ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIV 1956

ДИССЕРТАЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ В ХАРЬКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ за 1805—1917 годы

А. К. Сушкевич

Глава I

Ученые степени в России в XIX столетии

В начале XIX столетия просвещение и научная работа в России по сравнению с XVIII веком поднялись на высокий уровень. Были открыты университеты: Дерптский (в 1802 г.), Харьковский и Казанский (в 1805 г.), Петербургский (в 1819 г.), Киевский (в 1835 г.), Гельсингфорский (в Финляндии, в 1827 г.); институты в Петербурге: Инженеров путей сообщения (в 1810 г.), Технологический (в 1828 г.), Гражданских инженеров (в 1830 г.), а также целый ряд гимназий.

В 1804 году вышел первый университетский устав, упорядочивший в университетах преподавание и научную работу. По этому уставу в университетах устанавливались 4 факультета: физико-математический, историко-филологический, юридический и медицинский. Окончившие университет по первому разряду и представившие специальную диссертацию получали звание кандидата наук; окончившие по второму разряду получали звание „действительного студента". Кроме того, по уставу 1804 г. полагались две научные степени: магистра и доктора. Для получения каждой из этих степеней необходимо было сдать устные и письменные испытания, прочесть ряд публичных лекций и публично защитить диссертацию, одобренную факультетом. Испытания проводились на факультете в присутствии двух депутатов от Совета университета. Правила об испытаниях на ученые степени вышли в 1819 г.

Эти же ученые степени сохранялись и в последующих университетских уставах. По уставу 1835 г. профессора должны были обязательно иметь степень доктора, адьюнкты (теперь доценты) — степень магистра. По этому уставу факультеты физико-математический и историко-филологический в университетах объединялись в один философский факультет с двумя соответствующими отделениями (следующие уставы вновь разъединили эти факультеты).

В 1844 г. появилось „Положение о производстве в ученые степени". По этому положению предусматривается степень магистра математических наук. В испытания на эту степень входила математика чистая и прикладная, как главный предмет, и физика и физическая география, как второй предмет. По этому же положению предусматривалась степень доктора математики и астрономии. В испытания на эту степень входили математика чистая и прикладная и астрономия с геодезией.

Эти правила об ученых степенях 1844 г. были в январе 1864 г. заменены новыми правилами, действовавшими вплоть до Октябрьской революции 1917 г. По правилам 1864 г. разряды для магистров и докторов одинаковы, т. е. предусмотрены магистр чистой математики и магистр прикладной математики, и соответственно доктор чистой математики и доктор прикладной математики. Испытания на степень доктора были отменены.

На степень магистра чистой математики испытания были по чистой математике (главный предмет), по прикладной математике и теории вероятностей (второй предмет). На степень магистра прикладной математики испытания были по прикладной математике (главный предмет) и по чистой математике, по теории вероятностей и по практической механике (второй предмет).

За время действия устава 1835 г. (в Харьковском университете он был введен только в 1837 г.) многие диссертации не печатались, хотя еще в 1823 г. было постановление совета Харьковского университета о печатании диссертаций.

Низшей ученой степенью, как уже говорилось выше, была степень кандидата наук. Ее получали лучшие из оканчивавших студентов по представлении специальных диссертаций; но можно было получить степень кандидата, выдержав специальный экзамен и представив диссертацию. Уставом 1884 г. эта степень была отменена.

По уставу 1804 г. при Харьковском университете в 1811 г. был учрежден педагогический или учительский институт. В него поступали под именем студентов-кандидатов лица, окончившие университет и желавшие подготовиться к учительскому званию; там они обучались 3 года, после чего или получали вторую ученую степень, или определялись старшими и младшими учителями Харьковского учебного округа. Таким образом, этот институт готовил учителей и представлял собой нечто вроде аспирантуры. В 1834 г. педагогический институт при Харьковском университете был закрыт.

Упомянем еще о диссертации pro venia legendi. Эта диссертация требовалась от лиц, желавших стать приват-доцентами. Приват-доценты появились сначала в Дерптском университете (в 1839 году) затем в Киевском и позже в Харьковском. Как известно, такую диссертацию pro venia legendi защищал в 1847 г. в Петербурге П. Л. Чебышев на тему: „Об интегрировании с помощью логарифмов“, имея уже ученую степень магистра. В результате этой защиты Чебышев получил должность адьюнкт-профессора в Петербургском университете.

По уставу 1863 г. эта диссертация pro venia legendi была отменена для лиц с русскими учеными степенями магистра или доктора: для получения права преподавания в университете от них требовалось только прочтение пробных лекций. Но для иностранных докторов и для наших кандидатов диссертация pro venia legendi была сохранена.

Приведем пример экзаменов на степень магистра чистой и прикладной математики, которым подвергся 4-го и 5-го марта 1832 г. кандидат Н. А. Дьяченко.

4-го марта он экзаменовался по астрономии у проф. Затеплинского; по чистой математике у проф. Байкова, предложившего Дьяченко следующие вопросы: 1) вывести формулы для выражения экспоненциальных и логарифмических величин и составления логарифмических таблиц; 2) как вычисляются корни уравнений 3-й степени в том случае, когда Карданова формула не годится? 3) как делаются редукции (поправки) в углах при измерении на поверхности очень большого шара? 4) вывести уравнения кривых линий, происходящих при сечении конуса.

Далее Дьяченко экзаменовался по теоретической философии и этике — у проф. Чанова, по фортификации и артиллерии у проф. Робуша, по естественной истории — у проф. Криницкого, по химии и технологии — у Сухомлинова.

5 марта 1832 г. экзамен был продолжен; по физике—у Комлишинского, по оптике — у Байкова, по сельскому хозяйству — тоже у Байкова, по высшей математике—у Павловского. Последний задал Дьяченко ряд вопросов: 1) какие приемы употребляются для разыскания интегралов уравнений в частных дифференциалах 2-го порядка? 2) в чем состоит вариационное исчисление и какие его употребления? По механике экзаменовал также Павловский, предложивший вопросы: 1) вывести общие уравнения движения системы тел, побуждаемых какими бы то ни было силами; 2) в чем состоит начало сохранения живых сил?

7 марта 1832 г. был письменный экзамен. Из многих вопросов, предложенных проф. Павловским, вынуты по жребию: 1) как интегрирование дифференциальных функций способствует к нахождению интегралов разностных уравнений? 2) ежели бы земля притягивалась солнцем в обратной пропорциональности расстояний, то какую бы кривую линию она описывала?

Факультет признал решения удовлетворительными и на том же заседании объявил Дьяченко тему для диссертации: „Об успехах после Эйлера, сделанных в нахождении интегралов определенных и об употреблении их". (Тема предложена профессором Павловским).

Обращает на себя внимание многопредметность магистерского экзамена: кроме всей математики и механики сдавать надо было еще и астрономию, и физику, и философию, и военные науки, и естественную историю, и технологию, и даже сельское хозяйство. Интересно отметить тот факт, что тема магистерской диссертации не выбиралась самим диссертантом, а давалась факультетом, притом только после сдачи устных и письменных экзаменов. Впрочем трудно сейчас сказать, как фактически происходило дело: возможно, что диссертант заранее конфиденциально уславливался с профессором относительно темы, которая затем официально объявлялась факультетом.

С течением времени количество предметов, сдаваемых на степень магистра, сократилось. В начале XX столетия магистерские устные экзамены стали именоваться „магистрантскими". Выдержавший их, получал неофициальное звание „магистрант". Эти экзамены давали право защищать магистерскую диссертацию. Но они же давали право по прочтении двух пробных лекций (одну — на собственную тему, другую — на тему, предложенную факультетом) получить звание приват-доцента и читать лекции в университете (за исключением Петербургского университета, где в приват-доценты допускались только магистры). Между сдачей магистерских экзаменов и защитой магистерской диссертации никакого срока, насколько мне известно, установлено не было. Для лиц, специализировавшихся в чистой математике, магистерские экзамены устанавливались по математике и по механике; но математика дифференцировалась по отдельным дисциплинам, составляя 14 экзаменов (в Харьковском университете), а именно: 1) теория функций комплексного переменного, 2) теория множеств и теория функций вещественного переменного, 3) алгебра, 4) теория чисел, 5) исчисление конечных разностей, 6) теория вероятностей, 7) обыкновенные дифференциальные уравнения, 8) уравнения с частными производными, 9) интегральные уравнения, 10) абелевы интегралы и эллиптические функции, 11) вариационное исчисление, 12) аналитическая геометрия, 13) дифференциальная геометрия, 14) проективная геометрия и основания геометрии. Пятнадцатым экзаменом была механика. Все эти экзамены сдавались, конечно, не сразу; официально их можно было растянуть на 6 месяцев.

Программы по каждой из названных дисциплин составлял сам экзаменующийся (конечно, сообразуясь с программами своих предшественников); все эти программы до начала всех экзаменов представлялись на факультет и там утверждались. Объем всех программ выходил далеко за пределы соответствующих университетских курсов.

