

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук, Н. С. ПОДЦЫКИН

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРАТЕГИЯМИ

1. Введение

В [1—3] рассмотрены модели оптимальных решений в стохастических системах, описываемых управляемой марковской цепью (марковским процессом принятия решений) с однородной переходной функцией и стационарной стратегией управления. Однако существует широкий класс систем, в которых переходная функция является неоднородной (зависит от времени). Из класса таких систем наибольший практический интерес представляют системы, в которых переходная функция q_t удовлетворяет условию периодичности: $q_t = q_{t+T}$, $t = 1, 2, \dots$. Здесь T — период. Типичным примером управляемых систем с периодическими стратегиями управления является водохранилище, в котором оптимальное управление по расходу воды зависит от периодических изменений сезонов времени года.

Оказывается, что оптимизационные методы, развитые в [1, 2], не допускают возможности решения задач с периодическими стратегиями, поскольку они основаны на построении улучшений в пространстве стационарных стратегий. Методы же, развитые в [3], основаны на построении последовательных улучшений в пространстве нестационарных стратегий и тем самым допускают принципиальную возможность построения оптимальной периодической стратегии. Однако для реализации такой возможности в виде конкретных оптимизационных процедур требуется получение новых результатов, которые излагаются в данной работе.

2. Постановка задачи

Марковский процесс принятия решений задается набором объектов $\{E, Y, \sigma, q_t, w_t\}$, где E — множество состояний (ситуаций); Y — множество управлений (воздействий, альтернатив, решений и т. д.); σ — стратегия принятия решений (выбора управлений); q_t , $t \in \{1, 2, \dots\}$ — переходная функция, задающая переходные вероятности на $E \times Y \times E$; w_t — функция выигрышей на $E \times Y$.

Будем предполагать, что множества E и Y конечны, а функции q_t и w_t удовлетворяют условию периодичности:

$$q_t = q_{t+T}, \quad t \in \{1, 2, \dots\}; \quad (1)$$

$$w_t = w_{t+T}, \quad t \in \{1, 2, \dots\}, \quad (2)$$

где T — целое положительное число. Минимальное T , для которого выполнены (1) и (2), назовем периодом.

Отображение $\pi: E \rightarrow Y$ назовем решающей функцией. Последовательность решающих функций $\sigma = \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$ — стратегия принятия решений, которая определяет правило выбора управлений $y \in Y$ в каждый момент времени $t = 1, 2, \dots$. Стратегия вида $\pi^\infty = \{\pi, \pi, \dots\}$ — стационарная.

Стратегия $\sigma = \{\pi_t, t = 1, 2, \dots\}$ является периодической, если решающие функции π_t удовлетворяют условию периодичности: $\pi_t = \pi_{t+T}, t = 1, 2, \dots; T \geq 1$.

Периодической стратегии σ поставим в соответствие математическое ожидание среднего в единицу времени выигрыша вида

$$\varphi(\sigma)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} M_x^\sigma \sum_{t=1}^{nT} \omega_t(x_t, y_t), \quad x \in E. \quad (3)$$

Здесь $x = x_1$ — начальное состояние из E ; $\omega_t(x_t, y_t)$ — выигрыш, начисляемый за применение управления $y_t = \pi_t(x_t)$ в состоянии x_t в момент времени t . Математическое ожидание берется по мере, порождаемой переходной функцией $q_t(\cdot | x, \pi_t(x))$, $\pi_t(x) = y \in Y, x \in E$.

Стратегию σ^* такую, что $\varphi(\sigma^*) \geq \varphi(\sigma)$ для всех σ , назовем оптимальной.

Наша задача состоит в обосновании оптимизационной процедуры, позволяющей отыскивать оптимальную стратегию σ^* при наличии ограничений вида (1) и (2), определяющих ее периодический характер. Будем рассматривать эту задачу в предположении, что при любой стратегии σ множество E образует один эргодический класс (возвратных) состояний. Хотя это предположение и сужает класс рассматриваемых систем, однако оно отвечает наиболее распространенному и существенно важному классу практических задач.

3. Вспомогательные результаты

Лемма 1. Пусть Q — переходная матрица марковской цепи с одним эргодическим классом. Тогда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} Q^t = Q^* \quad (4)$$

такой, что а) элементы матрицы Q^* положительны, б) строки матрицы Q^* все одинаковы, в) $QQ^* = Q^*Q = Q^*Q^* = Q^*$. Доказательство см. [2, с. 37; 4, с. 131]. Матрица Q^* называется финальной.

Пусть $\delta = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_T)$ — набор решающих функций, отвечающий периоду T . Используя такой набор, образуем периодическую стратегию $\delta^\infty = (\delta, \delta, \dots)$.

Лемма 2. Для периодической стратегии δ^∞ функционал $\varphi(\delta^\infty)$, определенный в (3), в векторном виде можно представить

$$\varphi(\delta^\infty) = Q^*(\delta) \omega(\delta), \quad (5)$$

где

$$Q^*(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=0}^{n-1} Q^t(\delta);$$

$$Q(\delta) = Q_1(\pi_1) Q_2(\pi_2) \dots Q_T(\pi_T) = \prod_{t=1}^T Q_t(\pi_t);$$

$Q_t(\pi_t)$ — матрица переходных вероятностей, соответствующая решающей функции π_t ;

$$\omega(\delta) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \prod_{i=1}^k Q_{i-1}(\pi_{i-1}) \omega_k(\pi_k);$$

$\omega_k(\pi_k)$ — вектор выигрышей, соответствующий π_k ; $Q_0(\pi_0) = I$ — единичная матрица.

Доказательство. Обозначим $Q_t(\delta) = \prod_{i=1}^t Q_i(\pi_i)$ матрицу переходных вероятностей за t шагов. Тогда математическое ожидание выигрыша в момент времени t равно:

$$\omega_t(x_t, y_t) = (Q_{t-1}(\delta) \omega_t(\pi_t))(x),$$

где x — начальное состояние. Вектор средних выигрышей $\varphi(\delta^\infty)$, определенный в (3), можно теперь записать в виде

$$\varphi(\delta^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{t=1}^{nT} Q_{t-1}(\delta) \omega_t(\pi_t).$$

В силу условия периодичности имеют место следующие равенства:

$$Q_t(\pi_t) = Q_{t - \left[\frac{t-1}{T} \right] T}(\pi_{t - \left[\frac{t-1}{T} \right] T}); \quad \omega_t(\pi_t) = \omega_{t - \left[\frac{t-1}{T} \right] T}(\pi_{t - \left[\frac{t-1}{T} \right] T});$$

$$Q_t(\delta) = Q_{\left[\frac{t}{T} \right]}(\delta) Q_0(\pi_0) Q_1(\pi_1) \dots Q_{t - \left[\frac{t}{T} \right] T}(\pi_{t - \left[\frac{t}{T} \right] T}),$$

где $[\cdot]$ — целая часть. Отсюда и из (4) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\delta^\infty) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{t=1}^{nT} Q_{t-1}(\delta) \omega_t(\pi_t) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^t Q_{i-1}(\pi_{i-1}) \omega_t(\pi_t) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nT} \left\{ \sum_{t=1}^T \prod_{i=1}^t Q_{i-1}(\pi_{i-1}) \omega_t(\pi_t) + \sum_{t=1}^T Q(\delta) \prod_{i=1}^t Q_{i-1} \times \right. \\
&\quad \times (\pi_{i-1}) \omega_t(\pi_t) + \dots + \sum_{t=1}^T Q^{n-1}(\delta) \prod_{t=1}^t Q_{i-1}(\pi_{i-1}) \omega_t(\pi_t) \Big\} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) \omega_1(\pi_1) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) Q_1(\pi_1) \omega_2(\pi_2) + \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) Q_1(\pi_1) Q_2(\pi_2) \dots Q_{T-1}(\pi_{T-1}) \omega_T(\pi_T) \right\} = \\
&= \frac{1}{T} Q^*(\delta) \sum_{k=1}^T \prod_{i=1}^k Q_{i-1}(\pi_{i-1}) \omega_k(\pi_k) = Q^*(\delta) \omega(\delta).
\end{aligned}$$

Следствие 1. Для периодической стратегии δ^∞ функционал $\Phi(\delta^\infty)(x)$ не зависит от x .

Доказательство. Согласно лемме 2 имеет место представление (5). Поскольку строки матрицы Q^* одинаковы, то из (5) следует, что все компоненты вектора $\Phi(\delta^\infty)$ одинаковы. Это доказывает требуемое.

Поскольку вектор Φ составлен из равных компонент, то удобно ввести обозначение $\Phi \mathbf{1}$ для этого вектора, где $\mathbf{1}$ — векторная единица, а Φ — значение его компонент.

4. Оптимизационная схема последовательных приближений

Пусть V — пространство векторов размерности $|E|$. Ноль в этом пространстве обозначим $\bar{0}$, а единицу — $\mathbf{1}$. Каждому вектору $v \in V$ поставим в соответствие величину $\Delta v = \max_x v(x) - \min_x v(x)$. Нетрудно проверить, что она определяет полунорму в V .

Пусть $N = \{c \in V: \Delta c = 0\}$. Из определения Δ следует, что N — подпространство в V такое, что все его элементы — это векторы с равными компонентами.

Каждому вектору $v \in V$ поставим в соответствие класс эквивалентности $\tilde{v}$ пространства V по N , содержащий v , по правилу

$$\lambda(v) = v + N = \{v + c: c \in N\} = \tilde{v}.$$

Множество $\tilde{V} = \{\tilde{v}\}$ всех классов эквивалентности образует векторное пространство, называемое фактор-пространством, в котором сложение определено формулой $\lambda(u) + \lambda(v) = \lambda(u + v)$. Определим на $\tilde{V}$ функцию p , положив $p(\tilde{v}) = p(\lambda(v)) = \Delta v$. Как известно [5, с. 41], она определяет норму $\|\tilde{v}\| = \Delta v$ в $\tilde{V}$.

Заметим, что любой класс эквивалентности $\tilde{v} \in \tilde{V}$ в качестве элемента содержит вектор $v \in V$ такой, что одна из его компонент равна 0. Для определенности положим, что компонента $v(z) = 0$, где z — фиксированная точка E . При этом такой вектор v является единственным в V . Действительно, пусть векторы v и v' из $\tilde{v}$ таковы, что $v(z) = 0$ и $v'(z) = 0$. Поскольку v и v' содержатся в одном классе эквивалентности $\tilde{v}$, то $v - v' = c$, где $c \in N$. Тогда из разности $v(z) - v'(z) = 0$ следует, что $c = 0$. Тем самым $v = v'$.

Вектор $v \in V$, имеющий одну из компонент, равную нулю (для определенности $v(z) = 0$), и порождающий класс эквивалентности $\tilde{v}$, будем называть прообразом класса эквивалентности $\tilde{v} \in \tilde{V}$.

Введем теперь в V и $\tilde{V}$ ряд операторов. Заметим, что каждой паре (x, y) , $x \in E$, $y \in Y$ и моменту времени t отвечает распределение $q_t(\cdot | x, y)$ на E . Используя это распределение, определим оператор $Q_t(y)$:

$$Q_t(y)v(x) = \sum_{z \in E} v(z) q_t(z | x, y), \quad x \in E.$$

Если при этом управление $y \in Y$ выбирается с помощью решающей функции π (т. е. $y = \pi(x)$), то обозначим этот оператор $Q_t(\pi)$.

Пусть $\delta = (\pi_1, \dots, \pi_T)$ — набор решающих функций, соответствующий периоду T . Введем тогда оператор $Q(\delta)$ вида

$$Q(\delta)v = Q_1(\pi_1)Q_2(\pi_2)\dots Q_T(\pi_T)v = \prod_{t=1}^T Q_t(\pi_t)v.$$

Нетрудно видеть, что оператор Q отображает $V \rightarrow V$. Этот оператор может быть естественным образом определен на $\tilde{V}$. Для этого достаточно положить $Q(\lambda(v)) = \lambda(Qv)$. Ясно, что при этом Q отображает $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$.

Будем предполагать, что оператор Q — сжатие на $\tilde{V}$, т. е.

$$\exists \rho_\delta < 1 : \|Q(\delta)\tilde{v}\| \leq \rho_\delta \|\tilde{v}\| \quad \forall \tilde{v} \in \tilde{V}.$$

Легко видеть, что требуемое условие сжатия выполняется, если строки матрицы переходных вероятностей Q , порождающе-рассматриваемый оператор, являются невырожденными распределениями, т. е. матрица Q не содержит элементов, равных 1. Но это — весьма слабое требование, полностью отвечающее исходным предположениям, порождающим схему марковских процессов принятия решений, согласно которым последствия принятия решений неоднозначны и случайны.

Используя оператор Q , введем на V и $\tilde{V}$ ряд других операторов. Прежде всего определим на V оператор $F_t(y)$ вида

$$F_t(y)v(x) = w_t(x, y) + Q_t(y)v(x), \quad x \in E.$$

Если здесь $y \in Y$ «выбирается» с помощью решающей функции π , то этот оператор обозначим $F_t(\pi)$ и запишем в векторном виде:

$$F_t(\pi)v = w_t(\pi) + Q_t(\pi)v,$$

где $w_t(\pi)$ — вектор выигрышей с компонентами $w_t(\pi)(x) = w_t(x, \pi(x)) = w_t(x, y)$, $x \in E$.

Пусть, как и ранее, $\delta = (\pi_1, \dots, \pi_T)$ — набор решающих функций, соответствующий периоду T . Определим тогда оператор $F(\delta)$, полагая

$$F(\delta)v = F_1(\pi_1)F_2(\pi_2)\dots F_T(\pi_T)v.$$

Расписывая здесь последовательно определения операторов $F_1(\pi_1), \dots, F_T(\pi_T)$, получаем следующее представление для $F(\delta)$:

$$F(\delta)v = Tw(\delta) + Q(\delta)v, \quad (6)$$

где

$$Q(\delta) = \prod_{i=1}^T Q_t(\pi_i); \quad w(\delta) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \prod_{i=1}^k Q_{i-1}(\pi_{i-1}) w_k(\pi_k);$$

$Q_0(\pi_0) = I$ — единичный оператор. Нетрудно проследить, что в силу свойства $Q(\lambda(v)) = \lambda(Qv)$ оператор F удовлетворяет аналогичному свойству $F(\delta)\lambda(v) = \lambda(F(\delta)v)$. Это естественным образом позволяет рассматривать оператор $F(\delta)$ на $\tilde{V}$, который при этом отображает $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$.

Лемма 3. а) Оператор $F(\delta)$ является сжатием на $\tilde{V}$ и существует его единственная неподвижная точка $\tilde{r}(\delta^\infty)$ в $\tilde{V}$ такая, что

$$\tilde{r}(\delta^\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\{F(\delta)\}^m v),$$

где предел не зависит от $\lambda(v) \in \tilde{V}$.

б) Пусть $r(\delta^\infty)$ — прообраз в V неподвижной точки $\tilde{r}(\delta^\infty)$ оператора $F(\delta)$ на $\tilde{V}$. Тогда имеет место разложение

$$F(\delta)r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty) + T\varphi(\delta^\infty)1. \quad (7)$$

Доказательство. а) Пусть $u, v \in V$ — прообразы классов эквивалентности $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$ соответственно. С учетом сжатия $Q(\delta)$ на $\tilde{V}$ и свойства $\lambda(u+v) = \lambda(u) + \lambda(v)$ имеем

$$\begin{aligned} \|F(\delta)\tilde{u} - F(\delta)\tilde{v}\| &= \|\lambda(F(\delta)u) - \lambda(F(\delta)v)\| = \\ &= \|\lambda(w(\delta) + Q(\delta)u - w(\delta) - Q(\delta)v)\| = \\ &= \|\lambda(Q(\delta)(u - v))\| = \|Q(\delta)(\tilde{u} - \tilde{v})\| \leq \rho_\delta \|\tilde{u} - \tilde{v}\|, \quad \rho_\delta < 1. \end{aligned}$$

Существование требуемой неподвижной точки теперь следует из сжатия $F(\delta)$ на $\tilde{V}$.

б) Пусть $r(\delta^\infty) \in V$ — прообраз неподвижной точки $\tilde{r}(\delta^\infty) \in \tilde{V}$ оператора $F(\delta)$. По определению $r(\delta^\infty)$ содержится в классе эквивалентности $\tilde{r}(\delta^\infty)$. С другой стороны, поскольку $\tilde{r}(\delta^\infty)$ — неподвижная точка оператора $F(\delta)$ на $\tilde{V}$, а $r(\delta^\infty)$ — ее прообраз в V , то вектор вида $F(\delta)r(\delta^\infty) = v(\delta^\infty)$ также содержится в этом же классе эквивалентности $\tilde{r}(\delta^\infty)$, т. е. $v(\delta^\infty) - r(\delta^\infty) = c \in N$ или $v(\delta^\infty) = r(\delta^\infty) + c$. В таком случае имеем

$$F(\delta)r(\delta^\infty) = v(\delta^\infty) = r(\delta^\infty) + c \quad (8)$$

или

$$Tw(\delta) + Q(\delta)r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty) + c.$$

Умножая обе части этого равенства слева на финальную матрицу $Q^*(\delta)$ и используя ее свойства $Q^*(\delta)\omega(\delta) = \varphi(\delta^\infty)1$; $Q^*Q = Q^*$; $Q^*c = c$, $c \in N$, получаем $T\varphi(\delta^\infty)1 + Q^*(\delta)r(\delta^\infty) = Q^*(\delta)r(\delta^\infty) + c$. Отсюда следует, что $c = T\varphi(\delta^\infty)1$. Подставляя это в уравнение (8), получаем (7).

Введем теперь на V оператор U_t вида

$$U_tv(x) = \max_{y \in Y} F_t(y)v(x), \quad x \in E.$$

Его можно определить в векторном виде:

$$U_tv = \max_{\pi} F_t(\pi)v.$$

Наконец, введем оператор U , полагая

$$Uv = \max_{(\pi_1, \dots, \pi_T)} F_1(\pi_1) \dots F_T(\pi_T)v = \max_{\delta} F(\delta)v.$$

Понятно, что в силу свойства $F\lambda(v) = \lambda(Fv)$ оператор U удовлетворяет аналогичному свойству: $U\lambda(v) = \lambda(Uv)$. Это позволяет рассматривать оператор U на $\tilde{V}$, который при этом отображает $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$.

Лемма 4. а) Операторы U_t монотонны на V .

