

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Харківський національний університет

імені В. Н. Каразіна

Факультет радіофізики, біомедичної  
електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра квантової радіофізики

**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Завідувач кафедри



**Вячеслав МАСЛОВ**

підпис ініціали, прізвище

“ 6 ” грудня 2024 року

## **Кваліфікаційна робота магістра**

на тему: Фокусування векторних циліндричних пучків з  
довільним топологічним зарядом

Виконав: студент II курсу магістратури, групи РР-62 спеціальності 105  
Прикладна фізика та наноматеріали, освітньо-професійна програма  
«Радіофізика та електроніка»

Сергій ЛУЦЕНКО

Керівник  
доктор фіз.мат.наук,  
Професор

Вячеслав МАСЛОВ

2024 рік

### **Анотація**

Дана робота магістра містить 45 сторінок, 5 малюнків та 18 бібліографічних посилань.

Досліджено дифракцію несиметричного Лагерра-гаусового пучка нижчого порядку з гібридним станом поляризації на основі векторної теорії Релея-Зоммерфельда при непараксіальному наближенні. Вивчено особливості характеристик сфокусованого поля векторних циліндричних пучків з довільним цілим топологічним зарядом.

Ключові слова: векторний пучок, дифракція, поляризація, фокусування, топологічний заряд.

## **Abstract**

This master's thesis contains 45 pages, 5 figures, and 18 bibliographic references.

The diffraction of an asymmetric lower-order Laguerre-Gaussian beam with a hybrid polarization state based on the vector Rayleigh-Sommerfeld theory has been investigated in the nonparaxial approximation. The peculiarities of the characteristics of the focused field of vector cylindrical beams with an arbitrary integer topological charge are studied.

**Keywords:** vector beam, diffraction, polarization, focusing, topological charge.

## Зміст

<b>1. Вступ .....</b>	<b>5</b>
<b>2. Аналітичний огляд .....</b>	<b>7</b>
<b>3. Методика розрахунку поширення пучків із гібридною поляризацією у вільному просторі .....</b>	<b>19</b>
<b>3.1. Дифракційна формула Релея – Зоммерфельда .....</b>	<b>19</b>
<b>3.2. Методика розрахунку полів лазерних пучків із неоднорідною просторовою поляризацією .....</b>	<b>24</b>
<b>4. Результати розрахунків .....</b>	<b>32</b>
<b>5. Висновок .....</b>	<b>42</b>
<b>Список літератури .....</b>	<b>43</b>

## 1. Вступ

Протягом останнього десятиліття характеристики векторного пучка та їх зміни набули великої уваги у зв'язку з академічним інтересом та технологічними застосуваннями. У зв'язку з появою нових оптичних структур, таких як мікрорезонатори і фотонні кристали, ширина пучка випромінювання можна порівняти або може бути навіть меншою за довжину хвилі. Крім того, діафрагми з високою числовою апертурою були використані в близькопольному оптичному мікроскопі, оптичному захопленні та маніпулюванні наночастинками, тощо. Відповідно до вищезгаданих умов звичайної параксіальної теорії недостатньо для опису поширення пучка у вільному просторі.

Різні методи були розроблені для опису векторного непараксіального поширення пучка, у тому числі: інтеграли Релея-Зоммерфельда, метод векторного кутового спектру, багатомасштабний метод сингулярних збурень та теорія Річарда-Вульфа. Застосовуючи ці підходи, зусилля дослідників були спрямовані на вивчення непараксіального поширення різних лазерних пучків, таких як циліндричні поляризовані Лагер-гаусові пучки, спіральні поляризовані пучки, кільцеподібні пучки, порожнисті гаусові пучки, векторні вихрові пучки, частково когерентні кільцеподібні пучки та пучки, дифраговані на круглому та прямокутному отворах.

Метою даної дипломної роботи є розгляд непараксіального та параксіального поширення векторного пучка з гібридною поляризацією та з довільним цілим топологічним  $m$  зарядом. Необхідно отримати аналітичні

вирази для радіальних, азимутальних та поздовжніх компонентів Лагер-гаусових пучків нижчого порядку з довільним цілим топологічним  $m$  зарядом, що фокусуються на тонкій лінзі. Використовуючи чисельне моделювання необхідно досліджувати поперечні розподіли інтенсивності окремих компонентів та сумарної інтенсивності електричного поля у фокусі лінзи.

## 2. Аналітичний огляд

Формування порожнистого пучка радіально та азимутально - поляризованих вихрових пучків, у якого є довільний топологічний заряд, аналітично розглядається за суворої умови фокусування. Вирази для електричних полів векторних вихрових пучків, що фокусуються, отримані на основі векторної дифракційної теорії. Порядок функції Бесселя першого порядку, що у висловлюваннях, свідчить про можливість сформувати порожнисті пучки. Подібне обговорення застосовано для різних вихрових пучків, які виражаються лінійною комбінацією радіально та азимутально поляризованих пучків. Обчислення поперечних профілів інтенсивності поля для цих пучків області фокусування також представлені.

Найбільш фундаментальний поперечний профіль для лазерних променів — це гауссівський профіль, де поперечний профіль має амплітуду, описану гауссівською функцією з характерною шириною, і амплітудний профіль при поширенні залишається гауссівським, змінюючи ширину та набуваючи просторової фази. У вільному просторі, а також для лазерних резонаторів і порожнин гауссівський промінь є природним основним модом. Багато реальних систем створюють промені з профілем, дуже близьким до гауссівського, що є задовільним наближенням і може бути використане для моделювання поширення та взаємодії з речовиною. Однак для лазерів високої потужності обмежена апертура кристалів підсилювачів і потреба в ефективності при роботі з насосними лазерами та подальшому посиленні насінневого лазера призводять

до того, що поперечний профіль зазвичай суттєво відрізняється від гауссівського і має більш плоско-топовий характер. Це спричиняє відмінності в поширенні та фокусуванні, що може мати значний вплив на деякі чутливі застосування.

Фокусування радіально поляризованого синусоїдального гауссового променя за допомогою фазової пластини з радіальною косинусною фазою через об'єктив з високою числовою апертурою.

Параксіальне поширення сфокусованих радіально-поляризованих Лагер-гаусових пучків аналізується за допомогою передавальної функції поширення, простих законів Фур'є - перетворення та параметра  $q$ , пов'язані зі скалярним гаусовим пучком. Профілі пучків для поздовжніх і поперечних компонентів електричних полів вектора поляризації, вектор Пойтинга, фокальний зсув і фаза Гуї обчислюються. Показано, що поздовжня компонента не вносить жодного реального вкладу в поле у фокальній площині. Показано також, що можливо мати поперечні або поздовжні компоненти моди під час розповсюдження таких пучків квадратичному середовищі. Хвильноводний ефект поздовжньої компоненти вектора поляризації може надати зручні засоби для підтримки великих значень поляризованих інтенсивностей світла при поширенні, що має бути сприятливим для речовин з великою зміною показника заломлення, наприклад фоторефрактивні електро-оптичні матеріали [2].

Показчик для поляризованого поля з високим значенням поздовжньої його компоненти з однорідною інтенсивністю вздовж оптичної осі, довгою областю фокусування і розмір продифрагованого пучка може бути зроблений

фокусуванням радіально поляризованого світла за допомогою лінзи з високою числовою апертурою та дифракційним оптичним елементом (ДОЕ) з ДО. Метод, що поєднує глобальний пошуковий алгоритм оптимізації та властивості радіально поляризованого світла при гострому фокусуванні запропонований для проектування ДОЕ. Засноване на гострому фокусуванні світло, що падає на лінзу, поділяється на дві частини: області А і В. Було відкрито, що поздовжнє поле у фокальній області головним чином залежить від числа зон в області В, а не від загальної кількості зон ДОЕ [3].

Досліджено ефекти сильного фокусування радіально поляризованого пучка з однорідною, гаусової або Бессель-гаусової функцією. Полуширина пучка, що виходить, є мінімальною для випадку профілю з однорідною амплітудою, в той час як Бессель-гаусов пучок призводить до максимальної півширини. Однорідна амплітуда профілю також призводить до осьової компоненти, яка збільшується з максимальним розміром пучка. Відношення осьової компоненти до поперечної також зростає для однорідної функції. З іншого боку, Бессельгаусів пучок має переваги при його поширенні через наявність кільцевої форми [4].

Отримана проста формула, щоб обчислити магнітне поле сильнофокусованого радіально поляризованого пучка світла, і представлені коректні результати для обчислення потужності та стійкості осьової захоплення. Помилка в попередніх результатах найбільш ймовірно спричинена неправильним знаходженням радіальної компоненти електричного поля, яке також розглядають як розподіл магнітного поля. Тому, попередні обчислення

на основі неправильної формули магнітного поля для сил, що розсіюються, повинні бути знову досліджені [5].

Конструкція на формування поляризації запропонована як новий метод формування пучка. Показано, що однорідне фокусування може бути отримане в дальній зоні, змінюючи поляризацію в площині діафрагми просторово неоднорідним способом. Експерименти були виконані щоб перевірити законність цього методу в одній розмірності. У порівнянні з традиційними методами формування пучка, метод формування поляризації пучка призводить до найменшого однорідного фокусу за підтримки високої ефективності [6].