Перейдем теперь к рассмотрению списка лиц, получивших ученые степени магистра и доктора в Харьковском университете.

В 1807 г. совет Харьковского университета дал докторскую степень honoris causa профессору Тимофею Федоровичу Осиповскому за выдающуюся педагогическую работу и за его труд „Курс математики", два тома которого были напечатаны к тому времени.

В 1811 г. защитил магистерскую диссертацию „De matheseos natura" („О природе математики") Николай Михеевич Архангельский (1808 г.— кандидат, с 1813 г.—адьюнкт, с. 1818 по 1837 гг.—профессор Харьковского университета по прикладной математике).

В 1813 г. защитил магистерскую диссертацию кандидат с 1809 г. Андрей Федорович Павловский (с 1815 г.—адьюнкт, с 1819 по 1849 г.— профессор математики Харьковского университета).

В 1821 г. защитил магистерскую диссертацию „О различных способах излагать дифференциальное исчисление и о достоинствах каждого способа" кандидат с 1819 г. Матвей Андреевич Байков (с 1822 г.— адьюнкт, с 1826 по 1832 г. сначала профессор математики, а затем— сельского домоводства Харьковского университета).

В 1835 г. защитил магистерскую диссертацию „Об успехах после Эйлера, сделанных в нахождении интегралов определенных и об употреблении их" кандидат с 1829 г. Никита Андреевич Дьяченко (с 1836 г. — адьюнкт, с 1837 до 1839 г. — профессор Харьковского университета, с 1839 до 1867 г. — профессор Киевского университета).

В 1838 г. тот же Н. А. Дьяченко защитил докторскую диссертацию на тему: „О гидравлических колесах".

В 1846 г. защитил магистерскую диссертацию старший учитель Харьковской 1-й гимназии Филипп Николаевич Королев на тему: „О приложении анализа к изложению начал динамики".

В том же году защитил докторскую диссертацию А. П. Шидловский.

В 1849 г. защитил магистерскую диссертацию исправляющий должность адьюнкта Евгений Ильич Бейер (с 1845 г. преподавал математику в Харьковском университете в качестве исправляющего должность адьюнкта, с 1858 г. в качестве исправляющего должность профессора; с 1867 г.—ординарный профессор) на тему: „О решении буквенных алгебраических уравнений".

В 1864 г. защитил магистерскую диссертацию Даниил Михайлович Деларю (с 1865 г. преподавал математику и механику в Харьковском университете; с 1869 г. — профессор; в 1885 г. ушел в отставку) на тему: „Общая теория алгебраического решения уравнений".

В 1865 г. защитил докторскую диссертацию магистр математики Корнелий Карастелев (из Одессы) — на степень доктора прикладной математики; тема диссертации: „Теория изменения произвольных постоянных и приложение ее к вычислению изменений элементов планет по способам Лагранжа и Пуассона" (Одесса, 1865 г.)

В 1866 г. защитил магистерскую диссертацию на тему: „Теория интегрирующего множителя дифференциальных уравнений вида: $f(x, y)\,dx + F(x, y)\,dy = 0$" Матвей Федорович Ковальский (с 1866 г.— приват-доцент, с 1869 г.—профессор математики Харьковского университета — до своей смерти в 1900 г.).

В 1867 г. совет Харьковского университета присудил степень доктора honoris causa Евгению Ильичу Бейеру за его работы: „Исследования об интегрировании линейных дифференциальных уравнений с каким угодно числом переменных" (Харьков, 1858 г.), „Исследование интегрируемости дифференциальных выражений высших порядков"; „Исследования о том, в каких случаях интеграл в конечных разностях от рациональной дроби может быть алгебраическим"; „Новая постановка начал вариационного исчисления" (3 последние работы не напечатаны).

В 1868 г. защитил докторскую диссертацию Даниил Михайлович Деларю на тему: „О разыскании особых решений дифференциальных уравнений 1-го порядка, зависящих от двух переменных".

В 1869 г. защитил докторскую диссертацию Матвей Федорович Ковальский на тему: „О числе постоянных произвольных, входящих в общий интеграл дифференциальных уравнений о двух переменных".

В 1869 г. защитил магистерскую диссертацию (на степень магистра прикладной математики) кандидат, приват-доцент Василий Петрович Алексеев на тему: „Монография учения о притяжении и теория потенциалов".

В 1874 г. защитил диссертацию на степень доктора прикладной математики магистр Лигин на тему: „Обобщение некоторых геометрических свойств движения систем" (Одесса, 1873).

В 1875 г. защитил магистерскую диссертацию приват-доцент Харьковского университета Константин Алексеевич Андреев (с 1879 по 1898 г. профессор Харьковского университета) на тему: „О геометрическом образовании плоских кривых".

В 1885 г. защитил докторскую диссертацию Матвей Александрович Тихомандрицкий (с 1883 г. — штатный доцент, с 1888 г. — профессор Харьковского университета) на тему: „Обращение гиперэллиптических интегралов".

В 1893 г. защитил магистерскую диссертацию магистрант Владимир Петрович Алексеевский (приват-доцент Харьковского университета в 1893 г., с 1896 г. по 1904 г. — исправляющий должность экстраординарного профессора) на тему: „О функциях подобных функции Гамма".

В 1894 г. защитил диссертацию на степень магистра прикладной математики Владимир Андреевич Стеклов (с 1891 г. — приват-доцент, с 1896 до 1906 г. — профессор Харьковского университета) на тему: „О движении твердого тела в жидкости".

В 1899 г. защитил магистерскую диссертацию Николай Николаевич Салтыков (с 1906 по 1918 г. — профессор механики Харьковского университета) на тему: „Об интегрировании дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции".

В 1902 г. защитил диссертацию на степень доктора прикладной математики В. А. Стеклов на тему: „Общие методы решения основных задач математической физики".

В 1907 г. защитил докторскую диссертацию Н. Н. Салтыков на тему: „Исследования по теории уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции“.

В 1908 г. защитил магистерскую диссертацию Сергей Натанович Бернштейн (с 1908 г. приват-доцент, с 1918 по 1933 г. — профессор Харьковского университета) на тему: „Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа“.

В 1913 г. защитил докторскую диссертацию С. Н. Бернштейн на тему: „О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени“.

Назовем еще лиц, защищавших в Харьковском университете диссертации pro venia legendi по математическим наукам.

В 1867 г. защитил такую диссертацию Нерадостовский на тему: „Интегрирование дифференциальных уравнений 1-го порядка и какой угодно степени относительно производной“.

В 1870 г. защитил такую диссертацию кандидат Веребрюсов на тему: „Задача Кеплера“.

В 1872 г. защитил такую диссертацию кандидат Николай Попов на тему: „Основные свойства перестановок (substitutions).

В 1873 г. защитил такую диссертацию кандидат К. А. Андреев на тему: „О составлении таблиц смертности, опыт теоретического исследования законов смертности для России“.

Глава II

Диссертации, защищавшиеся в Харьковском университете

Переходя к рассмотрению отдельных, защищавшихся в Харьковском университете диссертаций, мы должны заметить, что далеко не все эти диссертации сохранились до настоящего времени, а некоторые диссертации не сохранили даже своих названий. Это объясняется тем, что в первой половине XIX столетия многие диссертации не печатались.

Я нигде не мог найти заглавия магистерской диссертации А. Ф. Павловского (1813 г.), что очень печально, ибо А. Ф. Павловский является одним из выдающихся профессоров математики Харьковского университета. Неизвестны также заглавия докторских диссертаций В. И. Лапшина (1839 г.) и А. П. Шидловского (1846 г.).

О других диссертациях мы знаем только по их заглавиям. Например, интересно было бы познакомиться с магистерской диссертацией Н. М. Архангельского (1811 г.) «De matheseos natura» («О природе математики») — повидимому, философского характера.

Вероятно, была интересна магистерская диссертация М. А. Байкова (1821 г.) «О различных способах излагать дифференциальное исчисление и о достоинствах каждого способа».

Переходя к рассмотрению сохранившихся диссертаций, мы не ограничимся одними только официальными диссертациями, но рассмотрим также и те работы, за которые авторам присуждены ученые степени honoris causa. Таких случаев, как мы видели в предыдущей главе, было два.

Идя в хронологическим порядке, начнем с рассмотрения труда «Курс математики» профессора Т. Ф. Осиповского, получившего в 1807 г. степень доктора honoris causa.

Первый том этого труда издан в 1802 г. и озаглавлен: «Часть первая, содержащая общую и частную арифметику» (Общей арифметикой со времени Эйлера называли алгебру). Первые 66 страниц книги посвящены «частной» (т. е. обычной) арифметике. Вначале даются разъяснения (определения) основных понятий: аксиома, теорема, лемма, задача и т. д. (Эти разъяснения с современной точки зрения, конечно, устарели).

Далее идут определения действий и правила их выполнения над целыми числами и дробями; излагаются именованные числа и действия с ними; затем идут десятичные дроби и, наконец, последние 6 страниц посвящены непрерывным дробям.