б) Для оператора U на V справедливо представление $Uv = U_1U_2 \dots U_Tv$;

в) оператор U является сжатием на $\tilde{V}$ и существует его единственная неподвижная точка $\tilde{r}$ в $\tilde{V}$ такая, что

$$\tilde{r} = \lim_m \lambda(U^mv);$$

г) пусть r — прообраз в V неподвижной точки $\tilde{r}$ оператора U на $\tilde{V}$. Тогда найдется набор σ такой, что $r = r(\sigma^\infty)$ и

$$Ur = F(\sigma)r(\sigma^\infty) = r(\sigma^\infty) + T\varphi(\sigma^\infty)1 \quad (9)$$

Доказательство. а) Пусть $u, v \in V$ и для них верно неравенство $u \geq v$. Покажем, что тогда $U_t u \geq U_t v$ для каждого t . Обозначим π_t^* — решающую функцию, для которой $F_t(\pi_t^*)v = U_t v$. Тогда

$$\begin{aligned} U_t u - U_t v &= \max_{\pi_t} F_t(\pi_t)u - \max_{\pi_t} F_t(\pi_t)v = \max_{\pi_t} F_t(\pi_t)u - \\ &\quad - F_t(\pi_t^*)v \geq F_t(\pi_t^*)u - F_t(\pi_t^*)v = \\ &= w_t(\pi_t^*) + Q_t(\pi_t^*)u - w_t(\pi_t^*) - Q_t(\pi_t^*)v = Q_t(\pi_t^*)(u - v) \geq 0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу предположения $u \geq v$ и неотрицательности элементов матрицы $Q_t(\pi_t^*)$. Это доказывает монотонность U_t ;

б) поскольку рассматривается конечномерный случай, то найдется набор решающих функций $\delta^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_T^*)$ такой, что $Uv = F(\delta^*)v$. Из определения U следует, что $Uv \geq F(\delta)v$ для любого набора δ и, в частности, $Uv \geq U_1 \dots U_T v$. Покажем, что для любого $v \in V$ выполнено неравенство $Uv \leq U_1 \dots U_T v$. Отсюда будет следовать требуемое. Используя монотонность операторов U_t для произвольного фиксированного $v \in V$, последовательно получаем

$$\begin{aligned} U_1 \dots U_T v &= \max_{\pi_1} F_1(\pi_1) \dots \max_{\pi_{T-1}} F_{T-1}(\pi_{T-1}) \max_{\pi_T} F_T(\pi_T)v \geq \\ &\geq \max_{\pi_1} F_1(\pi_1) \dots \max_{\pi_{T-1}} F_{T-1}(\pi_{T-1}) F_T(\pi_T^*)v \geq \\ &\geq \max_{\pi_1} F_1(\pi_1) \dots F_{T-1}(\pi_{T-1}^*) F_T(\pi_T^*)v \geq \dots \geq \\ &\geq F_1(\pi_1^*) \dots F_{T-1}(\pi_{T-1}^*) F_T(\pi_T^*)v = Uv; \end{aligned}$$

в) пусть $\delta^1 = (\pi_1^1, \dots, \pi_T^1)$ и $\delta^2 = (\pi_1^2, \dots, \pi_T^2)$ — два набора решающих функций такие, что

$$Uu - Uv = F(\delta^1)u - F(\delta^2)v.$$

Выберем точку $x^* \in E$ из условия

$$Uu(x^*) - Uv(x^*) = \min_{x \in E} \{Uu(x) - Uv(x)\}.$$

Образует новую решающую функцию π_T , положив

$$\pi_T(x) = \begin{cases} \pi_T^1(x), & x \neq x^* \\ \pi_T^2(x), & x = x^*. \end{cases}$$

Затем образуем два набора решающих функций $\bar{\delta}^1 = (\pi_1^1, \dots, \pi_{T-1}^1, \pi_T)$ и $\bar{\delta}^2 = (\pi_1^2, \dots, \pi_{T-1}^2, \pi_T)$. Очевидно, для них выполнены неравенства

$$\begin{aligned} F(\bar{\delta}^1)u(x) - F(\bar{\delta}^2)v(x) &\geq F(\delta^1)u(x) - F(\delta^2)v(x), \quad x \neq x^*; \\ F(\bar{\delta}^1)u(x) - F(\bar{\delta}^2)v(x) &\leq F(\delta^1)u(x) - F(\delta^2)v(x), \quad x = x^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя вектор $F_T(\pi_T)u$ в качестве u , вектор $F_T(\pi_T)v$ — в качестве v , набор $(\pi_1^1, \dots, \pi_{T-1}^1)$ — в качестве δ^1 , а набор $(\pi_1^2, \dots, \pi_{T-1}^2)$ — в качестве δ^2 и повторив предыдущие рассуждения, найдем новую точку x^* , построим решающую функцию π_{T-1} и образуем наборы $\bar{\delta}^1 = (\pi_1^1, \dots, \pi_{T-2}^1, \pi_{T-1}, \pi_T)$, $\bar{\delta}^2 = (\pi_1^2, \dots, \pi_{T-2}^2, \pi_{T-1}, \pi_T)$. Для них снова выполнены неравенства (10). Аналогичным способом построим решающие функции $\pi_{T-2}, \dots, \pi_1$. В итоге получим два одинаковых набора $\bar{\delta}^1 = \bar{\delta}^2$, которые обозначим через δ . Для него будут выполнены неравенства

$$F(\delta)u(x) - F(\delta)v(x) \geq F(\delta^1)u(x) - F(\delta^2)v(x), \quad x \neq x^*;$$

$$F(\delta)u(x) - F(\delta)v(x) \leq F(\delta^1)u(x) - F(\delta^2)v(x), \quad x = x^*.$$

Из этих неравенств и в силу сжатия оператора $F(\delta)$ на $\tilde{V}$ получаем $\|U\lambda(u) - U\lambda(v)\| = \|F(\delta^1)\lambda(u) - F(\delta^2)\lambda(v)\| \leq \|F(\delta)\lambda(u) - F(\delta)\lambda(v)\| \leq \rho_\delta \|\lambda(u) - \lambda(v)\|$, $\rho_\delta < 1$. Это доказывает сжатие оператора U на $\tilde{V}$. Из сжатия U следует существование неподвижной точки $\tilde{r}$ такой, что

$$\tilde{r} = \lim_m \lambda(U^m v);$$

г) пусть $\tilde{r}$ — неподвижная точка оператора U в $\tilde{V}$. В силу компактности множества различных наборов решающих функций найдется такой набор σ , для которого $\tilde{r} = U\tilde{r} = F(\sigma)\tilde{r}$. Тогда для любого $m = 1, 2, \dots$ верно $\tilde{r} = F^m(\sigma)\tilde{r}$. В силу леммы 3 имеем

$$\tilde{r}(\sigma^\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} F^m(\sigma)\tilde{r}.$$

Пусть теперь $r(\sigma^\infty)$ — прообраз $\tilde{r}(\sigma^\infty)$. Тогда в силу (7) получаем требуемое: $Ur(\sigma^\infty) = F(\sigma)r(\sigma^\infty) = r(\sigma^\infty) + T\varphi(\sigma^\infty)1$.

Из результатов лемм 3 и 4 следует, что если задан прообраз $r(\delta^\infty) \in V$ неподвижной точки $\tilde{r}(\delta^\infty)$ оператора $F(\delta)$ на $\tilde{V}$ либо прообраз $r \in V$ неподвижной точки $\tilde{r}$ оператора U на V , то имеют место равенства (7) и (9), в которых в явном виде присутствует функционал φ , используемый в качестве критерия оптимальности стратегии. Это открывает конструктивные возможности отыскания оптимальной стратегии. Однако для реализации такой возможности требуется указать конкретный способ построения неподвижной точки. С этой целью зафиксируем некоторую точку $z \in E$ и введем в пространстве V оператор $T_{(z)}$, преобразующий векторы $v \in V$ по правилу: $T_{(z)}v(x) = v(x) - v(z)$, $x \in E$, или в векторном виде: $T_{(z)}v = v - v(z)1$. Ясно, что оператор $T_{(z)}$ отображает V в некоторое свое подмножество $R \subset V$ такое, что оно не содержит векторов с равными компонентами за исключением $\bar{0}$. При этом элементы $r \in R$ таковы, что компонента $r(z) = 0$. Если оператор $T_{(z)}$ рассматривать на R , то он отображает $R \rightarrow R$.

Образы отображения $T_{(z)}$ будем называть потенциалами, а множество $R \subset V$ — пространством потенциалов.

Оказывается, что пространство потенциалов R обладает полезными свойствами, оправдывающими его введение. Прежде всего R не содержит векторов с равными компонентами, за исключением $\bar{0}$. Поэтому введенная ранее полунорма Δ на V является нормой в R . Далее R содержит все те векторы из V , которые различны, но имеют компоненту $r(z) = 0$. Это означает, что R совпадает с множеством прообразов классов эквивалентности из $\tilde{V}$. Тем самым R содержит и прообраз неподвижной точки оператора U на $\tilde{V}$.

В силу отмеченных свойств оказывается, что при построении конструктивных методов отыскания оптимальной стратегии достаточно ограничиться использованием пространства потенциалов R . Для построения таких методов необходимо, очевидно, чтобы используемые операторы отображали $R \rightarrow R$.

Заметим, что введенные выше операторы F и U , вообще говоря, отображают $R \rightarrow V$. Введем операторы F^* и U^* на V вида $F^*v = T_{(z)}(Fv) = Fv - Fv(z)1$; $U^*v = T_{(z)}(Uv) = Uv - Uv(z)1$. Понятно, что эти операторы отображают $V \rightarrow R$. Если же их рассматривать на R , то они отображают $R \rightarrow R$.

Введенные операторы можно рассматривать и в пространстве $\tilde{V}$, по определению полагая

$$F^*\lambda(v) = \lambda(F^*v); \quad U^*\lambda(v) = \lambda(U^*v).$$

Ясно, что такие операторы отображают $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}$. При этом каждый класс эквивалентности $\tilde{r} \in \tilde{V}$ имеет единственный прообраз $r \in R$.

Лемма 5. а) Оператор $F^*(\delta)$ является сжатием на R и имеет единственную неподвижную точку в R такую, что

$$r(\delta^\infty) = \lim_m \{F^*(\delta)\}^m v, \quad (11)$$

где предел не зависит от $v \in R$. Эта неподвижная точка является прообразом неподвижной точки оператора $F(\delta)$ на $\tilde{V}$ и удовлетворяет разложению (7);

б) оператор U^* является сжатием на R и имеет единственную неподвижную точку r в R такую, что $r = \lim_m \{U^*\}^m v$, где предел не зависит от $v \in R$. Она является прообразом неподвижной точки $\tilde{r}$ оператора U на $\tilde{V}$ и удовлетворяет разложению (9).

Доказательство. а) Из определения оператора F^* следует, что F^* и F совпадают, если их рассматривать в пространстве $\tilde{V}$, т. е. $\lambda(F^*v) = \lambda(Fv)$. В таком случае из сжатия $F(\delta)$ на $\tilde{V}$ следует сжатие $F^*(\delta)$ на $\tilde{V}$. Следовательно, существует

его неподвижная точка $\tilde{r}(\delta^\infty) \in \tilde{V}$, которая является также неподвижной точкой оператора $F(\delta)$ на $\tilde{V}$.

Пусть теперь $u, v \in R$ являются прообразами некоторых элементов $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{V}$. Ясно, что выполняется равенство $\|F^*(\delta)u - F^*(\delta)v\| = \|F^*(\delta)\tilde{u} - F^*(\delta)\tilde{v}\|$. Тогда в силу сжатия $F^*(\delta)$ на $\tilde{V}$ имеем $\|F^*(\delta)u - F^*(\delta)v\| = \|F^*(\delta)\tilde{u} - F^*(\delta)\tilde{v}\| \leq \rho_\delta \|\tilde{u} - \tilde{v}\| = \rho_\delta \|u - v\|$, $\rho_\delta < 1$. Поскольку при этом оператор $F^*(\delta)$ отображает $R \rightarrow R$, то полученное неравенство устанавливает сжатие $F^*(\delta)$ на R .

Отсюда следует существование неподвижной точки $r(\delta^\infty)$ оператора $F^*(\delta)$ на R , которая удовлетворяет равенству $F^*(\delta)r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty)$ (12) и представляется пределом вида (11).

Ясно также, что $r(\delta^\infty)$ — прообраз неподвижной точки $\tilde{r}(\delta^\infty)$ оператора $F(\delta)$ на $\tilde{V}$ и тем самым, согласно лемме 3, удовлетворяет разложению (7).

б) Доказательство аналогично приведенному выше с тем отличием, что делается ссылка на лемму 4 и разложение (9).

Образы отображений F^* и U^* будем называть соответственно F^* -порожденными и U^* -порожденными потенциалами.

Будем теперь рассматривать нестационарные стратегии δ_1^k , $k = 1, 2, \dots$ вида $\delta_1^k = (\delta_k, \delta_{k-1}, \dots, \delta_1)$, где δ_k — наборы вида $(\pi_1^k, \dots, \pi_r^k)$. Каждой такой стратегии поставим в соответствие F^* -порожденный вектор потенциалов $r_k(\delta_1^k)$, полагая $r_k(\delta_1^k) = F^* \times \dots \times (\delta_k) F^*(\delta_{k-1}) \dots F^*(\delta_1) r_0$, $r_0 = \bar{0}$. Очевидно, такой вектор r_k можно определить эквивалентным способом рекуррентным соотношением:

$$r_k(\delta_1^k) = F^*(\delta_k) r_{k-1}(\delta_1^{k-1}), \quad r_0 = \bar{0}. \quad (13)$$

Аналогичным образом можно рассматривать векторы потенциалов $r_k(\sigma_1^k)$, $k = 1, 2, \dots$, определяемые рекуррентным соотношением:

$$r_k(\sigma_1^k) = U^* r_{k-1}(\sigma_1^{k-1}); \quad r_0 = \bar{0}, \quad (14)$$

где наборы σ_k , $k = 1, 2, \dots$, таковы, что $U^* r_{k-1}(\sigma_1^{k-1}) = F^* \times \dots \times (\sigma_k) r_{k-1}(\sigma_1^{k-1}) = r_k(\sigma_1^k)$. Наборы σ_k , стратегии $\sigma_1^k = (\sigma_k, \dots, \sigma_1)$ и векторы потенциалов $r_k(\sigma_1^k)$, вычисляемые из соотношения (14), будем называть U^* -порожденными. Так же будем называть и периодические стратегии σ_k^∞ , отвечающие U^* -порожденным наборам σ_k .

Выполненные построения и полученные результаты позволяют теперь сформулировать ряд других результатов конструктивного характера.

Теорема 1. а) Последовательность U^* -порожденных потенциалов $\{r_k\}$ сходится к пределу $r^* = \lim_k r_k \in R$, который является единственной неподвижной точкой оператора U^* в R , прообразом неподвижной точки $\tilde{r}$ оператора U на $\tilde{V}$ и удовлетворяет разложению (9);

б) найдется периодическая стратегия σ^∞ такая, что $r^* = r(\sigma^\infty)$ и вектор $r(\sigma^\infty)$ удовлетворяет разложениям (7) и (9).

Доказательство. а) Вектор r_k можно представить в виде $r_k = \{U^*\}^k r_0$. Тогда в силу сжатия U^* на R получаем, что $r^* = \lim_k r_k$ является неподвижной точкой оператора U^* на R .

Ясно, что такая неподвижная точка является прообразом неподвижной точки $\tilde{r}$ оператора U на $\tilde{V}$ и в силу леммы 4 удовлетворяет разложению (9);

б) в силу а) имеем $r^* = U^* r^*$. Поскольку число различных наборов δ конечно, то найдется набор σ такой, что $r^* = U^* r^* = F^*(\sigma) r^*$. Но тогда $r^* = \{F^*(\sigma)\}^m r^*$, $m = 1, 2, \dots$. Переходя здесь к пределу и используя (11), получаем, что $r^* = r(\sigma^\infty)$. В силу лемм 3 и 4 такой вектор удовлетворяет разложениям (7) и (9).

Для различения качества стратегий введем операторы Γ на V следующим способом. Пусть фиксированы некоторые два набора f и δ . Положим

$$\Gamma(f, \delta)v = F(f)v - F(\delta)v.$$

Аналогичным образом положим

$$\Gamma(\delta)v = Uv - F(\delta)v.$$

Наконец, введем операторы $\Gamma^*(f, \delta)$ и $\Gamma^*(\delta)$, полагая

$$\Gamma^*(f, \delta)v = F^*(f)v - F^*(\delta)v; \quad \Gamma^*(\delta)v = U^*v - F^*(\delta)v.$$

Свойства этих операторов описываются следующей леммой.

Лемма 6. Операторы Γ и Γ^* связаны соотношениями

$$а) \Gamma^*(\cdot)v = \Gamma(\cdot)v - \Gamma(\cdot)v(z)1;$$

$$б) \Gamma(\cdot)v = \bar{0} \Rightarrow \Gamma^*(\cdot)v = \bar{0};$$

в) если $v = r(\delta^\infty)$ — вектор потенциалов периодической стратегии δ^∞ , удовлетворяющей разложению (7), то

$$\Gamma(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0} \Leftrightarrow \Gamma^*(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0};$$

г) оператор $\Gamma(\delta)$ неотрицателен ($\Gamma(\delta)v \geq \bar{0}$).

Доказательство. а) Очевидным образом следует из определений операторов Γ^* , Γ и F^* ;

б) следует из а);

в) пусть $\Gamma(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$. Тогда из б) следует $\Gamma^*(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$. Обратно, пусть $\Gamma^*(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$. Тогда имеем $U^*r(\delta^\infty) = F^*(\delta) \times r(\delta^\infty)$. Но согласно лемме 4 $F^*(\delta)r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty)$, т. е. $r(\delta^\infty)$ является

неподвижной точкой оператора $F^*(\delta)$, а тем самым — и оператора U^* . В таком случае ясно, что $Ur(\delta^\infty) = F(\delta^\infty)r(\delta^\infty)$, т. е. $\Gamma(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$;

$$г) \Gamma(\delta)r = Ur - F(\delta)r = \max_f F(f)r - F(\delta)r \geq \bar{0}.$$

Условимся в дальнейшем векторные неравенства понимать в смысле, что $u \geq v$, если $u(x) \geq v(x)$, $x \in E$, и $u > v$, если $u \geq v$ и $u \neq v$.

Лемма 7. а) Пусть периодические стратегии σ^∞ и δ^∞ такие, что $\Gamma(\sigma, \delta)r(\delta^\infty) > (<) \bar{0}$. Тогда $\varphi(\sigma^\infty) > (<) \varphi(\delta^\infty)$;

б) пусть набор δ таков, что $\Gamma(\delta)r(\delta^\infty) = \Gamma(\sigma, \delta)r(\delta^\infty) > \bar{0}$. Тогда $\varphi(\sigma^\infty) > \varphi(\delta^\infty)$.

Доказательство. а) Умножим обе части неравенства $\Gamma(\sigma, \delta)r(\delta^\infty) > \bar{0}$ слева на финальную матрицу $Q^*(\sigma)$. Поскольку элементы матрицы $Q^*(\sigma)$ положительны, то неравенство не нарушится. Тогда, используя разложение (7) и свойства финальной матрицы $(Q^*(\sigma)\omega(\sigma) = \varphi(\sigma^\infty)1; Q^*Q = Q^*; Q^*\varphi 1 = \varphi 1)$, получаем $Q^*(\sigma)\Gamma(\sigma, \delta)r(\delta^\infty) = Q^*(\sigma)\{F(\sigma)r(\delta^\infty) - F(\delta)r(\delta^\infty)\} = Q^*(\sigma)\{T\omega \times \times (\sigma) + Q(\sigma)r(\delta^\infty) - r(\delta^\infty) - T\varphi(\delta^\infty)1\} = TQ^*(\sigma)\omega(\sigma) + Q^*(\delta)r \times \times (\delta^\infty) - Q^*(\sigma)r(\delta^\infty) - TQ^*(\sigma)\varphi(\delta^\infty)1 = T\varphi(\sigma^\infty)1 - T\varphi(\delta^\infty)1 > \bar{0}$. Тем самым $\varphi(\sigma^\infty) > \varphi(\delta^\infty)$.

Таким же способом получаем, что если $\Gamma(\sigma, \delta)r(\delta^\infty) \leq \bar{0}$, то $\varphi(\sigma^\infty) \leq \varphi(\delta^\infty)$;

б) следует из а).

Пусть $r(\delta^\infty)$ — вектор потенциалов периодической стратегии δ^∞ , удовлетворяющей (7). Тогда имеет место следующая

Теорема 2. Условия вида $\Gamma(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$ (15), $U^*r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty)$ (16) являются эквивалентными необходимыми и достаточными условиями оптимальности периодической стратегии δ^∞ .