Повідомляється про технологію формування поля у фокусі лінзи з використанням узагальнених векторних циліндричних пучків. Узагальнений циліндричний векторний пучок може бути розкладений на радіально поляризовані та азимутально поляризовані компоненти. Такий узагальнений циліндричний пучок може бути сформований з радіально поляризованого або азимутально поляризованого світла, використовуючи дві напівхвильові пластини ротатора поляризаційного. Розподіл інтенсивності поля у фокусі можуть змінюватися шляхом відповідного регулювання кута повороту ротатора. Пік у центрі, пончик та плоска вершина у фокусі можуть бути отримані з використанням цієї методики [7].

Досліджено особливості поляризації азимутально поляризованих пучків, модульованих спіральною фазою та секторними перешкодами. Результати показують, що спіральна фаза або секторна перешкода можуть перетворити центральний V-момент в C-моменти, диполі C-моменту, або навіть подвоювати

V-моменти за певних умов. Перетворенням можна вибірково управляти відповідно встановлюючи топологічний заряд для спіральної фази і кут секторної перешкоди. Ці результати можуть бути цікаві для дослідників у галузі поляризації, маніпуляції фокального поля та кутового моменту сфокусованих циліндрично поляризованих пучків [8].

Сильно сфокусовані плями векторів циліндричних (CVs) залежать від складу поляризації. Експериментально продемонстровано ефект чистоти поляризації CVs пучка на сильно зосередженій плямі кількісно, якою можна керувати для ефективних застосувань CVs пучка. Фокальні плями, виміряні методом леза ножа, показали, що азимутально поляризована компонента (AP) збільшує поперечну область і розмір фокальних плям, у той час як радіально поляризована компонента призводить до розподілу інтенсивності відмінного від нуля в центрі фокусу навіть при високій чистоті поляризації AP пучка [9].

Циліндричні векторні пучки отримали інтерес у зв'язку з їх роллю в нових лазерних резонаторах та їх застосуванням в електронному прискоренні та скануючій мікроскопії. У цій статті обчислені циліндричні векторні поля поблизу фокальної області лінзи, і коротко обговорюються деякі застосування. Показано, що в особливому випадку сильно сфокусованого радіально поляризованого пучка поляризація показує великі неоднорідності у фокальній ділянці, азимутально поляризований пучок є чисто поперечним навіть при дуже високих числових апертурах [10].

Вивчається гостре фокусування різних поляризованих пучків нижчого та вищого порядків, у тому числі Бесселя та Лагер-гауса (LG) моди, порівнюючи їх за допомогою кількох критеріїв: розмір світлової плями, відношення інтенсивності центрального піку та бічних пелюсток та інтенсивність поздовжньої компоненти електричного поля. Експерименти, виконані з використанням близькопольного мікроскопа, загалом узгоджуються з результатами чисельного моделювання [11].

На основі векторного інтеграла Релея були отримані аналітичні вирази для електромагнітних полів радіально поляризованих пучків, дифрагованих на круглій апертурі, які допомагають досліджувати властивості поширення обмежених радіально поляризованих пучків у непараксіальному та параксіальному випадку. Необмежений і параксіальний випадки можна розглядати як окремі випадки загального результату, отриманого в даній роботі. Проведений аналіз показує, що непараксіальність обмежених радіально поляризованих пучків залежить від відношення ширини пучка до довжини хвилі та параметра усічення. Крім того, параметр усічення та порядок пучка мають великий вплив на ефект дифракції пучка та його особливості поширення.[12].

Добре відомо, що світловим пучкам з аксіально-симетричною та радіальною поляризацією приділяється багато уваги останнім часом. Радіально поляризовані пучки застосовують у багатьох аспектах. Наприклад, вони були адаптовані для визначення орієнтації однієї люмінесцентної молекули, оптимізації ефективності колекції фотона на основі однофотонних джерел,

прискорювальної техніки, спрямованих або захоплюваних частинок, скануючої оптичної мікроскопії, і зокрема лазерного різання, де оброблювана поверхня металу має сильне поглинання радіально.

У цій роботі, починаючи з векторної формули Релея – Зоммерфельда, властивості поширення у вільному просторі радіально – поляризованих пучків були вивчені у параксіальному та непараксіальному випадках. Параксіальний випадок можна розглядати як окремий випадок непараксіального випадку. Аналітичні та чисельні результати показують, що параметр  $f$  виконує важливу функцію щодо непараксіального поширення радіально поляризованих світлових пучків, але параметри  $f$  і  $p$  впливали на еволюцію поведінки пучка. Було показано, що поперечна компонента дифрагованого поля перетворюється на нуль на осі. Порівняння між поширеними полями і відповідними параксіальними припущеннями були дані і графіки відносної помилки, були представлені для різних наборів істотних параметрів. Навіть при великих кутах параксіальної дифракції, після 3 – 6 довжин Релея, параксіальне приближення може бути використане для визначення на осі амплітуди пучка [13].

У [14] на прикладі дифракції плоскої хвилі на круглій апертурі в ближній зоні (порядку декількох довжин хвиль) проведено порівняння алгоритмів розрахунку з використанням векторного інтегрального перетворення Релея-Зоммерфельда (РЗ) і розкладання плоских хвиль (ПВ) за точності та швидкості обчислень. У скалярному випадку, що відповідає обчисленню поперечних компонентів електричного поля, результати відрізняються тільки в дуже близькій до апертури області. У векторному випадку при розрахунку

поздовжньої компоненти у методі ПВ виникає особливість у сфері спектральних частот, радіус яких близький до одиниці. Запропоновано різні варіанти обходу цієї особливості. На відстані декількох довжин хвиль результати двох алгоритмів, що розглядаються, збігаються і відрізняються від отриманих за допомогою звичайно - різницевого тимчасового методу (FDTD) тільки масштабно (середньоквадратичне відхилення з урахуванням масштабу становить менше 2%). Таким чином, розглянуті в цій роботі алгоритми дозволяють отримувати за істотно менший час структурно вірну (але дещо завищену за амплітудою) картину дифракції у ближній зоні. Така амплітудна «завищеність» може бути пов'язана з тим, що розглянуті методи РЗ та ПВ не мають на увазі наявності у-компоненти в дифракційній картині спочатку х-поляризованого поля. У другій частині статті розглядається модифікація методу ПВ, що дозволяє врахувати наявність усіх векторних компонентів.

Досліджено щільне фокусування подвійного кільцеподібного радіально поляризованого синх-гауссового пучка з косинусною фазовою пластиною на основі векторної теорії дифракції. За умов високочислового апертурного фокусування сильний поздовжній компонент формує більш чітку точку у фокусі як для пучків фундаментального режиму (R-TEM<sub>01</sub>), так і для пучків вищих порядків з радіальною поляризацією. Завдяки деструктивній інтерференції між внутрішніми та зовнішніми кільцями, пучки радіально поляризованого режиму (R-TEM<sub>11</sub>), зокрема, можуть значно зменшувати розмір фокусної плями. Результати моделювання показують, що фокусовані поля та фазові розподіли у фокусі значною мірою залежать як від косинусного

параметра, так і від коефіцієнта усічення вхідних пучків. Крім того, зміщену фокусну пляму та оптичні кліткові патерни можна гнучко отримати шляхом ретельного вибору косинусного параметра ( $C$ ). Також було помічено, що розподіл інтенсивності різних режимів має незначні зміни залежно від ступеня усічення ( $\beta$ ) вхідного пучка біля зіниці. Ця робота є важливою для оптичних маніпуляцій, систем обмеження частинок, лазерної модифікації поверхонь та методів прямого лазерного запису. [14]

Параболоїдне дзеркало може фокусувати світло майже в межах тілесного кута  $4\pi$ . Завдяки цій особливій характеристиці дослідники протягом останніх десятиліть проявляли значний інтерес до параболічних дзеркал. Векторний характер світлового поля стає важливим для точного опису непрямого пучка, коли пучок щільно фокусується за допомогою параболічного дзеркала. Спільнота, що працює з лазерами високої інтенсивності, робить великі зусилля для досягнення найвищих інтенсивностей лазера і виявляє великий інтерес до дослідження характеристик фокусування векторного поля. Завдяки щільному фокусуванню пучка у вакуумі з використанням позаосьового параболічного (OAP) дзеркала можна досягти надзвичайно високої інтенсивності, що робить це цікавим для лазерного прискорення частинок. Для такого високоінтенсивного, щільно сфокусованого електромагнітного поля необхідний детальний опис фокусованого поля, щоб точно визначити рух заряджених частинок. Використання параболічного дзеркала з високою числовою апертурою і радіально поляризованим пучком є ідеальним для досягнення

малого розміру фокусної плями та сильного поздовжнього електричного поля, що відкриває можливості для застосування в прискоренні частинок . [15]

Поляризація світлового пучка відіграє вирішальну роль у багатьох оптичних системах і може викликати бажані зміни в характеристиках поширення та формуванні фокусу векторних пучків. Протягом останніх кількох десятиліть значна увага приділяється циліндрично поляризованим векторним пучкам через їх потенційні застосування в оптичному захопленні та мікроманіпуляціях, мікроскопії, обробці матеріалів і метрології тощо. Вектор електричного поля в циліндрично поляризованих векторних пучках утворює певний кут  $\varphi_0$  з радіальним напрямком, так що в двох граничних випадках пучок поляризується радіально, коли  $\varphi_0 = 0^\circ$ , і азимутально, коли  $\varphi_0 = 90^\circ$ .

