > 0$, $A' \in \mathbf{R}$, $0 < h \leq p = \deg P(is)$, $\sigma \in \mathbf{R}$. Как известно [7], существует область $G_\mu = \{s = \sigma + i\tau \in \mathbf{C} : |\tau| \leq K(1 + |\sigma|)^h\}$, $K > 0$,

в которой оценка (3) сохраняется. При этом $\mu = h - p + 1$. Заметим, что в случае $p = h + 1$ ($\mu = 0$), как нетрудно показать,

$$0 < K < \tilde{K} = |\operatorname{Re} P(i\sigma)|^{(p-1)'}_{\sigma=0} / (P(is))^{(p)}|_{s=0},$$

а в случае $p = h$ (т. е. $\mu = 1$) неравенство (3) заведомо выполняется в области G_0 , причем $K > 0$ может быть любым; в остальных случаях число $K > 0$ выбирается достаточно малым.

Определение 2. Назовем задачу (1) — (2) корректно разрешимой на $]0, T]$ (на $[0, T[$, $[0, T]$ из топологического пространства Ψ_1 в топологическое пространство Ψ_2 , если для любой начальной функции $u_0(x)$ из Ψ_1 существует единственное решение задачи $u(x, t)$, при каждом $t \in]0, T]$ ($t \in [0, T[$, $[0, T]$) принадлежащее пространству Ψ_1 , причем имеет место непрерывная зависимость решения от начальной функции в смысле топологий пространств Ψ_1 и Ψ_2 соответственно.

В качестве пространств Ψ_1 и Ψ_2 будем рассматривать следующие пространства:

1) банахово пространство $K_{r,b}^m = \{\varphi(x) \in C^m(\mathbf{R}) : \|\varphi(x)\|_{r,b,m} = \sup_{x \in \mathbf{R}} \max_{0 \leq k \leq m} |\varphi^{(k)}(x)| \exp\{-b|x|^r\} < \infty\}$, $0 < r \leq 1$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $b > 0$;

2) проективный предел таких пространств: $K_{r,0}^m = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} K_{r,1/n}^m$, $0 < r \leq 1$, $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Сопоставим уравнению (1) целую функцию $\delta(s) = 1 - \sum_{j=1}^N K(P(is), t_j Q_j(is))$, где $K(\alpha, t) = \int_0^t \exp(\alpha\tau) d\tau$, и обозначим $Z = \{s \in \mathbf{C} : \delta(s) = 0\}$.

Определение 3 [8]. Уравнение (1) называется невырожденным типа a , если $Z \neq C$ и $a = \inf_{s \in Z} \|\operatorname{Im} s\|$ ($0 \leq a \leq +\infty$).

Обозначим
$$\tilde{a} = \begin{cases} \min(\tilde{K}, a), & \text{если } p = h + 1, \\ a, & \text{если } p = h. \end{cases}$$

Теорема 1. Пусть 1) $0 < a \leq +\infty$, 2) $P(is) + \sum_{k=1}^N Q_k(is) \neq 0$, 3) уравнение (1) является параболическим. Тогда справедливы следующие утверждения.

Если $p - h \geq 2$, то задачи (1) — (2) корректно разрешимы на $[0, T]$: а) при $r = \frac{h}{p-1}$ из $K_{r,0}^0$ в $K_{r,0}^\infty$; б) при любом $r \in [0, \frac{h}{p-1}]$ и любом $b \geq 0$ из $K_{r,b}^0$ в $K_{r,b}^\infty$. Если $p = h + 1$ или $p = h$, то задача (1) — (2) корректно разрешима на $[0, T]$: а) при любом $b \in [0, \tilde{a}]$ из $K_{1,b}^0$ в $K_{1,b}^\infty$; б) при любом $r \in [0, 1]$ и любом $b \geq 0$ из $K_{r,b}^0$ в $K_{r,b}^\infty$.

Общая схема

Для исследования воспользуемся схемой, предложенной в [2] и примененной для данной задачи в [5, 6]. Рассматривая в задаче (1), (2) неизвестную функцию $u(x, t)$ как обобщенную над подходящим основным пространством Φ , применим к задаче (1), (2) преобразование Фурье, в результате чего приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с нагрузками и с параметром s (в смысле обобщенных функций над пространством $\tilde{\Phi} = F(\Phi)$):

$$\frac{dv(s, t)}{dt} = P(is)v(s, t) + \sum_{k=1}^N Q_k(is) v(s, t_k); \quad (4)$$

$$v(s, t) = v_0(s), \quad (5)$$

формальное решение которой, как показано в [5], при любом фиксированном $s \in Z$ имеет вид $v(s, t) = Q(s, t)v_0(s)$,

$$\text{где } Q(s, t) = \exp\{tP(is)\} \left[1 + \frac{K(-P(is)t)}{\delta(s)} \sum_{k=1}^N Q_k(is) \times \right. \\ \left. \times \exp\{t_k P(is)\} \right]. \quad (6)$$

Если пространство основных функций Φ выбрано так, что разрешающая функция $Q(s, t)$ является при $\forall t \in [0, T]$ мультипликатором в пространстве $\tilde{\Phi}$, то определенная по формуле (6) обобщенная функция $v(s, t)$ является решением (над пространством $\tilde{\Phi}$) задачи (4), (5), а тогда

$$u(x, t) = G(x, t) * u(x, 0), \quad (7)$$

где $G(x, t) = F^{-1}(Q(s, t))$ — обратное преобразование Фурье функции $Q(s, t)$. Формула (7) дает решение в классе обобщенных функций над пространством Φ исходной задачи (1), (2). Далее предстоит найти условия на $u_0(x)$, выполнение которых гарантирует, что решение (7) является классическим. Для этого проводится исследование свойств $Q(s, t)$ и $G(x, t)$.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Утверждение 1. Для любого $h > 0$ найдется функция $C(t)$, удовлетворяющая условиям

$$0 < C(t) \in C_{[0, T]} \text{ и } C(t) \rightarrow +\infty (t \rightarrow +0), \quad (8)$$

и такая, что при любом $d \in N \setminus \{0\}$ имеет место неравенство:

$$(1 + |x|)^d \leq d^{d/h} (C(t))^d \exp \{t|x|^h\}, \quad x \in R, \quad t \in [0, T].$$

Справедливость утверждения легко доказывается дифференцированием.

