

A note on zero sets of absolutely monotonic functions

O. M. Katkova, A. M. Vishnyakova

Kharkov National University, Ukraine

A new necessary condition for a set to be the zero set of an absolutely monotonic function is given. If $A \subset \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ is the zero set of an absolutely monotonic function then for any $\beta \in (0, \pi/2)$ there exists a nonnegative continuous function h_β , $h_\beta \in L^1(-\infty, -1]$, such that

$$\sum_{a \in A \cap \{a : |\arg a - \pi| < \beta\}} \frac{1}{(x-a)^2} \leq h_\beta(x).$$

It is shown that this condition is not a consequence of conditions known before.

1991 Mathematics Subject Classification 30D50, 44A10.

A function $f \in C^\infty(-\infty, 0]$ is said to be absolutely monotonic if

$$f^{(k)}(x) > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \forall x \in (-\infty, 0]. \quad (1)$$

The notion of absolutely monotonic function was introduced by S. Bernstein [1]. By the well-known S. Bernstein's theorem (see [2]) the class of absolutely monotonic functions coincides with the class of functions representable in the form

$$f(x) = \int_0^\infty e^{xu} P(du), \quad x \in (-\infty, 0], \quad (2)$$

where P is a nonnegative finite Borel measure on $[0, \infty)$. (2) shows that any absolutely monotonic function f is analytic in $\mathbb{C}_0 := \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, continuous in $\{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$, and

$$f(z) = \int_0^\infty e^{zu} P(du), \quad \operatorname{Re} z \leq 0, \quad (3)$$

where the integral converges absolutely for each z . Absolutely monotonic functions are bounded in the half-plane:

$$|f(z)| \leq f(0), \quad \operatorname{Re} z \leq 0. \quad (4)$$

There is a natural problem to characterize the class of subsets of \mathbb{C}_0 which can serve as zero sets of absolutely monotonic functions. Let us mention some known properties of such zero sets. It is obvious that if $A \subset \mathbb{C}_0$ is the zero set of an absolutely monotonic function then A is at most countable set without accumulation points in \mathbb{C}_0 and

$$A \cap R = \emptyset, \quad a \in A \Leftrightarrow \bar{a} \in A, \tag{5}$$

(multiplicities of a and \bar{a} are equal). Condition (4) implies that A satisfies the well-known Blaschke condition for a half-plane:

$$\sum_{a \in A} \frac{\operatorname{Re} a}{|a|^2 + 1} < \infty. \tag{6}$$

The following necessary condition not depending on the previous ones was mentioned in [3]:

$$\operatorname{dist}(x, A) \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty. \tag{7}$$

I.V. Ostrovskii showed (oral communication) that the following independent condition is also necessary:

$$(\forall \alpha \in (0, \pi/2)) : \sum_{a \in A_\alpha} \operatorname{Re} \frac{1}{x - a} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow -\infty, \tag{8}$$

where

$$A_\alpha := A \cap \{z : |\arg z - \pi| < \alpha\}.$$

In [3] it was proved that any finite set satisfying (5) can serve as the zero set of an absolutely monotonic function (even of an entire absolutely monotonic function). We can show that if there exists $\alpha \in (0, \pi/2) : A_\alpha = \emptyset$ and A does not have finite accumulation points then (5) and (6) are sufficient conditions for a set A to be the zero set of an entire absolutely monotonic function (to appear). The aim of this note is to obtain one new necessary condition for zero sets of absolutely monotonic functions, to show that this condition is not a consequence of known before ones and to discuss some examples.

Theorem 1. *Let $A \subset \mathbb{C}_0$ without finite accumulation points is the zero set of absolutely monotonic function $f(z)$. Let $B(z)$ be the Blaschke product:*

$$B(z) := \prod_{a \in A} \frac{1 - \frac{z}{a}}{1 + \frac{z}{\bar{a}}}. \tag{9}$$

Then there exists a nonnegative function $g \in C(-\infty, -1] \cap L^1(-\infty, -1]$ such that

$$(\log B(x))'' \geq -g(x). \tag{10}$$

Proof. Without loss of generality we can assume $f(0) = 1$. So $f(z)$ is analytic in \mathbb{C}_0 and continuous in $\{z : \operatorname{Re} z \leq 0\}$ (since A has no finite accumulation points). Condition (4) shows that $|f(z)| \leq 1$. We shall use the well-known representation for a function bounded in a half-plane (see, for example [4], chapt. 6):

$$f(z) = B(z) \exp \left(kz + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |f(it)| \left(\frac{1}{it-z} + \frac{it}{1+t^2} \right) dt \right). \quad (11)$$

(3) implies the ridge condition for $f(z)$:

$$|f(z)| \leq f(\operatorname{Re} z). \quad (12)$$

The ridge condition implies (see [5], chapt. 2) that $\log f(x)$ is a convex function on $(-\infty, 0]$, so $(\log f(x))'' \geq 0$ for $x \leq 0$. From (11) we have for $x \leq 0$:

$$(\log f(x))'' = (\log B(x))'' + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log |f(it)| \frac{dt}{(it-x)^3}. \quad (13)$$

Since $|f(it)| = |f(-it)| \leq 1$ we obtain from $(\log f(x))'' \geq 0$:

$$(\log B(x))'' \geq \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} (-\log |f(it)|) \operatorname{Re} \left(\frac{1}{(it-x)^3} \right) dt. \quad (14)$$

That is why

$$(\log B(x))'' \geq \frac{-12}{\pi} \int_0^{\infty} (-\log |f(it)|) \frac{(-x)t^2}{(x^2+t^2)^3} dt =: -g(x). \quad (15)$$

It is easy to see that $g(x) \geq 0$, $g \in C(-\infty, 0]$ and

$$\int_{-\infty}^{-1} g(x) dx = \frac{3}{\pi} \int_0^{\infty} (-\log |f(it)|) \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt < \infty.$$

Theorem 2. *The statement of Theorem 1 can be written in equivalent form: for any $\beta \in (0, \pi/2)$ there exists a nonnegative continuous function h_β , $h_\beta \in L^1(-\infty, -1]$, such that*

$$\sum_{a \in A_\beta} \frac{1}{(x-a)^2} \leq h_\beta(x). \quad (16)$$

Proof. We have

$$(\log B(x))'' = \sum_{a \in A} \left(\frac{1}{(x+\bar{a})^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right).$$

Let us show that

$$S_1 := \sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \left(\frac{1}{(x + \bar{a})^2} - \frac{1}{(x - a)^2} \right) \in L^1(-\infty, 0].$$

We obtain by elementary calculations

$$\begin{aligned} |S_1| &\leq \sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{|-4x \operatorname{Re} a + 4i \operatorname{Re} a \operatorname{Im} a|}{|x - a|^2 |x + \bar{a}|^2} \leq \\ &\sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{4|x| |\operatorname{Re} a| + 4|\operatorname{Re} a| |\operatorname{Im} a|}{|x - a|^2 |x + \bar{a}|^2} = \\ &\sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{4|x| |\operatorname{Re} a| + 4|\operatorname{Re} a| |\operatorname{Im} a|}{(x^2 - |a|^2)^2 + 4x^2 (\operatorname{Im} a)^2} \leq \\ C_\beta &\sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{4|x| |\operatorname{Re} a| + 4|\operatorname{Re} a| |\operatorname{Im} a|}{(x^2 + |a|^2)^2} =: g_1(x), \end{aligned} \tag{17}$$

where C_β is a positive constant depending only on β . Let us show that $g_1 \in L^1(-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 g_1(x) dx &= \sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \int_0^\infty \frac{4y |\operatorname{Re} a| + 4|\operatorname{Re} a| |\operatorname{Im} a|}{(y^2 + |a|^2)^2} dy = \\ &\sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \int_0^\infty \frac{4|a| |\operatorname{Re} a| t + 4|\operatorname{Re} a| |\operatorname{Im} a|}{|a|^4 (1 + t^2)^2} |a| dt \leq \\ &\sum_{a \in A \cap \{a: \beta \leq |\arg a - \pi| < \pi/2\}} \frac{4|\operatorname{Re} a|}{|a|^2} \int_0^\infty \frac{(t + 1)}{(1 + t^2)^2} dt < \infty \end{aligned} \tag{18}$$

(see (6)). To obtain (16) it remains to show that

$$\sum_{a \in A_\beta} \frac{1}{(x + \bar{a})^2} \in L^1(-\infty, -1].$$

We have

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-1} \left| \sum_{a \in A_\beta} \frac{1}{(x + \bar{a})^2} \right| dx &\leq \int_{-\infty}^{-1} \sum_{a \in A_\beta} \frac{1}{|x + \bar{a}|^2} dx \leq \\ \int_{-\infty}^{-1} \sum_{a \in A_\beta} \frac{1}{x^2 + (\operatorname{Re} a)^2} &\leq \sum_{a \in A_\beta} \frac{1}{\operatorname{Re} a} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} < \infty \end{aligned} \tag{19}$$

(we use condition (6) for the case $|\arg a - \pi| < \beta$). Taking into account (18) and (19) we conclude that the statement of Theorem 1 is equivalent (16).