Гостре фокусування циліндрично поляризованих пучків за допомогою об'єктивів з високою числовою апертурою було широко досліджено теоретично та експериментально протягом останніх кількох десятиліть .Рао та ін. проаналізували формування фокусу циліндрично поляризованих вихрових пучків за допомогою об'єктива з високою числовою апертурою. Хоніна та ін. продемонстрували можливість простих фазових оптичних елементів створювати вузькі фокусні плями в умовах високої числової апертури. Чен та ін. досліджували фокусування з плоскою верхівкою під радіальною поляризацією. Ні та ін. вивчали пучок з плоскою верхівкою, що генерується дифракційними оптичними елементами. Чандрасекарем та ін. проаналізували властивості

поширення циліндрично поляризованого кілецьового багатогауссівського пучка.

Терезе Аніта та ін. дослідили ефект коми в поляризованих вихрових пучках.

Властивості фокусування під об'єктивом з високою числовою апертурою пов'язаних циліндричних пучків Бесселя, таких як радіально поляризовані зміщені Бессель-модульовані гауссові пучки, пучки подібні до Бесселя з косинусною фазовою хвильовою фронтом, та циліндрично поляризований Бессель-гауссовий пучок, модульовані ґрати Бесселя, були досліджені нашою дослідницькою групою. Нещодавно У та ін. вивчали зміщення фокусу радіально варіюючих поляризованих гауссових пучків Бесселя з радіальною фазовою модуляцією. Формування фокусу радіально поляризованих вихрових пучків Лагерра-Гаусса, корельованих з моделлю Шелла, обговорювалося Сю та ін. Крім того, Ель Халба та ін. досліджували формування фокусу лінійно поляризованих Бессель-гауссових пучків, модульованих ґрати Бесселя, за допомогою радіального зміщення та об'єктива з високою числовою апертурою. [16].

Найбільш фундаментальний поперечний профіль для лазерних пучків — це гауссовий профіль, де поперечний профіль має амплітуду, описану гауссовою функцією з характерною шириною, а амплітудний профіль під час поширення залишається гауссовим, змінюючи ширину та набуваючи просторової фази. У вільному просторі, а також для лазерних резонаторів і кавіт, гауссовий пучок, отже, є природним пучком найнижчого порядку. Багато реальних систем виробляють пучки, які мають профіль, дуже близький до

гауссова, так що це є задовільною апроксимацією і може бути використано для моделювання поширення та взаємодії з речовиною. Однак для лазерів великої потужності обмежена апертура кристалів підсилювача та необхідність ефективності в роботі насичувального лазера і подальшому підсиленні насіння лазера призводять до того, що поперечний профіль зазвичай є чимось значно відмінним від гауссова, який має більш плоский характер верхівки. Це призводить до відмінностей у поширенні та фокусуванні, що може мати великий вплив на певні чутливі застосування. [17].

На основі векторного представлення кутового спектра та методу стаціонарної фази в далекій області отримані аналітичні вирази для електромагнітних полів циліндричних векторних пучків Лагерра–Гаусса з довільним порядком поляризації. Радіально поляризовані, анти-вихрові та лінійно поляризовані пучки можуть розглядатися як особливі випадки нашого загального результату. Аналізи показують, що властивості еволюції пучка та непрямолінійність тісно пов'язані з радіальним порядком моди, номером порядку поляризації та співвідношенням ширини пояса до довжини хвилі. Циліндричні векторні пучки з високим порядком поляризації, порівняно з радіально поляризованими пучками, більшою мірою підлягають впливу непрямолінійності. Це дослідження надає зручний підхід для маніпулювання циліндричними векторними пучками Лагерра–Гаусса шляхом вибору особливого стану поляризації [18].

### 3. Методика розрахунку поширення пучків із гібридною поляризацією у вільному просторі

#### 3.1. Дифракційна формула Релея – Зоммерфельда

Розглянемо монохроматичні скалярні хвильові пучки, поле яких задовольняє хвильовому рівнянню другого порядку. Поле таких пучків визначається однією функцією координат та часу, яку можна записати у вигляді  $u(R) \times \exp(-i\omega t)$ , де функція  $u(R)$  задовольняє рівняння Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k = \frac{\omega}{v}, \quad (3.1)$$

де  $\omega$  - частота монохроматичного хвильового поля,  $v$  - фазова швидкість плоскої хвилі.

Оскільки рівняння (3.1) – рівняння у частинних похідних, для однозначного визначення поля пучка потрібна додаткова інформація. Припустимо, що відомо поле пучка в площині  $z = 0$  декартової системи координат  $x, y, z$ , тобто. будемо вважати, що поле  $u(x, y, z)$  задовольняє умову

$$\lim_{z \rightarrow 0} u(x, y, z) = f(x, y), \quad (3.2)$$

де  $f(x, y)$  – задана функція.

Нехай далі функція  $\vartheta(x, y, z)$  має сингулярність у точці  $P(x', y', z')$  всередині обсягу  $V$  таку, що при наближенні до цієї точки вона прагне нескінченності згідно із законом

$$\vartheta(x, y, z) \xrightarrow{P} \frac{1}{R} \exp(ikR). \quad (3.3)$$

де  $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{1/2}$  – відстань між довільною точкою та точкою  $P(x, y, z)$  і точкою  $P'$ .

$$\oint_{S+S_\varepsilon} \left( u \frac{d\vartheta}{dn} - \vartheta \frac{du}{dn} \right) dS = 0. \quad (3.4)$$

Співвідношення (3.4) виконується для будь-якого  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Переходячи до межі  $\varepsilon \rightarrow 0$  та враховуючи (3.3), з (1.4) отримаємо:

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( u \frac{d\vartheta}{dn} - \vartheta \frac{du}{dn} \right) dS. \quad (3.5)$$

Формула (3.5) визначає хвильове поле  $u$  у будь-якій точці замкнутого об'єму  $V$  через значення поля та його нормальної похідної у точках поверхні, що обмежує цей об'єм. Конкретний вид цієї формули залежить від вибору функції  $\vartheta$ , оскільки умови (3.1) та (3.3) не визначають її однозначно.

Припустимо, що функції  $u$  та  $\vartheta$  поведуться при  $R \rightarrow \infty$  таким чином, що:

$$\lim_{R_0 \rightarrow \infty} \iint_{S_0} \left( u \frac{d\vartheta}{dn} - \vartheta \frac{du}{dn} \right) dS_0 = 0. \quad (3.6)$$

Отже, під час виконання умови (3.6) (відомого як умова випромінювання Зоммерфельда) отримаємо:

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \left( u \frac{d\vartheta}{dn} - \vartheta \frac{du}{dn} \right) dx dy, \quad (3.7)$$

де інтеграл береться по площині  $z = 0$ . Якщо (3.7) покласти  $\vartheta = \exp \frac{(ikr)}{R}$ ,  $R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2}$ , ми отримаємо добре відому формулу Гюйгенса – Кірхгофа.

Формула (3.7) і формула Гюйгенса – Кірхгофа, що випливає з неї, мають одну істотну незручність, а саме: у виразі (3.7) значення хвильового поля в будь-якій точці напівпростору  $z > 0$  визначається значенням поля та його нормальною похідною в площині  $z = 0$ . У той же час відомо, що для хвильових полів значення поля та нормальної похідної на будь-якій поверхні не залежні один від одного, так що в принципі поле в напівпросторі  $z > 0$  не може бути визначене через значення або самого поля, або його нормальної похідної на площині  $z = 0$ . Один з можливих шляхів усунення зазначеного недоліку формули (3.5) вказав А.Зоммерфельд.

Однак у окремому випадку плоскої поверхні це легко зробити. А саме:

$$\vartheta_{\pm} = \frac{\exp(ikR)}{R} \pm \frac{\exp(ikR_1)}{R_1}, \quad (3.8)$$

Підставляючи (3.8) (3.5) і припускаючи виконання умови (3.4) отримаємо формули, що визначають хвильове поле в напівпросторі  $z > 0$  через значення або самого поля, або його нормальної похідної площини  $z = 0$ .

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikR)}{R} \frac{du}{dz'} \Big|_{z'=0} dx' dy', \quad (3.9)$$

або

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} u(x', y', 0) \frac{d}{dz'} \left[ \frac{\exp(ikR)}{R} \right]_{z'=0} dx' dy', \quad (3.10)$$

Формули (3.9) – (3.10), які в науковій літературі називають формулами Релея (або Релея – Зоммерфельда), зазвичай використовується для вирішення задач дифракції хвильових полів на плоских екранах, розташованих у площині  $z = 0$ . У цьому випадку функція  $u(x, y, 0)$  має сенс дифрагованого поля площини  $z = 0$  відразу за екраном.