Доказательство. Пусть выполнено (15), т. е.

$$\begin{aligned} \Gamma(\delta)r(\delta^\infty) &= Ur(\delta^\infty) - F(\delta)r(\delta^\infty) = \\ &= \max_{\sigma} F(\sigma)r(\delta^\infty) - F(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}. \end{aligned}$$

Отсюда следует $\Gamma(\sigma, \delta)r(\delta^\infty) = F(\sigma)r(\delta^\infty) - F(\delta)r(\delta^\infty) \leq \bar{0}$ для всех σ . Но тогда в силу леммы 6 выполняется неравенство вида $\varphi(\sigma^\infty) \leq \varphi(\delta^\infty)$ для всех σ^∞ . Это и означает, что стратегия δ^∞ оптимальна.

Обратно, пусть стратегия δ^∞ оптимальна. Покажем, что тогда выполняется (15). Действительно, предположим противное, т. е. $\Gamma(\delta)r(\delta^\infty) > \bar{0}$. Тогда, согласно лемме 7, найдется стратегия σ^∞ такая, что $\varphi(\sigma^\infty) > \varphi(\delta^\infty)$. Но это противоречит оптимальности δ^∞ .

Покажем теперь, что из (15) следует (16) и наоборот. Действительно, пусть выполнено (15). Используя тогда б) леммы 5, получаем $\Gamma^*(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$, т. е. $U^*r(\delta^\infty) = F^*(\delta)r(\delta^\infty)$. Но согласно (12) имеем $F^*(\delta)r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty)$. Тем самым $U^*r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty)$. Это устанавливает (16).

Обратно, пусть выполнено уравнение (16). Тогда, используя снова (12), имеем $U^*r(\delta^\infty) = r(\delta^\infty) = F^*(\delta)r(\delta^\infty)$. Отсюда следует $\Gamma^*(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$. Тогда в силу в) леммы 5 получаем $\Gamma(\delta)r(\delta^\infty) = \bar{0}$, т. е. (15).

Следствие 1. Последовательность U^* -порожденных стратегий $\{\sigma_k^*, k = 1, 2, \dots\}$ сходится к оптимальной периодической стратегии.

Доказательство. В силу теоремы 1 последовательность U^* -порожденных векторов потенциалов $r_k(\sigma_k^*)$ сходится к вектору r^* , который является неподвижной точкой оператора U^* . При этом найдется стратегия σ^∞ такая, что $r^* = r^*(\sigma^\infty)$. Тогда в силу теоремы 2 такая стратегия оптимальна.

Таким образом, рекуррентное соотношение (14) порождает некоторую оптимизационную схему последовательных приближений. Однако для построения конкретной оптимизационной процедуры требуется получить ряд дополнительных результатов.

Лемма 8. а) Пусть δ^∞ — некоторая периодическая стратегия и $u \in R$. Обозначим $\Phi(\delta) = F(\delta)v - v$, $\bar{\Phi}(\delta) = \max_x \Phi(\delta)(x)$, $\underline{\Phi}(\delta) = \min_x \Phi(\delta)(x)$. Тогда для функционала $\varphi(\delta^\infty)$ справедливы оценки

$$\frac{1}{T} \underline{\Phi}(\delta) \leq \varphi(\delta^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}(\delta);$$

б) пусть σ^∞ — оптимальная периодическая стратегия. Обозначим $\Phi = Uv - v$, $\bar{\Phi} = \max_x \Phi(x)$, $\underline{\Phi} = \min_x \Phi(x)$. Тогда для функционала $\varphi(\sigma^\infty)$ справедливы оценки:

$$\frac{1}{T} \underline{\Phi} \leq \varphi(\sigma^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}.$$

Доказательство. а) Учитывая определение оператора $F(\delta)$, имеем

$$\Phi(\delta) = F(\delta)v - v = T\omega(\delta) + Q(\delta)v - v.$$

Обе части полученного равенства умножим слева на финальную матрицу $Q^*(\delta)$: $Q^*(\delta)\Phi(\delta) = TQ^*(\delta)\omega(\delta) + Q^*(\delta)Q(\delta)v - Q^*(\delta)v$. Используя представление (5) леммы 2 и свойство финальной матрицы $Q^*Q = Q^*$, получаем $Q^*(\delta)\Phi(\delta) = T\varphi(\delta^\infty)$. Отсюда следует, что $\underline{\Phi}(\delta) \leq T\varphi(\delta^\infty) \leq \bar{\Phi}(\delta)$, или

$$\frac{1}{T} \underline{\Phi}(\delta) \leq \varphi(\delta^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}(\delta);$$

б) если $Uv = F(\sigma)v$, то требуемое утверждение доказано в а). Пусть $Uv = F(f)v$, где $f \neq \sigma$. В таком случае имеем $\Phi(\sigma) =$

$= F(\sigma)v - v \leq Uv - v = \Phi$. Отсюда следует $\bar{\Phi}(\sigma) \leq \bar{\Phi}$. Согласно а) $\Phi(\sigma^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}(\sigma)$. Тем самым имеем

$$\Phi(\sigma^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}(\sigma) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}. \quad (17)$$

С другой стороны, по определению оптимальной стратегии $\Phi(f^\infty) \leq \Phi(\sigma^\infty)$. Причем согласно а) $\frac{1}{T} \bar{\Phi} = \frac{1}{T} \bar{\Phi}(f) \leq \Phi(f^\infty)$. Тогда с учетом (17) имеем

$$\frac{1}{T} \bar{\Phi} \leq \Phi(f^\infty) \leq \Phi(\sigma^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}(\sigma) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}.$$

И окончательно получаем $\frac{1}{T} \bar{\Phi} \leq \Phi(\sigma^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}$.

Следствие 2. а) Пусть r_k U^* -порожденный вектор потенциалов и δ_{k+1} U^* -порожденный набор такой, что $Ur_k = F(\delta_{k+1})r_k$. Обозначим $\Phi_k = Ur_k - r_k$, $\bar{\Phi}_k = \max_x \Phi_k(x)$, $\Phi_k = \min_x \Phi_k(x)$. Тогда для $\Phi(\delta_{k+1}^\infty)$ имеют место оценки

$$\frac{1}{T} \Phi_k \leq \Phi(\delta_{k+1}^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}_k;$$

б) пусть σ^∞ — оптимальная периодическая стратегия. Тогда для $\Phi(\sigma^\infty)$ имеют место оценки

$$\frac{1}{T} \Phi_k \leq \Phi(\sigma^\infty) \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}_k.$$

Доказательство. Непосредственно следует из леммы 8, если в качестве вектора v использовать U^* -порожденный вектор r_k .

Лемма 9. Пусть δ^∞ — оптимальная, а δ_{k+1}^∞ U^* -порожденная периодическая стратегии и r_k — U^* -порожденный вектор потенциалов. Тогда

$$|\Phi(\delta_{k+1}^\infty) - \Phi(\delta^\infty)| \leq \frac{1}{T} \|r_{k+1} - r_k\|. \quad (18)$$

Доказательство. В силу следствия 2 имеем

$$|\Phi(\delta_{k+1}^\infty) - \Phi(\delta^\infty)| \leq \frac{1}{T} \bar{\Phi}_k - \frac{1}{T} \Phi_k.$$

Замечая теперь, что $\bar{\Phi}_k - \Phi_k = \|Ur_k - r_k\| = \|r_{k+1} - r_k\|$, получаем (18).

Теорема 3. Рекуррентное соотношение (14) порождает оптимизационную схему, в которой за конечное число итераций достигается оптимальная периодическая стратегия.

Доказательство. В силу сходимости U^* -порожденных векторов $\{r_k\}$ имеем $\|r_{k+1} - r_k\| \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Тогда, используя (18), имеем

$$|\Phi(\delta_{k+1}^\infty) - \Phi(\sigma^\infty)| < \frac{1}{T} \|r_{k+1} - r_k\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Теперь учтем, что в конечномерном случае число различных периодических стратегий конечно. Тогда найдется некоторое $\varepsilon_0 > 0$ такое, что

$$\varepsilon_0 = \min_{\{\delta^\infty : \varphi(\delta^\infty) \neq \varphi(\sigma^\infty)\}} |\varphi(\delta^\infty) - \varphi(\sigma^\infty)|, \quad (20)$$

где σ^∞ — оптимальная периодическая стратегия. Из (19) следует, что найдется некоторое $k = k^* < \infty$, начиная с которого будет выполняться неравенство $|\varphi(\delta_k^\infty) - \varphi(\sigma^\infty)| < \varepsilon_0$ для всех $k \geq k^*$. Но по определению ε_0 в (20) здесь может выполняться лишь равенство вида $|\varphi(\delta_k^\infty) - \varphi(\sigma^\infty)| = 0$ для всех $k \geq k^*$. Это означает, что в последовательности U^* -порожденных периодических стратегий $\{\delta_k^\infty\}$ в момент $k^* < \infty$ достигается и продолжает далее для $k \geq k^*$ выбираться оптимальная периодическая стратегия. Это доказывает теорему.

Следствие 3. а) Пусть $\|r_{k+1} - r_k\| \leq T\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Тогда U^* -порожденная периодическая стратегия δ_{k+1}^∞ ε -оптимальна;

б) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $k(\varepsilon) < \infty$ такое, что в последовательности U^* -порожденных стратегий $\{\delta_k^\infty\}$ стратегия $\delta_{k(\varepsilon)}^\infty$ является ε -оптимальной.

Доказательство. Очевидным образом следует из неравенств (18) и (19).

Полученные результаты определяют оптимизационную схему, в которой за конечное число итераций достигается ε -оптимальная стратегия. Эта процедура заключается в следующем.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Положить $r_0 = \bar{0}$ и вычислить $r_1 = U^*r_0$. Пусть выполнено $k \geq 1$ итераций и вычислен вектор r_k . Тогда для продолжения процедуры необходимо выполнить следующий алгоритм.

1. Вычислить $r_{k+1} = U^*r_k$. Для этого необходимо выполнить следующую вспомогательную процедуру.

Положить $r^{(1)} = r_k$. Пусть вычислен вектор $r^{(t)}$, $1 \leq t \leq T$. Тогда выполнить

а) для каждого $x \in E$ выбрать управление $y_x \in Y$ из условия

$$\{F_{T-t+1}(y_x) r^{(t)}\}(x) = \max_y \{F_{T-t+1}(y) r^{(t)}\}(x).$$

Образовать решающую функцию σ_{T-t+1} , полагая $\sigma_{T-t+1}(x) = y_x$, $x \in E$;

б) если $t = T$, перейти в д);

в) вычислить вектор $r^{(t+1)} = F_{T-t+1}(\sigma_{T-t+1}) r^{(t)}$;

г) положить $t = t + 1$ и перейти в а);

д) вычислить вектор r_{k+1} с компонентами $r_{k+1}(x) = r^{(T)}(x) - r^{(T)}(z)$, $x \in E$;

е) остановить вспомогательную процедуру.

2. Проверить $\|r_{k+1} - r_k\| \leq T\varepsilon$. Если оно выполнено, то перейти в 4.

3. Положить $k = k + 1$ и перейти в 1.

4. Остановить алгоритм.

В заключение заметим, что обоснование оптимизационного алгоритма остается в силе, если вместо сжатия оператора Q потребовать его l -сжатие. Этому свойству удовлетворяют, например, операторы, матрицы которых регулярны.

Пример. Рассмотрим систему с двумя состояниями $E = \{x_1, x_2\}$. Пусть множество допустимых управлений Y содержит три элемента: y_1, y_2, y_3 . Переходная функция q_t и функция выигрышей w_t удовлетворяют условию периодичности с периодом $T = 4$. Пусть эти функции заданы в следующем виде:

$$q_t(x_1 | x_1, y) = \begin{cases} \frac{5-t}{5+t}, & y = y_1 \\ \frac{1}{12}(2 + (2-t)^2), & y = y_2 \\ \frac{1}{10}(6 - (2-t)^2), & y = y_3; \end{cases}$$

$$q_t(x_1 | x_2, y) = \begin{cases} \frac{1}{6-t}, & y = y_1 \\ \frac{1}{10}(t(5-t)), & y = y_2 \\ \frac{1}{10}t, & y = y_3; \end{cases}$$

$$q_t(x_1 | x, y) + q_t(x_2 | x, y) = 1, \quad x \in E;$$

$$w_t(x_1, y) = \begin{cases} 1,975q_t(x_1 | x_1, y) + 10, & y = y_1 \\ 6,01q_t(x_1 | x_1, y) + 10, & y = y_2 \\ 3q_t(x_1 | x_1, y) + 8, & y = y_3; \end{cases}$$

$$w_t(x_2, y) = \begin{cases} 3,95q_t(x_1 | x_2, y) + 3, & y = y_1 \\ q_t(x_1 | x_2, y) + 2, & y = y_2 \\ 5q_t(x_1 | x_2, y) + 3, & y = y_3. \end{cases}$$

Выберем $\varepsilon = 10^{-5}$, положим $z = x_2$ и $r_0 = \bar{0}$. Выполняя первую итерацию алгоритма, получаем следующий набор решающих функций:

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} y_1, & x = x_1 \\ y_5, & x = x_2, \end{cases} \quad \sigma_2(x) = \begin{cases} y_3, & x = x_1 \\ y_5, & x = x_2, \end{cases}$$

$$\sigma_3(x) = \begin{cases} y_2, & x = x_1 \\ y_5, & x = x_2, \end{cases} \quad \sigma_4(x) = \begin{cases} y_2, & x = x_1 \\ y_6, & x = x_2. \end{cases}$$

Вектор $r_1 = \begin{pmatrix} 10,836667 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\|r_1 - r_0\| = 10,836667 > T\varepsilon$. На второй итерации получаем набор решающих функций:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x) &= \begin{cases} y_1, & x = x_1 \\ y_5, & x = x_2, \end{cases} & \sigma_2(x) &= \begin{cases} y_1, & x = x_1 \\ y_5, & x = x_2, \end{cases} \\ \sigma_3(x) &= \begin{cases} y_3, & x = x_1 \\ y_5, & x = x_2, \end{cases} & \sigma_4(x) &= \begin{cases} y_2, & x = x_1 \\ y_4, & x = x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

и вектор $r_2 = \begin{pmatrix} 10,836994 \\ 0 \end{pmatrix}$. При этом $\|r_2 - r_1\| = 0,000327 > T\varepsilon$.

На третьей итерации набор решающих функций повторился и получен вектор $r_3 = \begin{pmatrix} 10,836994 \\ 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $\|r_3 - r_2\| < T\varepsilon = 4 \times 10^{-5}$, то выполнено условие остановки алгоритма. Тогда стратегия, определенная набором решающих функций, полученных на третьей итерации, является ε -оптимальной.

Список литературы: 1. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1964.—189 с. 2. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений.— М.: Наука, 1977.—175 с. 3. Баранов В. В. Рекуррентные методы оптимальных решений в стохастических системах.— Х.: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1981.—145 с. 4. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.—271 с. 5. Рудин У. Функциональный анализ.— М.: Мир, 1975.—443 с.

Поступила в редколлегию 10.01.84.

УДК 317.946.9

Ю. В. ГАНДЕЛЬ, Ю. И. ЛОГВИНОВ

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕКОТОРЫХ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1. Простейшим примером в рассматриваемом круге вопросов является плоская задача о стационарном распределении температуры в полупространстве при условии, что на части границы, состоящей из конечного числа полос, края которых параллельны, задан тепловой поток, а на оставшейся части поддерживается постоянная температура.

В дальнейшем используются следующие обозначения:

$E = \bigcup_{k=1}^m (a_k; b_k)$, $-\infty < a_1 < b_1 < \dots < a_m < b_m < +\infty$; $CE = R \setminus E$; $\{(x, y, z): x \in E, y \in R, z = 0\}$ — упомянутая выше система полос.

Для определения температурного поля $u = u(x, z)$, $x \in R$, $z \geq 0$ имеем смешанную краевую задачу:

$$\Delta u = 0, \quad z > 0; \quad (1)$$

$$u \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty; \quad (2)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in CE; \quad (3)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = f(x), \quad x \in E. \quad (4)$$

Кроме того, для обеспечения единственности решения требуем, чтобы выполнялись условия Майкснера на ребре.

Решение задачи, удовлетворяющее условиям (1), (2), ищем в виде

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{-|\lambda|z} e^{i\lambda x} d\lambda, \quad z > 0, \quad (5)$$

где $C(\lambda)$, $\lambda \in R$ — неизвестная функция.

Из граничных условий (3), (4) получаем парное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0, \quad x \in CE; \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = f(x), \quad x \in E. \quad (7)$$

Обозначим

$$U(x) = u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in R.$$

В силу (6) $U(x) = 0$, $x \in CE$.

Таким образом, для того, чтобы знать температуру на всей границе, нам нужно найти $U(x)$ при $x \in E$.

Действуя так же, как в работе [1], введем в рассмотрение функцию

$$F(x) = \frac{dU(x)}{dx} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in R \quad (8)$$

и выведем сингулярное интегральное уравнение для функции $F(x)$, $x \in E$, которое в соответствии с условием Майкснера будем искать в классе функций

$$F(x) = \frac{\Phi(x)}{\sqrt{\left| \prod_{k=1}^m (b_k - x)(x - a_k) \right|}}, \quad (9)$$

где $\Phi(x)$, $x \in \bar{E}$ — непрерывная по Гельдеру функция. Поскольку в силу (6) $F(x) = 0$, $x \in CE$ (10), очевидно, $F(x) \in L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < 2$.

Применяя к (8) преобразование Гильберта

$$(HF)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(y)}{y-x} dy$$

и учитывая, что $H: e^{i\lambda y} \rightarrow i \frac{|\lambda|}{\lambda} e^{i\lambda x}$, а также (10), имеем

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_E \frac{F(y) dy}{y-x}, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (11)$$

Рассматривая это представление для преобразования Фурье функции $|\lambda| C(\lambda)$, $\lambda \in \mathbf{R}$ лишь при $x \in E$, подставим его в уравнение (7). Получено сингулярное интегральное уравнение для функции $F(x)$, $x \in E$:

$$-\frac{1}{\pi} \int_E \frac{F(y) dy}{y-x} = f(x), \quad x \in E, \quad (12)$$

решение которого (как отмечалось выше) ищем в классе функций, определяемых условие (9), причем должны выполняться m соотношений

$$\int_{a_k}^{b_k} F(y) dy = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (13)$$

которые вытекают из уравнения (6).

Как известно [2], задача (12), (13) в классе (9) однозначно разрешима.

2. Выведем далее парные интегральные уравнения следующей смешанной краевой задачи стационарной теплопроводности в полсе:

$$\Delta u = 0, \quad 0 < z < H; \quad (14)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial z} + hu|_{z=0} = 0, \quad h \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=H} = f(x), \quad x \in E; \quad (16)$$

$$u|_{z=H} = 0, \quad x \in CE. \quad (17)$$

и, как указывалось выше, должны выполняться условия на ребре.