Интересно, что «биллион» Осиповский определяет, как 10^{12} (по Шюке), а не 10^9; «триллион» равен 10^{18} (а не 10^{12}).

Вторая часть первого тома озаглавлена: «Общая арифметика или алгебра»; она занимает 290 страниц и разделяется на три отделения: I. О величинах вообще под разными видами рассматриваемых. II. Об уравнениях. III. О суммировании рядов и преобразовании формул.

В отделении I изложены действия с буквенными выражениями, включая и радикалы, относительные числа, извлечение квадратных и кубических корней, бином Ньютона для всякого (даже и комплексного) показателя, логарифмы и ряды для них, пропорции, прогрессии, тройные правила.

В отделении II говорится об уравнениях 1-й степени с одним и многими неизвестными, квадратных уравнениях, уравнениях высших степеней, о формуле Кардано, о решениях уравнений 4-й степени, о приближенном вычислении корней уравнений высших степеней, — способ, аналогичный способу Горнера, только без схемы Горнера (Горнер дал свой способ только в 1819 г.), говорится о способах Бернулли, Лагранжа, ложного положения. Далее изложены неопределенные уравнения 1-й степени и некоторые типы неопределенных уравнений 2-й степени и даже 3-й степени.

В отделении III выводятся формулы суммирования различных выражений, некоторые случаи бесконечных рядов, непрерывные дроби, разложение алгебраических дробей на простейшие.

Второй том «Курса математики» Осиповского озаглавлен «Том второй, содержащий Геометрию, прямолинейную и сферическую Тригонометрию и введение в криволинейную Геометрию», Спб., 1801 г. (319 стр. in 4°).

Геометрия состоит из трех частей: I. Лонгиметрия. II. Планиметрия. III. Штереометрия. К лонгиметрии причисляются треугольники, многоугольники, окружность, углы, равенство и подобие фигур, задачи на построение. К планиметрии относятся площади фигур и некоторые алгебраические соотношения. Интересен геометрический вывод формулы Герона, отличный от Геронова. К планиметрии также относятся правильные многоугольники, превращение фигур в равновеликие, наконец, положение прямых и плоскостей в пространстве. К штереометрии относятся вычисления поверхностей и объемов тел. Объем называется «толстотою».

В прямолинейной тригонометрии тригонометрические функции определяются, как линии в круге. Выводятся формулы гониометрии, бесконечные ряды для синуса и косинуса, формула Муавра. Затем изложено решение треугольников и употребление логарифмов. В конце дано тригонометрическое решение кубического уравнения в неприводимом случае.

В сферической тригонометрии выводятся формулы для решения сферических треугольников; излагаются практические задачи астрономического содержания.

В последней части, озаглавленной «Введение в криволинейную геометрию», выводятся свойства конических сечений элементарными методами, без всякого упоминания о координатах. В связи с равносторонней гиперболой вводятся натуральные логарифмы. Дается понятие о радиусах кривизны для конических сечений. Далее элементарными методами рассматривается «Циссоида Диоклова», «спиральная линия Архимедова», «квадратрисса Династратова», циклоида, эволюты параболы, эллипса, циклоиды.

Рассмотрим теперь вкратце «Том III, содержащий в себе теорию аналитических функций, в коей рассматриваются: преобразование функций; изменение функций вообще по разностям и вариациям и суммование разностных функций; дифференцирование функций и интегрирование дифференциальных функций; интегрирование уравнений как в целых, так и в частных дифференциалах и вариационное исчисление», Спб., 1823, 571 стр.

Хотя этот том издан позднее присуждения Осиповскому степени доктора, но я считаю необходимым рассмотреть вкратце его, ибо степень доктора honoris causa была присуждена Осиповскому по совокупности его научных и преподавательских заслуг, а преподавал он несомненно по своему учебнику, третий том которого задолго до его напечатания имелся уже в рукописи.

Длинное заглавие третьего тома уже говорит о его содержании. Первая часть книги озаглавлена «Неопределенная аналитика или феория функций». Даются общие определения, классификация функций, различные виды и преобразования алгебраических и элементарных трансцендентных функций, бесконечные ряды и произведения, раскрытие неопределенностей. Даются основные формулы исчисления конечных разностей, интерполяция, суммирование функций.

Далее вводится „дифференциальное содержание" (т. е. производная) и дифференциал; дается нестрогое рассуждение: „Если при $\Delta x=0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}=X$, то X называется „пределом содержания". Для обозначения дифференциалов и производных употребляется круглое ∂. Выводятся формулы дифференцирования; вводятся дифференциалы „высших степеней" (т. е. порядков), формально выводится ряд Тейлора бесконечный), дается полный дифференциал функции нескольких переменных, нахождение экстрема. Далее говорится „о нахождении равных множителей в функциях или равных корней в уравнениях" — нечто в роде выделения кратных корней. Даются еще кое-какие разложения в ряды.

В интегральном исчислении, в книге I, говорится «Об интегралах разных дифференциальных функций». Здесь определяется неопределенный интеграл с произвольной постоянной, называемый «полным интегралом», выводятся многочисленные формулы интегрирования функций. Затем интегрируется выражение

$$P\partial x+Q\partial y+R\partial z+\ldots=\partial V,$$

если исполнено условие интегрируемости. Решаются различные задачи, относящиеся к интегрированию.

В книге II речь идет «О дифференциальных уравнениях». Общий интеграл называется «полным», вместо термина «порядок» употребляется «степень» уравнения.

В статье 1 «О дифференциальных уравнениях 1-й степени двух изменяемых величин» рассматриваются обычные типы уравнений 1-го порядка и особенные интегралы.

В статье 2 говорится об интегрирующем множителе для уравнения вида: $P\partial x + Q\partial y + R\partial z + \ldots = 0$. Приводится много примеров. Рассматривается система: $M\partial x + N\partial y + (Px + Qy + R)\partial z = 0$; $M'\partial x + N'\partial y + (P'x + Q'y + R')\,\partial z =)$, где $M, N \ldots M, N, \ldots =$ функции от z и система трех таких уравнений.

В статье 3 речь идет «О разрешении дифференциальных уравнений второй степени» [т. е. порядка], в статье 4 — «О разрешении линейных уравнений всех степеней» (обычным способом). Рассмотрены различные специальные случаи. В статьях 5—7 изложены различные приемы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений в частности и разложение неизвестной функции в бесконечный ряд.

В статье 8 говорится об уравнениях с частными производными 1-го и 2-го порядка.

Наконец, 3-е и последнее отделение этого тома, занимающее 29 страниц, посвящено «вариационному исчислению». Собственно, это только введение в вариационное исчисление. При этом как-то неожиданно рассматриваются и пределы интеграла, хотя определенный интеграл нигде не был определен. Выведено дифференциальное уравнение (в общем виде) для нахождения экстремума интеграла.

К сожалению, существовавший в рукописи 4-й том «Курса математики» Осиповского не был напечатан. Мне не известно, сохранилась ли еще рукопись этого тома и каково было ее содержание. Вероятно там были изложены геометрические приложения анализа: метод координат, геометрическое представление производной и дифференциала, теория определенных интегралов — то, чего мы не нашли в имеющихся трех томах, но что необходимо должно было быть в таком солидном учебнике.

Переходим к рассмотрению магистерской диссертации Н. А. Дьяченко: «Об успехах после Ейлера сделанных в нахождении интегралов определенных и об употреблении их», Харьков, 1835 г. (48 стр. in 4°).

Работа эта состоит из введения (в 1 стр.) и двух частей: ч. I (стр. 4—39) «Об успехах после Ейлера сделанных в нахождении интегралов определенных»; ч. II (стр. 40—46) «Об употреблении интегралов определенных». Последние 2 страницы — резюме: «Основные мысли рассуждения».

Во введении Валлис назван, как изобретатель определенных интегралов; говорится о способах, употребляемых Эйлером при нахождении определенных интегралов; упоминаются Лежандр, Лаплас, Пуассон, Коши.

Интересна и довольно обширна часть 1. Это — подробное собрание формул для определенных интегралов, общих формул, разбор многих частных случаев.

В небольшой части II не приводится ни одной формулы, только указаны имена Парсеваля и Коши и говорится об интегрировании уравнений в частных дифференциалах с помощью интегралов определенных.

Вся работа носит компилятивный характер. Только в заключительном резюме в двух местах автор выражает свое несогласие с Пуассоном и с Коши — по поводу случаев, когда подинтегральная функция становится бесконечной или неопределенной между пределами интегрирования, — да и то неудачно. Интересно, что автор не дает объяснения рассматриваемым случаям, но оба раза пишет: «Представляю свое замечание опытному суду членов физ.-матем. отделения».

Переходим к рассмотрению магистерской диссертации Е. И. Бейера: «О решении определенных буквенных алгебраических уравнений» (1849 г.). Диссертация эта не напечатана, рукопись ее представляет собой 156 больших страниц (in 4°).