Statement 1. Let $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ and $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ be two sequences of positive numbers, $\alpha_k \rightarrow +\infty$, $\beta_k \rightarrow +\infty$, and

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\alpha_k} < \infty, \quad \beta_k = o(\alpha_k), \quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\beta_k} = \infty.$$

Assume that there exists $\lambda > 1$ such that

$$\alpha_k + \lambda\beta_k \leq \alpha_{k+1} - \beta_{k+1}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Then $A := \{-\alpha_k \pm i\beta_k\}$ does not satisfy condition (16).

Proof. Since A is symmetric with respect to the real axis (16) can be written in the form: there exists a nonnegative continuous function h , $h \in L^1(-\infty, 0]$, such that

$$\sum_{a \in A} \operatorname{Re} \frac{1}{(x-a)^2} \leq h(x). \tag{21}$$

For any k

$$\operatorname{Re} \frac{1}{(x-a)^2} = \frac{(x + \alpha_k)^2 - \beta_k^2}{((x + \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} > 0, \quad x \in (-\infty, -\alpha_k - \beta_k) \cup (-\alpha_k + \beta_k, \infty).$$

Let us denote $I := \bigcup_{k=1}^\infty (-\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}, -\alpha_k - \beta_k)$ (by (20) this intervals do not intersect). So

$$\sum_{a \in A} \frac{(x + \alpha_k)^2 - \beta_k^2}{((x + \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} \geq \frac{(x + \alpha_j)^2 - \beta_j^2}{((x + \alpha_j)^2 + \beta_j^2)^2}, \quad x \in (-\alpha_{j+1} + \beta_{j+1}, -\alpha_j - \beta_j). \tag{22}$$

The last estimation and (20) imply

$$\begin{aligned} \int_I \sum_{a \in A} \frac{(x + \alpha_l)^2 - \beta_l^2}{((x + \alpha_l)^2 + \beta_l^2)^2} dx &\geq \sum_{k=1}^\infty \int_{-\alpha_{k+1} + \beta_{k+1}}^{-\alpha_k - \beta_k} \frac{(x + \alpha_k)^2 - \beta_k^2}{((x + \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} dx \geq \\ &\sum_{k=1}^\infty \int_{\alpha_k + \beta_k}^{\alpha_k + \lambda\beta_k} \frac{(x - \alpha_k)^2 - \beta_k^2}{((x - \alpha_k)^2 + \beta_k^2)^2} dx = \\ &\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\beta_k} \int_1^\lambda \frac{u^2 - 1}{(u^2 + 1)^2} du = C(\lambda) \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\beta_k} = \infty. \end{aligned}$$

Example. Using Statement we obtain that $A_\gamma := \{-k^\gamma \pm ik\}$, $k \in \mathbb{N}$ can not serve as the zero set of an absolutely monotonic function for $\gamma \geq 2$, but A_γ satisfies (5), (6) and (7). By direct calculation one can see that A_2 satisfies (8).

Remark. Taking into account (8) we can rewrite (16) in the form: for any $\beta \in (0, \pi/2)$

$$\sum_{a \in A \cap \{a: |\arg a - \pi| < \beta\}} \frac{1}{(x-a)^2} \in L^1(-\infty, -1].$$

This investigation is partially supported by INTAS-99-00089.

REFERENCES

1. Bernstein S.N. Sur les fonctions absolument monotones.// Acta math.,—1928.—52.—P. 1–66.
2. Akhiezer N.I. The classical moment problem and some related questions in Analysis.—New York: Hafner,—1965.—310 p.
3. Ostrovskii I.V. On zeros of entire characteristic functions of distributions concentrated on a half-line.// Theor. Probab. Applications,—1988.—33.—P. 167–171.
4. Koosis P. Lectures on H_p spaces.—London: Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series, No 40, Cambridge Univ. Press,—1980.—364 p.
5. Linnik Ju.V., Ostrovskii I.V. Decompositions of random variables and vectors.—Providence, R.I.: Amer. Math. Soc.,—1977.—478 p.

Об одном классе двумерных тригонометрических
рядов

О. И. Кузнецова

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Украина

Получена верхняя оценка p -сильных средних ($1 \leq p \leq 2$) по кругам для рядов Фурье ограниченных почти всюду на двумерном торе функций. Для тригонометрических рядов специального вида доказан аналог хорошо известной одномерной теоремы Фомина.

1991 *Mathematics Subject Classification* 42B08.

1. Введение

Пусть V — замкнутая ограниченная область в R^N , $0 \in \text{int } V$, $nV = \{x \in R^N : x/n \in V\}$ — гомотет V , Z^N — целочисленная решетка в R^N , λ_n — последовательность действительных чисел. На N -мерном торе $T^N = [-\pi, \pi)^N$ задан тригонометрический ряд

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx}, \quad (1)$$

где в дальнейшем $k \in Z^N$, $kx = k_1x_1 + \dots + k_Nx_N$.

Пусть

$$S_{nV}(x) = \lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{k \in lV \setminus (l-1)V} e^{ikx}$$

— n -ая частичная сумма ряда (1). В целом ряде работ (см., напр., [8], [11], [12]) найдены условия на коэффициенты λ_n , при выполнении которых ряд (1) сходится в пространстве $L(T^N)$, т.е. существует функция $f \in L(T^N)$, называемая суммой ряда, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{T^N} |S_{nV}(x) - f(x)| dx = 0.$$

Эти условия существенно зависят от области V , определяющей ряд (1). В одномерном случае для косинус-ряда (V — отрезок $[-1, 1)$)

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \cos lx \quad (2)$$

легко проверяемые условия даны Г.А.Фоминим в [12] (приведем лишь часть утверждения из [12], касающуюся сходимости в $L(T)$). Положим $\Delta\lambda_j = \lambda_j - \lambda_{j+1}$.

Теорема А. *Если существует действительное число $p > 1$ такое, что*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(2^{l(p-1)} \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} |\Delta\lambda_j|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

то ряд (2) сходится в $L(T)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n \ln n = 0.$$

Если V — компактный полиэдр в R^N , более общий результат, содержащий аналог теоремы А, доказан в [8] (см. также [7]). Целью данной статьи является доказательство некоторого аналога теоремы А для единичного круга $|x| \leq 1$ в R^2 .

2. Формулировки основных результатов

Рассмотрим на торе $T^2 = [-\pi, \pi)^2$ тригонометрический ряд

$$\lambda_0 + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_l \sum_{l-1 < |k| \leq l} e^{ikx}, \tag{3}$$

где λ_n — последовательность действительных чисел, $|k| = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}$.

Теорема 1. *Если при некотором $q \geq 2$ коэффициенты ряда (3) удовлетворяют условию*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{l+1} \left(2^{(l+1)(q-1)} \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} |\Delta\lambda_j|^q \right)^{1/q} < \infty, \tag{4}$$

то ряд (3) сходится в $L(T^2)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n n^{1/2} = 0. \tag{5}$$

Предельный случай ($q = \infty$) теоремы 1 есть аналог для единичного круга одномерной теоремы Сидона-Теляковского [11]. Его доказательство дано в [8].

Замечание 1. *При выполнении условий (4), (5) теоремы 1 ряд (3) есть ряд Фурье своей суммы.*

В дальнейшем c, c_1, c_2, \dots — абсолютные положительные постоянные, различные в разных теоремах.

Пусть $L_\infty(T^2)$ — пространство измеримых ограниченных почти всюду на T^2 функций с нормой $\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x \in T^2} |f(x)|$. В основе доказательства теоремы 1 лежит оценка p -сильных средних круговых частичных сумм Фурье

$$S_n(f; x) = \sum_{|k| \leq n} \hat{f}(k) e^{ikx}$$

функций из $L_\infty(T^2)$ (здесь $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-2} \int_{T^2} f(u) e^{-iku} du$ — k -тый коэффициент Фурье функции f).

Теорема 2. Для любой функции $f \in L_\infty(T^2)$ при любом $p, 1 \leq p \leq 2$, справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |S_j(f; 0)|^p \right)^{1/p} \leq c \sqrt{\ln(n+1)} \|f\|_\infty. \quad (6)$$

При $p = 1$ теорема 2 доказана в [6]. Обозначим через $D_n(x)$ ядро Дирихле для единичного круга:

$$D_n(x) = \sum_{|k| \leq n} e^{ikx}.$$

Следствие. Для любого набора действительных чисел a_n и любого $q \geq 2$

$$\frac{1}{n+1} \int_{T^2} \left| \sum_{j=0}^n a_j D_j(x) \right| dx \leq c_1 \sqrt{\ln(n+1)} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |a_j|^q \right)^{1/q}. \quad (7)$$

При $q = \infty$ неравенство (7), имеющее вид

$$\frac{1}{n+1} \int_{T^2} \left| \sum_{j=0}^n a_j D_j(x) \right| dx \leq c_1 \sqrt{\ln(n+1)} \max_{0 \leq j \leq n} |a_j|, \quad (7')$$

доказано в [8]. Заметим, что впервые неравенство (7'), без $\sqrt{\ln(n+1)}$ в правой части, в одномерном случае доказано Сидоном [10].