Решение уравнения (14), удовлетворяющее условию (15), ищем в виде

$$u(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) (\lambda \operatorname{ch} \lambda z + h \operatorname{sh} \lambda z) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

а из граничных условий при $z = H$ (16), (17) получаем парное интегральное уравнение для $A(\lambda)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda) (\lambda \operatorname{ch} \lambda H + h \operatorname{sh} \lambda H) e^{i\lambda x} d\lambda = 0, \quad x \in CE;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda A(\lambda) (\lambda \operatorname{sh} \lambda H + h \operatorname{ch} \lambda H) e^{i\lambda x} d\lambda = f(x), \quad x \in E$$

или, обозначая $A(\lambda) (\lambda \operatorname{ch} \lambda H + h \operatorname{sh} \lambda H) = C(\lambda)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = 0, \quad x \in CE, \quad (18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda C(\lambda) \frac{\lambda \operatorname{sh} \lambda H + h \operatorname{ch} \lambda H}{\lambda \operatorname{ch} \lambda H + h \operatorname{sh} \lambda H} e^{i\lambda x} d\lambda = f(x), \quad x \in E. \quad (19)$$

Полагая

$$\varepsilon_h(\lambda) = \frac{(|\lambda| - h) \operatorname{sh} |\lambda| H + (h - |\lambda|) \operatorname{ch} \lambda H}{|\lambda| \operatorname{ch} \lambda H + h \operatorname{sh} |\lambda| H} \quad (20)$$

(очевидно, $\varepsilon_h(\lambda) = O(e^{-2H|\lambda|})$, $\lambda \rightarrow \pm \infty$),

перепишем уравнение (19) в «стандартном виде» [1]:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| C(\lambda) (1 + \varepsilon(\lambda)) e^{i\lambda x} dx = f(x), \quad x \in E. \quad (21)$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$F(x) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda C(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad x \in R,$$

получаем из (18) $F(x) = 0$, $x \in CE$,

$$\int_{d_k}^{b_k} F(y) dy = 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (22)$$

Используя результат работы [1], выпишем сингулярное интегральное уравнение для функции $F(x)$, $x \in E$:

$$-\frac{1}{\pi} \oint_E \frac{F(y) dy}{y-x} + \int_E K_h(y-x) F(y) dy = f(x), \quad x \in E, \quad (23)$$

где

$$K_h(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(|\lambda| - h) \operatorname{sh} |\lambda| H + (h - |\lambda|) \operatorname{ch} \lambda H}{\lambda \operatorname{ch} \lambda H + h \operatorname{sh} |\lambda| H} e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (24)$$

Отметим, что в случае, когда на нижнем основании полосы (при $z = 0$) вместо граничного условия (15) задано условие второго рода ($h = 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad x \in R,$$

функция $\varepsilon_h(\lambda)$ (20) имеет вид

$$\varepsilon_0(\lambda) = \frac{-2e^{-2|\lambda|H}}{1 + e^{-2|\lambda|H}}$$

и соответственно $K_h(x)$ (24) —

$$K_0(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2H|\lambda|}}{1 + e^{-2H|\lambda|}} \cdot \frac{|\lambda|}{\lambda} e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Если же на нижнем основании — граничное условие первого рода ($h = \infty$): $u|_{z=0} = 0, \quad x \in R$, то

$$\varepsilon_{\infty}(\lambda) = \frac{2e^{-2H|\lambda|}}{1 - e^{-2H|\lambda|}}, \quad \text{и}$$

$$K_{\infty}(x) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2H|\lambda|}}{1 - e^{-2H|\lambda|}} \cdot \frac{|\lambda|}{\lambda} e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Решение уравнения (23) с дополнительными условиями (22) в соответствии с требованиями, накладываемыми на поведение на ребре, следует искать в классе функций, сужение которых на каждый из интервалов (a_k, b_k) представлено в виде

$$F(x)_{x \in (a_k; b_k)} = F_k(x) = \frac{v_k(x)}{\sqrt{(b_k - x)(x - a_k)}}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (25)$$

где $v_k(x)$, $x \in [a_k; b_k]$ — непрерывная по Гельдеру функция.

3. Вычисление функций $v_k(x)$ производится методом, предложенным в [3]. Приведем относящийся к нашему случаю результат этой работы, следуя [1].

Пусть

$$y_{k,i} = \frac{b_k - a_k}{2} \cos \frac{2i-1}{2n_k} \pi + \frac{b_k + a_k}{2}, \quad i = 1, \dots, n_k;$$

$$x_{k,j} = \frac{b_k - a_k}{2} \cos \frac{j}{n_k} \pi + \frac{b_k + a_k}{2}, \quad j = 1, \dots, n_k - 1; \quad k = 1, \dots, m.$$

Если $F(x)$ — единственное в классе функций, определяемом условиями (25), решение уравнения (23), удовлетворяющее соотно-

шениям (22), то система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{n_k} \left\{ \frac{-1}{y_{k,i} - x_{p,j}} + \pi K(y_{k,i} - x_{p,j}) \right\} v_{k,n_k}(x_{k,i}) \frac{1}{n_k} =$$

$$= f(x_{p,j}), \quad j = 1, n_p - 1;$$

$$\sum_{i=1}^{n_k} v_{k,n_k}(y_{k,i}) \frac{1}{n_k} = 0, \quad j = n_p; \quad p = 1, \dots, m$$

при достаточно больших $N = \min_{1 \leq k \leq m} n_k$ однозначно разрешима и в предположении, что $f(x)$, $K(x) \in C^r$, а $f^{(r)}(x)$, $K^{(r)}(x)$ принадлежит гельдеровскому классу $H(\alpha)$, имеет место оценка

$$v_k(y_{k,i}) - v_{k,n_k}(y_{k,i}) = O\left(\frac{\ln n_k}{n_k^{r+\alpha}}\right), \quad i = 1, \dots, n_k; \quad k = 1, \dots, m.$$

Заменяя «таблицу» значений $v_{k,n_k}(y_{k,i})$ интерполяционным многочленом $P_{k,n_k-1}(y)$ степени $n_k - 1$ ($P_{k,n_k-1}(y_{k,i}) = v_{k,n_k}(y_{k,i})$, $i = 1, \dots, n_k$), можно получить оценку погрешности в

$$L_{\omega_k}^2(a_k, b_k), \quad \omega_k = ((b_k - y)(y - a_k))^{-\frac{1}{2}} \quad \text{при } N \rightarrow \infty:$$

$$\|v_k - P_{k,n_k-1}\|_{L_{\omega_k}^2} = O\left(\frac{1}{n_k^{r+\alpha}}\right), \quad k = 1, \dots, m.$$

Далее можно вычислить и приближенные значения температуры на тех участках верхнего основания полосы ($z = H$), где был первоначально задан тепловой поток:

$$u_{k,n_k}(x, H) = \int_{a_k}^x \frac{P_{k,n_k-1}(y) dy}{V(b_k - y)(y - a_k)}, \quad x \in (a_k, b_k), \quad k = 1, \dots, m. \quad (26)$$

Разность между точным и приближенным значениями $u(x, H)$, $x \in E$ может быть оценена следующим образом:

$$|u(x, H) - u_{k,n_k}(x, H)|_{x \in (a_k; b_k)} = \left| \int_{a_k}^x \frac{v_k(y) - P_{k,n_k-1}(y)}{V(b_k - y)(y - a_k)} dy \right| \leq$$

$$\leq \int_{a_k}^{b_k} \frac{|v_k(y) - P_{k,n_k-1}(y)|^2}{V(b_k - y)(y - a_k)} dy \cdot \int_{a_k}^{b_k} \frac{dy}{V(b_k - y)(y - a_k)} =$$

$$= \pi \|v_k - P_{k,n_k-1}\|_{L_{\omega_k}^2}^2.$$

4. Модельная задача. Численные результаты. Пусть в задаче пункта 1

$$E = (a_1; b_1) \cup (a_2; b_2), \quad -\infty < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < +\infty.$$

Запишем сингулярное интегральное уравнение (12) задачи и дополнительные условия (13) в этом случае в виде такой системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(y)}{\sqrt{(b_1-y)(y-a_1)}} \frac{dy}{y-x} + \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(y)}{\sqrt{(b_2-y)(y-a_2)}} \frac{dy}{y-x} = \\ = f_1(x), \quad x \in (a_1; b_1); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(y) dy}{\sqrt{(b_1-y)(y-a_1)}} = 0; \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(y)}{\sqrt{(b_2-y)(y-a_2)}} \frac{dy}{y-x} + \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(y)}{\sqrt{(b_1-y)(y-a_1)}} \frac{dy}{y-x} = \\ = f_2(x), \quad x \in (a_2; b_2); \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(y) dy}{\sqrt{(b_2-y)(y-a_2)}} = 0, \quad (30)$$

где $f_1(x)$, $x \in [a_1; b_1]$; $f_2(x)$; $x \in [a_2; b_2]$ — гладкие функции.

Полагая в (27) и (29) $a_1 = -2,5$; $b_1 = -0,5$; $a_2 = 0$; $b_2 = 2$; $v_1 = -y - 1,5$, $y \in [-2,5; -0,5]$; $v_2 = 2y - 2$, $y \in [0; 2]$ (31) и учитывая, что

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-s} = 1, \quad -1 < s < +1,$$

находим

$$\begin{aligned} f_1(y) = 1 + \frac{2y-2}{\sqrt{y^2-2y}}, \quad y \in [-2,5; -0,5], \quad f_2(y) = 1 + \\ + \frac{y+1,5}{\sqrt{y^2-3y+1,25}}, \quad y \in [0; 2]; \end{aligned} \quad (32)$$

Очевидно, что при (31) выполняются также условия (28) и (30).

Таким образом, при правых частях f_1 и f_2 (32) решение модельной задачи — функции v_1 и v_2 (31).

Численное решение модельной задачи получено методом дискретных особенностей, описанным в пункте 3. На каждом интервале брали 10 расчетных точек, полученное решение сравнивалось в этих точках с точным. Численные результаты приведены в таблице, из которой видно, что абсолютная погрешность всюду меньше 10^{-6} .

Расчетная точка	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
$-2,5 < y < -0,5$	$v_1(y)$	$v_{1,10}(y)$	$v_{1,10}(y) - v_1(y)$
-2,4876883	+0,9876883	+0,9876880	-0,0000003
-2,3910065	+0,8910065	+0,8910062	-0,0000003
-2,2071068	+0,7071068	+0,7071061	-0,0000007
-1,9539905	+0,4539905	+0,4539303	-0,0000002
-1,6564345	+0,1564348	+0,1564347	-0,0000001
-1,3435655	-0,1564345	-0,1564341	0,0000004
-1,0460095	-0,4539905	-0,4539905	0,0000000
-0,7928932	-0,7071068	-0,7071066	0,0000002
-0,6089935	-0,8910065	-0,8910063	0,0000002
-0,5123117	-0,9876883	-0,9876877	0,0000006
$0 < y < 2$	$v_2(y)$	$v_{2,10}(y)$	$v_{2,10}(y) - v_2(y)$
0,0123117	-1,9753767	-1,9753763	0,0000004
0,1089935	-1,7820130	-1,7820127	0,0000003
0,2928932	-1,4142136	-1,4142130	0,0000006
0,5460095	-0,9079810	-0,9079808	0,0000002
0,8435655	-0,3128689	-0,3128690	0,0000001
1,1564345	0,3128689	0,3128693	0,0000004
1,4539905	0,9079810	0,9079808	-0,0000002
1,7071068	1,4142136	1,4142128	-0,0000008
1,8910065	1,7820130	1,7820127	-0,0000003
1,9876883	1,9753767	1,9753763	-0,0000004

Список литературы: 1. Гандель Ю. В. О парных интегральных уравнениях, приводящих к сингулярному интегральному уравнению на системе отрезков.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 33. 2. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения — М.: Наука, 1968.— 599 с. 3. Лифанов И. К., Матвеев А. Ф. О сингулярном интегральном уравнении на системе отрезков.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1983, вып. 40, с. 104.

Поступила в редколлегию 09.02.84.

УДК 519.9 + 575.1

А. А. КРАПИВИН, Ю. И. ЛЮБИЧ

ОЦЕНКИ ЧИСЛА ИНВАРИАНТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ДЛЯ БЕРНШТЕЙНОВСКИХ АЛГЕБР

Настоящая работа посвящена количественному уточнению теоремы существования инвариантной линейной формы в неискл-чительной бернштейновской (стационарной) алгебре [1, 2]. Мы пользуемся далее (включая обозначения) теорией бернштейновских

алгебр, изложенной в [2] (§ 3.3, 3.4). Напомним, что любая бернштейновская алгебра A над полем $K (= \mathbf{R}, \mathbf{C})$ коммутативна (но неассоциативна), снабжена весом (характером) $\sigma \neq 0$ и удовлетворяет тождеству $(x^2)^2 = \sigma^2(x)x^2$. Если $e \neq 0$ — идемпотент (например, $e = x_0^2$, где $\sigma(x_0) = 1$), то $A = Ke + \text{Ker } \sigma$, $\text{Ker } \sigma = U + W$, где U, W — соответственно образ и ядро проектора $L_e = 2e \cdot$, действующего в $\text{Ker } \sigma$. При этом

$$U^2 \subset W, W^2 \subset U, WU \subset U, \quad (1)$$

выполняется тождество Якоби

$$u_1(u_2u_3) + u_2(u_3u_1) + u_3(u_1u_2) = 0, \quad (2)$$

а также тождества

$$u_1(u_2w) + u_2(u_1w) = 0; \quad (3)$$

$$(u_1w_1)(u_2w_2) + (u_2w_1)(u_1w_2) = 0; \quad (4)$$

$$u(w_1w_2) = 0, (u_1k_2)(w_1w_2) = 0; \quad (5)$$

$$(u_1u_2)(u_3u_4) + (u_1u_3)(u_2u_4) + (u_1u_4)(u_2u_3) = 0. \quad (6)$$

Здесь и далее все $u_i \in U$, все $w_k \in W$.

Размерности подпространств U, W обозначим через m — 1 и δ соответственно. Пара чисел (m, δ) называется типом бернштейновской алгебры. Очевидно, $m + \delta = \dim A$.

Линейная форма f на A называется инвариантной, если $f(x^2) = \sigma(x)f(x)$. Инвариантные линейные формы образуют подпространство $J \subset A^*$, при этом $\sigma \in J$. Положим $d = \dim J$. Имеет место неравенство $1 \leq d \leq m$. Инвариантные линейные формы, пропорциональные σ , называются тривиальными. Отметим, что

$$J^\perp = (WU + W^2) + W. \quad (7)$$

Линейная форма g на A называется исчезающей, если $g(x^2) = 0$. Исчезающие линейные формы образуют подпространство $N \subset A^*$. Положим $v = \dim N$. Имеет место неравенство $0 \leq v \leq \delta$. Отметим, что $J \cap N = 0$ и

$$N^\perp = A^2 = Ke + U + U^2. \quad (8)$$

Отсюда следует, что $\dim U^2 = \delta - v$. Этим соотношением мы существенно пользуемся в дальнейшем.

Лемма 1. Произведения $P_k = u_0(w_1(w_2 \dots (w_k u_1) \dots))$ антисимметричны по $w_1, \dots, w_k$.

Доказательство. Опираясь на включения (1), подставим в (3) $u_1 \rightarrow u_0, u_2 \rightarrow w_2 u_1, w \rightarrow w_1$. Получим $(w_2 u_1)(w_1 u_0) = -(w_2 u_0) \times (w_1 u_1)$. Вновь применяя (3) с подстановкой $u_1 \rightarrow w_1 u_1, u_2 \rightarrow u_0, w \rightarrow w_2$, имеем $(w_2 u_0)(w_1 u_1) = -u_0(w_2(w_1 u_1))$. В конечном счете $u_0(w_1(w_2 u_1)) = -u_0(w_2(w_1 u_1))$. Это означает, что P_2 антисимметрично по w_1, w_2 . Проведем индуктивный переход $(k-1) \rightarrow k$.

Достаточно показать, что в P_k антикоммутируют любые два соседа w_{j-1}, w_j . При $j < k$ это непосредственно обеспечивается индуктивным предположением. При $j = k$ воспользуемся тождеством (3) с подстановкой $u_1 \rightarrow u_0, u_2 \rightarrow w_2(\dots(w_k u_1)\dots), w \rightarrow w_1$. Получим $P_k = -(w_1 u_0)(w_2(\dots(w_k u_1)\dots))$. Так как $w_1 u_0 \in U$, то w_{k-1}, w_k в этом выражении антикоммутируют по предположению индукции. Остается вновь применить уравнение (3) в обратном направлении.

Далее будем полагать

$$W^{(k)}V = \underbrace{W(W(\dots(WV)\dots))}_k \quad (k = 1, 2, \dots),$$

где V — любое подпространство в U .

Следствие. $U(W^{(k)}U) = (k \geq \delta + 1)$.

Лемма 2. $(W^{(k)}V)(W^{(l)}V) = V(W^{(k+l)}V)$.

Доказательство. Используя тождество (3) и включения (1), получаем при всех $u, u' \in V$ $[w_1(w_2(\dots(w_k u)\dots))] \cdot [w_1 \times (\omega_2'(\dots(\omega_1' u')\dots))] = -[w_1(\omega_1'(\omega_2'(\dots(\omega_1' u')\dots)))] \cdot [w_2(\dots(\omega_k u)\dots)] = \dots = (-1)^k [w_k(w_{k-1}(\dots(w_1(\omega_1'(\dots(\omega_1' u')\dots))))] u$.

Лемма 3. *Имеет место тождество $u_0(w_1(w_2(\dots(w_k u_1)\dots))) = (-1)^{k(k+1)/2} u_1(w_1(w_2(\dots(w_k u_0)\dots)))$ ($k = 1, 2, \dots$).* (9)

Доказательство непосредственно получается из тождества (3) с использованием включений (1) индукцией по k .

Пусть U^0 — любое прямое дополнение $WU = W^2$ в U , т. е.

$$U = (WU + W^2) \dot{+} U^0. \quad (10)$$

Из (7) и того факта, что $\sigma \in J$ вытекает, что $\dim U^0 = d - 1$. Пусть W^0 — любое прямое дополнение U^2 в W , т. е.

$$W = U^2 \dot{+} W^0. \quad (11)$$

Из (8) вытекает, что $\dim W_0 = v$. Теперь заметим, что в силу (5)

$$W^2 U = 0, \quad W^2 U^2 = 0. \quad (12)$$

Поэтому

$$U^2 = (WU)^2 + (WU)U^0 + (U^0)^2. \quad (13)$$

Лемма 4. $(WU)U^0 = (WU)^2 + U^0(WU^0)$.

Доказательство. Из разложений (10), (11) следует равенство $WU = W(WU) + W \cdot W^2 + WU^0 = W^{(2)}U + W^{(1)}W^2 + W^{(1)}U^0$. Итерируя это равенство p раз, получаем

$$WU = W^{(p+1)}U + \sum_{k=1}^p W^{(k)}U^0 + \sum_{k=1}^p W^{(k)}W^2. \quad (14)$$

Умножим обе части равенства (14) на U^0 при $p = \delta$. В силу следствия леммы 1 $U^0(W^{(\delta+1)}U) = 0$. Кроме того, из тождеств (9), (12) с учетом включения $W^{(k)}U^0 \subset U$ вытекает

$$U^0(W^{(k)}W^2) = W^2(W^{(k)}U^0) = 0. \quad (15)$$

Следовательно,

$$U^0(WU) = \sum_{k=1}^{\delta} U^0(W^{(k)}U^0). \quad (16)$$

Возводя обе части равенства (14) в квадрат при $p = \delta$ и используя лемму 2, получаем

$$(WU)^2 = \sum_{k=2}^{\delta} U^0(W^{(k)}U^0). \quad (17)$$

Сравнивая (16) и (17), получаем требуемый результат.

Следствие.

$$U^2 = (U^0)^2 + (WU)^2 + U^0(WU^0) = (U^0)^2 + U^0(WU). \quad (18)$$

Теорема 1. Пусть $h = \dim WU$, $h_1 = \dim WU^0$. При $h_1 \geq 1$ имеет место оценка

$$\frac{1}{2}d(d-1) + \frac{1}{2}(h-1)(h-2) + (d-2)(h_1-1) \geq \delta - v, \quad (19)$$

а при $h_1 = 0$ —

$$\frac{1}{2}d(d-1) \geq \delta - v.$$

Доказательство. Надлежит оценить сверху $\delta - v = \dim U^2$. Для этого оценим размерности каждого из слагаемых, входящих в первое равенство (18). Очевидно, что

$$\dim(U^0)^2 \leq \frac{1}{2}d(d-1). \quad (20)$$

Если $h_1 = \dim WU^0 = 0$, то все $W^{(k)}U^0 = 0$ и разложение (17) дает $(WU)^2 = 0$, т. е. в этом случае $U^2 = (U^0)^2$ и в силу (20) получаем оценку (19).