Утверждение 2. Пусть функция $f(s)$ аналитична в области

$$G_\nu = \{s = \sigma + i\tau \in C: |\tau| \leq K(1 + |\sigma|)^\nu\}, \quad K > 0, \quad \nu \leq 0,$$

и удовлетворяет в этой области неравенству

$$|f(\sigma + i\tau)| \leq C(t) \exp \{bt|\sigma|^h\},$$

где $b < 0$, $h > 0$, $t \in [0, T]$, $C(t)$ удовлетворяет условиям (8). Тогда для любого $\delta \in]0, e[$ найдется $M_\delta > 0$ такое, что выполняются оценки:

$$|f^{(q)}(\tau)| \leq M_\delta C_1(t) (K_1(e - \delta))^{-q} q^{q\beta} (B(t))^{-q} \exp \{b_1 t |\tau|^h\},$$

где $q = 0, 1, 2$, $b_1 < 0$, $t \in [0, T]$, $\beta = 1 - \frac{\nu}{h}$, $C_1(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют условиям (8), $K_1 > 0$ — некоторое (достаточно малое) число при $\nu < 0$ и $K_1 = K$ при $\nu = 0$.

Утверждение является уточнением теоремы, доказанной в [9, с. 264].

Утверждение 3. Для любых значений $\gamma \in]0, \alpha]$, $\alpha > 0$, $x \in R$, $\xi \in R$ имеют место неравенства:

$$-\alpha |\xi|^\lambda + \gamma |x - \xi|^\lambda \leq \gamma |x|^\lambda, \text{ если } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

$$-\alpha |\xi|^\lambda + 2^{1-\lambda} \gamma |x - \xi|^\lambda \leq \gamma |x|^\lambda, \text{ если } \lambda > 1.$$

Утверждение проверяется дифференцированием.

Утверждение 4. Пусть $0 < \lambda \leq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $0 < r < \lambda$.

Тогда $\sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2} |-\alpha|\xi|^\lambda + \beta|x - \xi|^\lambda - \beta|x|^\lambda| < +\infty$.

Утверждение 5. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2} \frac{(1 + |x - \xi|)^\lambda}{(1 + |\xi|)^\lambda (1 + |x|)^\lambda} < +\infty.$$

Доказательства утверждений 4, 5 получаются применением утверждения 3.

4. Доказательство теоремы 1.

Заметим сразу, что все указанные в теореме пространства входят в класс единственности решения задачи (1), (2) в силу [8]. Обозначим:

$$\nu = \begin{cases} \mu, & \text{если } \mu < 0 \text{ (т. е. } p - h \geq 2), \\ 0, & \text{если } \mu = 0 \text{ или } \mu = 1 \text{ (т. е. } p = h + 1 \text{ или } p = h). \end{cases}$$

Тогда в области $G_\nu = \{s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |\tau| \leq K(1 + |\sigma|)^\nu\}$ заведомо будет иметь место неравенство (3).

Установим, прежде всего, что при любом фиксированном $t \in]0, T]$ функция $Q(\sigma, t)$ принадлежит основному пространству

$$S^{\beta, B} = \{f(\sigma) \in C^\infty(\mathbb{R}) : |\sigma^k f(\sigma)| \leq C_k B^q q^{q\beta}, k, q = 0, 1, 2, \dots, B > B\}$$

[9, с. 214], где $\beta = 1 - \frac{\nu}{h}$ и $B = B(t)$ будет указано ниже.

Выберем область G_ν такую, что $K \in]0, a[$, тогда $G_\nu \cap Z = \emptyset$ и $Q(s, t)$ аналитична в G_ν . Достаточно проводить рассуждения для $s: P(is) \neq 0$, при этом из [6] $Q(s, t)$ принимает вид:

$$Q(s, t) = \frac{H(is) \exp \{tP(is)\} - \sum_{k=1}^N Q_k(is) \exp \{t_k P(is)\}}{H(is) - \sum_{k=1}^N Q_k(is) \exp \{t_k P(is)\}},$$

$$\text{где} \quad H(is) \equiv P(is) + \sum_{k=1}^N Q_k(is).$$

Тогда при $s \in G_\nu$, используя утверждение 1, имеем

$$|H(is) \exp \{t(P(is))\} - \sum_{k=1}^N Q_k(is) \exp \{t_k P(is)\}| \leq$$

$$\leq M_0(t) \exp \{-A_1 t |\sigma|^h\} + \sum_{k=1}^N M_k \exp \{-A_1 t_k |\sigma|^h\} \leq$$

$$\leq \begin{cases} M_1(t) \exp \{-A_1 t |\sigma|^h\}, & 0 < t \leq t_1, \\ M_1(t_1) \exp \{-A_1 t_1 |\sigma|^h\}, & t_1 \leq t \leq T, \end{cases}$$

где $A_1 > 0$, $M_k > 0$, $k = \overline{1, N}$, $M_0(t)$, $M_1(t)$ удовлетворяют условиям (8). Всюду далее считаем $t \in]0, t_1]$, в случае $t \in [t_1, T]$ все рассуждения аналогичны (с заменой t на t_1). Из условий 2) и 3) теоремы легко получить

$$|H(is) - \sum_{k=1}^N Q_k(is) \exp \{t_k P(is)\}| \geq K_2 0, s \in G_v.$$

Таким образом, в области G_v при каждом фиксированном $t \in]0, t_1]$ имеет место $|Q(s, t)| \leq M_2(t) \exp \{-A_1 t |\sigma|^h\}$, где $M_2(t)$ удовлетворяет условиям (8). Тогда по утверждению 2 для любого фиксированного $\delta \in]0, e[$ найдется $M_\delta > 0$ такое, что

$$|Q^{(q)}(\tau, t)| \leq M_\delta M_3(t) (K_1(e - \delta))^{-q} q^{q\beta} (B(t))^{-vq} \exp \{-A_2 t |\sigma|^h\},$$

где $q = 0, 1, 2, \dots$, $A_2 > 0$, $\beta = 1 - \frac{\nu}{h}$; $M_3(t)$, $B(t)$ удовлетворяют условиям (8): $K_1 > 0$ — некоторое (достаточно малое) число, если $\nu < 0$, и $K_1 = K$, если $\nu = 0$. Применив еще раз утверждение 1, приходим к оценке

$$|\sigma^k Q^{(q)}(\tau, t)| \leq R_{k\delta}(t) (K_1(e - \delta))^{-q} q^{q\beta} (B(t))^{-vq},$$

где $k, q = 0, 1, 2, \dots$; функции $R_{k\delta}(t)$ удовлетворяют условиям (8). Это означает, что при каждом фиксированном $t \in]0, t_1]$

$$Q(\tau, t) \in S^{\beta, B_\delta(t)}, B_\delta(t) = (K_1(e - \delta) B^\nu(t))^{-1}.$$

Отсюда, используя теорию пространств типа S , получаем [9, с. 241]:

$$G(x, t) = F^{-1}(Q(\tau, t)) \in S_{\beta, B_\delta(t)};$$

$$|x^k G^{(q)}(x, t)| \leq C_{q\beta}(t) (B_\delta(t))^k k^{k\beta},$$

$k, q = 0, 1, 2, \dots$; функции $C_{q\beta}(t)$ удовлетворяют условиям (8).