Вначале дается подробный исторический обзор. Бейер пользуется обозначением Остроградского ∇ для корня алгебраического уравнения и говорит о разложении корня в бесконечный ряд; он упоминает Ньютона, Ламбера, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Якоби. Для вычисления функции ∇ Бейер называет 4 способа: 1) Ньютона и Крамера; 2) первый способ Ламбера и Эйлера; 3) способ Лагранжа и Якоби; 4) второй способ Ламбера. Анализирует все эти способы. Упоминает о способе Лагранжа непрерывных дробей и об исследованиях Фурье (1831 г.). Бейер пишет: «Так как Фурье только в коротких словах высказал свои мысли об этом предмете, то я решился, по возможности, развить их и таким образом обобщить и пополнить способ Ньютона».

Далее Бейер говорит, что поставленная им задача имеет три части: 1) решение буквенных уравнений с одним неизвестным; 2) решение системы буквенных уравнений; 3) приложение буквенных уравнений к кривым линиям и поверхностям. Главная часть задачи — первая.

Работа разделена на 3 главы: глава I. Построение нисходящих рядов; глава II. Построение восходящих рядов; глава III. Решение самого общего буквенного уравнения.

По существу содержание работы — разложение в ряды алгебраической функции. Автор берет уравнение:

$$fx = \varphi_0 x^n + \varphi_1 x^{n-1} + \varphi_2 x^{n-2} + \ldots + \varphi_{n-1} x + \varphi_n = 0,$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ — целые рациональные функции от a. Задача автора — разложить x, как функцию от a, в ряды по возрастающим или убывающим степеням a. В главе I автор кропотливо определяет показатели у a в первых, вторых и третьих членах разложения x по нисходящим степеням a, а затем определяет и коэффициенты отдельных членов. В главе II то же находится для восходящих разложений. Наконец, в главе III рассматривается уравнение общего вида:

$$\Psi_0(a, b, c,\ldots)x^n + \Psi_1(a, b, c,\ldots)x^{n-1} + \ldots + \Psi_{n-1}(a, b, c,\ldots)x + \Psi_n(a, b, c) = 0,$$

то есть разлагается в ряд алгебраическая функция нескольких переменных.

Любопытно заключение автора: «Решение алгебраических уравнений есть особенного рода действие, которое не есть соединение элементарных правил для извлечения корней, но зависит от совокупности вычисления всех коэффициентов предложенного уравнения.

Если корни изображаются конечными формулами, то действие останавливается само собою и дает эти корни.

Если же корни изображаются только бесконечными рядами, то разыскиваются последовательно разные части корней.

Решение уравнений буквенных, говоря вообще, предполагает решение уравнений численных. Этим подтверждается мнение Фурье. Наконец, предложенные мною обследования оправдывают мнение, первоначально высказанное вскользь Ньютоном в письме к Валлису, а потом повторенные Фурье, что решение уравнений буквенных есть вопрос во всем подобный алгебраическому извлечению корней из многочленов буквенных.

Вследствие этого вопрос о решении уравнений буквенных можно считать оконченным, если даже предлагаемые мною приемы допускают некоторые упрощения.

Разумеется, употребление рядов, изображающих корни, может быть полезно только тогда, когда они сходящиеся; поэтому нужно еще дать правила распознавать сходимость этих рядов. Но как необходимая для того теория слишком увеличила бы объем рассуждения, то статью эту я решился отложить до другого времени.

Впрочем, как главное приложение теории буквенных уравнений, составляет теория кривых линий и поверхностей, а там всегда один элемент предполагается бесконечно малым, или бесконечно большим, то ряды для корней всегда будут сходящиеся. Можно еще прибавить, что как и при извлечении корней первый вопрос состоит в том, чтобы знать выкладку этого действия, а распознавание того, доставляет ли эта выкладка, в частных случаях, сходящиеся ряды, — есть уже вопрос особенный; то то же самое имеет место и при решении буквенных уравнений».

В конце приводятся два примера уравнений.

Рассмотренная работа представляет собою развитие и детализирование методов Ньютона, Лагранжа, Фурье. Но автор, боясь слишком увеличить объем своей работы, недооценивает вопроса о сходимости выводимых рядов. Его ссылка на геометрические приложения просто непонятна.

Переходим к рассмотрению магистерской диссертации Д. М. Деларю: «Общая теория алгебраического решения уравнений», Харьков, 1864 (114 стр.).

Во введении, занимающем 20 стр., автор дает исторический обзор вопроса об алгебраическом решении алгебраических уравнений, довольно подробно останавливается на результатах Абеля, упоминает об Остроградском, о Мальмстене, об исследованиях Галуа, Кронекера, Эрмита. В конце введения кратко резюмируется вся работа.

В § I дается классификация Абеля радикальных функций, указывается, как уничтожить радикалы в знаменателе, доказывается, что всякая радикальная функция есть корень алгебраического «несократимого» (т. е. неприводимого) уравнения с рациональными коэффициентами.

В § II выводится общий вид корней разрешимого алгебраически «несократимого» уравнения простой степени и в связи с этим доказывается неразрешимость в радикалах уравнения простой степени, большей трех, в общем виде. Затем весьма сложно доказывается теорема Галуа об условии разрешимости в радикалах неприводимого уравнения простой степени.

§ III озаглавлен «Исследования Галуа касательно разрешимости алгебраических уравнений в радикалах». Здесь излагаются основные теоремы теории Галуа. Вводится и группа Галуа данного уравнения; говорится о «понижении» этой группы от «причисления» к уравнению подходящим образом выбранной численной величины. Заканчивается этот параграф уже приведенной выше теоремой Галуа, которая здесь выводится новым путем, из результатов исследований Галуа.

§ IV посвящен исследованию абелевских уравнений. «Абелевскими» уравнениями автор называет циклические уравнения и их обобщения, то есть уравнения, которые разбиваются на n циклических уравнений после того, как решено вспомогательное уравнение n-й степени. В работе дается решение в радикалах циклических уравнений.

Диссертация заканчивается пятью мало связанными с работой «тезисами». Приведем некоторые из них.

I. «Общепринятое разделение математического анализа на анализ конечных — алгебру — и анализ бесконечно-малых — Calcul infinitésimal—не удовлетворяет современному состоянию науки. Гораздо удобней разделять анализ на алгебраический — теорию алгебраических функций — и на трансцедентный — теорию трансцедентных функций».

II. «Дифференцирование есть действие алгебраическое в том смысле, что оно всегда одни алгебраические функции изменяет в другие, также алгебраические; поэтому изложение правил дифференцирования должно входить в предмет алгебраического анализа.

Интегрирование, напротив, может быть рассматриваемо, как средство для перехода от алгебраических функций к функциям трансцедентным».

III. «Алгебраический анализ, как теорию алгебраических функций, всего удобнее разделить на две части: на исчисление явных алгебраических функций и на исчисление неявных алгебраических функций — теорию алгебраических уравнений».

Рассмотренная работа важна тем, что является, насколько мне известно, первым изложением на русском языке основ теории Галуа. Конечно, Деларю не оценил еще должным образом теории Галуа во всей ее полноте, да и не смог ее оценить в то время, когда она и на своей родине, во Франции, была еще мало известна. Только в 1870 году появилась знаменитая монография Жордана «Traité des substitutions et des équations algébriques», разъяснившая и дополнившая весьма краткие и сжатые исследования Галуа и сделавшая их достоянием широких математических кругов. А за 6 лет до этого харьковский математик Деларю в своей диссертации обнаруживает серьезное знакомство с исследованиями Галуа.

Рассмотрим теперь докторскую диссертацию Корнелия Карастелева «Теория изменения произвольных постоянных и приложение ее к вычислению изменений элементов планет по способам Лагранжа и Пуассона», Одесса, 1865 [V + 136 стр.].

Речь идет об интегрировании некоторых типов дифференциальных уравнений методом так называемой вариации произвольных постоянных, принадлежащим Лагранжу. Путем подходящих преобразований автор опровергнул возражения Бине против вычислений Лагранжа производных пертурбационной функции (во 2-й части аналитической механики Лагранжа).

Работа состоит из трех глав: 1. «Обозрение исследований геометров об изменении произвольных постоянных». 2. «Изменение произвольных постоянных в двух системах дифференциальных уравнений 1-го порядка. Приложение общего способа изменения произвольных постоянных к вычислению изменений элементов планет по способу Лагранжа. 3. «Вычисление изменений элементов планет по способу Пуассона». Автор подробно излагает способ Пуассона нахождения дифференциальных уравнений, определяющих изменения произвольных постоянных, и дает два доказательства теоремы Пуассона о том, что символ (a, b) не зависит от времени.

Работа относится к области небесной механики.

Переходим теперь к рассмотрению магистерской диссертации М. Ф. Ковальского: „Теория интегрирующего множителя дифференциальных уравнений вида $f(x, y)dx + F(x, y)dy = 0$", Харьков, 1866 [VII + 116 стр.].

В предисловии указываются две задачи, которые поставил себе автор: 1. „Постановляем теорему, в каких случаях результат одного дифференцирования, будучи подвергнут действию умножения (деления), может остаться еще точным дифференциалом, и в каких теряет это свойство. 2) Рассматриваем уравнения вида $Mdx+Ndy=0$, которые интегрируются с помощью множителя $V=f(x)f_1(y)$, и некоторые другие, более мелкие вещи".