Пусть $h_1 \geq 1$, т. е. $W^{(1)}U^0 \neq 0$. Обозначим через H подпространство $W^{(\delta+1)}U$, если оно отлично от нуля. В противном случае положим $H = W^{(q)}U^0$, где $q \leq \delta$ — наибольший номер, для которого $W^{(q)}U^0 \neq 0$. По построению $H \neq 0$. Покажем, что $H(WU) = 0$. Если $H = W^{(\delta+1)}U$, то это вытекает из следствия леммы 1, поскольку $WU \subset U$. Пусть $H = W^{(q)}U^0$, $q \leq \delta$. Из разложения (14) при $p = \delta$ получаем

$$H(WU) = \sum_{k=1}^q H(W^{(k)}U^0) + \sum_{k=1}^{\delta} H(W^{(k)}W^2).$$

Но $H(W^{(k)}U^0) = (W^{(q)}U^0)(W^{(k)}U^0) = U^0(W^{(q+k)}U^0)$ в силу леммы 2. Отсюда $H(W^{(k)}U^0) = 0$, ибо $W^{(q+k)}U^0 = 0$ при $k \geq 1$ по построению H . Равенство $H(W^{(k)}W^2) = 0$ ($k = 1, 2, \dots$) получается аналогично (15).

Из доказанного следует, что в WU существует вектор $u_1 \neq 0$, такой, что $u_1(WU) = 0$. Дополним этот вектор до базиса в WU векторами вида $u_i = w_i \tilde{u}_i$ ($2 \leq i \leq h$). Тогда в силу (4) $u_i^2 = 0$ ($2 \leq i \leq h$). Следовательно, $(WU)^2$ является линейной оболочкой произведений $u_i u_j$ ($2 \leq i < j \leq h$), откуда

$$\dim(WU)^2 \leq \frac{1}{2}(h-1)(h-2). \quad (21)$$

Для оценки $\dim U^0(WU^0)$ выберем в U^0 базис $v_1, \dots, v_{d-1}$ и в W базис $w_1, \dots, w_\delta$. Тогда в WU^0 базис можно выбрать из векторов вида $x_{ij} = w_i v_j$, а в $U^0(WU^0)$ базис можно выбрать из векторов вида $v_k x_{ij}$.

Из (3) следует, что $v_j x_{ij} = 0$ для всех i, j , в частности, $v_1 x_{i1} = 0$. Поэтому среди произведений $v_1 x_{ij}$ содержится не более чем $h_1 - h'$ линейно независимых векторов, где h' — число базисных векторов вида x_{i1} (не умаляя общности, можно считать $h' \geq 1$).

При $k > 1$ воспользуемся разложением

$$w_i v_k = \sum_{s, l} \lambda_{ik, sl} x_{sl}.$$

Умножая обе части на v_1 и применяя тождество (3), получаем

$$v_k(w_i v_1) = - \sum_{s, l} \lambda_{ik, sl} v_1 x_{sl},$$

т. е. произведения $v_k x_{i1}$ являются линейными комбинациями произведений $v_1 x_{ij}$, вошедших в базис подпространства $U^0(WU^0)$. Таким образом, при каждом $k \geq 1$ среди произведений $v_k x_{ij}$ содержится не более, чем $h_1 - h'$ линейно независимых. Заметим еще, что аналогично предыдущему произведения $v_{d-1} x_{ij}$ ($j < d-1$) линейно выражаются через $v_k x_{sl}$, где $k < d-1$. В итоге получаем

$$\dim U^0(WU^0) \leq (d-2)(h_1 - h') \leq (d-2)(h_1 - 1). \quad (22)$$

Теорема доказана.

Следствие 1. При $h \geq 1$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2}d(d-1) + \frac{1}{2}(h-1)(h-2) + (d-2)(h-1) \geq \delta - v. \quad (23)$$

Следствие 2. Для любой бернштейновской алгебры типа (m, δ) имеет место оценка

$$2d + \frac{1}{2}(m-1)(m-6) \geq \delta - v. \quad (24)$$

Оценка (24) вытекает из (23) благодаря неравенству $h \leq m - d$.

Из неравенства (24) вытекает признак правильности (консервативности) алгебры, полученный в [3] (см. также [2, § 3.4]). Он заключается в выполнении неравенства

$$\delta - v > \frac{1}{2} (m - 1) (m - 2). \quad (25)$$

Теперь можно заметить, что из (25) и (24) следует $d > m - 1$, т. е. $d = m$, что и означает правильность алгебры.

Второе из равенств (18) позволяет получить дальнейшие оценки. Имеем

$$\frac{1}{2} d (d - 1) + \dim U^0 (WU) \geq (\delta - v). \quad (26)$$

Оценим $\dim U^0 (WU)$, пользуясь разложением (16). Выберем в U^0 и в W те же базисы, что и в доказательстве теоремы 1. Тогда в подпространстве

$$L = \sum_{k=1}^{\delta} W^{(k)} U^0 \subset WU$$

можно выбрать базис Δ из векторов вида

$$x_{i_1, \dots, i_k}^{(s)} = w_{i_1} (w_{i_2} (\dots (w_{i_k} v_s) \dots)) \in W^{(k)} U^0, \quad (27)$$

начиная с базиса подпространства $W^{(1)} U^0$, дополняя его до базиса суммы $W^{(1)} U^0 + W^{(2)} U^0$ и т. д. Количество базисных векторов с фиксированными k, s обозначим через $h_k^{(s)}$.

Лемма 5. $\dim U^0 (WU) \leq (d - 1) h -$

$$- \sum_{s=1}^{d-2} (d - s - 1) \sum_{k=1}^{\delta} h_k^{(s)} - \sum_{k: k(k+1) \equiv 2 \pmod{4}} \sum_{s=1}^{d-1} h_k^{(s)}. \quad (28)$$

Доказательство. Базис в $U^0 (WU) = U^0 L$ можно строить, последовательно выбирая векторы из $v_1 \Delta, v_2 \Delta, \dots, v_{d-1} \Delta$. Количество векторов в объединении этих систем, очевидно, равно $(d - 1) \dim L \leq (d - 1) h$. Но $v_s x_{i_1, \dots, i_k}^{(s)} = 0$ при $k(k + 1) \equiv 2 \pmod{4}$ в силу леммы 3. Количество таких произведений равно последней сумме в правой части (28). Кроме того, произведения вида $v_j x_{i_1, \dots, i_k}^{(s)}$ при $s < j$ линейно выражаются через базисные векторы, входящие в $v_1 \Delta, \dots, v_{j-1} \Delta$. Действительно, в силу (27) и леммы 3 $v_j x_{i_1, \dots, i_k}^{(s)} = \pm v_s x_{i_1, \dots, i_k}^{(j)}$. Количество таких лишних произведений равно

$$\sum_{s=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{\delta} h_k^{(s)}.$$

Суммируя эти выражения по j , получаем первую из сумм (28). Лемма доказана.

Заметим теперь, что в правую часть (28) входит с минусом

$$\sum_{s=1}^{d-1} h_1^{(s)} = h_1.$$

Поэтому имеет место

Теорема 2.

$$\frac{1}{2} d(d-1) + (d-1)h - h_1 \geq \delta - v. \quad (29)$$

Заметим еще, что в правую часть (28) входят с минусом члены $(d-2)h_1^{(1)}$ и $h_1^{(1)}$. Поскольку, не умаляя общности, можно считать $h_1^{(1)} \geq 1$ (если $h_1 \geq 1$), то сумма этих членов $\geq (d-1)$ и, следовательно, имеет место

Теорема 3. При $h_1 \geq 1$

$$(d-1) \left(\frac{1}{2} d + h - 1 \right) \geq \delta - v. \quad (30)$$

Следствие.

$$(d-1) \left(m - \frac{d}{2} - 1 \right) \geq \delta - v. \quad (31)$$

Из оценки (31) вытекает, что если $\delta > v$, т. е. алгебра — неисклужительная, то $d > 1$, т. е. существует нетривиальная инвариантная линейная форма. Таким образом, упомянутая в начале статьи теорема существования вытекает из (31).

Список литературы: 1. Любич Ю. И. Бернштейновские алгебры. — Усп. мат. наук, 1977, 32, № 6, с. 261 — 262. 2. Любич Ю. И. Математические структуры в популяционной генетике. — К.: Наук. думка, 1983. — 296 с. 3. Любич Ю. И. Об одном классе квадратичных отображений. — Теория функций, функций. анализ и их прил., 1974, вып. 21, с. 36 — 42.

Поступила в редколлегию 09.02.84

УДК 681.32.06

С. А. КАЛЮЖНАЯ

РЕШЕТКА ОТНОШЕНИЙ АБСТРАКТНОЙ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ

В теории баз данных важную роль играют отношения функциональной зависимости на множестве атрибутов [1, 2]. Абстрактная характеристика этих отношений была предложена Армстронгом. Всякое отношение независимо от его происхождения, удовлетворяющее аксиомам Армстронга, естественно назвать отношением абстрактной функциональной зависимости. В работе исследуется решетка $\text{Agn}(U)$ всех таких отношений на данном конечном мно-

жестве U . Показано, что эта решетка обладает псевдодополнениями, градуирована и полумодулярна. Описаны дистрибутивные, стандартные элементы, атомы и неразложимые элементы, а также двойственные объекты. Например, показано, что отношение $\varphi \in \text{Agm}(U)$ является кодистрибутивным (костандартным) элементом тогда и только тогда, когда φ находится в нормальной форме Бойса—Кодда. Можно надеяться, что и другие типы отношений, возникшие в качестве решений тех или иных абстрактных задач, окажутся полезными и в других постановках. Фактически нами изучается не решетка $\text{Agm}(U)$, а антиизоморфная ей решетка $\text{Cl}(U)$ систем замыканий на U . При этом свойства одной решетки являются косвойствами другой и наоборот. Все необходимые сведения из теории решеток содержатся в [3, 4]. Знак $\subset$ обозначает нестрогое включение, знак $\prec$ используется для обозначения покрытия, число элементов множества X обозначается $|X|$, $P(X)$ — множество всех подмножеств множества X .

1.1. Отношением абстрактной функциональной зависимости будем называть бинарное отношение на $P(U)$, удовлетворяющее следующим требованиям: 1) если $X \supset Y$, то $X\varphi Y$; 2) из $X\varphi Y$ и $X\varphi Z$ следует $X\varphi(Y \cup Z)$; 3) если $X\varphi Y$ и $Y\varphi Z$, то $X\varphi Z$ ($X, Y, Z \in P(U)$).

Множество всех таких отношений обозначим $\text{Agm}(U)$. Оно упорядочено по включению бинарных отношений. Более того, $\text{Agm}(U)$ является решеткой. Инфимум семейства отношений из $\text{Agm}(U)$ служит их пересечение. Супремум набора отношений — наименьшее отношение $\varphi \in \text{Agm}(U)$, содержащее этот набор.

1.2. Оператором замыкания на множестве U называется отображение $J: P(U) \rightarrow P(U)$, обладающее следующими свойствами: 1) если $X \subset Y$, то $J(X) \subset J(Y)$; 2) $J(X) \supset X$; 3) $J(J(X)) = J(X)$ [5, с. 56].

Множество всех операторов замыкания обозначим $\text{Ferm}(U)$. На множестве $\text{Ferm}(U)$ естественно задается отношение порядка: $J_1 \leq J_2 \leftrightarrow J_1(X) \subset J_2(X)$ ($X \in P(U)$), относительно которого оно является решеткой. Инфимум операторов J_1, J_2 — оператор $(J_1 \cap J_2)(X) = J_1(X) \cap J_2(X)$, а их супремум — такой наименьший оператор J , что $J \geq J_1, J \geq J_2$.

1.3. Системой замыканий на множестве U называется система подмножеств $F \subset P(U)$, замкнутая относительно произвольных пересечений [5, с. 55]. В частности, $U \in F$. Множество всех систем замыканий обозначим $\text{Cl}(U)$. Множество $\text{Cl}(U)$, упорядоченное по включению, — решетка. Инфимум совпадает с пересечением, а супремумом систем замыканий F_1 и F_2 будет система замыканий $F_1 \vee F_2 = \{X_1 \cap X_2 : X_1 \in F_1, X_2 \in F_2\} \supset F_1 \cup F_2$.

1.3.1. **Лемма.** $P(U) \setminus \{A\} \in \text{Cl}(U) \leftrightarrow A \prec U$.

1.4. Между операторами замыкания и системами замыканий на U существует взаимно однозначное соответствие. Для $F \in \text{Cl}(U)$ пусть $J_F(X) = \bigcap \{Z \in F : X \subset Z\}$, $J_F \in \text{Ferm}(U)$. Для $J \in \text{Ferm}(U)$ пусть $F_J = \{X \in P(U) : J(X) = X\} = \{J(Y) : Y \in P(U)\} \in \text{Cl}(U)$. Отображе-

ния $F \mapsto J_F$ и $J \mapsto F_J$ — взаимно обратны [5, с. 57]. Кроме того, включения $J_1 \subset J_2$ и $F_{J_1} \supset F_{J_2}$ равносильны. Поэтому справедлива

1.4.1. Теорема. Решетки $\text{Ferm}(U)$ и $\text{Cl}(U)$ антиизоморфны.

1.5. Для $\varphi \in \text{Argm}(U)$ положим $J_\varphi(X) = \bigcup \{Y \in P(U) : X \varphi Y\} = \{y \in U : X_\varphi \{y\}\}$ [2, с. 159]. Легко видеть, что $J_\varphi(X)$ является наибольшим среди всех $Y \in P(U)$, таких что $X \varphi Y$. J_φ — оператор замыкания на U . Для $J \in \text{Ferm}(U)$ по определению будем считать, что $X \varphi_J Y$ тогда и только тогда, когда $Y \subset J(X)$ ($X, Y \in P(U)$). Можно показать, что $\varphi_J \in \text{Argm}(U)$, и отображения $\varphi \mapsto J_\varphi$ и $J \mapsto \varphi_J$ взаимно обратны. При этом $\varphi_1 \subset \varphi_2 \Leftrightarrow J_{\varphi_1} \subset J_{\varphi_2}$. Следовательно, верна

1.5.1. Теорема. Отображение $\varphi \mapsto J_\varphi$ — изоморфизм между решетками $\text{Argm}(U)$ и $\text{Ferm}(U)$.

1.6. С другой стороны, для $\varphi \in \text{Argm}(U)$ положим $F_\varphi = F_{J_\varphi} = \{X \in P(U) : J_\varphi(X) = X\}$. Нетрудно показать, что $X \in F_\varphi$ тогда и только тогда, когда для любого $Y \in P(U)$ из $X \varphi Y$ следует $Y \subset X$. Для $F \in \text{Cl}(U)$ пусть $\varphi_F = \varphi_{J_F} = \{(X, Y) : Y \subset J_F(X)\} = \{(X, Y) : (\forall Z \in F) (X \subset Z \Rightarrow Y \subset Z)\}$. Отображения $\varphi \mapsto F_\varphi$ и $F \mapsto \varphi_F$ — взаимно обратны, причем $\varphi_1 \subset \varphi_2 \Leftrightarrow F_{\varphi_1} \supset F_{\varphi_2}$. Тем самым справедлива

1.6.1. Теорема. Отображение $\varphi \mapsto F_\varphi$ определяет антиизоморфизм решетки $\text{Argm}(U)$ на решетку $\text{Cl}(U)$.

1.6.2. Хотя непосредственный интерес для нас представляет решетка $\text{Argm}(U)$, из трех описанных выше решеток наиболее приемлемой для изучения оказывается $\text{Cl}(U)$, поскольку операции в ней заданы самым обозримым образом. Поэтому далее будет рассматриваться решетка $\text{Cl}(U)$.

1.7. В следующих примерах мы укажем тройки соответствующих друг другу в указанном выше смысле объектов $F \in \text{Cl}(U)$, $J \in \text{Ferm}(U)$, $\varphi \in \text{Argm}(U)$.

1.7.1. $F = P(A) \cup \{U\}$ ($A \in P(U)$); $J(X) = X$ ($X \subset A$), $J(X) = U$ ($X \not\subset A$); $\varphi = \{(X, Y) : Y \subset X \subset A\} \cup \{(X, Y) : X \not\subset A, Y \subset U\}$. Отметим, что $P(U)$ — единица решетки $\text{Cl}(U)$.

1.7.2. $F = P_B(U) = \{X \in P(U) : B \subset X\}$; $J(X) = X \cup B$ ($X \in P(U)$); $\varphi = \{(X, Y) : Y \subset X \cup B\}$. Отметим, что $P_U(U) = \{U\}$ — нулевой элемент решетки $\text{Cl}(U)$.

1.7.3. $F = \{U, A\}$ ($A \neq U$); $J(X) = A$ ($X \subset A$), $J(X) = U$ ($X \not\subset A$); $\varphi = (P(A) \times P(A)) \cup ((P(U) \setminus P(A)) \times P(U))$. Очевидно, $\{U, A\}$ — атом решетки $\text{Cl}(U)$.

1.7.4. $F_a = P(U) \setminus \{U \setminus \{a\}\} \in \text{Cl}(U)$ по лемме 1.3.1. $J(X) = X$ ($X \neq U \setminus \{a\}$), $J(U \setminus \{a\}) = U$; $\varphi = \{(X, Y) : Y \subset X \subset U\} \cup \{(U \setminus \{a\}, Y) : a \in Y\}$. Очевидно, F_a — коатом решетки $\text{Cl}(U)$.

1.7.5. $F = (P(U) \setminus P_A(U)) \cup P_B(U)$ ($A \subset B$); $J(X) = X$ ($X \not\subset A$), $J(X) = X \cup B$ ($X \supset A$); $\varphi = \{(X, Y) : X \supset Y, X \not\subset A\} \cup \{(X, Y) : Y \subset X \cup B, X \supset A\}$.

2.1 Будем говорить, что система замыканий F (и соответствующее ей отношение φ_F) находится в нормальной форме Бойса—Кодда, если для любого $X \in P(U)$ выполняется либо $J_F(X) = X$, либо $J_F(X) = U$.

Очевидно, это определение согласуется с общепринятым [2, с. 172]. Нам будет удобно перейти к эквивалентному определению.

2.2. Систему подмножеств $F \subset P(U)$, содержащую U , назовем наследственной, если для любого $X \in F \setminus \{U\}$ из включения $Y \subset X$ следует, что $Y \in F$.

Это определение — незначительная модификация обычного определения [4, с. 90]. Очевидно, наследственное семейство подмножеств — система замыканий. Всякая наследственная система — объединение систем из примера 1.7.1.

2.3. **Лемма.** Система замыканий находится в нормальной форме Бойса—Кодда тогда и только тогда, когда она является наследственной.

Доказательство. Предположим вначале, что F удовлетворяет условию теоремы. Пусть $X \in F$, $X \neq U$, $Y \subset X$. Тогда $J_F(Y) \subset X$ и, значит, $J_F(Y) \neq U$. Следовательно, $J_F(Y) = Y$, т. е. $Y \in F$.

Наоборот, пусть теперь F — наследственна. Предположим, что $J_F(X) \neq U$. Тогда из $X \subset J_F(X) \in F$ следует, что $X \in F$, т. е. $J_F(X) = X$. Значит, F удовлетворяет условию леммы.

2.4. **Лемма.** Семейство $F \in \text{Cl}(U)$ наследственно тогда и только тогда, когда $F \vee G = F \cup G$ для любого семейства $G \in \text{Cl}(U)$.