Но тогда, в соответствии с эквивалентным определением пространства $S_{\beta, B}$ [9, с. 203]

$$|G^{(q)}(x, t)| \leq T_q(t) \exp \{-d_\delta(t) |x|^{1/\beta}\}, \quad (9)$$

$$\text{где} \quad d_\delta(t) = \frac{\beta}{e} (K_1(e - \delta) B^\nu(t))^{1/\beta}, \quad (10)$$

а функции $T_q(t)$ удовлетворяют условиям (8).

Теперь необходимо исследовать формулу (7). Исходя из предположений теоремы относительно $u_0(x)$ и используя полученные оценки (9), аналогично рассуждениям, проведенным в [2, с. 143] при доказательстве теоремы корректности в классе $K_{r,0} =$

$= \{f(x) : |f(x)| \leq C_\varepsilon \exp\{\varepsilon|x|^r\}, \forall \varepsilon > 0\}$, $r = \frac{h}{p-1}$ ($h < p$), для соответствующей задачи Коши без нагрузок, заключаем, что свертка (7) является обычной бесконечно дифференцируемой при $t \in]0, t_1]$ функцией, определенной интегралом

$$u(x, t) = \int G(\xi, t) u_0(x - \xi) d\xi.$$

Оценим этот интеграл, считая $u_0(x) \in K_{r,b}^0$, $r > 0$, $b \geq 0$ и используя утверждения 3, 4:

$$|u(x, t)| = \left| \int G(\xi, t) u_0(x - \xi) d\xi \right| \leq T_0(t) \int \exp\{-d_\delta(t)|\xi|^{1/\beta} + \gamma|x - \xi|^r\} d\xi \leq T_{01}(t) \exp\{\gamma|x|^r\}, \quad (11)$$

$T_{01}(t)$ удовлетворяют условиям (8). Здесь в случае $u_0(x) \in K_{r,0}^0$, $r \leq h(p-1)^{-1} = \beta^{-1}$ мы берем при фиксированном $t \in]0, t_1]$ значение $\gamma \in]0, d_\delta(t)[$ и получаем $u(x, t) \in K_{r,0}^0$; при $r < \beta^{-1}$ и $b > 0$

берем $\gamma = b$. В случае $p = h + 1$ или $p = h$ имеем $\beta = 1$, $d_\delta(t) = K(e - \delta)e^{-1}$ из (10); поскольку можно выбрать любое значение $\delta \in]0, e[$, а также любое значение $K < a$, то условие $\gamma \in]0, d_\delta(t)[$ приводит к возможности выбора любого $\gamma \in]0, a[$. Тем самым формула (11) показывает, что во всех указанных в теореме случаях при $u_0(x) \in K_{r,b}^0$ (с соответствующими значениями r и b) решение $u(x, t)$ при фиксированных значениях $t \in]0, t_1]$ принадлежит также пространству $K_{r,b}^0$. Наконец, факт $u(x, t) \in K_{r,b}^\infty$ получается из равенства

$$u^{(q)}(x, t) = \int G^{(q)}(\xi, t) u_0(x - \xi) d\xi, \quad q = 0, 1, 2, \dots,$$

поскольку с учетом (9) оценка его проводится аналогично (11). Отметим также, что неравенство (11) показывает непрерывную зависимость решения $u(x, t)$ (при любом фиксированном значении t) от начальной функции $u_0(x)$ (в соответствующих топологиях). Теорема доказана.

АНТИПАРАБОЛИЧНОСТЬ

Определение 4. Назовем уравнение (1) антипараболическим, если полином $P(i\sigma)$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} P(i\sigma) \geq A|\sigma|^h + A'$, где $A > 0$, $A' \in \mathbb{R}$, $0 < h \leq p = \deg P(i\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Ясно, что существует область G_μ , $\mu = h - p + 1$, в которой это неравенство сохраняется. Всюду далее будем использовать обозначения предыдущих пунктов, а также $l = \max\{\deg P(i\sigma), \deg Q_1(i\sigma), \dots, \deg Q_N(i\sigma)\}$.

Теорема 2. Пусть 1) $0 < a \leq +\infty$, 2) $P(i\sigma) + \sum_{k=1}^N Q_k(i\sigma) \neq 0$, 3) уравнение (1) является антипараболическим, 4) $t_N = T$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Если $p-h \geq 2$, то для $\forall m \geq l$ задача (1), (2) корректно разрешима на $[0, T[$:

а) при $r = h(p-1)^{-1}$ из $K_{r,0}^m$ в $K_{r,0}^m$;

б) при любом $r \in]0, h(p-1)^{-1}[$ и любом $b \geq 0$ из $K_{r,b}^m$ в $K_{r,b}^m$.

Если $p = h+1$ или $p = h$, то для $\forall m \geq l$ задача (1), (2) корректно разрешима на $[0, T[$:

а) при любом $b \in [0, a[$ из $K_{1,b}^m$ в $K_{1,b}^m$;

б) при любом $r \in]0, 1[$ и любом $b \geq 0$ из $K_{r,b}^m$ в $K_{r,b}^m$.

