ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVI. Серия 4 1960

К ТЕОРИИ ТОНКОГО КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

И. Е. Тарапов

(Харьков)

Как известно, схема присоединенного вихря и отходящей от него вихревой пелены в теории крыла дает удовлетворительные результаты лишь в применении к крыльям больших удлинений с небольшой стреловидностью. В последние годы появилось много работ, в которых изучается влияние формы крыла в плане и его стреловидности на аэродинамические характеристики. В большинстве этих работ вводятся своеобразные вихревые схемы либо для крыльев малых удлинений (см. например [2]), либо для стреловидных крыльев (например [4]). Особо стоят работа Н. Е. Кочина о крыле круговой формы в плане [3] и теория тонкого крыла на основе теории потенциала, принадлежащая В. В. Голубеву [1]. Однако практическое использование результатов последних двух работ связано со значительными вычислительными трудностями.

В 1935 г. Карман использовал метод интеграла Фурье в теории тонкого крыла конечного размаха. Эта работа [6] не нашла в дальнейшем своего развития. Между тем, не исключено, что метод этой работы сможет получить практическое применение, и несомненно, что с ее помощью надежно получаются уравнения для различных важных частных случаев. При этом отпадает необходимость прибегать к тем или иным априорным вихревым схемам.

Приведем вкратце основные результаты работы Т. Кармана.

Рассматривается тонкое крыло, срединная поверхность которого $z=f(x, y)$ мало отличается от плоскости $z=0$. Тогда, допуская обычную линеаризацию, можно считать, что присоединенные вихри этого крыла расположены в области S плоскости $z=0$. Эта область S (проекция поверхности $z=f(x, y)$ на плоскость $z=0$ (ограничена кривыми $x=b_1(y)$ и $x=b_2(y)$ и прямыми $y=a$ и $y=-a$, где a — полуразмах крыла.

С каждой точкой области S связывается присоединенный вихрь $\vec{\gamma}(\gamma_x, \gamma_y)$, причем, конечно, $\operatorname{div}\vec{\gamma}=0$.

Предполагается, что на передней кромке крыла $x=b_1(y)$ и на боковых кромках вектор $\vec{\gamma}$ направлен по касательной к кромкам, а на задней кромке $x=b_2(y)$ выполняется равенство $\gamma_y=0$, т. е. присоединенный вихрь переходит в свободный вихрь пелены.

Предполагается также наличие за крылом вихревой пелены, занимающей полубесконечную область M в плоскости $z=0$, ограниченную задней кромкой крыла $x=b_2(y)$ и двумя прямыми $y=a$ и $y=-a$, исходящими от крыла вниз по потоку.

Потенциал течения несжимаемой жидкости, вызываемого описанной выше вихревой системой, удовлетворяет уравнению Лапласа;

$$\Delta\Phi(x, y, z,) \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Граничные условия для потенциала $\Phi(x, y, z)$ устанавливаются в плоскости $z=0$ и имеют следующий вид.

А) $\Phi=0$ при $z=0$ во всей плоскости, кроме областей S (крыло) и M (вихревая пелена). Это условие вытекает из непрерывности $\Phi(x, y, z)$, ибо $\Phi(x, y, z) = -\Phi(x, y, -z)$, как потенциал течения от вихрей, расположенных в плоскости $z=0$.

Б) $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=+0} = \frac{1}{2}\gamma_y(x, y)$; $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=-0} = -\frac{1}{2}\gamma_y(x, y)$ — в области S (крыло).

Это условие означает, что скорость по оси (x) на поверхности крыла имеет скачок, равный $\gamma_y(x, y)$.

В) $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=0} = 0$ в области M (вихревая пелена). Это условие означает непрерывность скорости по оси (x) в области вихревой пелены.

В дополнение к этому должны быть выполнены условия исчезания вдали от крыла скорости, индуцированной рассматриваемой вихревой системой, т. е.

$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$ на бесконечности.

Если вдали от крыла жидкость имеет скорость v_∞, направленную по оси (x), то давление у крыла равно:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left[v_\infty^2 - \left(v_\infty + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2\right]$$

В связи с тем, что $\Phi(x, y, z) = -\Phi(x, y, -z)$, — абсолютные значения индуцированных скоростей одинаковы в точках, симметричных относительно плоскости $z=0$, в частности, при $z=+0$, и $z=-0$. Поэтому

$$p(x, y, -0) - p(x, y, +0) = \rho v_\infty \left\{ \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=+0} - \left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{z=-0} \right\}.$$

В силу граничного условия (Б), для области S получим:

$$p(x, y, -0) - p(x, y, +0) = \rho v_\infty \gamma_y(x, y).$$

Тогда подъемная сила на единицу размаха крыла равна

$$P_{(y)} = \int\limits_{b_1(y)}^{b_2(y)} \left[p(x, y, -0) - p(x, y, +0)\right] dx = \rho v_\infty \int\limits_{b_1(y)}^{b_2(y)} \gamma_y(x, y)\, dx.$$

Здесь $\int\limits_{b(y)}^{b_2(y)} \gamma_y\, dx \equiv \Gamma(y)$ представляет циркуляцию вокруг профиля крыла, полученного сечением поверхности $z = f(x,y)$ плоскостью, параллельной координатной плоскости $y=0$.