3. Доказательства

Доказательство теоремы 2. Метод доказательства тот же, что и для $p = 1$ в [6]. Обозначим

$$I_n(p) := (2\pi)^2 \sup_{|f| \leq 1} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n |S_j(f; 0)|^p \right)^{1/p}.$$

Поскольку при возрастании p $I_n(p)$ не убывает, достаточно доказать неравенство (6) при $p = 2$. Так как

$$S_n(f; 0) = (2\pi)^{-2} \int_{T^2} f(u) D_n(u) du,$$

для $I_n(2)$ имеем

$$I_n(2) = (n+1)^{-1/2} \sup_{|f| \leq 1} \sup_{\varepsilon} \left| \sum_{j=0}^n \varepsilon_j S_j(f; 0) \right| = \\ = (n+1)^{-1/2} \sup_{\varepsilon} \int_{T^2} \left| \sum_{j=0}^n \varepsilon_j D_j(u) \right| du,$$

где *supremum* берется по всем наборам $\varepsilon = \{\varepsilon_j\}_{j=0}^n$ с условием $\sum_{j=0}^n \varepsilon_j^2 \leq 1$.

Полагаем $\lambda_l = (n+1)^{-1/2} \sum_{j=l}^n \varepsilon_j$ при $0 \leq l \leq n$, $\lambda_{n+1} = 0$. Тогда

$$I_n(2) = \sup_{\varepsilon} \int_{T^2} \left| \sum_{l=0}^n (\lambda_l - \lambda_{l+1}) \sum_{|k| \leq l} e^{iku} \right| du = \\ = \sup_{\varepsilon} \int_{T^2} \left| \lambda_0 + \sum_{l=1}^n \lambda_l \sum_{l-1 < |k| \leq l} e^{iku} \right| du.$$

Исходя из набора λ_l , построим последовательность непрерывных на $[0, 1]$ функций $\lambda_n(t)$, $\lambda_n(1) = 0$, следующим образом. Пусть $\varphi_n(t)$ — непрерывная на отрезке $[0, n+1]$ функция такая, что $\varphi_n(0) = \lambda_0$, $\varphi_n(1) = \lambda_1$, $\varphi_n(t) = \lambda_l$ при $l-1 + \frac{1}{2(n+1)} \leq t \leq l$, $2 \leq l \leq n+1$, и линейная на оставшихся промежутках.

Полагаем тогда $\lambda_n \left(\frac{t}{n+1} \right) = \varphi_n(t)$, $0 \leq t \leq n+1$.

Пусть Λ_n — радиальная функция, заданная на круге $|x| \leq 1$ равенством $\Lambda_n(x) = \lambda_n(|x|)$ и равная нулю вне этого круга. Заметим, что если точка $k \in Z^2$ принадлежит кольцу $l < |x| \leq l+1$ и $1 \leq l \leq n$, то

$$|k| - l > \frac{1}{2(l+1)} \geq \frac{1}{2(n+1)}.$$

Это означает, что в каждом кольце $l < |x| \leq l + \frac{1}{2(n+1)}$, $1 \leq l \leq n$, нет точек из Z^2 . Поэтому

$$I_n(2) = \sup_{\varepsilon} \int_{T^2} \left| \sum_{|k| \leq n+1} \Lambda_n \left(\frac{k}{n+1} \right) e^{iku} \right| du. \quad (8)$$

Покажем, что

$$\int_{(2\pi)^{-1}T^2} \left[\sum_{|k| \leq n+1} \left| \Lambda_n \left(\frac{k}{n+1} \right) - \Lambda_n \left(\frac{k+u}{n+1} \right) \right|^2 \right]^{1/2} du = O(1). \quad (9)$$

Действительно, этот интеграл не превосходит

$$\sup_{|u| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ \left[\lambda_n(0) - \lambda_n \left(\frac{|u|}{n+1} \right) \right]^2 + \sum_{l=1}^n \sum_{l-1 < |k| \leq l} \left[\lambda_n \left(\frac{|k|}{n+1} \right) - \lambda_n \left(\frac{|k+u|}{n+1} \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \leq \left(\frac{\varepsilon_0^2}{n+1} + \sum_{l=1}^n \frac{\varepsilon_l^2 l}{n+1} \right)^{1/2} \leq 1.$$

Перейдем в (8) от суммы к преобразованию Фурье функции $\Lambda_n(x)$ (см. [2], теорема 1 и ее доказательство). Имеем, учитывая (9),

$$\begin{aligned} I_n(2) &\leq c_2 \sup_{\varepsilon} \left\{ \int_{|x| \leq n+1} |\tilde{\Lambda}_n(x)| dx + \int_{(2\pi)^{-1}T^2} \left[\sum_{|k| \leq n+1} \left| \Lambda_n \left(\frac{k}{n+1} \right) - \Lambda_n \left(\frac{k+u}{n+1} \right) \right|^2 \right]^{1/2} du \right\} = \\ &= c_2 \sup_{\varepsilon} \int_{|x| \leq n+1} \left| \int_{|u| \leq 1} \Lambda_n(u) e^{-iux} du \right| dx + O(1). \end{aligned}$$

По теореме Коши-Пуассона [4, с. 263]

$$\int_{|u| \leq 1} \Lambda_n(u) e^{-iux} du = 2\pi \int_0^1 \lambda_n(\rho) \rho J_0(\alpha \rho) d\rho,$$

где $\alpha = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Учитывая это равенство и переходя во внешнем интеграле к полярным координатам, получаем

$$I_n(2) \leq c_3 \sup_{\varepsilon} \int_0^{n+1} \alpha \left| \int_0^1 \lambda_n(\rho) \rho J_0(\alpha \rho) d\rho \right| d\alpha := c_3 \sup_{\varepsilon} A_n(\varepsilon).$$

Дальнейшие преобразования интеграла $A_n(\varepsilon)$ аналогичны проделанным в [3, с. 503]. Интегрируем по частям во внутреннем интеграле, используя рекуррентное соотношение для функций Бесселя [5, п. 7.2.8 (50)]

$$z J_0(z) = \frac{d}{dz} [z J_1(z)].$$

Так как по условию $\lambda_n(1) = 0$, а [9, с. 51]

$$J_1(\alpha) = \frac{\alpha}{2} + O(\alpha^3) \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0,$$

то внеинтегральный член обращается в нуль. Полученное выражение разобьем на два интеграла

$$A_n(\varepsilon) = \int_0^1 \left| \int_0^1 \lambda'_n(\rho) \rho J_1(\alpha \rho) d\rho \right| d\alpha + \int_1^{n+1} \left| \int_0^1 \lambda'_n(\rho) \rho J_1(\alpha \rho) d\rho \right| d\alpha$$

Обозначим $q_n = \frac{1}{2(n+1)^2}$. По построению функции $\lambda_n(t)$ ее производная $\lambda'_n(t)$ равна $-\varepsilon_0 \sqrt{n+1}$ на интервале $(0, \frac{1}{n+1})$, $-2\varepsilon_l(n+1)^{3/2}$ на интервале $(\frac{l}{n+1}, \frac{l}{n+1} + q_n)$, $1 \leq l \leq n$, и нулю на смежных интервалах.

Оценим первый интеграл в $A_n(\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \int_0^1 \lambda'_n(\rho) \rho J_1(\alpha \rho) d\rho \right| d\alpha &\leq c_4 \left(\frac{|\varepsilon_0|}{\sqrt{n+1}} + (n+1)^{1/2} q_n \sum_{l=1}^n l |\varepsilon_l| \right) = \\ &O \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{l=0}^n |\varepsilon_l| \right) = O(1). \end{aligned}$$

Тогда

$$A_n(\varepsilon) = \int_1^{n+1} \left| \int_0^1 \lambda'_n(\rho) \rho J_1(\alpha \rho) d\rho \right| d\alpha + O(1).$$

Для дальнейшей оценки $A_n(\varepsilon)$ воспользуемся следующей формулой для J_1 [9, с. 82]

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{nx}} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + O \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right),$$

справедливой при $x > 0$. Подставим это выражение вместо функции Бесселя. Остаточный член есть

$$\begin{aligned} &O \left(\int_1^{n+1} \frac{d\alpha}{\alpha^{3/2}} \int_0^1 |\lambda'_n(\rho)| \rho^{-1/2} d\rho \right) = \\ &O \left((n+1)^{3/2} \sum_{l=1}^n |\varepsilon_l| \int_{\frac{l}{n+1}}^{\frac{l}{n+1} + q_n} \rho^{-1/2} d\rho + |\varepsilon_0| \right) = \\ &O \left(|\varepsilon_0| + \sum_{l=1}^n \frac{|\varepsilon_l|}{\sqrt{l}} \right) = O \left(\sqrt{\ln(n+1)} \right). \end{aligned}$$

Так как

$$\int_1^{n+1} \alpha^{-1/2} \int_0^{\frac{1}{n+1}} |\lambda'_n(\rho)| \rho^{1/2} d\rho d\alpha = O\left(\frac{|\varepsilon_0|}{\sqrt{n+1}}\right),$$

для $A_n(\varepsilon)$ получаем

$$A_n(\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_1^{n+1} \alpha^{-1/2} \left| \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \lambda'_n(\rho) \rho^{1/2} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) d\rho \right| d\alpha + O\left(\sqrt{\ln(n+1)}\right). \quad (10)$$

Обозначим через $B_n(\varepsilon)$ оставшийся интеграл в (10) и покажем, что он также есть $O\left(\sqrt{\ln(n+1)}\right)$.