Доказательство. Преобразуя разрешающую функцию $Q(s, t)$ с учетом условия 4), получим $Q(s, t) = 1 + Q_1(s, t)$ (12), где функция $Q_1(s, t)$, имеющая при $s: P(is) \neq 0$ вид:

$$Q_1(s, t) = \frac{H(is) (\exp \{(t-T)P(is)\} - \exp \{-P(is)\})}{H(is) \exp \{-TP(is)\} - \sum_{k=1}^{N-1} Q_k(is) \exp \{(t_k - T) \times \\ \times P(is)\} - Q_N(is)},$$

обладает на $[0, T[$ теми же свойствами, что и разрешающая функция $Q(s, t)$ в теореме 1 на $]0, T[$. Поэтому при каждом фиксированном $t \in [0, T[$ получим оценку

$$|Q_1(s, t)| \leq M_1(t) \exp \{-A_1(T-t)|s|^h\}, \quad A_1 < 0, s \in G,$$

откуда следует, что $Q_1(\sigma, t) \in S^{\beta, B_0(t)}$ и $G_1(x, t) = F^{-1}(Q_1(\sigma, t)) \in S_{\beta, B_0(t)}(0 \leq t < T)$.

Учитывая, что за счет (12) выражение (7) принимает вид

$$u(x, t) = u_0(x) + G_1(x, t) * u_0(x), \quad (13)$$

приходим к справедливости утверждений теоремы. Отметим, что в случае антипараболичности не происходит повышения гладкости решения в силу особой структуры $u(x, t)$ в (13).

Замечание 1. В работах [5, 6] доказаны теоремы корректности задачи (1), (2) в пространствах ограниченных функций и функций степенного роста и убывания вида

$$V_{m, \gamma} = \{\varphi(x) \in C^m(R) : \|\varphi(x)\|_{m, \gamma} = \sup_{x \in R} \max_{0 \leq k < m} |\varphi^{(k)}(x)| \cdot (1 + |x|^{-\gamma}) < \infty\},$$

$$m \in N \cup \{0\}, \gamma \in R.$$

Из этих общих теорем вытекает корректность в таких пространствах задачи (1), (2) для параболических и антипараболических уравнений, но, вообще говоря, с потерей гладкости ($\Psi_1 = V_{m_1, \gamma}$, $\Psi_2 = V_{m_2, \gamma}$, $m_1 \geq m_2$). Однако, на самом деле, для параболических

уравнений происходит, наоборот, увеличение гладкости решения (при $t > 0$), а для антипараболических она не меняется. А именно:

Теорема 3. Пусть 1) $Z \cap R = \emptyset$; 2) $P(is) + \sum_{k=1}^N Q_k(is) \neq 0$;

3) уравнение (1) параболично. Тогда для $\forall \gamma \in R$ задача (1), (2) корректно разрешима на $]0, T]$ из $V_{0,\gamma}$ в $V_{\infty,\gamma}$.

Теорема 4. Пусть 1) $Z \cap R = \emptyset$; 2) $P(is) + \sum_{k=1}^N Q_k(is) \neq 0$;

3) уравнение (2) антипараболично; 4) $t_N = T$. Тогда для $\forall m \geq 1$ и $\forall \gamma \in R$ задача (1), (2) корректно разрешима на $[0, T]$ из $V_{m,\gamma}$ в $V_{m,\gamma}$.

Теоремы 3, 4 доказываются аналогично теоремам 1, 2 с использованием вместо утверждений 3, 4 утверждения 5.

Замечание 2. Проанализируем условие $P(is) + \sum_{k=1}^N Q_k(is) \neq 0$,

фигурирующее в теоремах 1—4. В случае $P(is) + \sum_{k=1}^N Q_k(is) \equiv 0$

всегда существует решение задачи (1), (2) $u(x, t) \equiv u_0(x)$, если $u_0(x) \in \dot{C}^1(R)$. Отсюда и из соответствующих теорем единственности в [8] следует:

1) если $0 < a \leq +\infty$, то для $\forall m \geq 1$ задача (1), (2) корректно разрешима на $[0, T]$;

а) при любом $b \in [0, a[$ из $K_{1,b}^m$ в $K_{1,b}^m$;

б) при любом $r \in]0, 1[$ и любым $b \geq 0$ из $K_{r,b}^m$ в $K_{r,b}^m$;

2) если $Z \cap R = \emptyset$ (но, быть может, $a = 0$), то для $\forall m \geq 1$ и $\forall \gamma \in R$ задача (1), (2) корректно разрешима на $[0, T]$ из $V_{m,\gamma}$ в $V_{m,\gamma}$.

Список литературы: 1. Петровский И. Г. О проблеме Коши для системы линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюлл. Моск. ун-та (А). 1938. 1, № 7. С. 1—72. 2. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., 1958. 274 с. 3. Эйдельман С. Д. О задаче Коши для параболических систем // Докл. АН СССР. 1954. 98, № 6, С. 913—915. 4. Борок В. М. Об одном характеристическом свойстве параболических систем // Докл. АН СССР. 1956. 110, № 6, С. 903—906. 5. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. I. Корректность // Изв. вузов. Математика. 1981. № 10. С. 3—9. 6. Борок В. М., Евдокимова С. В. Регулярные граничные задачи в полосе // Теория функций, функционал. анализ и их приложения. 1989. Вып. 51. С. 31—37. 7. Борок В. М. О численных характеристиках систем, корректных по И. Г. Петровскому // Изв. вузов. Математика. 1959. № 1 (8). С. 16—22. 8. Борок В. М., Житомирский Я. И. Задача Коши для линейных нагруженных дифференциальных уравнений. II. Единственность // Изв. вузов. Математика. 1981. № 9. С. 5—12. 9. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958. 307 с.

Поступила в редколлегию 06.09.89

МНОГОМЕРНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СО СДВИГОМ
В АРГУМЕНТЕ

В настоящей работе изучается вопрос о разрешимости и описании решений многомерного функционального уравнения

$$\varphi(Fx) = g(x, \varphi(x)), \quad (1)$$

где $F: R^1 \times M \rightarrow R^1 \times M$; C^k — диффеоморфизм вида $Fx = (\xi + 1, h(\xi, \eta))$, $\xi \in R^1$, $\eta \in M$, $x = (\xi, \eta)$; $M - C^k$ — многообразие, $g: R^1 \times M \times R^m \rightarrow R^m$ — заданное C^k — отображение.

Отображение g предполагается обратимым по переменной y в том смысле, что отображение вида $G(\xi, \eta, y) = (\xi + 1, h(\xi, \eta), A(\eta)y)$ — диффеоморфизм многообразия $R^1 \times M \times R^m$.

Уравнения (1) изучались многими авторами*. Однако они, как правило рассматривали случай одной переменной ($x \in R^1$). Мы исследуем многомерную ситуацию и, кроме того, изучим не только вопрос о разрешимости, но и о классификации уравнения (1). Это приводит к удобному описанию многообразий решений.