Диссертация состоит из пяти глав.

В главе I даются элементарные определения и приводится доказательство существования интеграла уравнения: $dy=f(x,y)dx$ (посредством бесконечных рядов).

В главе II интегрируется уравнение $Mdx+Ndy=0$, где выполнено условие: $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

В главе III дается понятие об интегрирующем множителе уравнения $Mdx+Ndy=0$; доказывается, что множество интегрирующих множителей бесконечно; устанавливается зависимость между ними.

В главе IV рассматриваются различные частные случаи интегрирующего множителя и функций M и N. Доказывается следующая теорема Лиувилля: „если $dy-\varphi(x, y)dx=0$ данное уравнение, где φ, кроме x, y, зависит еще от параметра α, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\varphi=\varphi_1$, и $\psi(\varphi)$ какая-нибудь функция от φ, — если при том $\psi(\varphi)\varphi_1$ не зависит от α, то данное уравнение имеет интегрирующий множитель $\psi(\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$".

В главе V — нахождение интегрирующего множителя помощью частных решений (способ Миндинга).

Автор дает обобщение способа Миндинга.

Далее рассматривается задача Эйлера: найти дифференциальные уравнения, для которых интегрирующий множитель имеет данный вид. Разбираются примеры.

Метод в работе — чисто формальный; масса выкладок; изложение растянуто.

В конце работы приведены «тезисы» философского характера, имеющие очень мало общего с самой работой. Интересен тезис 5-й: «Не должно стесняться (при рассмотрении интегралов для данных дифференциальных уравнений) расходящимися рядами, если только таковые и возможны, как интегралы этих уравнений».

Теперь рассмотрим работу Е. И. Бейера «Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений с каким угодно числом изменяемых величин», Харьков, 1858 г. (189 стр.). Это одна из четырех работ (и единственная напечатанная), за которые совет Харьковского университета присудил Бейеру степень доктора honoris causa в 1867 году.

На первых 12 страницах работы дается большой исторический очерк. Упоминаются Ньютон, Эйлер, Фонтень, Монж, Паоли, Пфафф, Якоби, Коши, Бине. В заключение говорится: «Из сделанного мною бегло исторического обзора тотчас открывается: 1) что вопрос об интегрировании линейных дифференциальных уравнений с каким угодно числом изменяемых приводится, в настоящее время, главным образом, к интегрированию уравнений Пфаффа, т. е. уравнений с четным числом переменных и к решению уравнений с нечетным числом аргументов, 2) что теория уравнений с четным числом изменяемых может считаться оконченою, хотя и допускает развитие некоторых методов Якоби, но что интеграция уравнений о нечетном числе переменных ожидает еще выполнения.

Не зная ни одного сочинения, в котором предмет этот рассматривался бы во всем его объеме, я предлагаю следующее довольно полное рассуждение, в котором теорему Монжа связываю с исследованиями

Пфаффа и Якоби; развиваю мысли Якоби, высказанные им в 17 томе Журнала Крелля и в «Mathematische Annalen», Band 1; наконец, даю способ для интегрирования уравнений, заключающих нечетное число изменяемых».

Вся работа разделяется на шесть параграфов. Речь идет об интегрировании дифференциального уравнения.

$$Xdx + X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots + X_m dx_m = 0.$$

Применяемые методы — чисто формальные. Работа носит компилятивный характер; более самостоятельны § V («Интегрирование линейных дифференциальных уравнений между нечетным числом переменных количеств») и § VI («Интегрирование таких линейных дифференциальных уравнений, в которых коэффициенты удовлетворяют только части условий интегральности»).

В „прибавлении" автор дает способ интегрирования уравнения:

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dv = 0, \text{ где}$$
$$M(x, y) = ay^2 + byx + cx^2 + ey + fx + g,$$
$$N(x, y) = a'y^2 + b'yx + c'x^2 + e'y + f'x + g'.$$

Интересно, что рассматриваемая работа озаглавлена: «Речь, написанная для произнесения в торжественном собрании имп. Харьк. Университета 8 сентября 1858 г.». Изложить такую огромную работу в виде «речи», конечно, невозможно.

Переходим к рассмотрению докторской диссертации Д. М. Деларю: «О разыскании особенных решений дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от двух переменных», Харьков, 1868 (82 стр.).

В историческом обзоре указывается, что первыми нашли особые решения дифференциальных уравнений Лейбниц и Иван Бернулли, а также Тейлор, который вывел особое решение непосредственно из самого дифференциального уравнения и ввел самое название «особенное решение». Затем упоминаются Клеро, Эйлер, Лаплас, Лагранж, Пуассон, Коши, Раабе, Буль.

Работа разделяется на две главы:

1. «Об основных началах теории особенных решений и о способах их разыскания по данному полному интегралу дифференциального уравнения» («Полным» интегралом Деларю называет общий интеграл).

2. «О разыскании особенных решений дифференциальных уравнений первого порядка между двумя переменными, когда полный интеграл неизвестен». «Во второй главе, — говорит автор во введении, — я начинаю с вывода условий Лапласа, руководствуясь приемами Лагранжа, но стараюсь изменить эти приемы так, чтобы устранить неточности, замеченные в них другими геометрами. Далее, приведя параллель между условиями Лапласа и условиями, служащими для вывода особенных решений по данному полному интегралу, я разбираю исследования Буля и указываю на ошибочность его выводов относительно значения первых из этих условий. Показав, что условия Лапласа недостаточны для отличия, в каждом данном случае, особенных решений от частных интегралов, я перехожу, наконец, к доказательству теорем Коши, пополняющих этот недостаток, чем и заключаю свое рассуждение».

Далее автор замечает, что в иных местах (например, при выводе условий Лапласа) ему приходилось значительно изменять приемы доказательств и дополнять их собственными умозрениями.

В работе нет никаких геометрических интерпретаций, изложение неглубокое. Автор слишком свободно обращается с символом ∞, например (на стр. 54): „для получения особенных решений дифференциального уравнения $f(x, y, p)=0$, нужно исключить p между ним и тем или другим из равенств $\frac{dp}{dy}=\infty$, $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{p}\right)=\infty$". Многие рассуждения нестроги. Во всей работе рассматривается только простейший случай: особенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка между двумя переменными x и y.

Остановимся теперь на докторской диссертации М. Ф. Ковальского «О числе постояннных произвольных, входящих в общий интеграл дифференциальных уравнений о двух переменных», Харьков, 1868 г. (XIV + 43 стр.).

В этой работе речь идет о числе произвольных постоянных общего интеграла дифференциального уравнения. Автор находит, что, если степень дифференциального уравнения относительно высшей производной есть $n > 1$, то число произвольных постоянных в его общем интеграле будет больше, чем порядок этого уравнения.

Работа состоит из четырех глав.

В главе I уравнение $\frac{d^n y}{dx^n}=f(x, y, y', \ldots y^{n-1})$ интегрируется при помощи бесконечного ряда способом, отличным от обычного: фунция f разлагается в ряд Тейлора по степеням $x-a$ и полученный результат почленно интегрируется n раз.

В главе II рассматриваются первые, вторые, вообще k-е интегралы данного дифференциального уравнения, говорится об исключении произвольных постоянных из общего интеграла данного уравнения, даются методы этого исключения и получения вновь данного дифференциального уравнения.

В главе III рассматривается общий интеграл уравнения n-го порядка, и m-й степени относительно высшей производной. Предполагается, что левая часть уравнения разложена на m линейных множителей: $\Pi(y^n+f_i)=0$. Проинтегрировав каждое из уравнений $y^n+f_i=0$, перемножим полученные общие интегралы: $F_i(x, y, c_{i1}, c_{i2}\ldots c_{in})=0$ и положим $c_{rk}=c_{sk}$ (при всяких r, s, k).

В главе IV автор находит, что нельзя отожествлять $c_{rk}=c_{sk}$, и получает более общие формы интеграла, которые называет „частными изобилующими интегралами", ибо эта форма—не самая общая: степени остальных производных тоже влияют на форму интеграла. Доказывается, что изобилующий интеграл есть общий интеграл уравнения порядка $s=mn$.

Метод во всей работе — чисто формальный, масса выкладок.

Переходим к рассмотрению магистерской диссертации В. П. Алексеева: «Монография учения о притяжении и теория потенциалов», Харьков, 1869 г. (VI + 187 стр.).

Во введении автор дает исторический обзор, заканчивая его словами: «Полагая, что историческое последовательное изложение разработки вопроса о притяжении может иметь некоторое учебно-педагогическое значение, я сделал вопрос о притяжении предметом моей монографии, старался соединить в ней в одно целое все основные аналитические исследования по этому предмету, по возможности сблизить выводы и упростить их определение». Работа состоит из пяти глав.

В главе I даются основные определения и формулы, изложена теорема Стокса.

