ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

О МЕТОДЕ ПРОГОНКИ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ 4-го ПОРЯДКА

Г. Д. Майстровский

В настоящей заметке выясняется вопрос об условиях применимости метода прогонки (см., например, [1], стр. 115—118) к разностной схеме для самосопряженной краевой задачи

$$(p(x)\,y''(x))'' - (q(x)\,y'(x))' + r(x)\,y(x) = f(x) \quad (0 < x < l) \tag{1}$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(l) = 0,\ y'(l) = 0, \tag{2}$$

где $p(x) > 0$, $p(x)$, $p'(x)$, $p''(x)$, $q(x)$, $q'(x)$, $r(x)$ непрерывны и точка $\lambda = 0$ не является собственным значением соответствующей задачи Штурма — Лиувилля.

Процедура прогонки требует выполнения серии делений и при обращении в нуль делителя хотя бы на одном шаге прогонки не применима.

Рассмотрим обычную разностную схему для задачи

$$A_k y_{k+2} + B_k y_{k+1} + C_k y_k + D_k y_{k-1} + E_k y_{k-2} = f_k \quad (2 \leqslant k \leqslant n-2) \tag{1'}$$

$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ y_n = 0,\ y_{n-1} = 0. \tag{2'}$$

Здесь

$$0 < h \leqslant \frac{l}{4},\ n = \left[\frac{l}{h}\right],\ y_k = y(kh),$$

$$A_k = p((k+1)h), \quad B_k = -2[p((k+1)h) + p(kh)] - h^2 q(kh),$$

$$C_k = [p((k+1)h) + 4p(kh) + p((k-1)h)] + h^2[q(kh) + q((k-1)h)] - $$
$$- h^2 r(kh),$$

$$D_k = -2[p(kh) + p((k-1)h)] - h^2 q((k-1)h), \quad E_k = p((k-1)h),$$

$$f_k = f(kh).$$

Мы рассмотрим прямую прогонку в форме

$$y_k = \alpha_k y_{k-1} + \beta_k y_{k-2} + \gamma_k \quad (2 \leqslant k \leqslant n), \tag{3}$$

где коэффициенты α_k, β_k и γ_k подбираются так, чтобы из (3) следовали (1′) — (2′). Это приводит к возвратным уравнениям

$$\{(A_k\alpha_{k+2} + B_k)\,\alpha_{k+1} + A_k\beta_{k+2} + C_k\}\,\alpha_k + (A_k\alpha_{k+2} + B_k)\,\beta_{k-1} + D_k = 0 \tag{4}$$

$$\{(A_k\alpha_{k+2} + B_k)\,\alpha_{k+1} + A_k\beta_{k+2} + C_k\}\,\beta_k + E_k = 0 \tag{5}$$

$$\{(A_k\alpha_{k+2} + B_k)\,\alpha_{k+1} + A_k\beta_{k+2} + C_k\}\,\gamma_k + A_k\gamma_{k+2} + B_k\gamma_{k+1} - f_k = 0 \tag{6}$$

$$(k = n-2,\ \ldots,\ 0)$$

для рекуррентного определения α_k, β_k, γ_k $(k = n-2,\ n-3,\ \ldots,\ 0)$.

Разрешимость этих уравнений при начальных условиях

$$\alpha_n = \beta_n = \gamma_n = \alpha_{n-1} = \beta_{n-1} = \gamma_{n-2} = 0 \tag{7}$$

необходима и достаточна для применимости метода прогонки.

Для разрешимости уравнений (4) — (6) при условии (7) необходимо и достаточно, чтобы прежде всего

$$(A_{n-2}\alpha_n + B_{n-2})\,\alpha_{n-1} + A_{n-2}\beta_n + C_{n-2} \neq 0$$

(тогда из (4) — (6) определяются α_{n-2}, β_{n-2}, γ_{n-2}), чтобы далее

$$(A_{n-3}\alpha_{n-1} + B_{n-3})\,\alpha_{n-2} + A_{n-3}\beta_{n-1} + C_{n-3} \neq 0$$

(тогда из (4) — (6) определяются α_{n-3}, β_{n-3}, γ_{n-3}) и т. д.