Для моїх цілей отримані результати можна сформулювати таким чином: нехай є хвильове поле  $u(x, y, z)$ , що задовольняє рівняння Гельмгольца (3.1) та граничну умову (3.2). Тоді функція  $u(x, y, z)$  однозначно визначається формулою Релея – Зоммерфельда

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} f(x', y') \frac{d}{dz'} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dx' dy', \quad (3.11)$$

$$R = [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}$$

Використовуючи умови Люнебурга, приходимо до однозначного уявлення

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} g(x', y') \frac{\exp(ikR)}{R} dx' dy'. \quad (3.12)$$

Використовуючи інтегральні уявлення (3.11), (3.12) та наведені вище граничні умови, отримуємо інтегральні уявлення поля електромагнітного пучка, що задається двома довільними функціями:

$$E_x = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_x(x', y') \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dx' dy', \quad (3.13)$$

$$E_y = -\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} f_y(x', y') \frac{d}{dz} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) dx' dy', \quad (3.14)$$

$$E_z = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{df_x}{dx'} + \frac{df_y}{dy'} \right) \frac{e^{ikR}}{R} dx' dy'. \quad (3.15)$$

### 3.2. Методика розрахунку полів лазерних пучків із неоднорідною просторовою поляризацією

У полярній системі координат поперечний розподіл електричного поля векторного пучка з гібридною поляризацією випромінювання у площині  $z = 0$  можна виразити [1]

$$E(r, \phi, 0) = E_r(r, \phi, 0)\hat{e}_r + E_\phi(r, \phi, 0)\hat{e}_\phi, \quad (3.15)$$

де

$$E_r(r, \phi, 0) = A(r) \cos(m\phi - \phi + \phi_0) \quad (3.16)$$

$$E_\phi(r, \phi, 0) = A(r) \sin(m\phi - \phi + \phi_0) \quad (3.17)$$

Тут  $e_r$  і  $e_\phi$  є ортами в полярній системі координат  $(r, \varphi)$ ,  $A(r)$  являє собою радіальнозалежну амплітуду,  $m$  – азимутальний топологічний заряд і  $\varphi_0$  є початковою фазою векторного пучка. Існують два крайні випадки пучка вектора з радіальною та азимутальною поляризацією, де  $m = 1$  і  $\varphi_0 = 0$  і  $\varphi_0 = \pi/2$ . Азимутальна варіація пучків вектора належить до свого роду лінійно поляризованим векторним полям. І те, що просторовий розподіл станів поляризації залежить від азимутального кута  $\varphi$ .

На основі векторних формул Релея-Зоммерфельда при непараксіальному наближенні тривимірне електричне поле для пучка, що розповсюджується, у вільному просторі вздовж осі  $Z$  може бути задане [5]

$$E_r(\rho, \theta, z) = -\frac{ikz}{2\pi\zeta^2} \exp(ik\zeta) \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (E_r(r, \phi + \theta, 0) \cos \phi - E_\phi(r, \phi + \theta, 0) \sin \phi) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\zeta}\right) \times$$

$$\times \exp(-i\gamma r \cos \phi) r dr d\phi, \quad (3.18)$$

$$E_\phi(\rho, \theta, z) = -\frac{ikz}{2\pi\zeta^2} \exp(ik\zeta) \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (E_r(r, \phi + \theta, 0) \sin \phi + E_\phi(r, \phi + \theta, 0) \cos \phi) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\zeta}\right) \times$$

$$\times \exp(-i\gamma r \cos \phi) r dr d\phi, \quad (3.19)$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{ik}{2\pi\zeta^2} \exp(ik\zeta) \times$$

$$\times \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (E_r(r, \phi + \theta, 0)(r - \rho \cos \phi) + E_\phi(r, \phi + \theta, 0) \rho \sin \phi) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\zeta}\right) \times$$

$$\times \exp(-i\gamma r \cos \phi) r dr d\phi \quad (3.20)$$

Де  $\gamma = k\rho/\zeta$ ,  $\zeta = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ ,  $k=2\pi/\lambda$ , і  $\lambda$  – довжина хвилі.

Значимо, що непараксіальне наближення має

вигляд 
$$\sqrt{z^2 + \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos(\phi - \theta)} \cong \sqrt{z^2 + \rho^2} + \frac{r^2}{2\sqrt{z^2 + \rho^2}} - \frac{\rho r \cos(\phi - \theta)}{\sqrt{z^2 + \rho^2}},$$
 ,яке

справедливо за умов  $w < \lambda$  та  $z \geq w^2/(2\lambda)$ , де  $w$  – горловина пучка. Це

наближення для опису поширення непараксіального світлового пучка добре відомо [12, 17] для цілого  $m \geq 0$  може бути виконано за допомогою тотожності

$$\int_0^{2\pi} \cos(m\phi + \varphi_0) \exp(-ix \cos(\phi - \theta)) d\phi \equiv 2\pi (-i)^m J_m(x) \cos(m\theta + \varphi_0), \quad (3.21)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(m\phi + \varphi_0) \exp(-ix \cos(\phi - \theta)) d\phi \equiv 2\pi (-i)^m J_m(x) \sin(m\theta + \varphi_0) \quad (3.22)$$

де  $J_m(\bullet)$  є функція Бесселя  $m$ -го порядку. Підставляючи (3.16-3.17) до рівняння (3.18-3.20) і за формулою (3.21-3.22) отримуємо

$$E_r(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1} kz}{\zeta^2} \exp(ik\zeta) \cos\psi \int_0^\infty A(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\zeta}\right) J_m(\gamma r) r dr, \quad (3.23)$$

$$E_\phi(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1} kz}{\zeta^2} \exp(ik\zeta) \sin\psi \int_0^\infty A(r) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\zeta}\right) J_m(\gamma r) r dr,$$

$$\begin{aligned} E_z(\rho, \theta, z) &= \frac{(-i)^{m+1} kz}{\zeta^2} \exp(ik\zeta) \cos\psi \times \\ (3.24) \quad &\times \int_0^\infty A(r) (\rho J_m(\gamma r) - ir J_{m-1}(\gamma r)) \exp\left(\frac{ikr^2}{2\zeta}\right) r dr, \end{aligned} \quad (3.25)$$

де  $\psi = m\theta - \theta + \varphi_0$ .

Для простоти, ми тільки концентруємо увагу на поширенні нижчого порядку Лагер-гаусового пучка (тобто радіально поляризованого гаусового пучка елегантна) з розподілом електричного поля в початковій площині.

$$A(r) = E_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\right) r \exp(-\alpha r^2), \quad (3.26)$$

де  $w_0$  - радіус перетяжки гаусового пучка,  $E_0$  є постійною амплітудою.

Тут  $\alpha = 1/\omega_0^2$  для пучка при дифракції поширення у вільному просторі Для пучка, що фокусується на тонкій лінзі з високою числовою апертурою з геометричною фокусною відстанню  $f$ ,  $\alpha = 1/w_0^2 + ik/2f$ .

Вставляємо формулу (3.26) до рівнянь (3.23-3.25) з використанням інтегральних теорем [5]

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-\beta r^2} J_{m-1}(\gamma r) dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4\beta^{3/2}} e^{-t} (2tI_{(m-2)/2}(t) - (m-1+2t)I_{m/2}(t)), \quad (3.27)$$

$$\int_0^{\infty} r^3 e^{-\beta r^2} J_{m-1}(\gamma r) dr = \frac{\sqrt{\pi} \gamma}{16\beta^{5/2}} e^{-t} \times \\ \times ((m+1-4t)I_{(m-2)/2}(t) + (m-3+4t)I_{m/2}(t)), \quad (3.28)$$

де  $\text{Re}[m] > -11$ ,  $\text{Re}(\beta) > 0$ ,  $\gamma > 0$ ,  $t = \frac{\gamma^2}{8\beta}$  та  $I_m(\bullet)$  є модифікована функція

Бесселя  $m$ -го порядку, отримуючи результати аналізів

$$E_r(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1} \sqrt{\pi} E_0 k z}{2\sqrt{2} \beta^{3/2} w_0 \zeta^2} \exp(ik\zeta - t) \times \\ \times \cos\psi (2tI_{(m-2)/2}(t) - (m-1+2t)I_{m/2}(t)), \quad (3.29)$$

$$E_\phi(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1} \sqrt{\pi} E_0 k z}{2\sqrt{2} \beta^{3/2} w_0 \zeta^2} \exp(ik\zeta - t) \times \\ \times \sin\psi (2tI_{(m-2)/2}(t) - (m-1+2t)I_{m/2}(t)), \quad (3.30)$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{-(-i)^{m+1} \sqrt{\pi} E_0 k z}{2\sqrt{2} \beta^{3/2} w_0 \zeta^2} \exp(ik\zeta - t) \times$$

$$\times \cos \psi \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{i\gamma}{4\beta} (m+1-4t) - 2\rho t \right] I_{(m-2)/2}(t) \\ + \left[ \frac{i\gamma}{4\beta} (m-3+4t) + \rho(m-1+2t) \right] I_{m/2}(t) \end{array} \right\}, \quad (3.31)$$

де  $\beta = \alpha - ik/(2\xi)$ ,  $t = \gamma^2/(8\beta)$ . Рівняння (3.29-3.31), які є основним результатом роботи, дають загальне тривимірне електричне поле непараксіального розповсюдження азимутального векторного пучка.