Доказательство. Пусть вначале F — наследственно. Возьмем $Z = X \cap Y \in F \vee G$, где $X \in F$, $Y \in G$. Если $X = U$, то $Z = Y \in G$. Если же $X \neq U$, то $Z \in F$, так как $Z \subset X$. В любом случае $Z \in F \cup G$. Обратное включение справедливо всегда. Наоборот, пусть для любого $G \in \text{Cl}(U)$ выполняется условие леммы. Возьмем произвольные $X \in F$, $X \neq U$, $Y \subset X$. Положим $G = \{U, Z\} \in \text{Cl}(U)$, где $Z = Y \cup (U \setminus X) \neq Y$. Тогда $Y = X \cap Z \in F \vee G = F \cup G = F \cup \{Z\}$. Поскольку $Y \neq Z$, отсюда следует, что $Y \in F$. Тем самым F — наследственно.

3.1. В соответствии с определением [4, с. 185] система замыканий F будет дистрибутивным элементом решетки $\text{Cl}(U)$ тогда и только тогда, когда $F \vee (F_1 \cap F_2) = (F \vee F_1) \cap (F \vee F_2)$ для всех $F_1, F_2 \in \text{Cl}(U)$.

3.1.1. **Теорема.** Система замыканий F является дистрибутивным элементом решетки $\text{Cl}(U)$ тогда и только тогда, когда F — наследственная система.

Доказательство. Наследственная система — дистрибутивный элемент в $\text{Cl}(U)$ в силу дистрибутивного закона в $P(U)$ и леммы 2.4. Наоборот, пусть F — дистрибутивный элемент. Возьмем $X \in F$, $X \neq U$, $Y \subset X$. Положим $Z = Y \cup (U \setminus X) \neq Y$. Тогда $Y = X \cap Y = X \cap Z \in (F \vee \{U, Y\}) \cap (F \vee \{U, Z\}) = F \vee (\{U, Y\} \cap \{U, Z\}) = F \vee \{U\} = F$, т. е. F — наследственная система.

3.2. Согласно определению [4, с. 185] элемент $F \in Cl(U)$ будет кодистрибутивным, если $F \cap (F_1 \vee F_2) = (F \cap F_1) \vee (F \cap F_2)$ для всех $F_1, F_2 \in Cl(U)$.

3.2.1. Теорема. Система замыканий является кодистрибутивным элементом решетки $Cl(U)$ тогда и только тогда, когда она имеет вид $P_A(U)$ ($A \subset U$).

Доказательство. Достаточность $P_A(U) \cap (F_1 \vee F_2) = \{X_1 \cap X_2 : X_1 \in F_1, X_2 \in F_2, X_1 \cap X_2 \supset A\} = \{X_1 \in F_1 : X_1 \supset A\} \vee \{X_2 \in F_2 : X_2 \supset A\} = (P_A(U) \cap F_1) \vee (P_A(U) \cap F_2)$.

Необходимость. Пусть $A = \cap \{X : X \in F\}$. Тогда $F \subset P_A(U)$. Возьмем $Y \supset A$, $Y \neq U$ и покажем, что $Y \in F$. Положим $Z = A \cup (U \setminus Y) \neq A$. Тогда $A = Z \cap Y \in F \cap (\{U, Z\} \vee \{U, Y\}) = (F \cap \{U, Z\}) \vee (F \cap \{U, Y\})$. Если бы $Y \notin F$, то последнее множество равнялось бы $F \cap \{U, Z\}$, откуда следовало бы, что $A \in \{U, Z\}$ — противоречие. Значит, $Y \in F$. Таким образом, $F = P_A(U)$.

3.2.2. В силу равенств $P_A(U) \cup P_B(U) = P_{A \cup B}(U)$, $P_A(U) \vee P_B(U) = P_{A \cup B}(U)$ множество кодистрибутивных элементов $Cl(U)$ образует подрешетку, антиизоморфную $P(U)$. Другими словами, множество дистрибутивных элементов решетки $Agm(U)$ образует подрешетку, изоморфную $P(U)$.

3.3. В силу определения [4, с. 185] система замыканий будет стандартным элементом решетки $Cl(U)$, если выполняется тождество $F_1 \cap (F \vee F_2) = (F_1 \cap F) \vee (F_1 \cap F_2)$ ($F_1, F_2 \in Cl(U)$).

3.3.1. Теорема. Элемент $F \in Cl(U)$ стандартен тогда и только тогда, когда он является наследственной системой.

Доказательство. Если F — наследственная система, то по лемме 2.4 $F_1 \cap (F \vee F_2) = F_1 \cap (F \cup F_2) = (F_1 \cap F) \cup (F_1 \cap F_2) \subset (F_1 \cap F) \vee (F_1 \cap F_2)$. Обратное включение справедливо в любой решетке.

Наоборот, пусть F — стандартный элемент. Возьмем $X \in F$, $X \neq U$, $Y \subset X$. Положим $Z = Y \cup (U \setminus X) \neq Y$. Тогда $Y = X \cap Z \in \{U, Y\} \cap (F \vee \{U, Z\}) = (\{U, Y\} \cap F) \vee (\{U, Y\} \cap \{U, Z\}) = \{U, Y\} \cap F \subset F$. Тем самым F — наследственная система.

3.3.2. Следствие. В решетке $Cl(U)$ множества стандартных и дистрибутивных элементов совпадают.

3.3.3. Следствие. Множество наследственных систем образует в $Cl(U)$ дистрибутивную подрешетку.

Доказательство получается с помощью теоремы 9 [4, с. 192].

3.4. По определению [4, с. 185] элемент $F \in Cl(U)$ будет ко-стандартным, если $F_1 \vee (F \cap F_2) = (F_1 \vee F) \cap (F_1 \vee F_2)$ для всех $F_1, F_2 \in Cl(U)$.

3.4.1. Теорема. Единственными костандартными элементами в $Cl(U)$ являются $\{U\}$ и $P(U)$.

Доказательство. Достаточность условия очевидна.

Пусть $\{U\} \neq F$ — костандартный элемент. Покажем вначале,

что $\emptyset \in F$. По предположению найдется такой $X \in F$, что $X \neq U$. Возьмем произвольное подмножество $Y \neq \emptyset$, удовлетворяющее условию $X \cap Y = \emptyset$. Тогда $\emptyset \in (\{U, Y\} \vee F) \cap (\{U, Y\} \cup \{U, \emptyset\}) = \{U, Y\} \vee (F \cap \{U, \emptyset\})$. Если бы $\emptyset \notin F$, то правая часть равнялась бы $\{U, Y\}$ и не могла бы содержать $\emptyset$. Значит, $\emptyset \in F$. Пусть теперь A — произвольное подмножество в U , $A \neq U$. Найдется такое $B \in P(U) \setminus \{\emptyset\}$, что $B \cap A = \emptyset$. Имеем $\emptyset \in (\{U, B\} \vee F) \cap (\{U, B\} \vee \{U, A\}) = \{U, B\} \vee (F \cap \{U, A\})$. Если $A \notin F$, то правая часть равна $\{U, B\}$ и не может содержать $\emptyset$. Значит, $A \in F$. Таким образом, $P(U) = F$.

3.5. Определения и свойства нейтральных элементов могут быть найдены в [4, с. 185—190]. Из предыдущего вытекает

3.5.1. **Теорема.** В решетке $Cl(U)$ имеются только два нейтральных элемента: $P(U)$ и $\{U\}$.

3.5.2. **Следствие.** Решетка $Cl(U)$ прямо неразложима [4, с. 201].

3.5.3. Вместе с тем $Cl(U)$ не является простой решеткой [4, с. 203], поскольку с учетом доказанного выше она обладает нетривиальными конгруэнциями [4, с. 186].

4.1. Для $F \in Cl(U)$ положим $s(F) = \{a \in U : U \setminus \{a\} \in F\}$.

4.1.1. **Пример.** $s(P_B(U)) = B$.

4.1.2. **Лемма.** $P_{s(F)}(U) \subset F$.

Доказательство. Пусть $X \in P_{s(F)}(U)$, т. е. $X \supset s(F)$. Имеем $X = \bigcap \{U \setminus \{z\} : z \in X\}$. Если $z \in X$, то $z \in s(F)$, откуда $U \setminus \{z\} \in F$. Следовательно, $X \in F$.

4.1.3. Из последнего доказательства вытекает также, что $s(F) = \bigcap \{U \setminus \{z\} : z \in s(F)\} = \bigcap \{U \setminus \{z\} : U \setminus \{z\} \in F\}$.

4.2. Для $F \in Cl(U)$ положим $F_* = P_{U \setminus s(F)}(U) \in Cl(U)$. Очевидно, что $P_B(U)_* = P_{U \setminus B}(U)$ и $F_{**} = P_{s(F)}(U)$.

4.2.1. **Предложение.** Если $F \vee G = P(U)$, то $F_* \subset G$.

Доказательство. Пусть $a \in s(F)$, т. е. $U \setminus \{a\} \in F$. По условию должны найтись такие $X \in F$, $Y \in G$, что $U \setminus \{a\} = X \cap Y$. Поскольку $X \neq U \setminus \{a\}$, то $X = U$, и, следовательно, $U \setminus \{a\} = Y \in G$. Если теперь $X \in F_*$, т. е. $X \supset U \setminus s(F)$, или, что то же самое, $U \setminus X \subset s(F)$, то $X = \bigcap \{U \setminus \{a\} : a \in U \setminus X\} \in G$.

4.2.2. Согласно доказанному предложению и леммам 4.1.2 и 4.3.1 F_* — псевдодополнение элемента $F \in Cl(U)$. Двойственным образом (см. п. 1.7.2) справедлива

4.2.3. **Теорема.** Для любого элемента $\varphi \in \text{Arg}(U)$ существует псевдодополнение $\varphi^* = \{(X, Y) : Y \subset X \cup (U \setminus s(F_\varphi))\}$.

4.2.4. Отметим также, что множество $\{F_* : F \in Cl(U)\} = \{P_A(U) : A \in P(U)\}$ совпадает с подрешеткой кодистрибутивных элементов.

4.3. Согласно определению [4, с. 72] система замыканий G — дополнение к $F \in Cl(U)$, если выполнены условия: $F \vee G = P(U)$ (4.1), $F \cap G = \{U\}$ (4.2).

4.3.1. Лемма. $P_{U \setminus B}(U) \vee P_B(U) = P(U)$ ($B \subset U$).

4.3.2. Следствие. $P_{U \setminus B}(U)$ — дополнение к $P_B(U)$.

4.3.3. Теорема. Для того чтобы $F \in \text{Cl}(U)$ имела дополнение, необходимо и достаточно, чтобы $F \cap F_* = \{U\}$ (4.3). При этом множество всех систем замыканий G , являющихся дополнениями к F , описывается включениями

$$F_* \subset G \subset (P(U) \setminus F) \cup \{U\}. \quad (4.4)$$

Подчеркнем, что правая часть (5.4), вообще говоря, не является системой замыканий.

Доказательство. Заметим вначале, что (4.2) равносильно второму включению в (4.4). Если G — дополнение к F , то по предположению 4.2.1 выполняется первое включение в (4.4), откуда с помощью (4.2) получается (4.3). Наоборот, из $F_* \subset G$ на основании лемм 4.1.2 и 4.3.1 следует (4.1).

4.3.4. Следствие. Система замыканий F обладает единственным дополнением тогда и только тогда, когда $F \supset P(U \setminus s(F)) \setminus \{U \setminus s(F)\}$.

Например, $(P(U) \setminus P_A(U)) \cup \{U\}$ обладает единственным дополнением.

4.4. Согласно определению [4, с. 74] система замыканий F^* будет псевдодополнением элемента $F \in \text{Cl}(U)$, если $F \cap F^* = \{U\}$, и из условия $F \cap G = \{U\}$ следует, что $G \subset F^*$. Очевидно, если F^* существует, то $F^* \subset (P(U) \setminus F) \cup \{U\}$. Легко доказывается следующее.

4.4.1. Предложение. F обладает псевдодополнением в $\text{Cl}(U)$ тогда и только тогда, когда $(P(U) \setminus F) \cup \{U\} \in \text{Cl}(U)$. При этом $F^* = (P(U) \setminus F) \cup \{U\}$.

4.4.2. Следствие. В решетке $\text{Cl}(U)$ псевдодополнение элемента — его дополнение.

4.4.3. Следствие. Если F^* существует, то $F^{**} = F$.

4.4.4. Замечание. Из того, что элемент в $\text{Cl}(U)$ имеет дополнение, не следует, что он имеет псевдодополнение. В самом деле, для $U = \{a, b, c\}$, $F = \{U, \{a, b\}, \emptyset\}$ условие предложения 4.4.1 не выполняется, в то время как дополнением к F служит семейство $\{U, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}\}$.

4.4.5. Замечание. Из следствия 4.3. 4 и предложения 4.4.1 вытекает, что если F обладает единственным дополнением, то последнее — псевдодополнение. Однако обратное неверно. Действительно, для $U = \{a, b\}$, $F = \{U, \{a\}\}$ имеем $F^* = \{U, \{b\}, \emptyset\}$. Но кроме F^* дополнением к F является и $\{U, \{b\}\}$.

5.1. Лемма. Если $F_1 \subset F_2$, $F_1 \neq F_2$ и A — минимальный элемент в $F_2 \setminus F_1$, то $F := F_1 \cup \{A\} \in \text{Cl}(U)$, $F_1 \prec F \subset F_2$.

Действительно, по определению A для любого $X \in F_1$ либо $X \cap A = A \in F$, либо $X \cap A \in F_1 \subset F$.

5.1.1. Теорема. Из $F_1 \prec F_2$ следует, что $|F_1| + 1 = |F_2|$.

5.1.2. Следствие. Решетка $\text{Cl}(U)$ удовлетворяет условию

Жордана—Гельдера. Функция $r(F) = |F| - 1$ — ранговая функция [3, с. 46]. Решетка $Cl(U)$ — градуированна [4, с. 232].

5.1.3. Двойственным образом решетка $Argm(U)$ градуирована с ранговой функцией $r(\varphi) = 2^{|U|} - r(F_\varphi) - 1 = 2^{|U|} - |F_\varphi|$.

5.1.4. Следствие. Длина (т. е. число элементов в самой длинной цепи минус единица) решетки $Cl(U)$ ($Argm(U)$) равна $2^{|U|} - 1$.

5.1.5. Следствие. Всякий атом решетки $Cl(U)$ имеет вид $\{U, A\}$, где $A \subset U$, $A \neq U$.

5.1.6. Следствие. Всякий коатом решетки $Cl(U)$ имеет вид F_a ($a \in U$).

5.2. Радикалом решетки называется пересечение всех ее коатомов. В нашем случае радикалом служит

$$F_{\text{rad}} = \cap \{F_a : a \in U\} = \{X \in P(U) : |X| \leq |U| - 2\} \cup \{U\}.$$

5.2.1. F представима в виде пересечения коатомов тогда и только тогда, когда $F \supset F_{\text{rad}}$. В этом случае

$$F = \cap \{F_a : U \setminus \{a\} \in F\} = \cap \{F_a : a \in s(F)\}.$$

5.2.2. В частности, решетка $Cl(U)$ не является кочечной, а решетка $Argm(U)$ — точечной [3, с. 68].

5.3. Согласно определению [3, с. 79] и следствию F — модулярный элемент в $Cl(U)$, если для всех $G \in Cl(U)$ выполняется

$$|F \cap G| + |F \vee G| = |F| + |G|. \quad (5.1)$$

5.3.1. Предложение. F является модулярным элементом в $Cl(U)$ тогда и только тогда, когда F — наследственная система.

Доказательство. Если F — наследственная, то тождество (5.1) выполняется в силу леммы 2.4. Наоборот, пусть (5.1) выполняется для всех $G \in Cl(U)$. Пусть $X \in F \setminus \{U\}$, $Y \subset X \neq Y$. Положим $A = Y \cup (U \setminus X)$. Очевидно, что $Y = X \cap A \neq A$. Если $A \in F$, то $Y \in F$ в силу замкнутости F по пересечению. Если же $A \notin F$, то при $G = \{U, A\}$ получаем из (5.1), что $|F \vee \{U, A\}| = |F| + 1$. Следовательно, $Y = X \cap A \in (F \vee \{U, A\}) \setminus \{A\} = F$, т. е. F — наследственная.

5.4. Предложение. Решетка $Cl(U)$ не является полумодулярной [3, с. 64].

Доказательство. Возьмем $F_1 = \{U, A\}$, $F_2 = \{U, B\}$, где подмножества A и B несравнимы, а также не равны U . Тогда $F_1 \cap F_2 = \{U\} \prec F_1$. Но $|F_1 \vee F_2| = 4$, т. е. соотношение $F_2 \prec F_1 \vee F_2$ невозможно.

5.4.1. Теорема. Решетка $Cl(U)$ полумодулярна снизу [3, с. 64].

Доказательство. Пусть $F_2 \prec F_1 \vee F_2$. Тогда по теореме 5.1.1 $F_1 \vee F_2 = \{A\} \cup F_2$ для любого $A \in F_1 \setminus F_2$. Следовательно, такое A единственно и, значит, $F_1 = (F_1 \cap F_2) \cup \{A\}$, т. е. $F_1 \cap F_2 \prec F_1$.

5.4.2. В силу двойственности последний результат означает, что решетка $\text{Agm}(U)$ полумодулярна. В силу замечания 5.2.2 $\text{Agm}(U)$ не является геометрической решеткой [3, с. 70].

6.1. Опишем все неразложимые элементы решетки $\text{Cl}(U)$, т. е. такие системы замыканий F , что не существует $F_1, F_2 \in \text{Cl}(U)$, для которых $F = F_1 \vee F_2$ [4, с. 75]. Очевидно, что всякий атом является неразложимым элементом. Приведем без доказательства следующую простую лемму, справедливую в произвольной решетке.

6.2. **Лемма.** Для того чтобы элемент был неразложим, необходимо и достаточно, чтобы он покрывал единственный элемент.

6.3. **Теорема.** Всякий неразложимый элемент в $\text{Cl}(U)$ — атом.

Доказательство. Пусть F — неразложимый элемент в $\text{Cl}(U)$. Если A — максимальный элемент в $F \setminus \{U\}$, то $F \setminus \{A\}$ — система замыканий и $F \succ F \setminus \{A\}$. По лемме 6.2 система $F \setminus \{A\}$, а значит, и подмножество A определены однозначно. Следовательно, A — наибольший элемент в $F \setminus \{U\}$. Предположим, что $F \setminus \{U, A\} \neq \emptyset$ и пусть B — максимальный элемент в этом множестве. Тогда B не представим в виде пересечения других подмножеств из F , т. е. $F \setminus \{B\} \in \text{Cl}(U)$. Это дает $F \succ F \setminus \{B\} \neq F \setminus \{A\}$ — противоречие. Значит, $F = \{U, A\}$ является атомом.

6.3.1. **Следствие.** Всякий элемент в $\text{Cl}(U)$ представим в виде супремума атомов. Тем самым $\text{Cl}(U)$ — точечная решетка [3, с. 68].

6.4. Опишем конеразложимые элементы решетки $\text{Cl}(U)$, т. е. системы замыканий F , для которых не существует представления $F = F_1 \cap F_2$ с $F_1 \neq F$, $F_2 \neq F$. Приведем пример такой F , который окажется универсальным.

6.4.1. **Предложение.** Система замыкания $F = (P(U) \setminus P_A(U)) \cup P_B(U)$, где $A \prec B$, — конеразложимый элемент в $\text{Cl}(U)$.

Доказательство. Пусть $B = A \cup \{c\}$. Предположим, что $F = F_1 \cap F_2$, $F \neq F_1$, $F \neq F_2$. Тогда существует $X \in F_1 \setminus F$. Поскольку $X \notin F$, то $X \supset A$ и $X \not\supset B$, т. е. $c \notin X$. Следовательно, $A = X \cap B \in F_1$. Аналогично $A \in F_2$. Отсюда $A \in F_1 \cap F_2 = F$ — противоречие.