Теорема. *Для применимости метода прогонки к схеме* (1′) — (2′) *при всех достаточно малых h необходимо и достаточно, чтобы оператор в $L^2[0, l]$, определяемый равенством*

$$Ay = (py'')'' - (qy')' + ry,$$

при условиях

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y(l) = 0,\ y'(l) = 0$$

был положительно определенным.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для положительной определенности дифференциального оператора A необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$T = \begin{pmatrix} C_{n-2} & D_{n-2} & E_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ B_{n-3} & C_{n-3} & D_{n-3} & E_{n-3} & 0 & 0 & \dots 0 \\ A_{n-4} & B_{n-4} & C_{n-4} & D_{n-4} & E_{n-4} & 0 & \dots 0 \\ 0 & A_{n-5} & B_{n-5} & C_{n-5} & D_{n-5} & E_{n-5} & \dots 0 \\ 0 & 0 & A_{n-6} & B_{n-6} & C_{n-6} & D_{n-6} & \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n-7} & B_{n-7} & C_{n-7} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots C_2 \end{pmatrix}$$

была положительно определенной при всех достаточно малых h.

Обозначим через Δ_k $(n-k-1)$-ый главный минор матрицы T, через Δ'_k — $(n-k-1)$-ый главный минор матрицы, полученной из матрицы T после перестановки $(n-k-1)$-го и $(n-k)$-го столбцов. Если A — положительно определенный оператор, то при достаточно малых h все $\Delta_k > 0$.

Полагая

$$\alpha_k = -\frac{\Delta'_k}{\Delta_k},\quad \beta_k = -\frac{E_k\Delta_{k+1}}{\Delta_k},$$

мы удовлетворим уравнениям (4) — (5) при условиях (7). При этом уравнения (6) тоже будут однозначно разрешимы при условиях (7), так как условия для их разрешимости, очевидно, те же, что и для разрешимости уравнений (4) — (5). Разрешимость этих уравнений гарантирует применимость метода прогонки.

Пусть, обратно, метод прогонки в указанном виде применим к схеме (1′) — (2′) при всех $h < h_0$. Тогда уравнения (5) при условии (7) разрешимы.

Для разрешимости первого из уравнений (5) относительно β_{n-2} необходимо, чтобы величина C_{n-2} была отличной от нуля, для разрешимости второго из уравнений (5) относительно β_{n-3} необходимо, чтобы величина

$$\begin{vmatrix} C_{n-2} & D_{n-2} \\ B_{n-3} & C_{n-3} \end{vmatrix}$$

была отличной от нуля.

Далее, для разрешимости третьего из уравнений (5) относительно β_{n-4} необходимо, чтобы величина

$$\begin{vmatrix} C_{n-2} & D_{n-2} & E_{n-2} \\ B_{n-3} & C_{n-3} & D_{n-3} \\ A_{n-4} & B_{n-4} & C_{n-4} \end{vmatrix}$$

была отличной от нуля и т. д.

И, вообще, нетрудно показать, что для разрешимости уравнений (5) необходимо, чтобы все Δ_k были отличны от нуля.

Будем рассматривать Δ_k как функции от h. Пусть при некотором $h_1 \in (0, h_0)$ и некотором $m \leqslant n-2$

$$\Delta_m(h_1) < 0.$$

Легко подсчитать, что $\Delta_m(0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $\Delta_m(h)$ существует $h_2 \in (0_1\ h_1)$, такое, что $\Delta_m(h_2) = 0$. Последнее противоречит предположению о применимости метода при всех $h < h_0$.

Следовательно, для всех рассматриваемых m

$$\Delta_m(h) > 0 \quad (0 < h < h_0),$$

что эквивалентно положительной определенности оператора A. Теорема доказана.

Приношу благодарность Ю. И. Любичу за постановку задачи и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Д. Рихтмайер. Разностные методы решения краевых задач. М., Изд-во иностр. лит., 1960.