У випадку  $m = 1$ ,  $\varphi_0 = 0$ , отримуємо, непараксіальне поширення радіально-поляризованого пучка векторів з рівнянь (3.29-3.31) виходить, що

$$E_r(\rho, \theta, z) = \frac{-E_0 k^2 \rho z}{2\sqrt{2} w_0 \alpha^2 q^2 \zeta} \exp\left(ik\zeta - \frac{k^2 \rho^2}{4\alpha q \zeta}\right) \quad (3.32)$$

$$E_\phi(\rho, \theta, z) = 0 \quad (3.33)$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = \frac{iE_0 k}{\sqrt{2} w_0 \alpha^2 q^2} \left(1 + \frac{ik\rho^2}{2q}\right) \exp\left(ik\zeta - \frac{k^2 \rho^2}{4\alpha q \zeta}\right) \quad (3.34)$$

Де  $q = \zeta - ik/(2\alpha)$ . Отриманий результат збігається з тим, який було отримано раніше. Для азимутально-поляризованого пучка  $m = 1$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$

$$E_r(\rho, \theta, z) = 0, \quad (3.35)$$

$$E_\phi(\rho, \theta, z) = \frac{-E_0 k^2 \rho z}{2\sqrt{2} w_0 \alpha^2 q^2 \zeta} \exp\left(ik\zeta - \frac{k^2 \rho^2}{4\alpha q \zeta}\right), \quad (3.36)$$

$$E_z(\rho, \theta, z) = 0, \quad (3.37)$$

Результат параксіального поширення можна розглядати як окремий випадок результату непараксіального, який описується рівняннями 3.29-3.31.

У параксіальному наближенні отримуємо  $(z^2 + \rho^2)^{1/2} \approx z + \rho^2 / (2z) \approx z$ .

Відповідно, ми отримаємо вираз для поширення азимутального векторного пучка при параксіальному наближенні,

$$E_{rp}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1} \sqrt{\pi} E_0 k z}{2\sqrt{2} \beta'^{3/2} w_0 \zeta^2} \exp(ik\zeta - t') \times \\ \times \cos\psi (2t' I_{(m-2)/2}(t') - (m-1+2t') I_{m/2}(t')), \quad (3.38)$$

$$E_{\phi p}(\rho, \theta, z) = \frac{(-i)^{m+1} \sqrt{\pi} E_0 k z}{2\sqrt{2} \beta'^{3/2} w_0 z} \exp(ikz - t') \times \\ \times \sin\psi (2t' I_{(m-2)/2}(t') - (m-1+2t') I_{m/2}(t')), \quad (3.39)$$

$$E_{zp}(\rho, \theta, z) = \frac{-(-i)^{m+1} \sqrt{\pi} E_0 k z}{2\sqrt{2} \beta'^{3/2} w_0 z^2} \exp(ikz - t') \times \\ \times \cos\psi \left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{i\gamma'}{4\beta'} (m+1-4t') - 2\rho t' \right] I_{(m-2)/2}(t') \\ + \left[ \frac{i\gamma'}{4\beta'} (m-3+4t') + \rho(m-1+2t') \right] I_{m/2}(t') \end{array} \right\}, \quad (3.40)$$

де  $\gamma' = k\rho / z$ ,  $\beta' = \alpha - ik / (2z)$ ,  $t' = \gamma'^2 / (8\beta')$ .

У разі  $m = 1, \varphi_0 = 0$ , отримуємо параксіальне поширення для поляризованого пучка з радіальною поляризацією:

$$E_{rp}(\rho, \theta, z) = \frac{-E_0 k^2 \rho}{2\sqrt{2} w_0 \alpha^2 q^2} \exp\left(ik\zeta - \frac{ik\rho^2}{2q}\right) \quad (3.41)$$

$$E_{\phi p}(\rho, \theta, z) = 0 \quad (3.42)$$

$$E_{zp}(\rho, \theta, z) = \frac{iE_0k}{\sqrt{2}w_0\alpha^2q^2} \left(1 + \frac{ik\rho^2}{2q}\right) \exp\left(ikz - \frac{ik\rho^2}{2q}\right) \quad (3.43)$$

Де  $q_z = ik/(2\alpha)$ . У випадку  $m = 1$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$ , отримуємо параксиальне поширення для азимутально-поляризованого пучка векторів

$$E_{rp}(\rho, \theta, z) = 0, \quad (3.44)$$

$$E_{\phi p}(\rho, \theta, z) = \frac{-E_0k^2\rho}{2\sqrt{2}w_0\alpha^2q^2} \exp\left(ikz - \frac{ik\rho^2}{2q}\right), \quad (3.45)$$

$$E_{zp}(\rho, \theta, z) = 0, \quad (3.46)$$

Для циліндричного пучка векторів, його цілеспрямованого поля є так звана кільцева світлового поля з центральною темною плямою та зовнішнім яскравим кільцем [24, 29]. Щоб визначити ширину векторного пучка загального вигляду, приймаємо один критерій оточення потужності, тобто ширина  $\rho_0$  пучка вектора являє собою радіус в межах 80% від потужності пучка. Відповідно, ширина  $\rho_0$  сфокусованого векторного пучка при поширенні відстань  $z$  задовольняє

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0} I_G(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} I_G(\rho, \theta, z) \rho d\rho d\theta} = 0.8, \quad (3.47)$$

Де  $I_G = |E_r|^2 + |E_\phi|^2 + |E_z|^2$  непараксіальна інтенсивність векторного пучка. У разі параксіального поширення слід замінити  $I_G$  на  $I_{GP} = |E_{rp}|^2 + |E_{\phi p}|^2 + |E_{zp}|^2$  у формулі (3.47). Розподіл потоку енергії у площині  $z$  може бути заданий середньою за часом компонентою вектора Пойнтінга

$$S_z = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [E(\rho, \theta, z) \times H^*(\rho, \theta, z)]_z. \quad (3.48)$$

Тут  $\operatorname{Re} [\bullet]$  є реальною частиною, а зірочка означає комплексне сполучення.

#### 4. Результати розрахунків

Для дослідження характеристик непараксіального поширення сфокусованих азимутальних векторних пучків, обрані типові параметри, як  $\lambda = 633\text{нм}$ ,  $E_0 = 1$ (відн.ед),  $w_0 = 1$  мкм,  $f = 4$  мкм [5]. Детальні чисельні розрахунки були виконані за допомогою формул, отриманих у розділі 3, а результати представлені на рис. 1-2.

Першим розглянуто розподіл інтенсивності непараксіального векторного пучка поблизу фокальної області тонкої лінзи з високою числовою апертурою. На рис. 1 (а) -1 (d) показано розподіл інтенсивності поля для радіальної, азимутальної, поздовжньої компонент поля і сумарного поля векторного пучка при  $m = 1$  для  $\varphi_0 = \pi/4$  в геометричному фокусі лінзи (x-y площини). Розподіл інтенсивності нормований на максимум загальної інтенсивності розподілу  $I_G^{Max}(x, y, f)$ .

Як показано на рис. 1 (а) -1 (d), розподіл інтенсивності для радіальної та азимутальної компонент поля мають циліндричну симетрію і затемнений центр, у той час як розподіл інтенсивності для поздовжньої компоненти поля має в центрі світлу пляму. Крім того, відношення максимальної інтенсивності поздовжньої та поперечних компонентів поля зростає зі зменшенням фокусної відстані лінзи, який має орієнтацію, що збігається з радіально-поляризованим векторним пучком. Розподіл інтенсивності векторного пучка при  $m = 1$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  суттєво відрізняються від аналогічних для радіально поляризованого векторного пучка при  $m = 1$ ,  $\varphi_0 = 0$  з радіальною та поздовжньою компонентою поля або тільки азимутально поляризованого векторного пучка ( $m = 1$ ,  $\varphi_0 = \pi/2$ ),

що має лише азимутальну компоненту. Передбачається, що розподілом фокального поля можна маніпулювати змінюючи початкову фазу  $\varphi_0$  векторного пучка. Отже, залежність розподілу потоку енергії від  $\varphi_0$  передбачається. Щоб чіткіше показати непараксіальний розподіл інтенсивності, у середньому ряду на рис. 2 показані відповідні розподіли інтенсивності вздовж осі  $x$  при  $y = 0$ . Для порівняння, параксіальні розподіли інтенсивності, отримані з використанням формули (11), також показані кружальцями на рис. 2(a)-2(d).

Слід зазначити, що існує невелика різниця між непараксіальними та параксіальними розподілами інтенсивності. Відмінності між розподілами інтенсивності при непараксіальному та параксіальному наближеннях можуть бути більшими зі зменшенням параметра  $w_0/\lambda$ . Як можна побачити з рис. 3 (d), потужність більш сконцентрована до  $Z = f$ , і, отже, пучок, ймовірно, буде вузьким там. Очевидно, справжній фокус спостерігається над геометричному фокусі лінзи, а ближче до лінзи. Це добре відоме фокальне зрушення, яке обговорювалося раніше.