В своей работе Карман приводит решение уравнения Лапласа при сформулированных условиях. Это решение для $z \geqslant 0$ имеет вид:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi^2} \iiiint\limits_{-\infty\ \ 0}^{+\infty\ \ \infty} \gamma_y(\xi, \eta) \frac{\sin\lambda(x-\xi)}{\lambda} e^{-z\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \cos\mu(y-\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\lambda\, d\mu +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \Gamma(\eta) e^{-\mu z} \cos\mu(y-\eta)\, d\eta\, d\mu. \qquad (1)$$

Этим результатом заканчивается оригинальная работа Кармана.

Можно проверить, используя выражение для интеграла Фурье, что функция (1) удовлетворяет всем сформулированным граничным условиям.

Решение (1) уравнения Лапласа можно получить, например, следующим образом.

Рассмотрим в качестве исходного пункта частное решение уравнения Лапласа

$$e^{i\lambda x+i\mu y}e^{-z\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}.$$

Теперь, основываясь на принципе суперпозиции, возьмем решение для области $z \geqslant 0$ уравнения $\Delta\Phi = 0$ в виде

$$\Phi(x, y, z) = \Phi_1(x, y, z) + \Phi_2(y, z) =$$
$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} f_1(\lambda, \mu)\, e^{i\lambda x+i\mu y}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\, d\lambda\, d\mu + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mu)\, e^{i\mu y}\, e^{-z\mu}\, d\mu.$$

Нетрудно видеть, что тогда частные производные по x, y, z от потенциала на бесконечности равны нулю.

Покажем, что произвольные функции $f_1(\lambda, \mu)$, $f_2(\mu)$ могут быть подобраны так, что граничные условия (*А*), (*Б*) и (*В*) будут удовлетворены.

Чтобы удовлетворить граничному условию (*Б*), необходимо выполнение равенства

$$\frac{1}{2}\gamma_y(x, y) = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} i\lambda f_1(\lambda, \mu)\, e^{i\lambda x+i\mu y} d\lambda\, d\mu.$$

Отсюда, используя преобразование Фурье, находим

$$i\lambda f_1(\lambda, \mu) = \frac{1}{2(2\pi)^2}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \gamma_y(\xi, \eta)\, e^{-i\lambda\xi - i\mu\eta} d\xi\, d\eta.$$

Таким образом, функция $\Phi_1(x, y, z)$ имеет вид

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{2(2\pi)^2}\iiiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda(x-\xi)+i\mu(y-\eta)}}{i\lambda}\, e^{-z\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\, \gamma_y(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta\, d\lambda\, d\mu.$$

Отбрасывая интегралы, обращающиеся в нуль, окончательно получим

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{(S)}\iint\limits_{0}^{\infty} \gamma_y(\xi, \eta)\, e^{-z\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}\, \frac{\sin\lambda(x-\xi)}{\lambda} \cos\mu(y-\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\lambda\, d\mu.$$

Отметим, что теперь и граничное условие (*В*) также выполняется, ибо $\gamma_y \neq 0$ только в области S (крыло).

Остается подобрать так функцию $f_2(\mu)$, чтобы было выполнено граничное условие (*А*).

В силу известного равенства

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin kt}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} k$$

получаем

$$\Phi_1(x, y, +0) = \frac{1}{2\pi^2}\iint\limits_{(S)}\int\limits_0^\infty \gamma_y(\xi, \eta)\cos\mu(y-\eta)\,d\xi\,d\eta\,d\mu\int\limits_0^\infty \frac{\sin\lambda(x-\xi)}{\lambda}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^\infty \cos\mu(y-\eta)\,d\eta\,d\mu\int\limits_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)}\gamma_y(\xi, \eta)\operatorname{sign}(x-\xi)\,d\xi.$$