$$B_n = (n+1)^{3/2} \int_1^{n+1} \alpha^{-1/2} \left| \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \int_{\frac{l}{n+1}}^{\frac{l}{n+1} + q_n} \rho^{1/2} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) d\rho \right| d\alpha.$$

Заменим подынтегральную функцию во внутреннем интеграле ее значением в левом конце промежутка интегрирования. При $\frac{l}{n+1} \leq \rho \leq \frac{l}{n+1} + q_n$

$$\begin{aligned} & \left| \rho^{1/2} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2} \sin\left(\alpha\frac{l}{n+1} - \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \\ & \left[\left(\frac{l}{n+1} + q_n\right)^{1/2} - \left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2} \right] + \left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2} \sin\frac{\alpha q_n}{2} \leq \\ & \frac{q_n}{2} \left[\left(\frac{n+1}{l}\right)^{1/2} + \alpha \left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

поэтому погрешность такой замены есть

$$c_5(n+1)^{3/2} q_n^2 \int_1^{n+1} \alpha^{-1/2} \sum_{l=1}^n \left[\left(\frac{n+1}{l}\right)^{1/2} + \alpha \left(\frac{l}{n+1}\right)^{1/2} \right] d\alpha = O(1).$$

В итоге получаем

$$B_n \leq c_6(n+1)q_n \int_1^{n+1} \alpha^{-1/2} \left| \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \sqrt{l} \sin\left(\alpha\frac{l}{n+1} - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\alpha,$$

или, после замены переменной $\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{n+1}$,

$$B_n \leq c_7(n+1)^{-1/2} \int_{\frac{1}{n+1}}^1 \alpha^{-1/2} \left| \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \sqrt{l} \sin\left(l\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \right| d\alpha \leq$$

$$c_7(n+1)^{-1/2} \sqrt{\ln(n+1)} \left(\int_0^{2\pi} \left| \sum_{l=1}^n \varepsilon_l \sqrt{l} \sin \left(l\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right|^2 d\alpha \right)^{1/2}.$$

По равенству Парсеваля последний интеграл равен $\left(\sum_{l=1}^n l \varepsilon_l^2 \right)^{1/2}$.

Поэтому B_n , а следовательно, A_n и $I_n(2)$ не превосходят $c_8 \sqrt{\ln(n+1)}$. Теорема 2 доказана.

Для доказательства следствия достаточно к правой части равенства

$$\frac{1}{n+1} \int_{T^2} \left| \sum_{j=0}^n a_j D_j(x) \right| dx = \sup_{|f| \leq 1} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{j=0}^n a_j S_j(f; 0) \right|$$

применить неравенство Гельдера $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$ и оценку (6) теоремы 2.

Доказательство теоремы 1. Покажем сначала сходимость в $L(T^2)$ ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \Delta \lambda_j D_j(x). \quad (11)$$

Полагая в неравенстве (7) $n = 2^{l+1} - 1$, $a_j = 0$ при $0 \leq j < 2^l$ и $a_j = \Delta \lambda_j$ при $2^l \leq j \leq 2^{l+1} - 1$, получаем неравенство

$$\int_{T^2} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta \lambda_j D_j(x) \right| dx \leq c_2 \sqrt{l+1} \left(2^{(l+1)(q-1)} \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} |\Delta \lambda_j|^q \right)^{1/q}. \quad (12)$$

Из этого неравенства и условия (4) следует сходимость ряда из норм

$$\sum_{l=0}^{\infty} \int_{T^2} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta \lambda_j D_j(x) \right| dx,$$

а следовательно, в силу полноты пространства, сходимость в $L(T^2)$ ряда

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta \lambda_j D_j(x).$$

Обозначим его сумму через f . Пусть n — произвольно, выберем l_0 из условия $2^{l_0} \leq n+1 < 2^{l_0+1}$. Так как

$$\int_{T^2} \left| \sum_{j=0}^n \Delta \lambda_j D_j(x) - f(x) \right| \leq \int_{T^2} \left| \sum_{j=n+1}^{2^{l_0+1}-1} \Delta \lambda_j D_j(x) \right| dx +$$

$$\sum_{l=l_0+1}^{\infty} \int_{T^2} \left| \sum_{j=2^l}^{2^{l+1}-1} \Delta \lambda_j D_j(x) \right| dx$$

и поскольку для первого слагаемого также выполнена оценка (12) (нужно в (7) положить $a_j = 0$ при $1 \leq j \leq n$ и $a_j = \Delta\lambda_j$ при $n+1 \leq j < 2^{l_0+1}$), получаем, что вся сумма справа стремится к нулю при n , а следовательно, и l_0 стремящемся к ∞ . Сходимость ряда (11) в среднем доказана.

Покажем, что ряд (3) имеет в $L(T^2)$ своей суммой функцию f тогда и только тогда, когда выполнено условие (5). Это утверждение следует из равенства

$$S_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \Delta\lambda_j D_j(x) + \lambda_n D_n(x)$$

и двусторонней оценки [1]

$$c_3 n^{1/2} \leq \int_{T^2} |D_n(x)| dx \leq c_4 n^{1/2}.$$

Теорема 1 доказана.

Для доказательства замечания 1 нужно показать, что $\hat{f}(k) = \lambda_l$ при $l-1 < |k| \leq l$. Выберем $n > |k|$. Тогда по теореме 1

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{T^2} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{T^2} S_n(x) e^{-ikx} dx + o(1)$$

при $n \rightarrow \infty$ и равенство следует из ортогональности системы $\{e^{ikx}\}$ на T^2 .

Замечание 2. Условия теоремы 1 не гарантируют поточечной сходимости ряда (3) к f на T^2 . Это следует из оценки [13]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_n(x)}{n^{1/2} \ln^{1/4} n} < c < 0 \quad \text{для любого } x \in T^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабенко К.И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. // Препринт № 52 ИПМ АН СССР, -1971.
2. Белинский Э.С. Поведение констант Лебега некоторых методов суммирования кратных рядов Фурье. Метрические вопросы теории функций и отображений. -Киев: Наук. думка, -1977.
3. Белинский Э.С. Применение преобразования Фурье к суммируемости рядов Фурье. // Сиб. матем. ж., -1977.-18.-№ 3.-С. 497-511.
4. Бохнер С. Лекции об интегралах Фурье. -М.: Физматгиз, -1962.

5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.— М.: Наука,— 1966.— Т. 2.
6. Кузнецова О.И. К вопросу о сильном суммировании по кругам.// Укр. матем. ж.,—1996.—48.—№ 5.—С. 629–634.
7. Кузнецова О.И. Об одном классе N -мерных тригонометрических рядов.// Матем. заметки.,—1998.—63.—Вып. 3.—С. 402–406.
8. Кузнецова О.И. Сходимость в среднем одного класса N -мерных тригонометрических рядов.// Труды ИПММ НАН Украины,—1999.—4.—С. 89–93.
9. Кузьмин Р.О. Бесселевы функции.—М.—Л.: ГТТИ,—1933.
10. Sidon S. Hinreichende Bedingungen fur den Fourier-Charakter einer trigonometrischen Reihe.// J. London Math. Soc.,—1939.—14.—№ 2.—С. 158–166.
11. Теляковский С.А. О достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов.// Матем. заметки,—1973.—14.—Вып. 3.—С. 317–328.
12. Фомин Г.А. Об одном классе тригонометрических рядов.// Матем. заметки,—1978.—23.—Вып. 2.—С. 213–222.
13. Юдин А.А. Асимптотика ядра Дирихле для сферических средних.// ДАН,—1995.—341.—№ 5.—С. 598–599.

Гармоническая аппроксимация в \mathbb{R}^3 на компактах,
дополнения которых являются областями Джона

И. А. Ленхорова

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Украина

Получены оценки сверху скорости равномерной аппроксимации гармоническими полиномами функций, гармонических на компактах в \mathbb{R}^3 , дополнения которых являются областями Джона. Полученные результаты являются продолжением исследований Андриевского В.В..

1991 *Mathematics Subject Classification* 41A25.

1. Введение

В данной работе устанавливается прямая теорема приближения гармонических функций на компактах в \mathbb{R}^3 , дополнение которых является областью Джона, и получены оценки сверху скорости такого приближения, зависящие от геометрических свойств компакта.

Рассматриваемая задача в плоском случае исследовалась в [1]. Отметим, что применяемые в этой работе методы и подходы используют в значительной степени теорию конформных отображений и не могут быть распространены на случай \mathbb{R}^n при $n > 2$.

Полученные в настоящей статье результаты дополняют и обобщают известные результаты В.В. Андриевского, в которых получены количественные оценки скорости приближения на компактах в \mathbb{R}^3 , дополнение которых является областью с условием α -конуса ([2], [3]) или удовлетворяет условию Джона ([4]). В последнем случае полученные результаты носят скорее принципиальный характер и нуждаются в дальнейшем уточнении с точки зрения зависимости возможной скорости приближения от геометрии компакта. Отметим также работу [5], в которой результаты о гармонической аппроксимации распространяются на случай приближения на римановых многообразиях.

В основе приводимых в дальнейшем рассуждений лежат методы, предложенные в [2], [3].