Методы исследования вопроса о притяжении излагаются во второй главе. В ней же разбираются различные случаи, в частности, случай, когда сила притяжения прямо пропорциональна расстоянию, говорится о координатах Лапласа, об исследовании Шаля относительно притяжения сфероидов.

В главе III речь идет о вторых производных от потенциала, об уравнениях Лапласа и Пуассона, о приеме Клаузиуса, об исследовании потенциала по методу Гаусса.

Глава IV рассказывает о разложении потенциала в ряд, о преобразовании координат по способу Ламе и по Веберу, о решении уравнений Лапласа и Пуассона при помощи шаровых функций.

В главе V рассматривается случай распространения действующих масс по поверхности, теорема Грина, исследования Гаусса и доказательство его теоремы: всякому распределению масс по объему данного тела соответствует некоторое распределение по поверхности и притом только одно. Рассматривается частный случай, при котором это распределение по поверхности может быть найдено.

Рассматриваемая работа — солидная и полная монография по теории потенциала, но и она носит компилятивный характер.

Идя в хронологическом порядке, рассмотрим теперь диссертацию pro venia legendi К. А. Андреева: «О таблицах смертности. Опыт теоретического исследования о законах смертности и составления таблиц смертности для России». Москва, 1871 г. (136 стр., таблицы, чертежи).

Эту работу Андреев написал будучи студентом Московского университета и получил за нее золотую медаль.

В диссертации, носящей статистический характер, широко применяется теория вероятностей, а также геометрическое представление. В ней пять глав: 1. Общий взгляд на исследование законов смертности. Таблицы смертности; их цель и значение. 2. Геометрическое представление Цейнера. Взгляд на таблицы смертности с геометрической точки зрения. 3. Способы составления таблиц смертности. 4. Составление таблицы смертности для России по имеющимся статистическим данным. 5. Попытка исследования зависимости смертности от климатических условий.

В конце работы автор делает следующее заключение.

«Из всего сказанного в двух последних главах следует, что смертность в России по крайней мере в то десятилетие, к которому я относил свое исследование (50-е годы XIX в.), весьма быстро изменялась со временем, и кроме того, что смертность претерпевает в России весьма значительные изменения с изменением географического положения места и по преимуществу широты. Нет никакого сомнения, что последняя особенность смертности в России обусловливается чрезвычайным разнообразием в климатических свойствах страны. Что же касается первой особенности смертности в России, т. е. весьма быстрого изменения ее со временем в 50-х годах настоящего столетия, то найти причины ее не так легко, хотя и можно думать, что 50-е годы представляют переходной период от времени, в которое Россия имела весьма невыгодные условия жизни, ко времени, в которое эти условия вступают в новую норму приблизительно такую же, как и в других странах Европы».

Коротко остановимся на докторской диссертации В. Лигина: «Обобщения некоторых геометрических свойств движения систем». Одесса, 1873 г. (XIII + 36 стр.).

Работа состоит из двух частей: в первой части автор рассказывает об ускорениях высших порядков в движении неизменяемой системы. («Ускорения высших порядков» — ряд последовательных геометрических производных скорости по времени; ввел их Трансон (Transon) в 1845 г.). Автор исследует ускорения высших порядков с тех сторон, которые не были затронуты в «Кинематике» Сомова (1872 г.) и выводит некоторые новые общие свойства ускорений n-го порядка точек неизменяемой системы. В части II речь идет о геометрических свойствах перемещений плоских фигур. Здесь выведены некоторые общие законы для простейшего случая движения плоской коллинеарно-изменяемой фигуры в своей плоскости; отсюда, как простые следствия, получаются свойства плоского движения подобно изменяемой и неизменяемой фигуры, открытые Шалем.

Интересна магистерская диссертация К. А. Андреева: «О геометрическом образовании плоских кривых», Харьков, 1875 г. (76 стр.). В ней шесть глав: глава I — введение, глава II — о способах образования кривых вообще, глава III — геометрическое происхождение взаимно-двузначного соответствия, глава IV — особые элементы взаимно-двузначных элементарных форм, глава V — о данных, определяющих взаимно-двузначное соответствие, глава VI — кривые линии, образуемые взаимно-двузначными элементарными формами.

В работе вводится так называемое взаимно-двузначное соответствие двух пучков лучей в плоскости: пусть O и O' — центры двух пучков лучей, A, B, C — три луча 1-го пучка, K, L, M — три прямые, вообще не проходящие ни через O, ни через O'. Пусть произвольный луч 2-го пучка $O'X'$ пересекает K, L, M в соответствующих точках α, β, γ; лучи $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ определяют проективное соответствие в пучке O, если $O\alpha$, соответствует A, $O\beta - B$, $O\gamma - C$. Это соответствие имеет два двойных луча, которые поставим в соответствие с $O'X'$. Меняя $O'X'$, мы меняем $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, то есть и проективное соответствие в пучке O и его двойные лучи. Доказывается, что при этом каждому лучу OX первого пучка соответствуют 2 луча в пучке O' и что вообще это соответствие симметрично относительно пучков O и O'. Рассматриваются свойства этого взаимно-двузначного соответствия. Выясняется, что при этом луч OO' соответствует сам себе, то есть пучки находятся в „перспективном положении“. Если O'' — третий пучок, проективный пучку O', то пучки O и O'' тоже во взаимно-двузначном соответствии, но уже не в перспективном положении. Точки пересечения соответствующих лучей в этом случае образуют кривую. Доказывается:

1. В общем положении пучков образуется кривая 4-го порядка с двойными точками в центрах пучков.
2. В перспективном положении пучков образуется кривая 3-го порядка, проходящая через центры пучков.
3. В так называемом „дважды перспективном“ положении пучков образуется кривая 2-го порядка, вообще не проходящая через центры пучков.

Перейдем к рассмотрению докторской диссертации М. А. Тихомандрицкого: „Обращение гиперэллиптических интегралов“, Харьков, 1885 г. (VIII + 156 стр. in 4°).

В предисловии автор дает исторический обзор теории абелевых (в частности, гиперэллиптических) интегралов и излагает вкратце содержание своей работы.

В 1-й главе устанавливаются типы интегралов трех родов, к которым сводится всякий гиперэллиптический интеграл. 2-я глава посвящена выводу соотношений между периодами интегралов 1-го и 2-го рода, основанному на мало известной теории прим-функций Вейерштрасса; сущность этой главы, как говорит автор в предисловии, заимствована им из лекций Вейерштрасса, но изложена иначе, при посредстве римановой поверхности. 3-я глава посвящена выводу абелевой теоремы (о суммах интегралов 1-го, 2-го и 3-го рода) — по Вейерштрассу, по Абелю и Якоби.

Главную часть работы составляют главы IV и V. Как говорит автор в предисловии, в своем изложении он примыкает к лекциям Вейерштрасса, но не воспроизводит просто эти лекции, а дает собственное изложение задачи Якоби (об обращении гиперэллиптических интегралов); при этом он естественным образом приходит к функциям Θ. „После того, как показал переход от интегралов к Θ, — говорит автор, — весьма интересно и важно показать обратный переход от Θ к интегралам: через это вопрос об обращении гиперэллиптических интегралов получает, так сказать, округленность, лучше обнаружится внутренняя глубокая связь между теми и другими трансцендентными; это однако представляет пока большие технические трудности, которые еще неизвестно, когда будут преодолены“.

Большой интерес представляет магистерская диссертация В. П. Алексеевского: „О функциях подобных функции Гамма“, Харьков, 1892 (70 стр.).

Автор рассматривает функции с корнями вида $m\omega + n\omega'$, где m и n — целые отрицательные числа, а ω и ω' — периоды эллиптических функций. Таких функций бесчисленное множество; они отличаются друг от друга внешним множителем. Подстановкой $z = x\omega$ сведем корни к $m + n\alpha$, где $\alpha = \frac{\omega'}{\omega}$. В частном случае такая функция $H(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$H(x+1) = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right) H(x).$$

Параметр α не должен быть обязательно мнимым. Если α — рациональное число, то исследование можно свести к случаю, когда $\alpha = 1$; в этом случае корни становятся кратными. Такую специальную функцию обозначим через $G(x)$. Функции H и G автор и называет подобными функции Γ.

В первых 11 параграфах выводятся некоторые свойства функции G; $\log G(x)$ выражается в виде определенного интеграла; выводятся различные формы бесконечных произведений и разложения в ряды; дается формула удвоения аргумента; находятся интегралы, аналогичные интегралам Раабе и Коши для функции Γ; выводится формула, подобная Стирлинговой; даются некоторые новые выражения для функции Γ.

Следующие 4 параграфа посвящены приложениям. В § 16 указан один общий источник происхождения функций, подобных функции Γ. В §§ 17—19 дается разложение в бесконечное произведение кратных разностных интегралов некоторых функций.

В конце излагаются свойства функции $H(x)$.

Весьма ценной в научном отношении является магистерская диссертация В. А. Стеклова: „О движении тяжелого твердого тела в жидкости“, Харьков, 1891 (36 стр.).

Вся рассматриваемая работа разделена на пять глав.