Используя преобразование Фурье, имеем

$$\Phi_1(x, y, +0) = \frac{1}{4}\int\limits_{b_1(y)}^{b_2(y)}\gamma_y(\xi, y)\operatorname{sign}(x-\xi)\,d\xi =$$

$$= \begin{cases} +\frac{1}{4}\Gamma(y) & \text{если } x > b_2(y) \\ -\frac{1}{4}\Gamma(y) & \text{если } x < b_1(y). \end{cases}$$

Таким образом, чтобы удовлетворить граничному условию (A), необходимо

$$\Phi_2(y, +0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\mu)\,e^{i\mu y}\,d\mu = \frac{1}{4}\Gamma(y).$$

Отсюда

$$f_2(\mu) = \frac{1}{4\cdot 2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Gamma(\eta)\,e^{-i\mu\eta}\,d\eta.$$

Следовательно, функция $\Phi_2(y, z)$ имеет вид

$$\Phi_2(y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^\infty \Gamma(\eta)\,e^{-\mu z}\cos\mu(y-\eta)\,d\eta\,d\mu.$$

Таким образом, решение уравнения Лапласа $\Delta\Phi(x, y, z) = 0$, имеющее вид (1), действительно удовлетворяет всем перечисленным граничным условиям.

Здесь следует учесть, что ξ, η изменяются лишь в области S (крыло), где $\gamma_y(\xi, \eta) \neq 0$, так что

$$-a \leqslant \eta \leqslant +a; \quad b_1(\eta) \leqslant \xi \leqslant b_2(\eta).$$

Выражение (1) для потенциала было использовано Р. Фуксом [7] при рассмотрении вопроса об индуктивном сопротивлении прямоугольного крыла в предположении, что

$$\gamma_y(x, y) = c\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}\cdot\sqrt{a^2-y^2},$$

где $2b$ — хорда крыла.

Использование решения (1) в задаче определения $\gamma_y(x, y)$ $\left(\text{и } \gamma_x = -\int\frac{\partial\gamma_y}{\partial y}\,dx\right)$ для заданной формы крыла $z = f(x, y)$ осложняется следующими обстоятельствами.

Как обычно, основное уравнение теории крыла получается из того условия, что полная скорость потока у крыла должна иметь направление касательной к профилю. Тогда в рассматриваемом приближении получим

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = v_\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}. \tag{2}$$

Однако, величина $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}$, полученная из (1), имеет, как легко видеть, такой вид, что не допускает интегрирования по λ и μ раньше интегрирования по области S, где $\gamma_y(x, y)$ отыскивается. Поэтому интегральное уравнение (2) имеет довольно сложный вид.

Для того, чтобы в (2) входил интеграл, распространенный только на область S, надо предварительно преобразовать выражение (1) для потенциала. Проведем эти преобразования, приводящие к интегро-дифференциальному уравнению теории тонкого крыла конечного размаха.

Эти преобразования сводятся к вычислению интегралов по λ и μ и к интегрированию полученных выражений по частям.

В первом интеграле выражения (1) проведем интегрирование по λ и μ, введя полярные координаты ρ, φ ($\lambda = \rho\cos\varphi$; $\mu = \rho\sin\varphi$). Получим

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-z\sqrt{\lambda^2+\mu^2}} \frac{\sin\lambda(x-\xi)}{\lambda}\cos\mu(y-\eta)\,d\lambda\,d\mu =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-z\rho} \frac{\sin[\rho(x-\xi)\cos\varphi]\cdot\cos[\rho(y-\eta)\sin\varphi]}{\cos\varphi}\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(x-\xi)z}{[z^2+(y-\eta)^2]\sqrt{z^2+(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}}.$$

Проинтегрировав второй интеграл в выражении (1) по μ, получим потенциал в виде

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{(S)} \frac{z}{z^2+(y-\eta)^2}\left(1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right)\gamma_y(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{3}$$

Это выражение для потенциала в существенном совпадает с приведенным в книге [5] (разд. Е, гл. III, § 17). Однако непосредственное вычисление $\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}$ из выражения (3) приводит к расходящимся интегралам, и это заставило авторов книги [5] принять довольно сложный путь для вычисления левой части (2).

Между тем, можно привести задачу к вычислению главного значения интегралов в смысле Коши. Это является вполне закономерным в теории крыла, использующей идеи замены твердых поверхностей присоединенными вихрями.

Заметим, что в силу предположения о направлении вектора $\vec{\gamma}$ по касательной на боковых кромках ($\gamma_y(\xi, \pm a) = 0$), имеем

$$\int_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)} \left(1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right)\gamma_y(\xi, \eta)\,d\xi = 0 \text{ при } \eta = \pm a.$$

В случае отсутствия боковых кромок ($b_1(\pm a) = b_2(\pm a) = 0$) это условие, очевидно, также выполняется.