Итак, пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ есть компактное множество, дополнение $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus K$ которого связно. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что область Ω является областью с условием Джона.

Следуя [4], будем говорить, что область Ω является областью Джона, если любую точку $x \in \Omega$ можно соединить с $a = \infty$ жордановой дугой $\gamma_x = \gamma(x, \infty) \subset \Omega$ такой что

$$d(y, \partial\Omega) \geq \alpha |\gamma(x, y)|. \quad (1)$$

для любой точки $y \in \gamma_x$, где $\alpha \in (0, 1]$.

В (1), как и всюду в дальнейшем, через $d(x, E) := \inf_{y \in E} |x - y|$ обозначено расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^3$ до множества $E \subset \mathbb{R}^3$, через $|\gamma(x, y)|$ длина части γ_x , заключенная между указанными точками, а под $|x - y| := \left(\sum_{i=1}^3 |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2}$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, понимается евклидово расстояние в \mathbb{R}^3 .

Через c, c_1, \dots будем обозначать достаточно большие, а через $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots$ — достаточно малые положительные константы, в различных соотношениях, вообще говоря, различные и зависящие, если не оговорено особо, только от компакта K или других несущественных для интересующих нас вопросов величин. Символом Δ будем обозначать оператор Лапласа.

Пусть $\omega(\delta)$, $\delta > 0$ — функция типа модуля непрерывности, то есть положительная, неубывающая функция ($\omega(+0) = 0$), удовлетворяющая при всех $\delta > 0, t > 1$ неравенству

$$\omega(t\delta) \leq ct\omega(\delta).$$

Обозначим через $H_{\Delta}^{\omega}(K)$ класс всех непрерывных на K и гармонических на множестве его внутренних точек действительных функций f , удовлетворяющих условию

$$|f(x) - f(y)| \leq c\omega(|x - y|), \quad x, y \in K, \quad c = c(f) = \text{const.}$$

Пусть также $\mathcal{H}_n, n = 0, 1, \dots$, обозначает совокупность всех гармонических полиномов степени $\leq n$.

Для функции $f \in H_{\Delta}^{\omega}(K)$ величину ее наилучшего равномерного приближения в классе \mathcal{H}_n определим по формуле

$$E_{\Delta, n}(f, K) := \inf_{H_n \in \mathcal{H}_n} \max_{x \in K} |f(x) - H_n(x)|.$$

Перед тем как сформулировать основной результат работы, введем в рассмотрение два оператора и отметим некоторые их свойства, существенно используемые в дальнейшем (более подробно см. [8], [9]).

Обозначим через $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_{0, K}$ оператор продолжения, который каждой функции $f \in H_{\Delta}^{\omega}(K)$ ставит в соответствие функцию $g(x) := (\mathcal{E}_0 f)(x)$, заданную, непрерывную и удовлетворяющую условию

$$|g(x) - g(y)| \leq c\omega(|x - y|) \quad (8)$$

на всем пространстве \mathbb{R}^3 , совпадающую с $f(x)$ на K и имеющую компактный носитель.

Пусть также U_δ , $\delta > 0$, обозначает оператор усреднения

$$(1) \quad g_\delta(x) = (U_\delta g)(x) := \int_{\mathbb{R}^3} g(x + \delta y) K(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где

$$K(y) := \begin{cases} c \exp \{ |y|^2 / (|y|^2 - 1) \}, & 0 \leq |y| < 1; \\ 0, & |y| \geq 1, \end{cases}$$

а константа c выбрана таким образом, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} K(y) dy = 1.$$

Нетрудно убедиться, что функция $g_\delta(x)$ бесконечно дифференцируема в \mathbb{R}^3 и, кроме того, справедливы оценки:

$$|g_\delta(x) - g(x)| \leq c_1 \omega(\delta), \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

$$|\Delta g_\delta(x)| \leq c_2 \omega(\delta) / \delta^2, \quad x \in \mathbb{R}^3;$$

$$g_\delta(x) = f(x), \quad x \in K \setminus K^\delta,$$

в которых $K^\delta := \{x : x \in K, d(x, \Omega) < \delta\}$.

Отметим также, что g_δ является финитной функцией.

Пусть, далее, на сфере $S(x_0, R) := \partial B(x_0, R)$ задана непрерывная функция $F(R, \theta, \varphi)$, где $B(x_0, R) := \{x : |x - x_0| < R\}$, $R > 0$, а r, θ, φ — сферические координаты с центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3$.

Согласно формуле Лапласа (см., напр., [8]), решение задачи Дирихле

$$\Delta F = 0;$$

$$F|_{S(x_0, R)} = F(R, \theta, \varphi)$$

может быть представлено в виде:

для шара $B(x_0, R)$ —

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k Y_k(\theta, \varphi), \quad (2)$$

для его дополнения $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(x_0, R)}$ —

$$F(r, \theta, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{k+1} Y_k(\theta, \varphi), \quad (3)$$

где

$$Y_k(\theta, \varphi) = Y_k(\theta, \varphi, F) = \frac{2k+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(R, \theta', \varphi') P_k(\cos \gamma) \sin \theta' d\theta' d\varphi'$$

— сферические гармоники, удовлетворяющие неравенству

$$|Y_k(\theta, \varphi)| \leq c(k+1) \max_{x \in S(x_0, R)} |F(x)|, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

$P_k(x)$, $k = 0, 1, \dots$, — полиномы Лежандра, γ — угол между векторами (r, θ, φ) и (R, θ', φ') .

2. Формулировки основных результатов

Сформулируем основной результат данной работы. С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\gamma(t) := \sup_{0 < \tau < t} \left\{ \frac{\tau}{1-\tau} \ln \frac{t}{\tau} \right\}, \quad 0 < t < 1.$$

Как отмечено в [2] эта функция не убывает на $(0, 1)$, $t/e \leq \gamma(t) \leq t$ и $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = 1$.

Теорема. Пусть область Ω удовлетворяет условию Джона. Для любой функции $f \in H_\Delta^\omega(K)$, произвольно фиксированного $\varepsilon > 0$ и при всех $n = 1, 2, \dots$ справедлива оценка

$$E_{\Delta, n}(f, K) \leq c(f, \varepsilon) \omega \left(n^{-\gamma(\alpha) + \varepsilon} \right). \quad (5)$$

Сформулируем несколько вспомогательных результатов. Первые две леммы позволяют аппроксимировать функцию $g(x)$ функцией, являющейся гармонической в δ -окрестности $K_\delta := \{x : d(x, K) < \delta\}$, $\delta > 0$, исходного компакта.

Лемма 1. Для любой точки $y \in K^\delta \cup (\Omega \cap K_{3\delta})$, $0 < \delta < \varepsilon$, существуют точка $\tilde{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus K_{4\delta}$ и гармоническая вне этой точки функция $Q(x, y)$ со следующими свойствами:

$$|Q(x, y)| \leq \frac{c_1}{\delta}, \quad x \in K_{3\delta} \quad (6)$$

$$\left| |x-y|^{-1} - Q(x, y) \right| \leq \frac{c_2 \delta^3}{|x-y|^4}, \quad |x-y| \geq c_3 \delta. \quad (7)$$

Лемма 2. Пусть $f \in H_\Delta^\omega(K)$, $g := \mathcal{E}_0 f$. Существует гармоническая в $K_{3\delta}$, $0 < \delta < \varepsilon$, функция $h_\delta(x)$, для которой справедливо неравенство

$$|h_\delta(x) - g(x)| \leq c\omega(\delta), \quad x \in K_{3\delta}. \quad (8)$$

Следующий шаг состоит в осуществлении "гармонического варианта" процедуры вывода полюсов М.В. Келдыша (см., напр., [7, с. 21–27]), модифицированного к рассматриваемым задачам в [2].

Лемма 3. Пусть $K \subset B(0, R)$, $R > 0$. Для любых $\varepsilon > 0$, $0 < d < \varepsilon_1$ и $y \in B(0, 3R) \setminus K$ существует гармоническая в $B(0, 3R)$ функция $Q_{y,d}(x)$, удовлетворяющая неравенствам

$$\left| |x - y|^{-1} - Q_{y,d}(x) \right| \leq d, \quad x \in K;$$

$$\sup_{x \in B(0, 3R)} |Q_{y,d}(x)| \leq \exp \left\{ c_1 \ln \frac{c_2}{\rho d} \rho^{-\frac{1}{\gamma(\alpha) - \varepsilon}} \right\},$$

где $\rho := d(y, K) < \varepsilon_2$.