В главе 1 выводятся дифференциальные уравнения движения твердого тела в жидкости, причем пространство, занятое жидкостью, не предполагается односвязным; оно может даже состоять из несвязанных между собою частей, то есть тело может иметь полости, заполненные жидкостью.

В главах II, IV полученные дифференциальные уравнения интегрируются, причем предполагается отсутствие сил. Интересен метод интегрирования при помощи рядов, когда отношение плотности жидкости к средней плотности тела достаточно мало.

Глава III представляет собой в большей части собственные исследования автора. Здесь рассматриваются: 1) движения с постоянными винтовыми элементами, которые автор называет „установившимися"; 2) движения, производимые импульсами, вектор которых имеет некоторую определенную величину и определенное по отношению к телу направление и приводится к нулю в случае однозначного потенциала скоростей; 3) движение тел с плоскостью симметрии, постоянно остающеюся в неподвижной плоскости; 4) движения, в которых одна из точек тела движется по центральной оси произведших движение импульсов.

В главе IV рассматриваются случаи, когда интегрирование дифференциальных уравнений удается выполнить без каких-либо частных предположений относительно начальных обстоятельств движения. Разбирается вопрос о случаях, когда кроме трех интегралов, указанных Кирхгофом, дифференциальные уравнения движения допускают независимый от них четвертый интеграл; при этом исправляется ошибка Клебша, который указал три случая, как единственные; автор находит четвертый случай. Далее, излагаются исследования Альфена и Кёттера.

В главе V разбирается случай, когда на жидкость и на тело действует сила тяжести. Здесь целиком собственные исследования автора, который приводит дифференциальные уравнения движения к некоторому простейшему виду и находит некоторые интегралы. Далее, разбираются несколько интересных случаев возможных движений. Наконец, для некоторых тел рассматривается вопрос о полном интегрировании дифференциальных уравнений движения.

Рассматриваемая диссертация стоит гораздо выше всех рассмотренных нами до сих пор диссертаций, отличается и богатством материала, и обилием новых открытий автора.

Рассмотрим теперь магистерскую диссертацию Н. Н. Салтыкова „Об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции", Харьков, 1899 (VIII+122 стр.).

Работа имеет семь глав:

Глава I. Об образовании уравнений с частными производными. Понятие об их интегралах.

Глава II. Об интегрировании линейных уравнений.

Глава III. О существовании интегралов уравнений с частными производными.

Глава IV. Об интегрировании уравнений с частными производными.

Глава V. О составлении решений уравнений с частными производными из общего интеграла уравнений в полных дифференциалах.

Глава VI. Теория главных функций и ее приложения.

Глава VII. Решение задачи С. Ли.

В предисловии автор говорит, что „более самостоятельные его мысли и соображения" были опубликованы им в „Comptes Rendus" и в т. VI „Сообщений Харьк. матем. об-ва", частью же изложены впервые в настоящей работе. К ним принадлежат: изложение теории линейных уравнений с частными производными и уравнений в полных дифференциалах, выражение условий замкнутости систем уравнений с частными производными, доказательство существования их интегралов, изложение способа Якоби и Майера, изучение зависимости между задачами интегрирования уравнений с частными производными и уравнений в полных дифференциалах, теорию их главных функций, изложение усовершенствования С. Ли способа Якоби и Майера, решение задачи С. Ли и проч.

Работа представляет подробно изложенную теорию уравнений с частными производными 1-го порядка. Собственные исследования автора находятся главным образом в главах VI и VII; в главе VII делается попытка дать решение задачи С. Ли без помощи теории групп.

В конце приведены „Положения", резюмирующие работу. В частности, в положении 2 автор дает распространение доказательства существования интегралов дифференциальных уравнений методом мажорант Коши на системы совместных уравнений с частными производными многих функций, число которых меньше числа данных уравнений,—совершенно не упоминая (ни здесь, ни в главе III, посвященной этому вопросу) С. Ковалевской.

Остановимся подробнее на докторской диссертации В. А. Стеклова: „Общие методы решения основных задач математической физики. Задача о распределении электричества. Основная задача гидродинамики. Задача об установившейся температуре. Задачи Дирихле (метода К. Неймана) и Гаусса. Фундаментальные функции и их приложения", Харьков, 1901 (291 стр.).

Эта весьма обширная и основательная работа состоит из введения и пяти глав.

В главе I, подготовительной, излагаются основные свойства потенциалов простого и двойного слоя, выводятся некоторые важные неравенства, установленные Ляпуновым, и доказывается одна фундаментальная теорема Пуанкаре.

В главе II автор доказывает, что метод Робина решает основную задачу электротехники (найти плотность электрического слоя, непрерывно распределенного по данной замкнутой поверхности S таким образом, чтобы этот слой не оказывал действия на точки, лежащие внутри S) для всякой замкнутой поверхности, удовлетворяющей некоторым условиям.

В главе III доказывается, что метод Неймана решения основной гидродинамической задачи приложим ко всем поверхностям типа предыдущей главы. Полученные результаты применяются к некоторым задачам аналитической теории тепла; между прочим, решается задача об установившейся температуре.

В главе IV доказывается, что метод средних арифметических Неймана применим ко всем поверхностям предыдущего типа, если только функция f на поверхности подчинена некоторым общим условиям.

Глава V посвящена теории фундаментальных функций. Эти фундаментальные функции, введенные Стекловым, отличаются от фундаментальных функций, введенных ранее Леруа и Пуанкаре. Автор доказывает такую теорему: для всякой поверхности S, удовлетворяющей определенным условиям, при данной непрерывной функции φ, положительной и не обращающейся в нуль на S, существует бесчисленное множество положительных чисел: $\lambda_0 = 0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$, зависящих только от свойств поверхности S и функции φ; этим числам соответствует бесчисленное множество различных между собой функций: $V_0, V_1, V_2, \ldots$, гармонических внутри S, представляемых под видом потенциалов простого слоя и удовлетворяющих условиям: $\frac{\partial V_{ki}}{\partial n} = \lambda_k \varphi V_k$ на поверхности S (i — направление внутренней нормали к S), $\int \varphi V_k^2 ds = 1$, $\int \varphi V_m V_n ds = 0\, (m \lesseqgtr n)$.

Эти функции V_k, зависящие только от свойств поверхности S и функции φ, Стеклов и называет „фундаментальными функциями для данной поверхности, соответствующими функции φ", а числа λ_k — „характеристическими числами этих фундаментальных функций".

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k$, где $A_k = \int \varphi f V_k ds$ (интеграл берется по поверхности S) представляет разложение данной функции f в ряд по фундаментальным функциям, если только он сходится равномерно.

При помощи фундаментальных функций автор решает задачу Дирихле и задачу Неймана.

Рассмотренная диссертация представляет большую научную ценность и состоит почти целиком из собственных исследований автора; особенно ценной является пятая глава.

Критическую оценку и разработку исследований С. Ли дал в своей докторской диссертации „Исследования по теории уравнений с частными производными первого порядка одной неизвестной функции" Н. Н. Салтыков. Харьков, 1905 (XV + 266 стр.).

Эта работа примыкает к магистерской диссертации Салтыкова: „Об интегрировании уравнений с частными производными 1-го порядка одной неизвестной функции" (1899 г.). В рассматриваемую работу вошли результаты десяти работ Салтыкова (из них 9—на французском языке; большая часть работ напечатаны в Comptes Rendus).

Диссертация разделяется на три части, состоящие из десяти глав. Главную часть работы составляет вторая часть.

В своей работе Н. Н. Салтыков пришел к следующим результатам:

1. Установил типы дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка, допускающих интегралы С. Ли.

2. Вывел полный интеграл Лагранжа при условии, что интегралы С. Ли известны.

3. Выяснил значение работ Лиувилля.

4. Выяснил возможность получить не только результаты С. Ли, но и некоторые новые результаты без помощи бесконечно малых преобразований.

Ценным вкладом в науку является магистерская диссертация С. Н. Бернштейна: „Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа", Сообщ. Харьк. матем. об-ва, сер. 2, т. XI, 1910, стр. 1—163.

Рассматриваемая работа состоит из введения и двух частей (7 глав):

Во введении говорится о целесообразности применения в дифференциальных уравнениях методов теории функций, излагается резюме всей работы.

Часть I — „Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа" разделяется на три главы.

В главе I доказывается следующая теорема, открытая Пикаром в 1890 г.: все интегралы дифференциального уравнения 2-го порядка эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0,$$

(где a, b, c — аналитические функции от x, y) — аналитичны, каковы бы ни были входящие в них произвольные функции.

В главе II рассматриваются так называемые нормальные ряды; так автор называет ряды вида:

$\sum\limits_{p=0}^{\infty}\sum\limits_{q=0}^{\infty} A_{pq}x^p(R-x)^q$, если они равномерно и абсолютно сходятся при $0 \leq x \leq R$.

Доказываются теоремы о нормальных рядах, например: „Всякая вещественная функция $f(x)$, имеющая конечную производную на отрезке $(0,1)$, разлагается на этом отрезке в нормальный ряд“.