Теорема 1. Уравнение (1) имеет решение $\varphi: R^1 \times M \rightarrow R^m$ класса C^k .

Здесь k может принимать любое значение от нуля до бесконечности. Однако аналитическую ситуацию мы не рассматриваем.

Вопрос об описании решений уравнения (1) сводится к вопросу о простейшей (нормальной) форме уравнения относительно преобразования аргумента $x \mapsto H(x)$ и неизвестного $\varphi \mapsto T(x, \varphi(x))$. Этот вопрос, в свою очередь, сводится к построению нормальной формы диффеоморфизма G относительно сопряженности с помощью диффеоморфизма

$$\Phi(x, y) = (H(x), T(x, y)). \quad (2)$$

Теорема 2. При $k \geq 1$ существует C^{k-1} диффеоморфизм вида (2), который приводит G к нормальной форме

$$G_n(\xi, \eta, y) = (\xi + 1, h(\eta), A(\eta)y).$$

Функциональное уравнение (1), отвечающее G_n , является однородным линейным:

$$\varphi(\xi + 1, h(\eta)) = A(\eta) \varphi(\xi, \eta). \quad (3)$$

Тем самым каждое решение уравнения (1) можно записать в виде $\varphi(x) = T(H^{-1}(x), \varphi(H^{-1}(x)))$, где $\psi(x) = \psi(\xi, \eta)$ — решение уравнения (3).

* Kuczma M. Functional equations in a single variable. Warszawa, 1968. P. 438.

Вопрос об описании решений однородного уравнения (3) связан с дальнейшей классификацией диффеоморфизма $G_n(\xi, \eta, y) = (\xi + 1, h(\eta), A(\eta)y)$.

В случае $M = \mathbf{R}^n$ можно доказать, что эту нормальную форму можно упростить до вида

$$G_n(\xi, \eta, y) = (\xi + 1, I_0\eta, I_1y), \quad (4)$$

где $I_0: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ и $I_1: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ — линейные операторы вида $\text{diag}(\pm 1, 1, 1, \dots, 1)$, подчиненные условию $\text{sign det } J_0 = \text{sign det } h'(\eta)$; $\text{sign det } I_1 = \text{sign det } A(\eta)$.

Общее решение уравнения (3), отвечающее нормальной форме (4), нетрудно описать. Например, если $I_0 = I$, $I_1 = I$, то φ — любая 1-периодическая по переменной ξ функция. Если $I_0 = (-1, 1, \dots, 1)$, $I_1 = (-1, 1, \dots, 1)$, то φ — 2-периодическая функция

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\eta) e^{i\pi k \xi},$$

коэффициенты которой удовлетворяют условию $\varphi_k(-\eta) = (-1)^k \varphi_k(\eta)$, $k=0, \pm 1, \dots$

Заметим, что любое аффинное отображение пространства $\mathbf{R}^n$ без неподвижных точек приводится к диффеоморфизму вида $(\xi + 1, I_0\eta)$. Поэтому из теоремы 2 вытекает

Следствие. Каждое уравнение вида $\varphi(Ax + e) = g(x, \varphi(x))$, где $A: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ — линейный невырожденный оператор, причем $e \in \text{Im}(A - I)$, некоторым C^{k-1} -преобразованием (2) приводится к нормальной форме (4).

Доказательство теорем. Прежде всего, докажем теорему о существовании гладкого решения.

С этой целью зададим произвольный набор функций:

$$a_p(\eta), \eta \in M, \forall p \leq k,$$

$$a_p(\eta) = \left. \frac{\partial^p \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^p} \right|_{\xi=0}.$$

Из уравнения (1) последовательно определим значение производных

$$b_p(\eta) = \left. \frac{\partial^p \varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^p} \right|_{\xi=-1}, \forall p \leq k.$$

По заданным значениям производных построим такую функцию $\varphi_0(\xi, \eta)$ класса C^k , чтобы

$$\left. \frac{\partial^p \varphi_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^p} \right|_{\xi=0} = a_p(\eta); \quad \left. \frac{\partial^p \varphi_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^p} \right|_{\xi=-1} = b_p(\eta).$$

Если $k < \infty$, то в качестве вектор-функции $\varphi_0(\xi, \eta)$ можно взять многочлен по переменной ξ достаточно высокой степени.

В случае $k = \infty$ конструкция вектор-функции $\varphi_0(\xi, \eta)$ следует известной лемме Бореля. Рассмотрим такую C^∞ -функцию $\tau(\xi)$

$$\tau(\xi) = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leq \delta, \quad 0 < \delta < \frac{1}{2} \\ 0, & |\xi| \geq 2\delta \end{cases}$$

и $|\tau^{(k)}(\xi)| \leq C_k$ ($k \geq 0$). Если

$$\varepsilon_k(\eta) \leq \frac{1}{\|a_k(\eta)\|^2 + 1} \cdot 2^{-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

функции на M класса C^∞ , то ряд

$$\psi_0(\varepsilon, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(\eta)}{k!} [\tau(\varepsilon_k^{-1}(\eta) \cdot \xi) \cdot \varepsilon_k(\eta)]^k$$

сходится в топологии пространства C^∞ -функции. При этом

$$\left. \frac{\partial^k \psi_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=0} = a_k(\eta), \quad \psi_0(\xi, \eta) = 0 \quad (|\xi| \geq 2\delta).$$

Аналогично построим такую C^∞ -вектор-функцию $\psi_1(\xi, \eta)$ так, чтобы

$$\left. \frac{\partial^k \psi_1(\xi, \eta)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=1} = b_k(\eta), \quad \psi_1(\xi, \eta) = 0 \quad (|\xi - 1| \geq 2\delta).$$

Положим $\varphi_0(\xi, \eta) = \psi_0(\xi, \eta) + \psi_1(\xi, \eta)$, тогда

$$\left. \frac{\partial^k \varphi_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=0} = a_k(\eta), \quad \left. \frac{\partial^k \varphi_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=1} = b_k(\eta),$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

Построим решение уравнения (1), полагая по индукции

$$\varphi(\xi, \eta) = \varphi_0(\xi, \eta), \quad 0 \leq \xi \leq 1;$$

$$\varphi(\xi, \eta) = g(\xi - 1, h^{-1}(\eta)), \quad \varphi(\xi - 1, h^{-1}(\eta)), \quad n \leq \xi \leq n + 1, \quad n \geq 1;$$

$$\varphi(\xi, \eta) = t(\xi + 1, h(\eta)), \quad \varphi(\xi + 1, h(\eta)), \quad -n - 1 \leq \xi \leq -n, \quad n \geq 0;$$

Здесь t — отображение, «обратное», к g по переменной y , т. е. $t(\xi, \eta, g(\xi, \eta, y)) = y$.