3. Доказательства

Доказательство леммы 1. Для доказательства леммы 1 зафиксируем такую точку $z \in \Omega$, что $|y - z| < 2\delta$. Заметим, что $d(z, K) < 5\delta$. Выберем на кривой γ_z , определяемой условием Джона, точку \tilde{y} , для которой $d(\tilde{y}, K) = 5\delta$. Тогда, используя условие (1), имеем

$$|\gamma(z, \tilde{y})| \leq \frac{d(\tilde{y}, K)}{\alpha} = \frac{5\delta}{\alpha} = c_4\delta.$$

Следовательно,

$$|z - \tilde{y}| \leq c_4\delta$$

и

$$|y - \tilde{y}| \leq |y - z| + |\gamma(z, \tilde{y})| \leq (2 + c_4)\delta.$$

Функция $|x - y|^{-1}$ гармонична на множестве $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B(\tilde{y}, c_5\delta)}$, $c_5 := 2(c_4 + 2)$, и в силу (3) имеем

$$|x - y|^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{c_5\delta}{|x - \tilde{y}|} \right)^{k+1} Y_k(\theta, \varphi),$$

причем, согласно (4)

$$|Y_k(\theta, \varphi)| \leq c_6(k+1) \max_{x \in S(\tilde{y}, c_5\delta)} |x - y|^{-1} \leq \frac{c_7(k+1)}{\delta}.$$

поскольку

$$|x - y| \geq |x - \tilde{y}| - |\tilde{y} - y| \geq c_5\delta - \frac{c_5}{2}\delta = \frac{c_5}{2}\delta.$$

Функция $Q(x, y) := \sum_{k=0}^2 \left(\frac{c_5\delta}{|x - \tilde{y}|} \right)^{k+1} Y_k(\theta, \varphi)$ является искомой.

Действительно, при $x \in K_{3\delta}$, очевидно, $|x - \tilde{y}| \geq 2\delta$ и

$$\begin{aligned} |Q(x, y)| &\leq \sum_{k=0}^2 \left(\frac{c_5 \delta}{|x-y|} \right)^{k+1} |Y_k(\theta, \varphi)| \leq \\ &\leq \frac{c_7}{\delta} \sum_{k=0}^2 \left(\frac{c_5}{2} \right)^{k+1} (k+1) \leq \frac{c_1}{\delta}. \end{aligned}$$

Далее, при $|x - y| \geq c_3 \delta$, $c_3 := 3c_5$, имеем

$$\begin{aligned} ||x - y|^{-1} - Q(x, y)| &\leq \frac{c_7}{\delta} \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{c_5 \delta}{|x-y|} \right)^{k+1} (k+1) \leq \\ &\leq \frac{c_7}{\delta} \left(\frac{c_5 \delta}{|x-y|} \right)^4 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5} \right)^j (j+4) \leq \\ &\leq \frac{c_2 \delta^3}{|x-y|^4}, \end{aligned}$$

поскольку при указанных значениях x и выборе c_3

$$|x - \tilde{y}| \geq |x - y| - |y - \tilde{y}| \geq \frac{5c_5}{2} \delta;$$

$$|x - \tilde{y}| \geq |x - y| - \frac{|x-y|}{6} = \frac{5}{6}|x - y|.$$

Лемма 1 доказана.

Замечание. Из соображений непрерывности функции $|x - y|^{-1}$ по y вне точки x можно считать, что функция $Q(x, y)$ измерима по y при всех x .

Доказательство леммы 2. Обозначим $g_\delta := U_\delta g$. И для нее справедливо $|g_\delta(x) - g(x)| \leq c\omega(\delta)$. Согласно формуле Грина [8, с. 151] функция g_δ может быть представлена в виде

$$g_\delta(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \cup K^\delta} \Delta g_\delta(y) \frac{dy}{|x-y|}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Покажем, пользуясь соотношениями (6) и (7), что функция

$$h_\delta(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\Pi_\delta} \Delta g_\delta(y) Q(x, y) dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega \setminus K_{3\delta}} \Delta g_\delta(y) \frac{dy}{|x-y|},$$

где $Q(x, y)$ — функция из леммы 1, $\Pi_\delta := K^\delta \cup (\Omega \cap K_{3\delta})$, является искомой. Действительно,

$$\begin{aligned} |g_\delta(x) - h_\delta(x)| &\leq \frac{1}{4\pi} \int_{\Pi_\delta} |\Delta g_\delta(y)| \left| |x-y|^{-1} - Q(x, y) \right| dy \leq \\ &\leq \frac{c_8 \omega(\delta)}{\delta^2} \left(\int_{\Pi_\delta \cap B(x, c_3 \delta)} \left| |x-y|^{-1} - Q(x, y) \right| dy + \right. \\ &\left. + \int_{\Pi_\delta \setminus B(x, c_3 \delta)} \left| |x-y|^{-1} - Q(x, y) \right| dy \right) = \frac{c_8 \omega(\delta)}{\delta^2} (I_1 + I_2). \end{aligned}$$

Переходя к полярным координатам и используя (6), получим следующую оценку для I_1 :

$$I_1 \leq \int_{B(x, c_3\delta)} \frac{dy}{|x-y|} + \int_{B(x, c_3\delta)} |Q(x, y)| dy \leq \quad (9)$$

$$\leq c_9\delta^2 + \frac{c_1}{\delta} \frac{4}{3}\pi (c_3\delta)^3 \leq c_{10}\delta^2.$$

При $y \in \Pi_\delta \setminus B(x, c_3\delta)$, очевидно, $|x-y| \geq c_3\delta$, и применяя оценку (7), получаем

$$I_2 \leq c_2\delta^3 \int_{\Pi_\delta \setminus B(x, c_3\delta)} \frac{dy}{|x-y|^4} \leq c_{11}\delta^2. \quad (10)$$

Из (9) и (10) получаем

$$|g_\delta(x) - h_\delta(x)| \leq c_8 \frac{\omega(\delta)}{\delta^2} (c_{10}\delta^2 + c_{11}\delta^2) \leq c_{12}\omega(\delta).$$

Таким образом,

$$|h_\delta(x) - g(x)| = |h_\delta(x) \pm g_\delta(x) - g(x)| \leq \leq c_{12}\omega(\delta) + c_{13}\omega(\delta) \leq c_{14}\omega(\delta).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3 см. в [6].

Доказательство теоремы. Пусть $h_\delta(x)$, $x \in \overline{K_{2\delta}}$, — функция из леммы 2, где n достаточно велико, а выбор достаточно малого $\delta = \delta(n)$ будет указан ниже.

Пусть $\omega_{h_\delta}(t)$ — модуль непрерывности функции h_δ . Согласно соотношению

$$|h_\delta(x) - h_\delta(t)| = |h_\delta(x) \pm g(x) - h_\delta(t) \pm g(t)| \leq \leq c_1\omega(\delta) + c_2\omega(|x-t|).$$

справедливы неравенства

$$\omega_{h_\delta}(|x-t|) \leq c_3\omega(\delta) + c_4\omega(|x-t|),$$

$$\omega_{h_\delta}(\delta) \leq c_5\omega(\delta).$$

Рассмотрим функцию

$$p_\delta(x) := U_\delta \mathcal{E}_{0, \overline{K_{2\delta}}} h_\delta(x).$$

Тогда, оставив за продолженной функцией h_δ то же обозначение, из определения оператора усреднения следует

$$|p_\delta(x) - h_\delta(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} |h_\delta(x + \delta y) - h_\delta(x)| K(y) dy \leq \leq c_5\omega(\delta).$$

Применим, далее, к функции $p_\delta(x)$ формулу Грина.

$$p_\delta(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_\delta} \Delta p_\delta(y) \frac{dy}{|x-y|}, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Обозначим

$$Q_\delta(x) := -\frac{1}{4\pi} \int_{B(0,3R) \setminus K_\delta} \Delta p_\delta(y) Q_{y,d}(x) dy - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0,3R)} \Delta p_\delta(y) \frac{dy}{|x-y|},$$

$$x \in B(0,3R),$$

где функция $Q_{y,d}(x)$ взята из леммы 3.

При $x \in K$ имеем

$$|p_\delta(x) - Q_\delta(x)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{B(0,3R) \setminus K_\delta} |\Delta p_\delta(y)| | |x-y|^{-1} - Q_{y,d}(x) | dy.$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |\Delta p_\delta(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} h_\delta(x + \delta y) \Delta K(y) dy \right| = \\ &= \frac{1}{\delta^3} \left| \int_{|t-x| \leq \delta} (h_\delta(t) - h_\delta(x)) \Delta K\left(\frac{t-x}{\delta}\right) dt \right| \\ &\leq \frac{c_6}{\delta^3} \int_{|t-x| \leq \delta} \omega_{h_\delta}(|t-x|) |\Delta K\left(\frac{t-x}{\delta}\right)| dt \leq \\ &\leq \frac{c_7 \omega(\delta)}{\delta^5} \int_{|t-x| \leq \delta} dt \leq c_8 \frac{\omega(\delta)}{\delta^2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Полагая в лемме 3 $d := \delta^2$, находим

$$|p_\delta(x) - Q_\delta(x)| \leq c_9 \frac{\omega(\delta)}{\delta^2} d = c_9 \omega(\delta).$$

Учитывая (11) и неравенство $d(y, K) \geq \delta$, справедливое при

$y \in B(0, 3R) \setminus K_\delta$, находим

$$\begin{aligned} \max_{x \in B(0, 2R)} |Q_\delta(x)| &\leq \max_{x \in B(0, 2R)} \frac{1}{4\pi} \left(\left| \int_{B(0, 3R) \setminus K_\delta} \Delta p_\delta(y) Q_{y,d}(x) dy \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, 3R)} \Delta p_\delta(y) \frac{dy}{|x-y|} \right| \right) \leq \\ &\leq c_{10} \frac{\omega(\delta)}{\delta^2} \exp \left\{ c_{11} \ln \frac{c_{12}}{\rho d} \rho^{-1/\gamma(\alpha) - \varepsilon_1} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ c_{13} \ln \frac{1}{\delta} \delta^{-1/\gamma(\alpha) - \varepsilon_1} \right\} \leq \\ &\leq \exp \left\{ c_{14} \delta^{-1/(\gamma(\alpha) - \varepsilon_2)} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