В главе III с применением нормальных рядов даются два доказательства основной теоремы автора:

„Всякая функция z, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$F\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z, x, y\right)=0$$

и неравенству

$$F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}} \cdot F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}-\frac{1}{4}\left(F'_{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}}\right)^2>0,$$

есть аналитическая функция“.

Эта теорема, обобщающая теорему Пикара, была предугадана Гильбертом; она является частным случаем положения, которое Бернштейн формулировал в 1905 г. в статье“ Sur la déformation des surfaces“ в Mathemat. Annalen: „Всякая функция $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$, удовлетворяющая аналитическому дифференциальному уравнению с частными производными, которая, будучи дана при значениях переменных $|x_1|<p$, $|x_2|<p, \ldots |x_n|<p$, где p — какое-нибудь положительное число, вполне определена при $|x_1|<p+\varepsilon$, $|x_2|<p, \ldots |x_n|<p$, где ε сколь угодно малое число, есть функция аналитическая относительно переменной x_1“.

Из основной теоремы вытекает, между прочим, такое следствие: „Все минимальные поверхности, а также все поверхности положительной кривизны, накладывающиеся на аналитическую поверхность (например, на эллипсоид), аналитичны“.

Часть II посвящена задаче Дирихле: определить функцию z, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению эллиптического типа, обладающую конечными и непрерывными производными первых двух порядков внутри данного контура c и обращающуюся на этом контуре в данную функцию дуги.

Выводятся условия возможности решения задачи Дирихле для различных случаев уравнений эллиптического типа.

Рассмотренная диссертация является одной из лучших среди рассмотренных нами диссертаций.

Немалый интерес представляет и докторская диссертация С. Н. Бернштейна: „О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени“, Харьков, 1912 (153 стр.).

В работе—три части, разделяющиеся еще на главы:

Часть I. О некоторых общих свойствах многочленов.

Часть II. Приближенное вычисление многочленов, наименее уклоняющихся в данном промежутке от данной функции.

Часть III. Разложение непрерывных функций в ряды тригонометрических многочленов.

Главная цель работы — приближенное вычисление наименьшего уклонения $E_n[f(x)]$ многочленов n-й степени от данной непрерывной функции $f(x)$ и исследование связи между законом убывания $E_n[f(x)]$ и дифференциальными свойствами $f(x)$.

В главе I — „Предварительные теоремы о многочленах") доказывается теорема Чебышева о том, что в интервале $(-h, +h)$ наименее уклоняются от нуля многочлены:

$$\frac{A}{2^n}\left[(x+\sqrt{h^2-x^2})^n+(x-\sqrt{h^2-x^2})^n\right]=\frac{Ah^n}{2^{n-1}}\cos\left(n\arccos\frac{x}{h}\right);$$

доказывается теорема А. А. Маркова и другие теоремы.

Во второй главе — „Определение низшего предела уклонения непрерывной функции от многочлена данной степени" гвпервые встречается термин „наилучшее приближение", но без всякоoo определения. Интересен пример функции, имеющей непрерывную производную, хотя тригонометрический ряд для функции расходится. Выводятся теоремы, дающие связь между $E_n[f(x)]$ и дифференциальными свойствами функции $f(x)$. Обобщаются условия Дини-Липшица, дающие возможность исследовать некоторые патологические функции. Найденные теоремы прилагаются к функции $|x|$.

Третьей главой начинается 2-я часть работы. Автор обобщает понятие о многочлене, рассматривая выражения:

$$R_n(x)=B_0x^{\alpha_0}+B_1x^{\alpha_1}+\ldots+B_nx^{\alpha_n},$$

где $0\leqq\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n$ и доказывает для таких функций теорему Декарта о числе положительных корней уравнения $R_n(x)=0$. Далее, для этих функций доказываются теоремы Чебышева и Валле-Пуссена. Доказываются еще две основные теоремы для таких сумм, наименее уклоняющихся от данной голоморфной функции. В конце главы выводятся два неравенства, необходимые для дальнейшего.

Глава IV и добавление к ней посвящены приближенному вычислению отклонения $|x|$ от многочлена данной степени. Автор не дает объяснения, почему именно он рассматривает функцию $|x|$. Здесь же впервые вводится понятие об асимптотических выражениях многочленов P_n.

В главе V говорится о различных приложениях основных теорем и содержатся интересные соотношения между $E_n(f)$ и $E_n(\varphi)$, в зависимости от соотношений функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Здесь же обобщаются теоремы Вейерштрасса.

Добавление к гл. V—„Разложение произвольных функций в нормальные ряды", т. е. в ряды вида

$$\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}A'_{pq}x^p(1-x)^q$$

на отрезке (0,1).

Главы VI и VII составляют 3-ю часть работы. В главе VI доказывается ряд теорем, дающих связь между $E_n[f(x)]$ и приближениями $S_n[f(x)]$ при помощи тригонометрических многочленов. В главе VII— „О некоторых свойствах функций двух переменных" — дается приложение результатов автора к исследованию дифференциальных свойств некоторых функций от двух независимых переменных, в частности, функций, определяемых дифференциальными уравнениями в частных производных 2-го порядка эллиптического типа и дифференциальными уравнениями

$$\frac{\partial^{k+1}z}{\partial x^{k+1}}=f\left(x,\ y,\ z,\frac{\partial z}{\partial x},\dots\frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right);\quad \frac{\partial^{k+1}z}{\partial y^{k+1}}=\varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\dots\frac{\partial^k z}{\partial y^k}\right)$$

при некоторых условиях для f, φ, z.

Эта работа относится к совершенно новой тогда отрасли математики — теории аппроксимации, ведущей свое начало от П. Л. Чебышева, продолжателем которого и является С. Н. Бернштейн. Диссертация — в главных своих частях — была удостоена премии Бельгийской Академии наук.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, за период в 112 лет (1805—1917 гг.) в Харьковском университете было защищено по математике чистой и прикладной (считая и небесную механику) 10 докторских, 14 магистерских диссертаций и 4 диссертации pro venia legendi и, кроме того, были просуждены две степени доктора honoris causa математикам Осиповскому и Бейеру. Это составляет в среднем по одной диссертации почти за четыре года. Правда, нельзя ручаться за полноту имевшихся у меня данных, особенно за первую половину XIX столетия. Конечно, если подходить с современными масштабами, то следует признать такое количество диссертаций за 112 лет очень небольшим. Но соискание ученой степени в старой России, до Октябрьской революции, и не могло быть массовым, как не было массовым и само занятие наукой, сама научно-исследовательская работа. Ведь и высших учебных заведений было очень мало. Характерно, что почти все диссертации (за исключением 2—3) защищались математиками, преподававшими в Харьковском же университете.

Области математики, к которым относятся темы защищавшихся диссертаций, весьма разнообразны, но особенно много диссертаций относятся к теории дифференциальных уравнений и к разным отраслям механики (включая и небесную механику). Таких диссертаций 16; три относятся к алгебре, три — к анализу и теории функций, одна — к методике преподавания дифференциального исчисления, одна — к философии математики и последняя — к новой отрасли математики — к теории аппроксимации. Интересно, что нет диссертаций по теории чисел и теории вероятностей (если не считать диссертации Андреева — pro venia legendi, относящейся, по сути, к статистике), которые и в старой России стояли на высоком уровне. Всего одна диссертация по геометрии.

Следует заметить, что с 1872 г. в Харьковском университете кафедру прикладной математики занимали последовательно В. Г. Имшенецкий, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов; каждый из них покинул Харьков, будучи избран академиком. Конечно, с такой блестящей плеядой специалистов механика в Харьковском университете должна была процветать. Заметим, что докторская диссертация А. М. Ляпунова «Об устойчивости движения» была защищена им в Москве в 1892 г., но напечатана в Харькове.

Переходя к рассмотрению качества и научной ценности диссертаций, защищавшихся в Харьковском университете, следует заметить, что на протяжении первых 70 лет эти диссертации в большинстве своем имели компилятивный характер. Конечно, отдельные авторы вносили в свои диссертации в большей или меньшей степени свой способ изложения, свою трактовку того или иного, часто свои доказательства излагаемых ими теорем. Но главное, что выявлялось в этих диссертациях, была большая эрудиция их авторов, глубокое знакомство с литературой к данной теме. Некоторые из этих диссертаций имели большое значение, как пропагандирование среди наших математических кругов новых математических идей. Такова, например, магистерская диссертация Д. М. Деларю, в которой, как уже было указано выше, в первый раз излагаются на русском языке основы теории Галуа, излагаются в то время, когда эта теория на своей родине, во Франции, еще была мало известна.

Уже со второй половины семидесятых годов положение меняется: от диссертантов требуется, чтобы их труды были подлинно научными работами, а не просто компиляциями, чтобы они вносили новый вклад в науку. Такими диссертациями нового типа являются диссертации К. А. Андреева, В. П. Алексеевского и, в особенности, магистерские и докторские диссертации В. А. Стеклова и С. Н. Бернштейна.