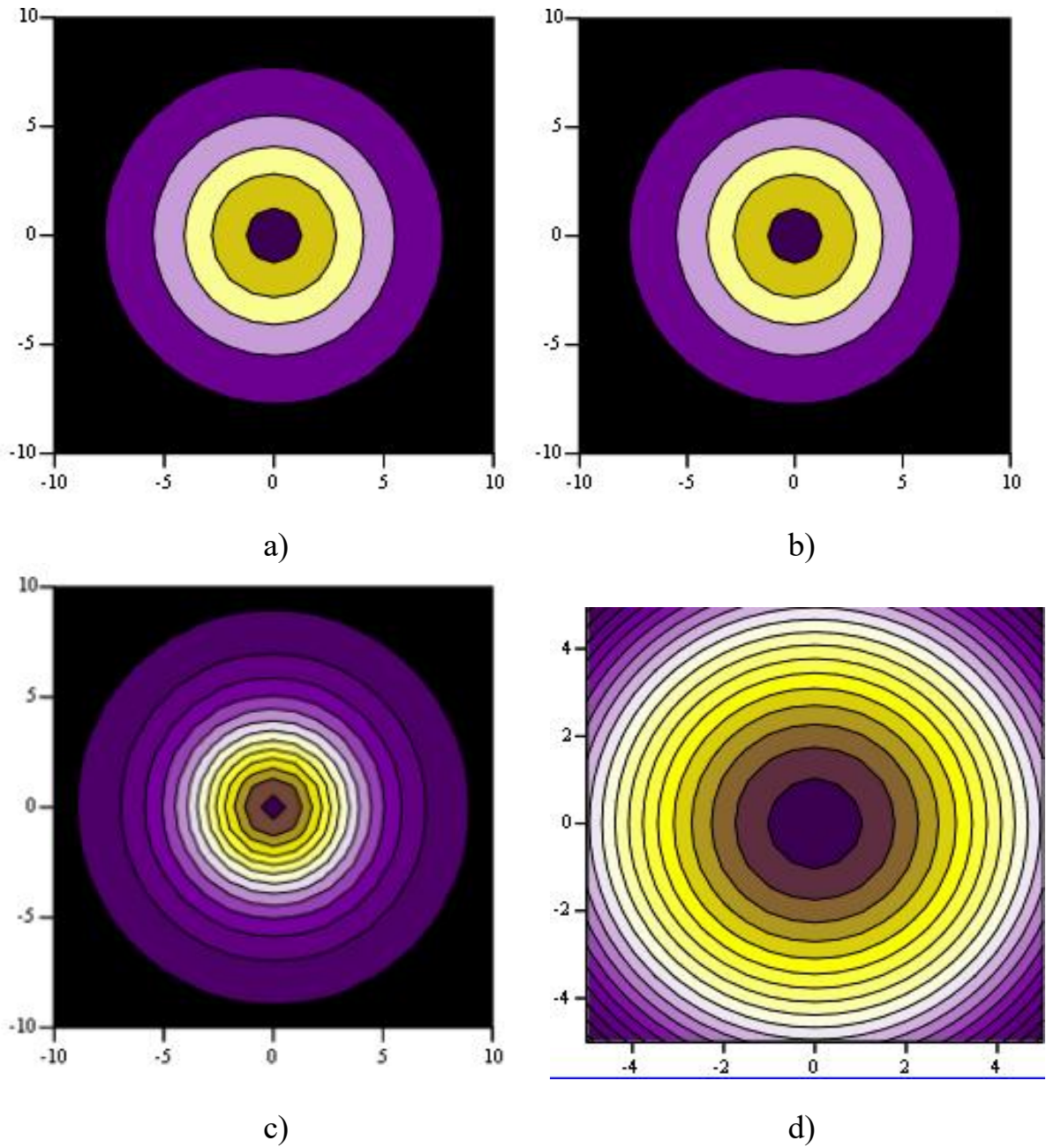
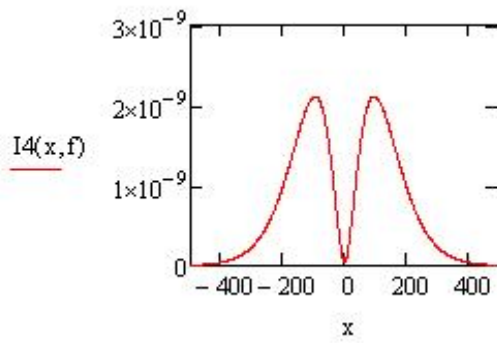
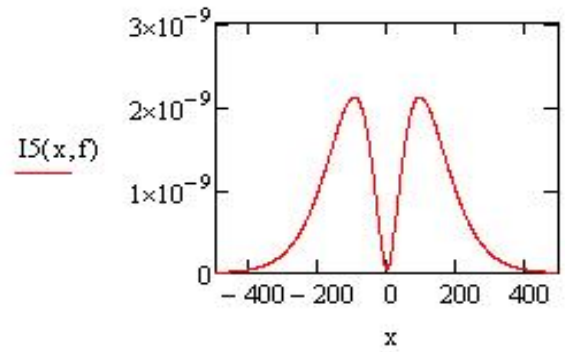


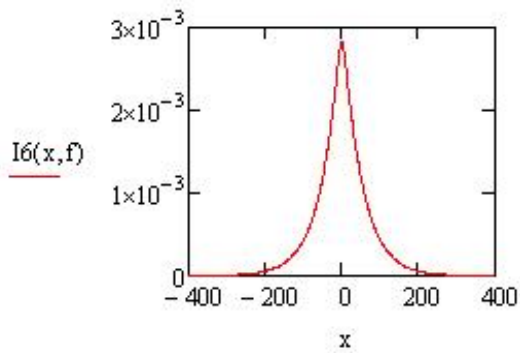
Рис 1. Нормовані розподіли інтенсивності при непараксiальному наближеннi (а-  
 д) векторного пучка при  $m = 1$  для  $\phi_0 = \pi/4$  у площинi геометричного фокусу  
 лiнзи при  $\lambda = 633$  нм,  $E_0 = 1$  (вiдн. од),  $\omega_0 = 1$  мкм i  $f = 4$  мкм,  $z = f$ .



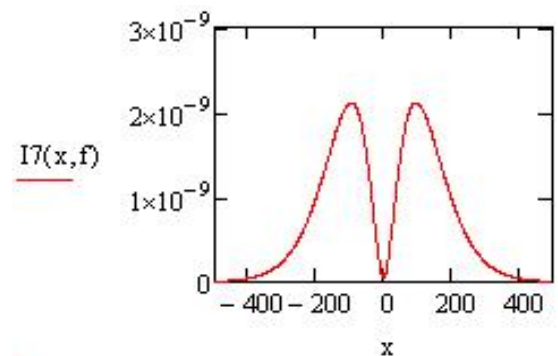
a)



b)



c)



d)

Рис. 2. Нормовані розподіли інтенсивності при параксiальнoму наближеннi (a) - (d) та вiдповiднi поперечнi розподiли iнтенсивностi для векторного пучка при  $m = 1$  для  $\phi_0 = \pi/4$  у площинi геометричного фокусу лiнзи при  $\lambda = 633$  нм,  $E_0 = 1$  (вiдн.од).  $\omega_0 = 1$  мкм та  $f = 4$  мкм,  $y = 0$ .