В силу (2) и (4) при $x \in B(0, 2R)$

$$Q_\delta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{2R} \right)^k Y_k(\theta, \varphi);$$

$$|Y_k(\theta, \varphi)| \leq c_{15}(k+1) \max_{x \in B(0, 2R)} |Q_\delta(x)| \leq c_{15}(k+1) \exp \left\{ c_{14} \delta^{-\frac{1}{\gamma(\alpha) - \varepsilon_2}} \right\}.$$

Далее, рассмотрим гармонический полином

$$H_n(x) = \tilde{H}_n(r, \theta, \varphi) := \sum_{k=0}^n \left(\frac{r}{2R} \right)^k Y_k(\theta, \varphi).$$

При $x \in K$ и подходящем выборе c_{17} , положив $\delta = c_{17} n^{-\gamma(\alpha) + \varepsilon_2}$, находим

$$\begin{aligned} |Q_\delta(x) - H_n(x)| &\leq c_{15} \exp \left\{ c_{14} \delta^{-\frac{1}{\gamma(\alpha) - \varepsilon_2}} \right\} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{r}{2R} \right)^k (k+1) \leq \\ &\leq c_{16} \exp \{ \varepsilon_3 n \} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k (k+1) \leq \\ &\leq c_{18} \frac{n}{2^n} \exp \{ \varepsilon_3 n \} \leq c_{19} \exp \{ -\varepsilon_4 n \} \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} |f(x) - H_n(x)| &\leq (|f - g_\delta| + |g_\delta - h_\delta| + |h_\delta - p_\delta| + |p_\delta - Q_\delta| + \\ &\quad + |Q_\delta - H_n|)(x) \leq c_{19} \exp \{ -\varepsilon_4 n \} + c_{20} \omega(\delta) \leq \\ &\leq c_{21} \omega(\delta) \leq c_{22} \omega \left(n^{-\gamma(\alpha) + \varepsilon_2} \right) = c(f, \varepsilon) \omega \left(n^{-\gamma(\alpha) + \varepsilon} \right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andrievskii V.V. Approximation of harmonic functions on compact sets in \mathbb{C} // Укр. матем. ж. – 1993. – Т. 45, 11. – С. 1467–1475.
2. Андриевский В.В. О скорости гармонической аппроксимации на компактах в \mathbb{R}^3 // Укр. матем. ж. – 1989. – Т. 41, 9. – С. 1165–1169.
3. Андриевский В.В. О методе вывода полюсов применительно к гармоническим функциям. Теория отображений и приближений функций // Киев: Наук. думка, – 1989. – С. 11–17.
4. Andrievskii V.V. Uniform harmonic approximation on compact sets in \mathbb{R}^k , $k \geq 3$ // SIAM J. Math. Anal., – 1993. – Т. 24, 1. – P. 1–7.
5. Bagby Th., Blanchet P. Uniform harmonic approximation on Riemannian manifolds // J. Ann. Math. – 1994. – 62. – P. 47–76.
6. Ленхорова И.А. О методе вывода полюсов гармонических функций на компактах, дополнение которых удовлетворяют условию Джона // Труды ИПММ НАН Украины. – 1999. – 4. – С. 94–100.
7. Мергелян С.Н. О полноте систем аналитических функций // Успехи мат. наук, – 1953. – Т. 8,4. – С. 3–63.
8. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, – 1966. – 443 с.
9. Стейн И.М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, – 1973. – 342 с.

Generators of analytical proximate orders and their applications

L. S. Maergoiz

Krasnoyarsk State Academy of Architecture and Civil Engineering, Russia

Summary. This article is a review of main results from §§ 5, 6 of the author's preprint (1998). Analytical proximate orders generated by entire or meromorphic functions are studied. Asymptotics of associated with them "gamma-functions" and "exponents", i.e. analogs of Mittag-Leffler functions, are investigated. The generalized indicator of the "exponent" of order $\rho \in (1/2, 1)$ and of order 1 and minimal type was shown to be trigonometric on the interval $[-\pi, \pi]$. It is demonstrated two applications of these results.

1991 *Mathematics Subject Classification* 30D20.

To the memory of Kharkov Mathematicians

Levin Boris Yakovlevich

and

Ronkin Lev Isaakovich

1. Introduction

Let $\gamma \in (0, \pi]$; $L(\gamma, R) = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| < \gamma; r > R\}$ be the angle on the plane \mathbb{C} with rejected circular sector; $L(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \gamma\}$; $\rho(r)$, $r > c$ be a positive function such that $\rho(r) \rightarrow \rho$ as $r \rightarrow \infty$. The function $\rho(r)$ is called an *analytical proximate order* if the function $V(r) = r^{\rho(r)}$, $r > c$ has an analytical continuation $V(z)$ into the domain containing the set $L(\gamma, R)$ as certain $\gamma, R > 0$ and satisfies the condition:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [V(t)]^{-1} V(tz) = z^\rho, \quad \forall z \in L(\gamma)$$

and moreover the convergence to the limit is uniform on every compact set in $L(\gamma)$. Here and everywhere below the symbol z^ρ is understood in the sense of its main meaning: $z^\rho = r^\rho e^{i\rho\theta}$ where $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$.

Analytical proximate order $\rho(r)$, $r > c$ is a proximate order [2].

We consider a special class of analytical proximate orders generated by logarithms of entire or meromorphic functions. This class is nonempty set because the following assertions are true.

Theorem 1 (see [3, p. 88]). Let $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/a_k; p)$ be the Weierstrass canonical product of the genus p with positive zeroes $\{a_k\}_1^{\infty}$; $n(r)$ be a sum of orders of zeroes of the function f in the circle $S(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$; $p < \rho < p + 1$; $\rho(r)$ be a proximate order such that $\rho(r) \rightarrow \rho$ as $r \rightarrow \infty$; $0 < \Delta < \infty$. If

$$n(r) \sim \Delta r^{\rho(r)} \quad \text{as } r \rightarrow \infty, \quad \text{i.e.} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-\rho(r)} n(r) = \Delta,$$

then f is the entire function of order ρ and of proximate order $\rho(r)$ satisfying the condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln f(-re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} e^{i\rho\theta}, \quad |\theta| < \pi; \quad \ln f(0) = 0,$$

and moreover convergence to the limit here is uniform with respect to the variable θ on every segment $[\alpha, \beta] \subset (-\pi, \pi)$.

Theorem 2 (see [4]). Let $\rho(r)$ be a proximate order,

$$\rho(r) \rightarrow \rho \in \mathbb{N}; \quad L(r) = r^{\rho(r)-\rho}; \quad \Delta \in (0, \infty).$$

If $L(r) \downarrow 0$ as $r \rightarrow \infty$ then there exists a proximate order $\rho_1(r) \rightarrow \rho$ and entire function f of order $\rho(r)$ with positive zeroes such that (see theorem 1)

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/a_k; \rho - 1); \quad n(r) \sim \Delta r^{\rho_1(r)}.$$

Besides, the entire function $g(z) = f(-z)$ satisfies the condition.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln g(re^{i\theta})}{r^{\rho(r)}} = -\Delta e^{i\rho(\pi+\theta)}, \quad |\theta| < \pi, \quad \ln g(0) = 0, \quad (1.1)$$

and convergence to the limit is uniform with respect to the variable θ on every segment $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$.

If $L(r) \uparrow \infty$ as $r \rightarrow \infty$, then the assertion remains valid with the only difference that the genus of the function f is equal to ρ and for $g(z)$ the formula (1), in the right-hand side of which it is necessary to remove $-$, is valid.

Let $\mathbb{C}_- = \{z = r^{i\theta} \in \mathbb{C} : r \geq 0; |\theta| < \pi\}$; $\rho > 1/2$; $\rho(r)$ be the proximate order such that $\rho(r) \rightarrow \rho$ as $r \rightarrow \infty$;

$$\mathfrak{B}(\rho(r)) = \{V(r) = r^{\rho_0(r)}\},$$

where $\rho_0(r)$ is an analytical proximate order equivalent to $\rho(r)$, be the class of functions with the following properties.

1) The function $V(r)$ allows analytical continuation in \mathbb{C}_- , satisfying the condition

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{V(rz)}{V(r)} = z^{\rho}, \quad z \in \mathbb{C}_-,$$

and moreover the convergence to the limit is uniform on every compact set $K \subset \mathbb{C}_-$;

2) the function \bar{V} complex conjugate to V satisfies the equality $\overline{V(z)} = V(\bar{z})$ for all $z \in \mathbb{C}_-$, where the number \bar{z} is the complex conjugate number to z .

3) $V(r)$ is a positive on the positive half-axis increasing strictly convex function with respect to $\ln r$ and moreover $V(0) = 0$.