Тогда, интегрируя по η выражение (3) по частям, получим

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-a}^{+a} \operatorname{arctg}\frac{y-\eta}{z}\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)}\left(1+\frac{x-\xi}{\sqrt{z^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right)\gamma_y(\xi, \eta)\,d\xi\right\}d\eta \quad (4)$$

Отсюда получим

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{d\eta}{\eta-y}\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)}\left(1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right)\gamma_y(\xi, \eta)\,d\xi.$$

Здесь и в дальнейшем подразумевается главное значение интегралов в смысле Коши.

Таким образом, окончательно, основное интегро-дифференциальное уравнение тонкого крыла конечного размаха в общем случае имеет вид

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi v_\infty}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{d\eta}{\eta-y}\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)}\left(1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right)\gamma_y(\xi, \eta)\,d\xi. \quad (5)$$

Полученное уравнение легко обобщается на случай дозвукового движения крыла в сжимаемой жидкости при выполнении условий обычной линеаризации основных уравнений газодинамики. Линеаризованное уравнение для потенциала сжимаемого потока, обтекающего тонкое тело, имеет вид

$$\beta^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0,$$

где $\beta^2 = 1 - v_\infty^2/a_\infty^2/a_\infty$ — скорость звука в невозмущенном потоке.

Следовательно, интегро-дифференциальное уравнение для определения интенсивности распределения присоединенных вихрей крыла в сжимаемом потоке с дозвуковыми скоростями, не очень близкими к скорости звука, имеет вид

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{4\pi v_\infty}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{d\eta}{\eta-y}\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta_1)}\left(1+\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+\beta^2(y-\eta)^2}}\right)\gamma_y(\xi, \eta)\,d\xi \quad (6)$$

Рассмотрим предельные случаи полученного уравнения (5).

При переходе к случаю крыла бесконечного размаха естественно положить в (5)

$$b_1(\eta) = -b; \quad b_2(\eta) = b = \text{const}; \quad a = \infty; \quad \gamma_y(\xi, \eta) = \gamma(\xi).$$

Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{4\pi v_\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{\eta-y}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\right)\gamma_y(\xi)\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{4\pi v_\infty}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2\pi v_\infty}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\gamma(\xi)\,d\xi}{x-\xi}.$$

В системе координат (x', z'), где (x') направлено по хорде профиля, а (z') — перпендикулярно к ней, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{dz'}{dx'} - \alpha_\infty,$$

где α_∞ — угол атаки; поэтому

$$\frac{dz'}{dx'} - \alpha_\infty = \frac{1}{2\pi v_\infty} \int_{-b}^{b} \frac{\gamma(\xi')}{\xi' - x'} d\xi'.$$

Это известное интегральное уравнение теории тонкого крыла бесконечного размаха.

Аналогичным предельным случаем уравнения (6) является известное уравнение тонкого крыла бесконечного размаха в сжимаемом потоке

$$\frac{dz'}{dx'} - \alpha_\infty = \frac{\beta}{2\pi v_\infty} \int_{-b}^{b} \frac{\gamma(\xi')}{\xi' - x'} d\xi'.$$

Как второй предельный случай, отметим, что уравнение (5) в случае замены поверхности крыла одним присоединенным вихрем переходит в известное интегро-дифференциальное уравнение теории крыла конечного размаха

$$\alpha_\partial - \alpha_\infty = \frac{1}{4\pi v_\infty} \int_{-a}^{+a} \frac{d\Gamma}{y - \eta},$$

где $\alpha_\partial = \dfrac{\Gamma(y)}{ku_\infty b(y)}$ — действительный угол атаки профиля.

Что касается общих методов решения интегро-дифференциального уравнения (5), то, по-видимому, их отыскание встретит значительные математические затруднения. Для приближенного решения его в конкретных задачах удобно пользоваться другой его формой.

Введем функцию

$$\Psi(\xi, \eta) \equiv \int_{b_1(\eta)}^{\xi} \gamma_y(t, \eta)\, dt = \Gamma(\eta) - \int_{\xi}^{b_2(\eta)} \gamma_y(t, \eta)\, dt.$$

Тогда

$$\Psi(b_2, \eta) = \Gamma(\eta); \quad \Psi(b_1, \eta) = 0;$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = \gamma_y(\xi, \eta); \quad \frac{\partial\Psi}{\partial\eta} = \frac{d\Gamma}{d\eta} - \int_{\xi}^{b_2(\eta)} \frac{\partial\gamma_y(t, \eta)}{\partial\eta} dt; \quad \frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial\gamma_y(\xi, \eta)}{\partial\eta}.$$

Введение такой функции для преобразования уравнения (5) удобно в связи с тем, что обычно принимают $\gamma_y(b_1, \eta) = \infty$, чтобы сохранить предельный переход к плоской задаче, в которой, как известно, условия плавного обтекания выполняются только на задней кромке ($\gamma_y(b_2, \eta) = 0$).