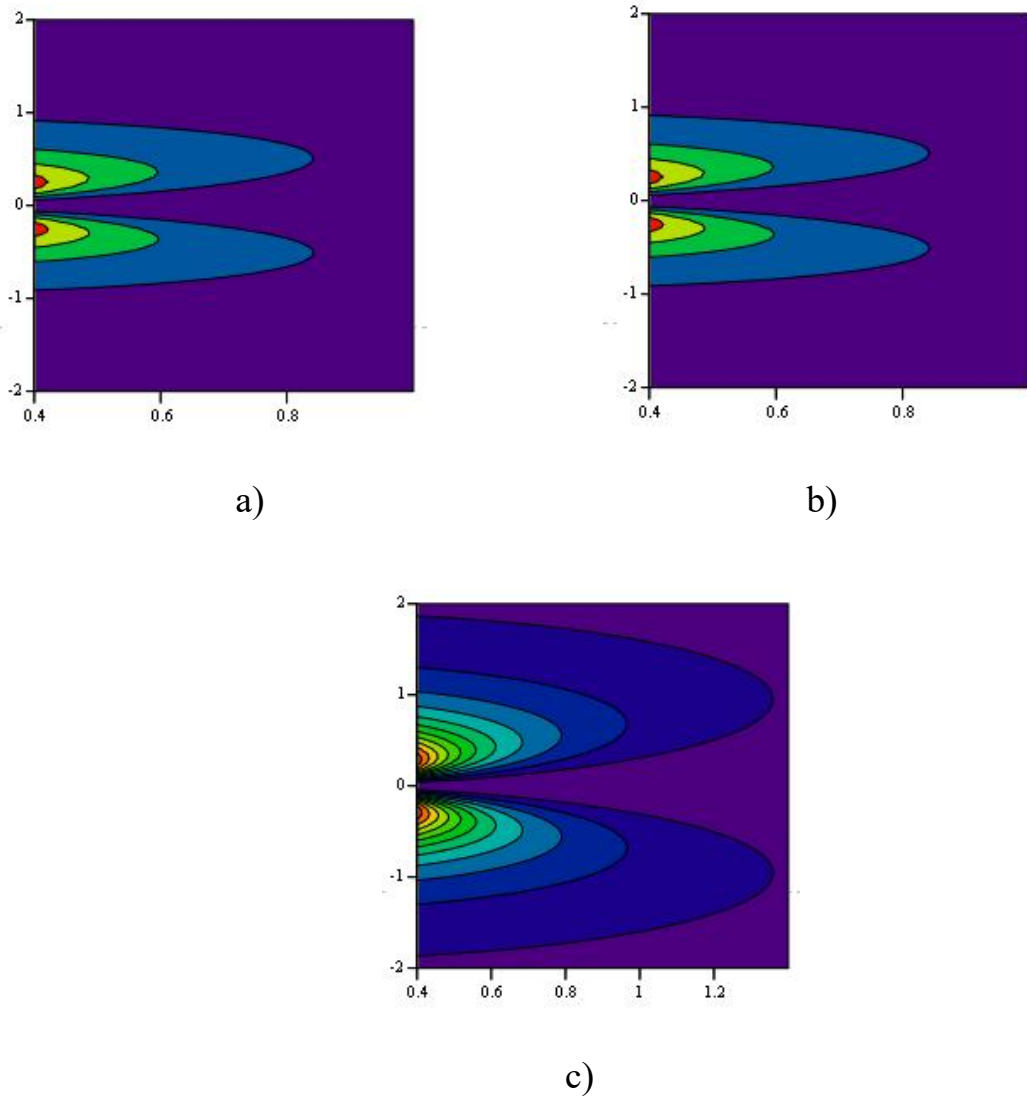
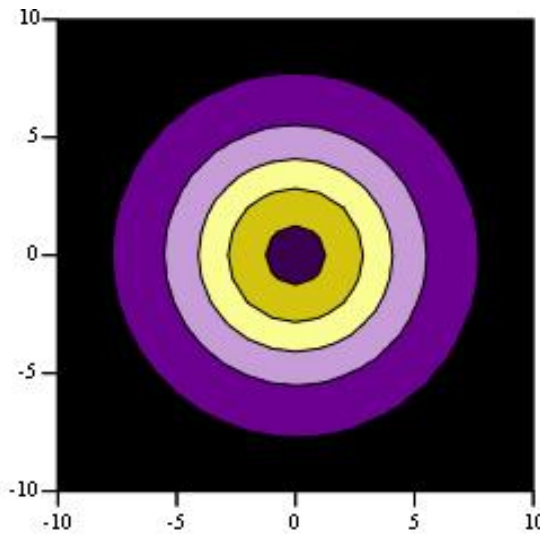


Рис. 3. Нормовані розподіли інтенсивності при непараксіальному наближенні (a) - (c) та відповідні поперечні розподіли інтенсивності векторного пучка при  $m = 1$  для  $\phi_0 = \pi/4$  у площині геометричного фокусу лінзи, при  $\lambda = 633$  нм,  $E_0 = 1$  (відн. од),  $\omega_0 = 1$  мкм та  $f = 4$  мкм,  $y = 0$ .

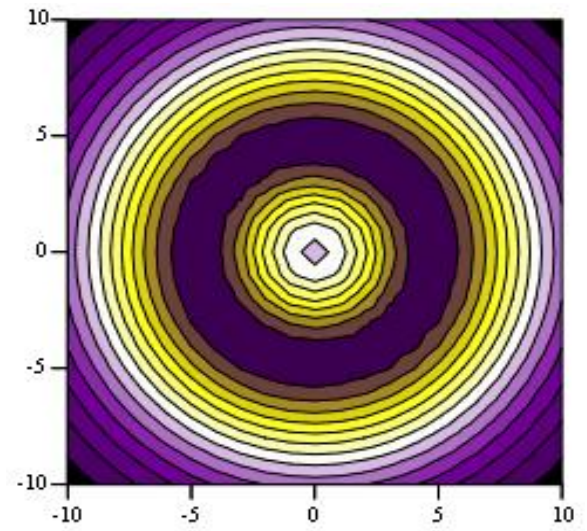
Рисунок 4 (а) і 4 (b) показують непараксіальні розподілу потоку енергії векторного пучка ( $m = 1$  і  $\phi_0 = \pi/4$ ) у площині геометричного фокусу лінзи та істинного фокусу, відповідно, з тими самими параметрами, які використані при побудові рис. 1. Суцільні лінії) на рис. 4 (c) та 4 (d) відповідні рис. 4 (a) та 4 (b) показують непараксіальні (параксіальні) поперечні розподіли потоку енергії при  $y = 0$  для  $z = f$  та  $z = 0.55 f$ , відповідно. Як показано на рис. 4, розподілу потоку енергії векторного пучка мають так звані тороїдальні розподіли з нульовою енергією на осі та кільцевий розподіл енергії. Крім того, потік енергії поля є сконцентрованим тільки в істинному фокусі, ніж в будь-якому іншому місці. Відмінність між непараксіальним та параксіальним потоком енергії спостерігається, як показано на рис. 4(c) та 4(d). Це пояснюється тим, що параксіальне поширення наближено описує поширення пучка у разі  $\omega_0 \sim 2\lambda$ . Однак, результати отримані при використанні непараксіальної та параксіальної теорії за умови  $\omega_0 \gg \lambda$ ,  $z \gg \lambda$  ідентичні.

Для випадку параксіального поширення нами взяті наступні параметри:  $\lambda = 532$  нм,  $E_0 = 1$  (відн.од),  $\omega_0 = 2.5$  мм,  $f = 8$  мм, та вивчені тривимірні інтенсивності векторних пучків з різними топологічними зарядами поблизу області фокусу, використовуючи формулу (11). Як приклад, Рис.5 ілюструє параксіальні розподілу інтенсивності векторних пучків при  $\phi_0 = 0$  для  $m=1, 3, 5$  в центрі (верхній ряд) і за фокусом, коли  $y = 0$  (нижній ряд). Усі розподіли інтенсивності нормовані на максимум  $I_G^{Max}(x, y, f)$ . Цікаво, що сфокусована поле векторного пучка має тороїдальний профіль інтенсивності з характерним

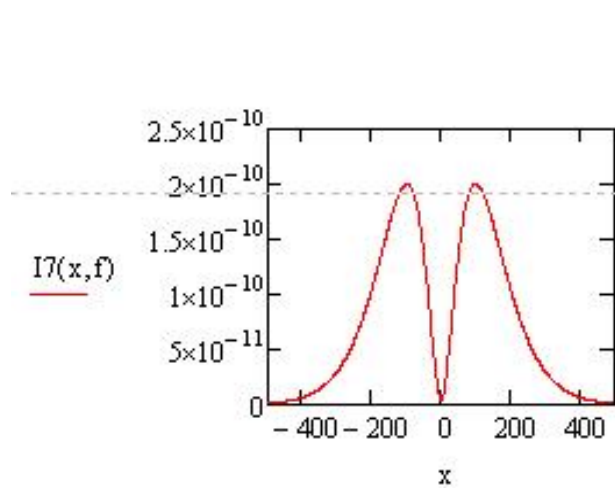
аксіально-симетричним профілем, як показано на Рис. 5. Крім того, радіус тороїдального поля збільшується із збільшенням топологічного заряду  $m$  вектор пучка. Ці результати можна порівняти з відомими результатами для векторних циліндричних пучків вищих порядків, хоча з різними умовами фокусування і з різною аподизаційною функцією.



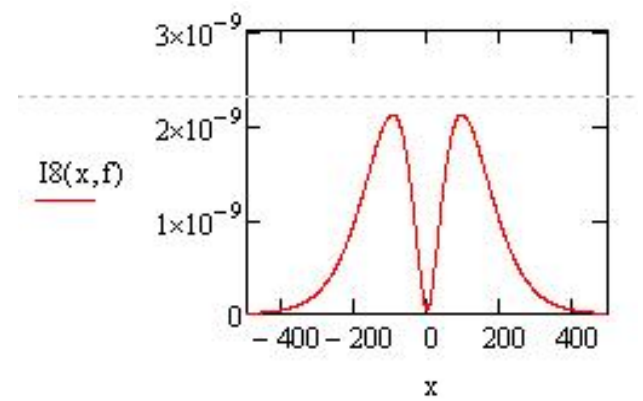
a)



b)



c)



d)

Рис. 4. Непараксіальні розподіли інтенсивності поля векторного пучка при

$m = 1$  у площинах (a) геометричного фокусу та (b) у перетяжці пучка.

Криві (c) і (d) позначають відповідні непараксіальні (параксіальні)

розподіли потоку енергії при

$y = 0, z = f$  та  $z = 0.55f$ ,  $\phi_0 = \pi/4$ ,  $\lambda = 633$  нм,  $E_0 = 1$  (відн.од),  $\omega_0 = 1$  мкм

та  $f = 4$  мкм.