Указанными выше формулами задается C^k -решение нашего уравнения при всех ξ .

Докажем теорему 2.

Приведем к нормальной форме „координату“ $H(\xi, \eta) = (\xi + 1, h(\xi, \eta))$, т. е. построим такой C^k -диффеоморфизм $\Phi_0: R^1 \times M \rightarrow R^1 \times M$ вида $\Phi_0(\xi, \eta) = (\xi, T_0(\xi, \eta))$, что $(\Phi_0^{-1} H \Phi_0)(\xi, \eta) = (\xi + 1, h(\eta))$. С этой целью положим $T_0(\xi, \eta) = h(v(\xi), h^{-1}(\eta))$,

$h(\eta) = h(0, \eta)$, где C^∞ -функция $v(\xi)$ выбрана так, чтобы $v^{(k)}(0) = k \geq 0$, $v(1) = 0$, $v'(1) = 1$, $v^{(k)}(1) = 0$, $k \geq 2$.

Отображение T_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$T_0(0, \eta) = T_0(1, \eta) = \eta;$$

$$\left. \frac{\partial^k T_0}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial^k T_0}{\partial \xi^k} \right|_{\xi=1} = h_\xi^{(k)}(0, h^{-1}(\eta)), \quad k \geq 1.$$

Положим теперь $T(\xi, \eta) = T_0(\xi, \eta)$, $0 \leq \xi \leq 1$. Продолжая отображение $T(\xi, \eta)$ согласно равенству $T(\xi + 1, h(\eta)) = h(\xi, T(\xi, \eta))$ на все значения ξ , получим C^k -диффеоморфизм $\Phi_0(\xi, \eta) = (\xi, T(\xi, \eta))$, для которого $(\Phi_0^{-1} H \Phi_0)(\xi, \eta) = (\xi + 1, h(\eta))$.

Теперь можно считать, что $G(\xi, \eta, y) = (\xi + 1, h(\eta), g(\xi, \eta, y))$.

Приведем к нормальной форме последнюю координату отображения. Будем искать приводящий диффеоморфизм $\Phi(\xi, \eta, y) = (\xi, \eta, T(\xi, \eta, y))$. Тогда для T имеем

$$T(\xi + 1, h(\eta), A(\eta)y) = g(\xi, \eta, T(\xi, \eta, y)). \quad (5)$$

Положим $A(\eta) = g'_\eta(0, \eta, 0)$. Отсюда конструкция отображения T аналогична предыдущей. Поскольку уравнение (1) имеет C^k -решение, можно считать $g(0, \eta, 0) = 0$. Положим

$$T_0(\xi, \eta, y) = \frac{1}{v_2(\xi)} g(v_1(\xi), h^{-1}(\eta), v_2(\xi) B(\eta)y), \quad (6)$$

где $B(\eta) = A^{-1}(h^{-1}(\eta))$, $v_1^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \geq 0$; $v_1(1) = 0$, $v'_1(1) = 1$; $v_1^{(k)}(1) = 0$, $\forall k \geq 2$; $v_2^{(k)}(0) = 0$, $\forall k \geq 0$; $v_2(1) = 1$; $v_2^{(k)}(1) = 0$, $\forall k \geq 1$.

Полагая $T(\xi, \eta, y) = T_0(\xi, \eta, y)$, $0 \leq \xi \leq 1$ и продолжая его по переменной ξ равенством (5), построим нужный диффеоморфизм. Из формулы (6) следует, что $T(\xi, \eta, y) \in C^{k-1}$.

Поступила в редколлегию 18.12.89

УДК 519.83+519.86

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук

ПРИНЦИП СОГЛАСИЯ В ПРОБЛЕМЕ КОЛЛЕКТИВНОГО ВЫБОРА

Пусть имеется коллектив $K = \{1, \dots, k\}$ заинтересованных участников, которые должны выбрать элемент из заданного множества альтернатив Y . При этом для каждого участника $i \in K$ на множестве Y задано предпочтение $\succ_i$ определяющее частичный

порядок на Y . Эти предпочтения представлены функцией полезности $w^i(y)$ на Y , $i \in K$.

Для выбора элемента требуется сформулировать некоторое правило S согласования предпочтений $\{\underset{s}{>}, i \in K\}$, которое определяло бы коллективное предпочтение $\underset{s}{>}$ представляющее согласованное мнение коллектива о предпочтительности элементов из Y .

Если правило S выделяет некоторого участника $i_0 \in K$, такого, что $\underset{i_0}{>} \Rightarrow \underset{s}{>}$, то такое правило S называют правилом диктатора.

Возникает естественный вопрос: каким условиям должно удовлетворять правило S , чтобы оно порождало согласованное коллективное предпочтение? Эти условия называют аксиомами согласования.

Известны следующие две аксиомы согласования [1]: единогласия и независимости.

Аксиома единогласия. Если каждый участник предпочитает y' вместо y , то и коллектив предпочитает то же, т. е.

$$y' \underset{i}{>} y \forall i \in K \Rightarrow y' \underset{s}{>} y.$$

Аксиома независимости. При выборе из двух альтернатив не должны учитываться третьи альтернативы.

Аксиома единогласия очевидным образом неоспорима. Целесообразность же следования аксиоме независимости не столь очевидна. Однако, если от нее отказаться, то это может привести к нетранзитивному коллективному предпочтению, а тем самым и к невозможности выбора (см. [2, с. 34]).

Нетрудно видеть, что при использовании правила диктатора аксиомы единогласия и независимости соблюдаются. Более того, имеет место следующий результат.

Теорема Эрроу [1]. Правило диктатора является единственным правилом коллективного выбора, удовлетворяющим аксиомам единогласия и независимости одновременно.

Из этой теоремы следует, что в условиях указанных аксиом согласования, решение проблемы коллективного выбора в принципе существует и притом единственное, но оно отвечает правилу диктатора. Однако, эта теорема не дает рецепта для построения требуемого правила.

Поэтому задачу коллективного выбора на самом деле можно понимать как задачу построения правила диктатора и одновременного выбора такого диктатора, с которым могли бы согласиться все участники. Отсюда, в частности, следует, что для выбора требуемого диктатора последний должен предложить компромиссный вариант коллективного решения, устраивающий всех участников.