Тогда нетрудно проследить следующее преобразование, основанное на интегрировании по частям:

$$\frac{\partial}{\partial\eta} \int_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)} \left(1 + \frac{x - \xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}\right) \gamma_y(\xi, \eta)\, d\xi \equiv \frac{\partial}{\partial\eta} \int_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)} \varphi(x, y, \xi, \eta)\, \gamma_y(\xi, \eta)\, d\xi =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\eta} [\varphi(x, y, b_2, \eta)\, \Gamma(\eta)] - \int_{b_2(\eta)}^{b_2(\eta)} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Psi\right) d\xi - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\Psi\right]_{\xi=b_2} \cdot \frac{db_2}{d\eta} =$$

$$= \varphi(x, y, b_1, \eta) \left[\frac{d\Gamma}{d\eta} - \int_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)} \frac{\partial\gamma_y}{\partial\eta} d\xi\right] + \int_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)} \frac{\partial}{\partial\eta}(\gamma_y\varphi)\, d\xi.$$

Таким образом, основное уравнение (5) может быть записано в виде

$$4\pi v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} = \int\limits_{-a}^{+a} \frac{d\Gamma}{\eta - y} + \int\limits_{-a}^{+a} \frac{x - b_1(\eta)}{\sqrt{[x - b_1(\eta)]^2 + (\eta - y)^2}} \left[\frac{d\Gamma}{d\eta} - \int\limits_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)} \frac{\partial \gamma_y}{\partial \eta} d\xi\right] \frac{d\eta}{\eta - y} +$$

$$+ \int\limits_{-a}^{+a} \frac{d\eta}{\eta - y} \int\limits_{b_1(\eta)}^{b_2(\eta)} \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\gamma_y(\xi, \eta) \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}\right] d\xi. \qquad (7)$$

В случае крыла прямоугольной формы в плане, уравнение (7) значительно упрощается в связи с возможностью изменения порядка интегрирования в двойном интеграле.

В этом случае из (7) получаем после несложных преобразований:

$$4\pi v_\infty \frac{\partial f}{\partial x} = \int\limits_{-a}^{+a} \frac{d\Gamma}{\eta - y} + \int\limits_{-a}^{+a}\int\limits_{-b}^{+b} \frac{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}{(x - \xi)(\eta - y)} \cdot \frac{\partial \gamma_y(\xi, \eta)}{\partial \eta} d\xi\, d\eta.$$

Приближенное решение этого уравнения приведено в работе [8]. Автор, рассматривая крыло с удлинением, близким к единице, пользуется приближенным выражением для радикала, а именно:

$$\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} = \{|x - \xi| + |y - \eta|\} \cdot \left\{1 - \frac{|x - \xi| \cdot |y - \eta|}{(|x - \xi| + |y - \eta|)^2} - \ldots\right\} \approx$$

$$\approx \frac{3}{4}\{|x - \xi| + |y - \eta|\}.$$

Функция $\gamma_y(\xi, \eta)$ отыскивается в виде произведения двух рядов: одного по переменной ξ, другого по η.

В каждой конкретной задаче расчета крыльев можно найти более или менее удобные формы уравнения (7) для численного расчета. Следует иметь в виду, что это уравнение получено без каких-либо дополнительных ограничений, кроме тех, которые обычно делаются в теории крыла.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Голубев. Лекции по теории крыла, ГТТИ, 1949.

2. В. В. Голубев. К теории крыльев малого удлинения, ПММ, т. XIX, в. 2, 1955.

3. Н. Е. Кочин. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане, ПММ, № 1, 1940.

4. А. А. Дородницын. Обобщение теории несущей линии на случай крыла с изогнутой осью и осью, не перпендикулярной к потоку, ПММ, т. 8, № 1, 1944.

5. Т Карман, И. Бюргерс. Теоретическая аэродинамика идеальных жидкостей. Аэродинамика под общей ред. проф. В. Д. Дюрэнд, т. II, Оборонгиз, 1939.

6. T. Karman. Neue Darstellung der Tragflügeltheorie, ZAMM, Heft 1/2, 1935.

7. R. Fuchs. Neue Behandlung der Tragflügeltheorie. Ingenier — Archiv, X Band, Heft 1, 1939.

8. Laidlow W. Spanwise and chordwise loadings for rechtangular wings of aspect ratio near unity. I. Aeron. Scienc., № 11, 1953.