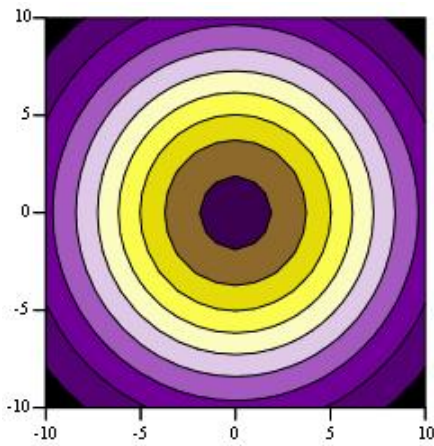
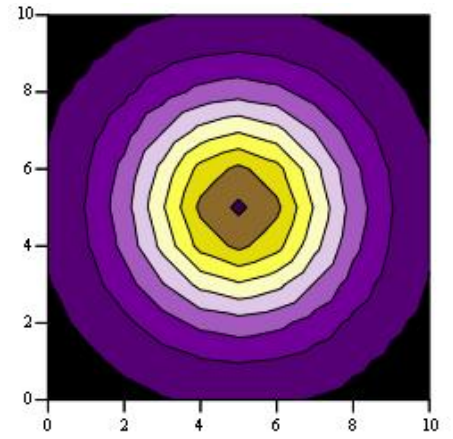
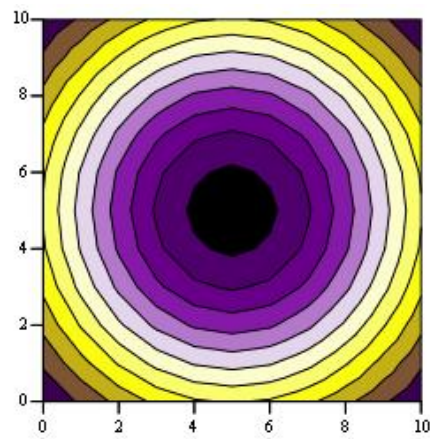
a)  $m = 1$ b)  $m = 3$ c)  $m = 5$ 

Рис. 5. Нормовані параксіальні розподіли інтенсивності векторних пучків

з різним топологічним зарядом  $m$  у фокусі

(a - f) при  $\phi_0 = 0$ ,  $\lambda = 532$  нм,  $E_0 = 1$ ,  $\omega_0 = 2,5$  мм, та  $f = 8$  мм.

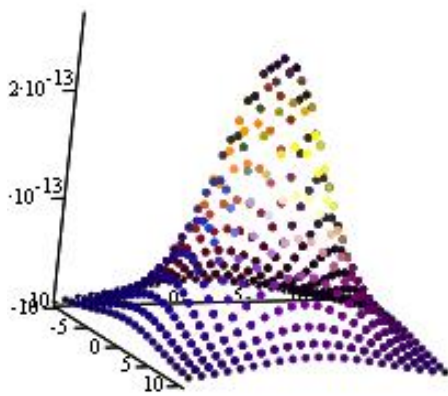
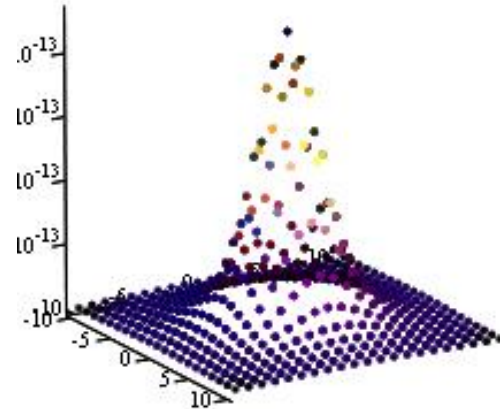
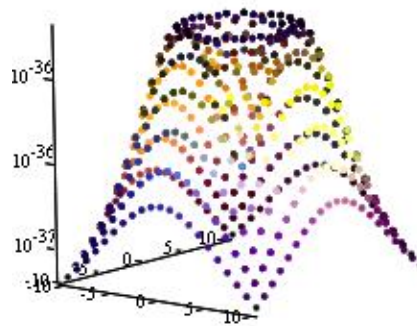
d)  $m = 1$ e)  $m = 3$ f)  $m = 5$ 

Рис. 5. (продовження). Нормовані параксиальні розподіли інтенсивності векторних пучків з різним топологічним зарядом  $m$  у фокусі (а - f), при  $\phi_0 = 0$ ,  $\lambda = 532$  нм,  $E_0 = 1$  (відн.од),  $\omega_0 = 2,5$  мм, и  $f = 8$  мм.

## 5. Висновок

На основі векторної теорії Релея-Зоммерфельда, використовуючи непараксіальне наближення, досліджено фізичні особливості структури поля гібридно поляризованого Лагерр-гаусова пучка нижчого порядку, що розповсюджується у вільному просторі, отримано аналітичні вирази для радіальних, азимутальних та поздовжніх компонентів електричного поля Лагерр-гаусових пучків нижчого порядку з цілим топологічним зарядом  $m = 1, 3, 5$ , сфокусовані тонкою лінзою.

Використовуючи чисельне моделювання, досліджено поперечні розподіли інтенсивності даних компонентів поля та сумарної інтенсивності електричного поля у фокусі лінзи. Вивчено характеристики сфокусованого поля векторних циліндричних пучків з довільним цілим топологічним зарядом.

## Список літератури

1. S. Sato and Y. Kozawa. Hollow vortex beams// J. Opt. Soc. Am. A, 2009, Vol. 26, No. 1, P. 142-146.
2. Banerjee et al. A  $q$ -parameter is used for the analysis of propagation, focusing, and waveguiding of radially polarized Gaussian beams// J. Opt. Soc. Am. A-2009-Vol. 26, No. 6 - P. 1366 -1374.
3. Kun Huang, Peng Shi, Xue-liang Kang, Xiaobo Zhang and Yong-ping Li. Design of DOE for generating a needle of a strong longitudinally polarized field// Optics letters— 2010 —Vol. 35, No. 7 - P. 965 - 967.
4. Yew, Elijah YS, and Colin JR Sheppard. "Tight focusing of radially polarized Gaussian and Bessel-Gauss beams." Optics Letters 32.23 (2007): 3417-3419.
5. Yaoju Zhang and Biaofeng Ding. Magnetic field distribution of a highly focused radially-polarized light beam // Optics express, 2009-Vol. 17, No. 24 - P.22235 - 22239.
6. Bing Hao and James Leger. Polarization beam shaping // Applied Optics. -Vol. 46, No. 33.-2007. - P. 8211 - 8217.
7. Qiwen Zhan and James R. Leger. Focus shaping using cylindrical vector beams// Optics Express - 2002-Vol. 10, No. 7 324-331.
8. Zhang, Wei, et al. "Controlling the polarization singularities of the focused azimuthally polarized beams." Optics express 21.1 (2013): 974-983.

9. Xiangsheng Xie, Huayang Sun, Liangxin Yang, Sicong Wang and Jianying Zhou. Effect of polarization purity of cylindrical vector beam on tightly focused spot // J. Opt. Soc. Am. A - 2013 - Vol. 30, No. 10 - p.1937-1940.
10. Youngworth, Kathleen S., and Thomas G. Brown. "Focusing of high numerical aperture cylindrical-vector beams." *Optics Express* 7.2 (2000): 77-87.
11. SN Khonina, \* SV Alferov, i SV Karpeev. Strengthening the longitudinal component of the sharply focused electric field by means of higher-order laser beams. // *Optics Letters* - 2013 - Vol. 38, No. 17 - p.3223 - 3226.
12. Xinting Jia, Youqing Wang, Bo Li. Heparaxial analyses of radially polarized beams diffracted at circular aperture // *Optics Express*, 2010, Vol. 18, Issue 7, P. 7064-7075.
13. Dongmei Deng. Nonparaxial propagation of radially polarized light beams // *J. Opt. Soc. Am. B.*, 2006, Vol. 23, No. 6, P.1228-1234.
14. Kumar RV, Prabakaran K, Rajesh KB, Musthafa AM, Aroulmoji V. Tight Focusing of a higher order Radially Polarized sinh-Gaussian beam Transmitting through Cosine Phase Plate. *International journal of advanced Science and Engineering*. 2023 Aug 25;10(1):3329-35.
15. Godana ZT, Hebling J, Pálfalvi L. Focusing of Radially Polarized Electromagnetic Waves by a Parabolic Mirror. In *Photonics* 2023 Jul 21 (Vol. 10, No. 7, p. 848). MDPI.
16. El Halba EM, Hricha Z, Belafhal A. Focus shaping of cylindrically polarized higher-order Generalized Spiraling Bessel beams. *Optical and Quantum Electronics*. 2023 Nov;55(11):994.

17. Jolly SW. Modeling the focusing of a radially polarized laser beam with an initially flat-top intensity profile. *Journal of the Optical Society of America A*. 2024 Jun 27;41(7):1390-6.
18. Jia X, Yang Y, Lu J. Nonparaxial analyses of cylindrical vector beams with arbitrary polarization order in the far field. *Journal of Modern Optics*. 2016 Sep 7;63(16):1544-51.