6.4.2. **Теорема.** Всякий конеразложимый элемент решетки $\text{Cl}(U)$ имеет вид $(P(U) \setminus P_A(U)) \cup P_B(U)$, где $A \prec B$.

Доказательство. Пусть F — конеразложимый элемент в $\text{Cl}(U)$; A — минимальный элемент в $P(U) \setminus F$. По лемме 5.1 $F \cup \{A\} \in \text{Cl}(U)$, $F \prec F \cup \{A\}$. В силу утверждения, двойственного к лемме 6.2, система замыканий $F \cup \{A\}$, а значит, и подмножество A определены однозначно. Следовательно, A — наименьший элемент в $P(U) \setminus F$. Тем самым $P(U) \setminus F \subset P_A(U)$, или $P(U) \setminus P_A(U) \subset F$ (6.1). Пусть B — наименьший элемент в $P_A(U) \cap F \in \text{Cl}(U)$. Тогда

$$P_A(U) \cap F \subset P_B(U). \quad (6.2)$$

Покажем, что $A \prec B$. Пусть $A \prec D \subset B$. Проверим, что $X \cap D \in F \cup \{D\}$ для любого $X \in F$. Если $X \neq A$, то $X \cap D \neq A$, т. е. $X \cap D \in P(U) \setminus P_A(U) \subset F$ согласно (6.1). Если же $X \supset A$, то $X \supset B$ по определению B , откуда $X \supset D$, $X \cap D = D \in F \cup \{D\}$. Таким образом, $F \cup \{D\} \in \text{Cl}(U)$. Если бы $D \notin F$, то $F \prec F \cup \{D\} \neq F \cup \{A\}$ — противоречие. Значит, $D \in F \cap P_A(U) \subset P_B(U)$, откуда $B = D \succ A$. Установим теперь равенство

$$P_B(U) = F \cap P_A(U). \quad (6.3)$$

Для этого докажем индукцией по $k \geq |B|$, что $P_B^{(k)} := \{X \in P_B(U) : |X| \leq k\} \subset F$. Предположим, что утверждение справедливо для некоторого k и пусть $Z \in P_B^{(k+1)}(U)$. Покажем, что $X \cap Z \in F \cup \{Z\}$ для произвольного $X \in F$. Если $X \neq A$, то $X \cap Z \neq A$ и в силу (6.1) $X \cap Z \in F$. Пускай $X \supset A$. Тогда согласно (6.2) $X \supset B$, откуда $X \cap Z \supset B$. Случай $X \cap Z = Z \in F \cup \{Z\}$ нас устраивает. Если же $X \cap Z \neq Z$, то $X \cap Z \in P_B^{(k)}(U) \subset F$ по предположению индукции. Итак, $F \cup \{Z\} \in \text{Cl}(U)$. Если бы $Z \notin F$, то $F \prec F \cup \{Z\} \neq F \cup \{A\}$ — противоречие. Значит, $Z \in F$, что и требовалось. При $k = |U|$ получаем $P_B(U) \subset F$, откуда с учетом (6.2) следует (6.3). Наконец, на основании (6.1) и (6.3) имеем $F = (F \cap (P(U) \setminus P_A(U))) \cup (F \cap P_A(U)) = (P(U) \setminus P_A(U)) \cup P_B(U)$.

Пользуясь примером 1.7.5, сформулируем двойственный результат.

6.4.3. Теорема. *Всякий неразложимый элемент в $\text{Argm}(U)$ имеет вид*

$$\Phi = \{(X, Y) : X \supset Y, X \neq A\} \cup \{(X, Y) : X \cup B \supset X, X \supset A\},$$

где $A \prec B$.

7.1. Элемент a решетки L называется простым, если из $a \leq x \vee y$ следует, что $a \leq x$ или $a \leq y$ ($x, y \in L$). Всякий простой элемент неразложим [1, с. 59].

7.2. Предложение. *Всякий простой элемент в $\text{Cl}(U)$ имеет вид $\{U, A\}$, где $A \prec U$.*

Доказательство. Легко видеть, что элемент указанного вида является простым. Наоборот, простой элемент из $\text{Cl}(U)$, будучи неразложимым, имеет по теореме 6.3 вид $\{U, A\}$. Если $A \prec |U| - 1$, то найдутся такие $X_1, X_2 \neq A$, что $A = X_1 \cap X_2$. Тогда $\{U, A\} \subset \{U, X_1\} \vee \{U, X_2\}$, но $\{U, A\} \not\subset \{U, X_1\}$ и $\{U, A\} \not\subset \{U, X_2\}$, что противоречит условию. Поэтому $|A| = |U| - 1$.

7.3. Предложение. *Всякий копростой элемент в $\text{Cl}(U)$ имеет вид F_a ($a \in U$), т. е. является коатомом.*

Доказательство. Если $F_1 \cap F_2 \subset F_a$, то $U \setminus \{a\} \in F_1 \cap F_2$, откуда $U \setminus \{a\} \in F_1$ или $U \setminus \{a\} \in F_2$, т. е. $F_1 \subset F_a$ или $F_2 \subset F_a$. Значит, F — копростой элемент.

Наоборот, пусть F_a — копростой элемент. Из включения $F \supset \supset \{U\} = \{U, A\} \cap \{U, B\}$ следует, что $B \in F$, т. е. $F = P(U) \setminus \{A\}$. По лемме 1.3.1 $A = U \setminus \{a\}$, $F = F_a$.

Список литературы: 1. Дрибас В. П. Реляционные модели баз данных. — Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1982. — 192 с. 2. Ульман Дж. Основы систем без данных. — М.: Финансы и статистика, 1983. — 334 с. 3. Айгнер М. Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. — 558 с. 4. Гретцер Г. Общая теория решеток. — М.: Мир, 1982. — 456 с. 5. Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968. — 352 с.

Поступила в редколлегию 08.12.83.

УДК 537.84:539.374

И. Е. ТАРАПОВ, д-р физ.-мат. наук, Н. Д. СЛАТИНСКИЙ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ РАЗРЫВОВ В НАМАГНИЧИВАЮЩЕМСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ТЕЛЕ

Исследование магнитоэластических течений представляет большой интерес как при изучении ряда проблем физики твердого тела, гео- и астрофизики, так и в связи с нарастающим применением магнитных полей в различных областях практики — в обработке металлов давлением, в порошковой металлургии и др. При этом объектом анализа становятся среды с сильно выраженными магнитными свойствами, при которых существенным оказывается влияние неоднородности намагничивания на характер течения.

Рассмотрим распространение слабых разрывов в неоднородно и изотропно намагничивающемся упругопластическом теле в случае плоского напряженного состояния. В обычной теории пластичности эта задача подробно изучена автором монографии [1] на основе развитой им общей теории геометрических и кинематических условий совместности. Им же получены основные соотношения, связывающие главные значения тензора напряжений со скоростью распространения волны и вектором нормали к ее поверхности.

1. Предположим в несжимаемой упругопластической среде, подчиняющейся уравнениям Прандтля—Рейсса и условию пластичности Губера—Мизеса, квазистационарность рассматриваемых процессов и обратимость намагничивания. Для описания пластических течений намагничивающихся идеально проводящих сред имеем следующую замкнутую систему уравнений [1—3]:

$$\frac{dp}{dt} + \rho v_{i,i} = 0; \quad (1)$$

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \sigma_{ik,k} + P_{ik,k}; \quad (2)$$

$$\rho T \frac{ds}{dt} = \sigma_{ik}^* v_{ik}; \quad (3)$$

$$v_{i,i} = 0; \quad (4)$$

$$B_{i,i} = 0; \quad (5)$$

$$B_{i,t} = B_j v_{i,j} - v_j B_{i,j}; \quad (6)$$

$$\frac{d\sigma_{ij}^*}{dt} + \sigma_{kj}^* \omega_{ki} + \sigma_{ik}^* \omega_{kj} = 2\tilde{\mu} \left(v_{ij} - \frac{v_{pq} \sigma_{pq}^*}{2k^2} \sigma_{ij}^* \right); \quad (7)$$

$$\sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^* = 2k^2. \quad (8)$$

Здесь ρ , $\vec{v}$, T , S — плотность, скорость, энтропия и температура среды; σ_{ik} — обычный тензор напряжений; $\sigma_{ik}^* = \sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{le} \delta_{ik}$ — его девиатор; P_{ik} — максвелловский тензор магнитных напряжений: $P_{ik} = - \left(\frac{H^2}{8\pi} + \int_0^H \left(M - \rho \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_H \right) dH \right) \delta_{ik} + \frac{H_i B_k}{4\pi}$; $\vec{H}$, $\vec{B} = \mu \vec{H}$ — напряженность и индукция магнитного поля; μ — магнитная проницаемость; $\vec{M}$ — вектор намагниченности; закон намагничивания задается в виде $\vec{M} = \vec{M}(\rho, H) = M(\rho, H) \frac{\vec{H}}{H}$; $V_{ik} = \frac{1}{2} (v_{i,k} + v_{k,i})$ — тензор скоростей деформаций, для которого в силу (4) $v_{ik} = v_{ik}^*$, $\omega = \frac{1}{2} (v_{i,k} - v_{k,i})$, k — предел текучести, $\tilde{\mu}$ — модуль сдвига.

Будем рассматривать волновые поверхности первого порядка, при переходе через которые сами величины непрерывны, а разрыв терпят некоторые их первые производные по координатам. Если $\sum: F(x, t) = 0$ — такая поверхность, то, как известно, на ней выполняются следующие условия совместности:

$$\begin{aligned} [\rho, i] &= \zeta n_i; [\rho, t] = -G\zeta; [S, i] = \eta n_i; \\ [S, t] &= -G\eta; [v_i, j] = \lambda_i n_j; [v_i, t] = -G\lambda_i; \\ [B_i, j] &= \varphi_i n_j; [B_i, t] = -G\varphi_i; [\sigma_{ij}, k] = \xi_{ij} n_k; [\sigma_{ij}, t] = -G\xi_{ij}, \end{aligned} \quad (9)$$

где n_i — координаты вектора нормали $\vec{n}$ к $\sum$: $n_i = \frac{F_{,i}}{\sqrt{F_{,k} F_{,k}}}$; G — скорость перемещения поверхности в направлении $\vec{n}$: $G = - \frac{F_{,t}}{\sqrt{F_{,k} F_{,k}}}$; $[z]$ обозначает скачок при переходе через $\sum$ соответствующей величины $[z] = z_2 - z_1$, причем индексы относятся к разным сторонам $\sum$ так, что $\vec{n}$ направлен от 1 и 2; ζ , η , λ_i , φ_i , ξ_{ij} — величины, определенные на $\sum$, среди которых хотя бы одна отлична от 0.

В дальнейшем будем рассматривать плоское напряженное состояние, т. е. такое состояние, при котором координатную систему можно выбрать так, чтобы $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x^1, x^2, t)$ для $i, j = 1, 2$. В этом случае в произвольной точке P среды главное напряжение тензора $\vec{\sigma}$ $\tau_3 = 0$, а для компонент векторов

$\vec{n}_i$, определяющих главные направления в P , выполняется $n_1^3 = n_2^3 = n_3^3 = n_3^2 = 0$, $n_3^3 = 1$. Прямоугольная декартова система координат с началом в P , оси которой направлены по $\vec{n}_i$, называется канонической системой координат. Отметим, что условия плоского напряженного состояния инвариантны относительно канонического преобразования.

2. Предположим, что скорость распространения волновой поверхности не равна 0, т. е. $u = G - v_n \neq 0$. Тогда $\zeta = 0$, а значит, производные от плотности непрерывны при переходе через Σ .

Далее имеем $\varphi_i = -B_n \lambda_i / u$, $\eta = -\frac{\tau_i^* \lambda_i^* n_i}{\rho T u}$. Запишем систему для λ_i и ξ_{ij} в начале канонической системы координат:

$$\xi_{13} = \xi_{23} = \xi_{33} = 0; \quad \xi_{11} n_3 = \xi_{12} n_3 = \xi_{22} n_3 = 0; \quad (10)$$

$$-u \left(\xi_{11} - \frac{\xi_{11} + \xi_{22}}{3} \right) + \frac{\tilde{\mu}}{k^2} \tau_i^* (\tau_i^* \lambda_i n_i) - 2\tilde{\mu} \lambda_1 n_1 = 0; \quad (11)$$

$$-u \left(\xi_{22} - \frac{\xi_{11} + \xi_{22}}{3} \right) + \frac{\tilde{\mu}}{k^2} \tau_2^* (\tau_i^* \lambda_i n_i) - 2\tilde{\mu} \lambda_2 n_2 = 0; \quad (12)$$

$$u \left(\frac{\xi_{11} + \xi_{22}}{3} \right) + \frac{\tilde{\mu}}{k^2} \tau_3^* (\tau_i^* \lambda_i n_i) - 2\tilde{\mu} \lambda_3 n_3 = 0; \quad (13)$$

$$-u \xi_{12} + \left[\frac{1}{2} (\tau_1^* - \tau_2^*) - \tilde{\mu} \right] \lambda_1 n_2 + \left[\frac{1}{2} (\tau_2^* - \tau_1^*) - \tilde{\mu} \right] \lambda_2 n_1 = 0; \quad (14)$$

$$\left[\frac{1}{2} (\tau_2^* - \tau_3^*) - \tilde{\mu} \right] \lambda_2 n_3 + \left[\frac{1}{2} (\tau_3^* - \tau_2^*) - \tilde{\mu} \right] \lambda_3 n_2 = 0; \quad (15)$$

$$\left[\frac{1}{2} (\tau_3^* - \tau_1^*) - \tilde{\mu} \right] \lambda_3 n_1 + \left[\frac{1}{2} (\tau_1^* - \tau_3^*) - \tilde{\mu} \right] \lambda_1 n_3 = 0; \quad (16)$$

$$\lambda_1 n_1 + \lambda_2 n_2 + \lambda_3 n_3 = 0; \quad (17)$$

$$\xi_{11} \tau_1^* + \xi_{22} \tau_2^* = 0; \quad (18)$$

$$\left(\rho u^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \right) \lambda_1 - B_n (T n_1 - N B_n B_1) (B_s \lambda_s) + u (\xi_{11} n_1 + \xi_{12} n_2) = 0; \quad (19)$$

$$\left(\rho u^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \right) \lambda_2 - B_n (T n_2 - N B_n B_2) (B_s \lambda_s) + u (\xi_{12} n_1 + \xi_{22} n_2) = 0; \quad (20)$$

$$\left(\rho u^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \right) \lambda_3 - B_n (T n_3 - N B_n B_3) (B_s \lambda_s) = 0; \quad (21)$$

$$u \xi_{ij} n_i n_j = B_n (T - N B_n^2) (B_s \lambda_s). \quad (22)$$

Здесь τ_i^* — главные значения девиатора напряжений $\hat{\sigma}^*$; $v_n = \vec{v} \cdot \vec{n}$;

$B_n = \vec{B} \cdot \vec{n}$; $T = \frac{\rho \mu_\rho - \mu}{4\pi(\mu^2 + \mu_H B)}$; $N = \frac{\mu_H}{4\pi\mu B(\mu^2 + \mu_H B)}$; μ_ρ , μ_H — частные производные от μ по указанным переменным. По условию задачи не все $\lambda_i = 0$, иначе будем иметь $\zeta = \eta = \varphi_i = \xi_{ij} = \lambda_i = 0$.

3. Предположим, что все $\xi_{ij} = 0$. Распространение таких разрывов возможно при $B_n \neq 0$. При этом если $B_s \lambda_s = 0$, то

$$u^2 = u_A^2 = \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho}; \quad \varphi_i = \pm \sqrt{4\pi\mu\rho} \lambda_i; \quad \eta = \pm \sqrt{4\pi\mu\rho} \left(\frac{\tau_i^* \lambda_i n_i}{B_n} \right);$$

если, однако, $B_s \lambda_s \neq 0$, то

$$u^2 = u_M^2 = \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho} \left(\frac{\mu^2 + \mu_H B_n^2/B}{\mu^2 + \mu_H B} \right); \quad \varphi_i = -\frac{B_n}{u_M} \lambda_i, \quad \eta = -\frac{\tau_i^* \lambda_i n_i}{\rho T u_M}.$$

Эти волны аналогичны магнитогидродинамической (альфвеновской) и магнитозвуковой волнам в намагничивающейся жидкости [4], так как кроме формального совпадения скорости совпадают и соотношения для переменных на разрывах. Равенство $u_A = u_M$ имеет место, только когда $\mu_H = 0$, что с учетом (22) дает $\mu = n_0 \rho$, где $n_0 = \text{const}$.

Уравнения состояния из-за существования их нетривиального решения λ_i дают дополнительное условие, имеющее в общем случае вид $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 0$. Если (α, β, γ) — одна из трех четных перестановок 1, 2, 3, то вытекающие отсюда следствия выглядят следующим образом:

а) при $n_\alpha = n_\beta = 0$, $n_\gamma = 1$ и $\lambda_\gamma = 0$ имеем $\lambda_\alpha = 0$, $\lambda_\beta \neq 0$, $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\tau_\beta^* - \tau_\gamma^*)$ или $\lambda_\alpha \neq 0$, $\lambda_\beta = 0$, $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\tau_\alpha^* - \tau_\gamma^*)$, или $\lambda_\alpha \neq 0$, $\tilde{\mu} = \frac{3\tau_\alpha^*}{2}$, $\tau_\beta^* = \tau_\alpha^*$;

б) случай $n_\alpha = n_\gamma = 0$, $n_\beta = 1$, $\lambda_\beta = 0$ рассматривается аналогично, для этого нужно в а) поменять местами β и γ ;

в) при $n_\beta \cdot n_\gamma \neq 0$ имеем $\lambda_\beta = \lambda_\gamma = 0$, $\tilde{\mu} = \frac{1}{2}(\tau_\alpha^* - \tau_\beta^*) = \frac{3\tau_\alpha^*}{4}$, $\lambda_\alpha \neq 0$ (здесь из условий совместности нельзя определить n_β и n_γ) или $\tau_\alpha^* = 0$, $\tau_{\beta}^{*2} = k^2$, $n_\beta^2 = \frac{\tilde{\mu} - \tau_\beta^*}{2\tilde{\mu}}$, $n_\gamma^2 = \frac{\tilde{\mu} - \tau_\gamma^*}{2\tilde{\mu}}$.

4. Предположим теперь, что не все $\xi_{ij} = 0$. Тогда $n_3 = 0$. Здесь также возможны несколько случаев. Рассмотрим их, начиная с самого общего.

4.1. $\lambda_3 = 0$.