Приведенные соображения требуют следующих формальных построений. Очевидно, прежде всего необходимо выделить мно-

жество тех решений, которые могут служить в качестве допустимых компромиссных коллективных решений. Ясно, что таким множеством является множество Парето.

Напомним, что по исходным предположениям предпочтения каждого участника $i \in K$ представлены их функциями полезностей w^i на Y . В таком случае каждому элементу $y \in Y$ можно поставить в соответствие вектор полезностей $w(y) = \{w^1(y), \dots, w^k(y)\} \in R^k$.

Определим неравенства в R^k , полагая

$$u \geq v \quad (u^i \geq v^i, i = 1, \dots, k);$$

$$u > v \leftrightarrow u \geq v \wedge u \neq v.$$

Введем теперь одно из возможных коллективных предпочтений $\overset{p}{\succ}$ на Y , полагая $y' \overset{p}{\succ} y \leftrightarrow w(y') > w(y)$.

Это предпочтение, как известно, называется предпочтением Парето. Оно очевидным образом удовлетворяет аксиоме единогласия.

Обозначим $\overset{p}{\succ}$ дополнение к предпочтению Парето, которое при этом следует читать так: «не верно, что выполняется $\overset{p}{\succ}$ ».

Тогда множество элементов вида $M^p = \{y_* \in Y: y \overset{p}{\succ} y_* \quad \forall y \in Y\}$ называется множеством Парето.

По определению элементы множества Парето являются неуплучшаемыми одновременно для всех участников. Поэтому они называются Парето-оптимальными. Ясно, что они и только они могут служить в качестве допустимых коллективных решений. С другой стороны, ясно так же, что поскольку Парето-оптимальные элементы являются неуплучшаемыми одновременно для всех участников, то выбор на множестве Парето порождает конфликт. Отсюда следует, что проблема коллективного выбора сводится к разрешению конфликта при выборе на множестве Парето, т. е. к отысканию среди Парето-оптимальных элементов компромиссного варианта решения.

Заметим, что согласие на компромисс со стороны каждого участника означает согласие на выбор варианта решения с определенным ущербом для своих интересов. Это означает, что каждый участник согласен учитывать интересы других. С другой стороны, соглашаясь на выбор решения с ущербом для своих интересов, каждый участник вправе рассчитывать, что все остальные участники будут также учитывать его интересы и не будут требовать неприемлемых для него уступок.

Таким образом, соглашаясь на компромиссы, каждый участник вправе требовать других сдержанности в эгоистическом стремлении к максимальной выгоде для себя.

Понятно, что на этом пути ожидать большой сдержанности не приходится. Но вполне допустимо ожидать, что каждый уча-

стник может согласиться выбирать такие решения, которые не наносят ущерба участнику с минимальной полезностью, которого естественно назвать «обиженным». Эти соображения приводят к следующей аксиоме.

Аксиома согласия: Каждый участник стремится выбирать наиболее выгодные для него решения, но при этом он согласен не наносить ущерба участнику с минимальной полезностью решения (т. е. обиженному).

При выборе решений каждый участник может оказаться в положении обиженного. Поэтому аксиома согласия гарантирует каждому участнику отсутствие ущерба его интересам, если он окажется в положении обиженного. При этом решения, не наносящие ущерба обиженному, естественно считать «справедливыми». Ясно тогда, что аксиома согласия гарантирует от «несправедливых» решений.

Оказывается, что если систему аксиом согласования, состоящую из аксиом единогласия и независимости, дополнить аксиомой согласия, то проблема коллективного выбора допускает однозначное решение.

Пусть задано некоторое правило S коллективного выбора и соответствующее коллективное предпочтение $\succ^s = S\{\succ^i \mid i \in K\}$.

Множество M^s максимальных (недоминируемых) по предпочтению $\succ^s$ элементов, т. е. вида

$$M^s = \{y_* \in Y : y \succ^s y_* \forall y \in Y\}$$

назовем ядром предпочтения $\prec^s$.

Определение 1. Если предпочтение $\succ^s$ таково, что $M^s \subseteq M^p$, то такое предпочтение $\succ^s$ будем называть коллективно-рациональным.

Лемма 1. Пусть выполняется вложение

$$y' \succ^p y \Rightarrow y' \succ^s y. \quad (1)$$

Тогда предпочтение $\succ^s$ является коллективно-рациональным.

Доказательство. Пусть выполнено (1) и выбран некоторый элемент $y_* \in M^s$. Надо показать, что $y_* \in M^p$.

Предположим противное, т. е. найдется элемент $y' \in Y : y' \succ^p y_*$.

Тогда в силу (1) будет выполнено $y' \succ^s y_*$. Но это противоречит тому, что элемент $y_* \in M^s$. Это доказывает включение $M^s \subseteq M^p$, а тем самым и требуемое утверждение.

Введем теперь коллективное предпочтение, реализующее аксиому согласия. С этой целью прежде всего введем предположение, что функции полезностей участников сопоставимы, т. е.

они имеют одинаковую шкалу измерений и допускают сравнение с помощью неравенств.

Пусть задан некоторый элемент $y \in Y$ и соответствующий вектор полезностей $w(y) = \{w^i(y), i \in K\} \in R^k$. Упорядочим компоненты этого вектора по возрастанию, полагая, что первой компонентой является наименьшая. Такое преобразование упорядочения обозначим символом P_0 .

Пусть имеются некоторые два элемента $y, y' \in Y$ и соответствующие векторы полезностей $w(y), w(y')$. Введем коллективное предпочтение $\overset{c}{>}$ на Y , полагая

$$y' \overset{c}{>} y \leftrightarrow P_0 w(y') L P_0 w(y), \quad (2)$$

где L отношение лексикографии.

Назовем это предпочтение $\overset{c}{>}$ предпочтением согласия. Безразличие $\sim$ определим в виде

$$y' \sim y \leftrightarrow P_0 w(y') = P_0 w(y).$$

Лемма 2. *Предпочтение согласия удовлетворяет аксиоме согласия и определяет правило коллективного выбора, которое является диктаторским.*

Доказательство. Из определения предпочтения согласия следует, что оно представляет право выбора от имени коллектива участнику с минимальной полезностью. Тем самым правило коллективного выбора, определяемое этим предпочтением, является диктаторским. Так как при этом не ущемляются интересы участника с минимальной полезностью, оно удовлетворяет аксиоме согласия.