Определитель Δ матрицы коэффициентов перед ξ_{ij} в уравнениях (18)–(20) $\Delta = \tau_1^* n_2^2 + \tau_2^* n_1^2$ обозначим B_λ $B_\lambda = B_1 n_2 - B_2 n_1$. Из уравнения (11)–(14) находим

$$\xi_{11} = \frac{1}{u} \left(\frac{\tilde{\mu}}{k^2} (\tau_1^* \lambda_1 n_1 + \tau_2^* \lambda_2 n_2) (\tau_1^* - \tau_3^*) - 2\tilde{\mu} \lambda_1 n_1 \right); \quad (23)$$

$$\xi_{12} = \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} (\lambda_1 n_2 - \lambda_2 n_1) (\tau_1^* - \tau_2^*) - \tilde{\mu} (\lambda_1 n_2 + \lambda_2 n_1) \right). \quad (24)$$

$$\xi_{22} = \frac{1}{u} \left(\frac{\tilde{\mu}}{k^2} (\tau_1^* \lambda_1 n_1 + \tau_2^* \lambda_2 n_2) (\tau_2^* - \tau_3^*) - 2\tilde{\mu} \lambda_2 n_2 \right). \quad (25)$$

Подставляя уравнения (23)–(25) в (19)–(20), имеем

$$n_1 \left[\rho u^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \tilde{\mu} + \frac{(\tau_2^* - \tau_1^*)}{2} \left(1 + \frac{2\tilde{\mu}}{k^2} (\tau_2^* - \tau_3^*) n_2^2 \right) \right] = -B_n B_\lambda (T n_2 - N B_2 B_n), \quad (26)$$

$$n_2 \left[\rho u^2 - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \tilde{\mu} + \frac{(\tau_1^* - \tau_2^*)}{2} \left(1 + \frac{2\tilde{\mu}}{k^2} (\tau_1^* - \tau_3^*) n_1^2 \right) \right] = B_n B_\lambda (T n_1 - N B_1 B_n). \quad (27)$$

Окончательно после некоторых преобразований получаем

$$(\tau_2^* - \tau_1^*) n_1 n_2 \left(\Delta + 2\tau_3^* - \frac{k^2}{\tilde{\mu}} \right) = \frac{k^2}{\tilde{\mu}} B_n B_\lambda (T - N B_n^2), \quad (28)$$

$$\rho u^2 - \tilde{\mu} - \frac{B_n^2}{4\pi\mu} \left(\frac{\mu^2 + \mu_H B_n^2/B + \mu_H B_3^2/B}{\mu^2 + \mu_H B} \right) = \left(\frac{\tau_2^* - \tau_1^*}{2} \right) \left(n_2^2 - n_1^2 - \frac{2\tilde{\mu}}{k^2} n_1^2 n_2^2 (\tau_2^* - \tau_1^*) \right), \quad (29)$$

$$\mu_H B_n^2 B_\lambda B_3 = 0. \quad (30)$$

а) Пусть $\tau_2^* = \tau_1^* = \Delta \neq 0$. Из условий совместности нельзя определить n_1 и n_2 , а $\eta = 0$.

При $B_n = 0$ $u^2 = u_{00}^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho}$ — скорость совпадает со скоростью эквиволлюминальных волн в теории упругости;

при $B_n \neq 0$, но $B_\lambda = 0$ или $B_\lambda \neq 0$, $\mu = n_0 \rho$

$$u^2 = u_{0A}^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho} + \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho};$$

при $B_n \cdot B_\lambda \neq 0$, а $T = N B_n^2 \left(\rho\mu\rho - \mu = \frac{\mu_H B_n^2}{\mu B} \right)$ и $B_3 = 0$

$$u^2 = u_{0M}^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho} + \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho} \left(\frac{\mu^2 + \mu_H B_n^2/B}{\mu^2 + \mu_H B} \right);$$

б) пусть $\tau_2^* \neq \tau_1^*$, $n_1 = 0$, $n_2 = 1$ (аналогично рассматривается $n_1 = 1$, $n_2 = 0$). Тогда $\Delta = \tau_1^*$, $B_n = B_2$, $B_\lambda = B_1$.

При $B_n = 0$

$$u^2 = u_{10}^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho} + \frac{\tau_2^* - \tau_1^*}{2\rho};$$

при $B_n \neq 0$, но $B_\lambda = 0$ или $B_\lambda \neq 0$, $\mu = n_0 \rho$

$$u^2 = u_{1A}^2 = \frac{\tilde{\mu}}{\rho} + \frac{\tau_2^* - \tau_1^*}{2\rho} + \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho};$$

при $B_n \cdot B_\lambda \neq 0$, а $T = NB_n^2$ и $B_3 = 0$

$$u^2 = u_{1M}^2 = \frac{\mu}{\rho} + \frac{\tau_2^* - \tau_1^*}{2\rho} + \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho} \left(\frac{\mu^2 + \mu_H B_n^2/B}{\mu^2 + \mu_H B} \right).$$

В этом случае возможны разрывы, для которых $\Delta = 0$. Если $B_n \neq 0$ и $\tilde{\mu} = \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{2}$, то имеем $u_{1A} = u_A$ и $u_{1M} = u_M$.

$$\text{в) } (\tau_2^* - \tau_1^*) \cdot n_1 n_2 \neq 0, \quad \text{а} \quad \Delta = \Delta_0 = \frac{k^2}{\tilde{\mu}} - 2\tau_3^*. \quad \text{Тогда} \quad n_1^2 = \frac{k^2}{\tilde{\mu}(\tau_2^* - \tau_1^*)} + \frac{\tau_2^* - \tau_3^*}{\tau_3^* - \tau_1^*}, \quad n_2^2 = \frac{k^2}{\tilde{\mu}(\tau_1^* - \tau_2^*)} + \frac{\tau_1^* - \tau_3^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}.$$

При $B_n = 0$

$$u^2 = u_{20}^2 = -\frac{3\tau_3^*}{2\rho} + \frac{3\tilde{\mu}\tau_3^{*2}}{\rho k^2}.$$

При $B_n \neq 0$, но $B_\lambda = 0$ или $B_\lambda \neq 0$, $\mu = n_{0\rho}$

$$u^2 = u_{2A}^2 = -\frac{3\tau_3^*}{2\rho} + \frac{3\tilde{\mu}\tau_3^{*2}}{\rho k^2} + \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho}.$$

При $B_n \cdot B_\lambda \neq 0$, а $T = NB_n^2$ и $B_3 = 0$

$$u^2 = u_{2M}^2 = -\frac{3\tau_3^*}{2\rho} + \frac{3\tilde{\mu}\tau_3^*}{\rho k^2} + \frac{B_n^2}{\rho k^2} \left(\frac{\mu^2 + \mu_H B_n^2/B}{\mu^2 + \mu_H B} \right).$$

Если $\Delta = 0$, т. е. $\tau_3^* = \frac{k^2}{2\tilde{\mu}}$, или $\tau_3^* = 0$, $\Delta = k^2/\tilde{\mu}$, то выполняется $u_{2A} = u_A$ и $u_{2M} = u_M$;

г) $(\tau_2^* - \tau_1^*) n_1 n_2 (\Delta - \Delta_0) \neq 0$. Такие разрывы возможны, только если $B_n B_\lambda (T - NB_n^2) \neq 0$. Для них $n_1^2 = \frac{\Delta - \tau_1^*}{\tau_2^* - \tau_1^*}$, $n_2^2 = \frac{\Delta - \tau_2^*}{\tau_1^* - \tau_2^*}$, $\mu_H B_3 = 0$;

$$\text{при } \mu_H = 0, \quad \Delta = \Delta_0 + \frac{k^2 B_n B_\lambda T}{\tilde{\mu}(\tau_2^* - \tau_1^*) n_1 n_2},$$

$$u^2 = u_{3A}^2 = \frac{\Delta \tilde{\mu}}{\rho k^2} \left(\Delta + \tau_3^* - \frac{k^2}{\tilde{\mu}} \right) + \frac{\tau_3^*}{2\rho} \left(\frac{2\tau_3^* \tilde{\mu}}{k^2} - 1 \right) + \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho};$$

$$\text{при } \mu_H \neq 0, \quad B_3 = 0 \quad \Delta = \Delta_0 + \frac{k^2 B_n B_\lambda (T - NB_n^2)}{\tilde{\mu}(\tau_2^* - \tau_1^*) n_1 n_2},$$

$$u^2 = u_{3M}^2 = \frac{\Delta \tilde{\mu}}{\rho k^2} \left(\Delta + \tau_3^* - \frac{k^2}{\tilde{\mu}} \right) + \frac{\tau_3^*}{2\rho} \left(\frac{2\tau_3^* \tilde{\mu}}{k^2} - 1 \right) + \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho} \left(\frac{\mu^2 + \mu_H B_n^2/B}{\mu^2 + \mu_H B} \right).$$

Отметим, что если выполняется условие $k^2/\tilde{\mu} \geq \sqrt{3}|\tau_3^*|$ и Δ удов-

летворяет равенство $\Delta_{1,2} = \frac{k^2}{2\tilde{\mu}} - \frac{\tau_3^*}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^4}{\tilde{\mu}^2} - 3\tau_3^{*2}}$ или, что

то же самое, $\Phi = \frac{k^2 B_n B_\lambda (T - NB_n^2)}{\tilde{\mu} (\tau_2^* - \tau_1^*) n_1 n_2}$ удовлетворяет равенство

$\Phi = -\frac{k^2}{2\tilde{\mu}} + \frac{3\tau_3^*}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k^4}{\tilde{\mu}^2} - 3\tau_3^{*2}}$, получается, что $u_{3A} = u_A$, $u_{3M} = u_M$. В частности, это имеет место при $\Delta = 0$, когда $\tau_3^* = 0$, а $\Phi = -\frac{k^2}{\tilde{\mu}}$.

4.2. При $\lambda_3 \neq 0$ имеются также возможности: $n_1 = 0$, $n_2 = 1$, $\tilde{\mu} = \frac{\tau_3^* - \tau_2^*}{2}$, при этом $\lambda_2 = 0$, $B_n B_2$, $\xi_{11} = \xi_{22} = 0$, $\xi_{12} = \frac{(\tau_1^* - \tau_3^*) \lambda_1}{2u} \neq 0$ (или аналогично $n_2 = 0$, $n_1 = 1$, $\tilde{\mu} = \frac{(\tau_3^* - \tau_1^*)}{2}$); $n_1 n_2 \neq 0$, $\tau_1^* \neq \tau_2^*$, $\mu = \frac{3\tau^*}{4}$, $\xi_{12} = -\frac{\tilde{\mu}}{u} (\lambda_1 n_2 + \lambda_2 n_1)$, $\xi_{11} = -\frac{2\tilde{\mu} \lambda_1 n_1}{u} = -\xi_{22}$. Их можно рассмотреть вместе. Так как $\mu_H B_n (B_s \lambda_s) \neq 0$ и $T = NB_n^2$, то $u = u_A$ только тогда, если $B_3 = 0$, $\tilde{\mu} + \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{2} - NB_n^2 B_\lambda^2 = 0$; $u = u_M$ только тогда, если $B_\lambda = 0$, $\tilde{\mu} + \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{2} + NB_n^2 B_\lambda^2 = 0$. В остальных случаях $u \neq u_A$, $u \neq u_M$, а именно:

$$\rho u^2 = \frac{B_n^2}{4\pi\mu\rho} + \frac{1}{2} \left(\tilde{\mu} + \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{2} - NB_n^2 (B_3^2 + B_\lambda^2) \right) \pm \sqrt{\left(\tilde{\mu} + \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{2} - NB_n^2 (B_3^2 + B_\lambda^2) \right)^2 + 4 \left(\tilde{\mu} + \frac{\tau_1^* - \tau_2^*}{2} \right) NB_n^2 B_3^2}.$$

Список литературы: 1. Томас Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах.— М.: Мир, 1978.— 307 с. 2. Демуцкий В. П., Половин Р. В. О магнитопластическом течении.— Прикл. математика и механика, 1969, 33, с. 1069—1075. 3. Гарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред.— Магнит. гидродинамика, 1972, № 2, с. 3—11. 4. Пацегон Н. Ф. Слабые разрывы в электропроводной намагничивающейся жидкости.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1980, № 2, с. 28—37.

Поступила в редколлегию 26.04.84

Басак Н. К., Домбровский Г. А. Об одной плоской стационарной задаче нелинейной фильтрации с предельным градиентом	3
Коробов В. И., Гавриляко В. М. Использование дифференциальных неравенств при решении задачи синтеза методом функций управляемости	7
Львов В. А. Об одной математической задаче механики суспензий	13
Босов А. А. О задаче штурмана	37
Сузиков Г. В. Принцип максимума в задаче управления одной эллиптической системой	41
Луценко А. В., Власенко Л. А. О полной управляемости линейных систем с малым параметром	46
Подольский А. Е. О минимальности информации для восстановления управления по известному выходу	52
Вовна С. И., Подольский Е. Н. Автоколебания в одной следящей системе в предельном случае	55
Баранов В. В., Подцыкин Н. С. Метод последовательных приближений в марковских процессах принятия решений с периодическими стратегиями	61
Гандель Ю. В., Логвинов Ю. И. О численном решении методом дискретных особенностей некоторых смешанных краевых задач стационарной теплопроводности	78
Крапивин А. А., Любич Ю. И. Оценки числа инвариантных линейных форм для бернштейновских алгебр	85
Калюжная С. А. Решетка отношений абстрактной функциональной зависимости	91
Тарапов И. Е., Слатинский Н. Д. Распространение слабых разрывов в намагничивающемся упругопластическом теле	101

**ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

№ 277

**Проблемы управления и механики
сплошных сред**

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *В. Е. Петренко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Л. А. Марченко*

Н/К

Сдано в набор 02.04.85. Подп. в печать 02.08.85. БЦ 09326. Формат 60×90/16.
Бумага типогр. № 2 Лит. гарн. Выс. печать, 7 печ. л., 7,25 кр.-отт.
8 уч.-изд. л. Тираж 500 экз. Изд. № 1317. Зак. 5-1139. Цена 1 р. 10 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского
объединения «Вища школа»
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики имени М. В. Фрунзе в Харьковской
городской типографии № 16
310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16 Зак. 1265.

УДК 532.546

Об одной плоской стационарной задаче нелинейной фильтрации с предельным градиентом. Басак Н. К., Домбровский Г. А.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 3—6.

Дано точное решение задачи о плоском стационарном движении несжимаемой жидкости в канале с прямоугольным уступом. Отмечаются частные случаи полученного решения.

Ил. 2. Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.977.1

Использование дифференциальных неравенств при решении задачи синтеза методом функций управляемости. Коробов В. И., Гавриляко В. М.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 7—13.

В работе предлагается подход к решению проблемы синтеза ограниченного управления, основанный на использовании принципа сравнения С. А. Чаплыгина. Применение принципа сравнения позволяет провести обобщение метода функций управляемости.

Библиогр.: 14 назв.

УДК 517.9

Об одной математической задаче механики суспензий. Львов В. А.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 13—37.

В ограниченной области трехмерного пространства рассматривается движение вязкой несжимаемой жидкости при наличии включения в нее большого числа s мелких частиц, движущихся вместе с жидкостью как твердые тела.

При $s \rightarrow \infty$, когда диаметры частиц и расстояния между ними стремятся к нулю так, что предельная объемная концентрация включений не стремится к нулю, а имеет конечный порядок, изучается асимптотическое поведение решения уравнений Навье—Стокса, когда на неподвижной части границ задано условие прилипания, а на частицах — условие движения их как твердых тел.

Показано, что при $s \rightarrow \infty$ последовательность решений исходной задачи сходится к некоторой функции, являющейся решением во всей области осредненной системы уравнений Навье—Стокса. Предельные уравнения осредненной задачи отличаются от исходных уравнений в главной части, т. е. тензор напряжений «осредненной жидкости» может иметь общий вид в отличие от тензора напряжений исходной жидкости (описываемой уравнениями Навье—Стокса), где он был изотропен.

Полученные результаты могут быть использованы в описании макроскопических свойств суспензий мелких частиц в вязкой жидкости.

Библиогр.: 12 назв.

УДК 517.946

О задаче штурмана. Босов А. А.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 37—40.

Задача штурмана сведена к поиску минимума функции трех переменных в ограниченной области. Предложен алгоритм решения этой задачи.

Библиогр.: 3 назв.

УДК 517.946

Принцип максимума в задаче управления одной эллиптической системой. Сузиков Г. В.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 41—46.

Для задачи оптимального управления одной системой, описываемой решениями нелинейного эллиптического дифференциального уравнения второго порядка, получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума.

Библиогр.: 5 назв.

УДК 517.934

О полной управляемости линейных систем с малым параметром. Лущенко А. В., Власенко Л. А.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 46—52.

С помощью принципа усреднения получены достаточные условия полной управляемости нестационарных линейных систем с малым параметром.

Библиогр.: 6 назв.

УДК 517.934

О минимальности информации для восстановления управления по известному выходу. Подольский А. Е.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 52—55.

Получены критерии, определяющие минимальное количество информации, необходимой для однозначного восстановления управления по известному выходу.

Библиогр.: 4 назв.

УДК 517.934.1

Автоколебания в одной следящей системе в предельном случае. Вовна С. И., Подольский Е. Н.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 55—60.

Решается задача нахождения автоколебаний в следящей системе, описываемой дифференциальным уравнением третьего порядка с управлением, принимающим дискретное множество значений, и заданными плоскостями переключения управления. Дается явная форма колебаний и условия их устойчивости.

Библиогр.: 2 назв.

УДК 681.51:519.8

Метод последовательных приближений в марковских процессах принятия решений с периодическими стратегиями. Баранов В. В., Подцыкин Н. С.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 61—78.

Рассмотрена задача выбора оптимальных решений в стохастических динамических системах, эволюция которых носит периодический характер. Построен оптимизационный алгоритм. Рассмотрен численный пример.

Библиогр.: 5 назв.

О численном решении методом дискретных особенностей некоторых смешанных краевых задач стационарной теплопроводности. Гандель Ю. В., Логвинов Ю. И.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 78—85.

Рассматриваются задачи о стационарном распределении температуры в полупространстве и слое при смешанных граничных условиях. Эти задачи приводят к парным интегральным уравнениям, решение которых после сведения к соответствующему сингулярному уравнению на системе непересекающихся отрезков осуществляется методом дискретных особенностей. Построен модельный пример, приведены численные результаты.

Табл. 1. Библиогр.: 3 назв.

Оценки числа инвариантных линейных форм для бернштейновских алгебр. Крапивин А. А., Любич Ю. И.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 85—91.

Получены оценки размерности пространства J инвариантных линейных форм бернштейновских алгебр через тип (m, δ) и размерность пространства N исчезающих линейных форм.

Библиогр.: 3 назв.

Решетка отношений абстрактной функциональной зависимости. Калужная С. А.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 91—101.

Изучается решетка $\text{Agtm}(U)$ отношений на $P(U)$, удовлетворяющих аксиомам Армстронга: 1) если $X \supset Y$, то $X \varphi Y$; 2) если $X \varphi Y_1$, $X \varphi Y_2$, то $X \varphi (Y_1 \cup Y_2)$; 3) если $X \varphi Y$, $Y \varphi Z$, то $X \varphi Z$. Показано, что эта решетка градуированна, полумодулярна и обладает псевдодополнениями. Описаны атомы, неразложимые и простые элементы, а также двойственные объекты. В частности, показано, что элемент $\varphi \in \text{Agtm}(U)$ кодистрибутивен (костандартен) тогда и только тогда, когда φ находится в форме Бойса—Кодда. Всякий неразложимый элемент в $\text{Agtm}(U)$ имеет вид

$$\varphi = \{(X, Y) : X \supset Y, X \not\supset A\} \cup \{(X, Y) : X \cup B \supset Y, X \supset A\},$$

где $A \prec B \subseteq U$. В качестве инструмента исследования используется канонический антиизоморфизм между $\text{Agtm}(U)$ и решеткой систем замыкания на U .

Библиогр.: 5 назв.

Распространение слабых разрывов в намагничиваемом упругопластическом теле. Тарапов И. Е., Слатинский Н. Д.—Вестн. Харьк. ун-та, 1985, № 277. Пробл. управления и механики сплошных сред, с. 101—107.

Рассматриваются волновые поверхности первого порядка в намагничиваемой упругопластической среде, подчиняющейся уравнениям Прандтля—Рейсса и условию пластичности Губера—Мизеса в случае плоского напряженного состояния. Показано влияние неоднородности намагничивания на их распространения. Проведена аналогия с распространением слабых разрывов в намагничивающейся жидкости.

Библиогр.: 4 назв.

(14) c/o - 1✓

губ - 4✓

вз. дтг - 1✓