Ядро предпочтения согласия $M^c = \{y_* : y \overset{s}{>} y_* \forall y \in Y\}$ будем называть ядром согласия.

Лемма 3. *Предпочтение согласия $\overset{c}{>}$ является коллективно-рациональным.*

Доказательство. Покажем, что выполняется вложение

$$y' \overset{p}{>} y \Rightarrow y' \overset{c}{>} y. \quad (3)$$

Действительно, если выполнено предпочтение Парето, то преобразование P_0 не изменяет этого отношения, т. е.

$$w(y') \overset{p}{>} w(y) \Rightarrow P_0 w(y') \overset{p}{>} P_0 w(y).$$

Отсюда следует, что выполняется также и отношение лексикографии L , т. е. $P_0 w(y') L P_0 w(y)$.

Это означает, что выполняется предпочтение согласия $y' \overset{c}{>} y$. Это доказывает вложение (3). В свою очередь из (3) и леммы 1 следует, что предпочтение согласия является коллективно-рациональным.

Теорема 1. Предпочтение согласия $\succ^c$ порождает единственное правило коллективного выбора, которое удовлетворяет одновременно всем трем аксиомам согласования: единогласия, независимости и согласия.

Доказательство. Согласно лемме 2 предпочтение согласия удовлетворяет аксиоме согласия и порождает правило коллективного выбора, которое является диктаторским. Далее, выполнение импликации (3) означает, что предпочтение согласия удовлетворяет аксиоме единогласия. Поскольку при этом предпочтение согласия определяет правило диктатора, то в силу теоремы Эрроу оно обязано удовлетворять аксиоме независимости. Это устанавливает, что предпочтение согласия удовлетворяет всем трем аксиомам согласования одновременно.

Остается показать, что предпочтение согласия является единственным таким предпочтением. Действительно, предположим, что найдется некоторое другое предпочтение, при котором соблюдаются все аксиомы одновременно. Тогда оно будет определять правило диктатора, которое в силу аксиомы согласия обязано не наносить ущерба участнику с минимальной полезностью. Это означает, что если имеется некоторый элемент $y \in Y$ и требуется выбрать более предпочтительный элемент y' , то с целью не нанести ущерба участнику с минимальной полезностью, т. е. то

кому i_0 , что $w^{i_0}(y) = \min_{i \in K} w^i(y)$,

при выборе элемента y' должно выполняться неравенство

$$\min_{i \in K} w^i(y') > \min_{i \in K} w^i(y) = w^{i_0}(y).$$

Это требует определения предпочтения условием

$$y' \succ y \leftrightarrow \min_{i \in K} w^i(y') > \min_{i \in K} w^i(y). \quad (4)$$

Если окажется, что минимальные компоненты рассматриваемых векторов равны, то это порождает неопределенность в выборе. Эту неопределенность можно избежать, если исключить минимальные компоненты с равными значениями из соответствующих векторов и выбор осуществлять снова же по условию (4), но для полученных усеченных векторов. Так естественно поступать пока не будут исчерпаны все компоненты. Очевидно, что в этих условиях либо однозначно определится предпочтение и соответствующий выбор, если найдется хотя бы одна пара усеченных векторов, минимальные компоненты которых не равны, либо для всех пар усеченных векторов их минимальные компоненты равны. Понятно, что в последнем случае однозначный выбор не возможен и сравниваемые решения естественно объявить безразличными (эквивалентными).

Если же безразличие не выполняется, то предпочтение однозначно определится тем условием, что впервые выполнится неравенство в правой части (4). Но это означает, что для выбора

из двух элементов требуется упорядочить компоненты соответствующих векторов полезностей по возрастанию, т. е. применить к ним преобразование упорядочение Po и затем воспользоваться предпочтением лексикографии L . Тем самым получаем предпочтение вида $y' \succ y \leftrightarrow Po \omega(y') L Po \omega(y)$, которое по определению и является предпочтением согласия.

Это доказывает требуемое.

Теорема 2. Если ядро согласия M^c состоит из единственного элемента, то этот элемент является однозначным разрешением конфликта при выборе на множестве Парето. Если же ядро M^c содержит более одного элемента, то оно является сужением области конфликта до решений эквивалентных относительно суммарного эффекта, т. е. таких, что выполняется равенство

$$\sum_{i \in K} w^i(y') = \sum_{i \in K} w^i(y) \quad \forall y', y \in M^c.$$

Доказательство. Если ядро согласия состоит из единственного элемента, то этот элемент, будучи недоминируемым по предпочтению согласия и одновременно Парето-оптимальным, определяет однозначный выбор на множестве Парето. В условиях аксиомы согласия этот выбор является справедливым. Поэтому у каждого участника не возникает возражений против него. Это определяет однозначное разрешение конфликта.

Если же ядро согласия M^c содержит более одного элемента, то однозначное разрешение конфликта невозможно. Но при этом все элементы из ядра M^c по его определению находятся в отношении безразличия $y' \sim y \leftrightarrow Po \omega(y') = Po \omega(y)$.

Отсюда следует равенство

$$\sum_{i \in K} w^i(y') = \sum_{i \in K} w^i(y) \quad \forall y', y \in M^c.$$

Это означает, что элементы из ядра M^c эквивалентны относительно суммарного эффекта.

Из полученных результатов следует, что проблема коллективного выбора равносильна проблеме разрешения конфликта при выборе из множества Парето и сводится к построению эффективных компромиссных решений. Это требует пополнения аксиом согласования аксиомой согласия. Такое пополнение приводит к единственному коллективно-рациональному предпочтению согласия, удовлетворяющему всем аксиомам согласования одновременно. Использование этого предпочтения обеспечивает разрешимость конфликта и возможности построения справедливых компромиссных решений.

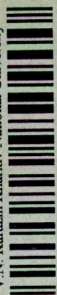
Полученные результаты очевидным образом распространяются на проблему многокритериального выбора и принятия решений.

Список литературы: 1. Arrow K. Social choice and individual value. N. Y. 1963. 309 с. 2. Экланд Н. Элементы математической экономики. М., 1983. 243 с.

Поступила в редколлегию 25.03.88

" ОСНОВА "

V.N. Karazin Kharkiv National University



00290249

0

ISSN 0453-8048. Вестн. Харьк. ун-та. 1992. № 361. Прикл. математика
и механика. 1—88.