Definition 1. An entire function g of a proximate order $\rho(r) \rightarrow \rho > 1/2$ we call a generator of an analytical proximate order $\rho_0(r)$, equivalent to $\rho(r)$ and a generator of the function $V(r) = r^{\rho_0(r)}$, if V is a function of the class $\mathfrak{B}(\rho(r))$ such that either $V(r) = \ln g(r)$, or $V(r) = \ln 1/g(r)$ as $r \geq 0$.

The object under study in this paper is the subclass $\mathfrak{A}(\rho(r)) = \{V\}$ of the class $\mathfrak{B}(\rho(r))$, such that generator of every function $V \in \mathfrak{A}(\rho(r))$ is a certain entire function $g = g(V)$ of proximate order $\rho(r)$, which is the Weierstrass canonical product having described in the formulations of theorems 1, 2. Specifically, the zeros of this function are lying on the negative half-axis only. When $\rho(r) \equiv \rho \in \mathbb{N}$, by definition we consider that the only representative of the class $\mathfrak{A}(\rho(r))$ is the function $\exp\{z^\rho\}$. Results presented below are trivial in this case.

1°. **Structure of functions of the class $\mathfrak{A}(\rho(r))$.** Let us get sure that the class $\mathfrak{A}(\rho(r))$ is nonempty, whatever is the proximate order $\rho(r) \rightarrow \rho \in (0, \infty)$. We'll restrict ourselves with the case when $L(r) = r^{\rho(r)-\rho}$ is a monotonous function, if $\rho \in \mathbb{N}$, taking into account theorem 2 and the following modification of one result from the article [5] (see theorem 1.4' in [1]).

Theorem 3. Let f be an entire function of order $\rho \in (0, \infty)$. If moreover the function f is of minimal (maximal) type, then it has the proximate order $\rho(r)$ such that $L(r) \downarrow 0$ ($L(r) \uparrow \infty$) as $r \rightarrow \infty$, where $L(r) = r^{\psi(r)}$, $\psi(r) = \rho(r) - \rho$.

Theorem 4. 1. There exists an equivalent to $\rho(r)$ analytical proximate order $\rho_0(r)$ such that $V(r) := r^{\rho_0(r)} \in \mathfrak{A}(\rho(r))$, and the generator g of the function V satisfies the equality $V(r) = \ln g(r)$, provided one of the following conditions is fulfilled:

- a) $\rho = 2n + 1$, $n = 0, 1, \dots$; $L(r) \downarrow 0$;
- b) $\rho = 2n$, $n = 1, 2, \dots$; $L(r) \uparrow \infty$;
- c) ρ is a noninteger and $\rho \in (2n, 2n + 1)$, $n = 0, 1, \dots$

2. In the same notations an analogous assertion is valid with the substitution of the property $V(r) = \ln g(r)$ for $V(r) = \ln 1/g(r)$ if

- a) $\rho = 2n$, $n = 1, 2, \dots$; $L(r) \downarrow 0$;
- b) $\rho = 2n + 1$, $n = 0, 1, \dots$; $L(r) \uparrow \infty$;
- c) ρ is a noninteger and $\rho \in (2n - 1, 2n)$, $n = 1, 2, \dots$

The differentiation operation remains the property of entire function to be the generator of analytical proximate order.

Theorem 5. If the entire function g of proximate order $\rho(r) \rightarrow \rho > 1/2$ is a generator of the analytical proximate order $\rho_0(r)$, then its derivative g' has the same property with respect to the equivalent $\rho(r)$ and $\rho_0(r)$ to a certain analytical proximate order $\rho_1(r)$. In addition, g, g' are entire functions of completely regular

growth.

2°. "Gamma-functions" associated with the functions of class $\mathfrak{A}(\rho(r))$.

Definition 2. Let $V \in \mathfrak{B}(\rho(r))$. The function

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda; V) = \rho \int_0^\infty t^{\lambda-1} \exp\{-V(t)\} dt, \quad \Re \lambda > 0; \quad (1.2)$$

is called V — gamma-function or "gamma-function" associated with V .

The function $1/\Delta(\lambda)$ allows analytical continuation in \mathbb{C} (see [1], theorem 3.1). Let us examine the properties of the analog of the gamma-function if $V \in \mathfrak{A}(\rho(r))$.

Theorem 6. Let $V \in \mathfrak{A}(\rho(r))$, where $\rho(r) \rightarrow \rho > 1/2$ is a proximate order; g is an entire function — generator of the function V ; $\Delta(\lambda)$ is V — gamma-function; Λ_Δ is the totality of all poles of its meromorphic continuation Δ in \mathbb{C} ; $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, -2, \dots\}$ is the set of all nonpositive integers. Then

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda; g) = \rho \int_0^\infty t^{\lambda-1} / g(t) dt, \quad \Re \lambda > 0, \quad (1.3)$$

if $V(r) = \ln g(r)$, $r \geq 0$, and

$$\Delta(\lambda) = \Delta_\rho(\lambda; g) = \rho \int_0^\infty g(t) t^{\lambda-1} dt, \quad \Re \lambda > 0,$$

if $V(r) = -\ln g(r)$, $r \geq 0$. In addition, the following assertions are valid:

1) every element of the set Λ_Δ is a simple pole of the function Δ , and in addition $\Lambda_\Delta \subset \mathbb{Z}_-$;

2) $\Lambda_\Delta \cap \{-1, -2, \dots, -p\} = \emptyset$, if g is an entire function of the genus $p > 0$;

3) if $V(r) = \ln g(r)$, $r \geq 0$, where g is an entire function of order $\rho \in (1/2, 1]$ and as $\rho = 1$ of minimal type¹ then $\Lambda_\Delta = \mathbb{Z}_-$, and moreover

$$\Delta(k+1) = \rho \int_0^\infty t^k / g(t) dt = \frac{k!}{g^{(k+1)}(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Assertion 1) of this theorem for a more general situation was proved by M. A. Yevgrafov in [6].

3°. "Exponents", associated with the functions of class $\mathfrak{A}(\rho(r))$. V. Bernstein [7] studied asymptotic properties of the function

$$E(z; W) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\theta(k)}, \quad z \in \mathbb{C}^n; \quad \theta(\zeta) = \int_0^\infty e^{-W(t)} t^\zeta, \quad \Re \zeta > 1.$$

¹I.e. as $n = 0$ either the condition 1 a), or 1 c) of theorem 4 holds (see theorem 3).

where $W(z)$ is a function analytical in the angle $|\text{Arg } z| < \pi/\rho$ and satisfying the asymptotic equality $W(re^{i\theta}) = W(r)e^{i\rho\theta}[1 + o(1)]$ as $r \rightarrow \infty$ uniform with respect to $\theta \in [-\delta, \delta]$, where $\delta < \pi/\rho$, and moreover $\rho_0(r) = \ln W(r)/\ln r$ is proximate order equivalent to the prescribed one. If $W(r) = r^\rho$, then $\rho^{-1}E(\cdot; W) = E_\rho$ is a Mittag-Leffler function.

Definition 3. Let $V \in \mathfrak{B}(\rho(r))$; Δ be V - gamma-function (see definition 2). The function

$$E_\rho(z; V) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Delta(k+1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

is called V - exponent or "exponent" associated with V .

Other generalization of gamma-function and exponent was investigated in [8]. The function $E_\rho(\cdot; V)$ performs fundamental role in integral transforms of entire functions of proximate order (see § 4 in [1]). Let us examine specifics of Taylor coefficients of V -exponent $E_\rho(\cdot; V)$ and peculiarities of its asymptotics.

Theorem 7. Let $\rho(r) \rightarrow \rho \in (1/2, 1]$ be a proximate order and besides $L(r) = r^{\rho(r)-\rho} \downarrow 0$ when $\rho = 1$; $V \in \mathfrak{A}(\rho(r))$, $V(r) = \ln g(r)$, where g is the generator of the function V (see theorem 4). Then

$$E_\rho(z; g) := E_\rho(z; V) \equiv g'(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

and the following asymptotic estimate uniform in the variable θ on every segment $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$ as $r \rightarrow \infty$ is valid:

$$\ln E_\rho(re^{i\theta}; g) = V(r)e^{i\rho\theta}[1 + o(1)], \quad |\theta| < \pi,$$

So in the cases under consideration the asymptotics of the function $E_\rho(\cdot; V)$ is totally defined by the asymptotics of the generator g of the function V . In other cases the asymptotic properties $E_\rho(\cdot; V)$ are described by another theorem.

Theorem 8. Let $\rho(r) \rightarrow \rho \in [1, \infty]$ be a proximate order; $L(r) = r^{\rho(r)-\rho} \uparrow \infty$ when $\rho = 1$; $V \in \mathfrak{A}(\rho(r))$, g be an entire function of genus p , which is the generator of the function V . Then the following uniform with respect to $\arg z$ asymptotic estimate of the function $E_\rho(z; V)$ as $|z| \rightarrow \infty$ is valid:

$$E_\rho(z; V) = F'(z) + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad |\arg z| \leq \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon$$

and

$$E_\rho(z; V) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon \leq |\arg z| \leq \pi,$$

where $0 < \rho\varepsilon < \pi \min\{1/2, \rho - 1/2\}$; $F = g$, if $V(r) = \ln g(r)$; $F = 1/g$, if $V(r) = -\ln g(r)$;

$$O\left(\frac{1}{|z|^2}\right) = O\left(\frac{1}{|z|^{p+2}}\right) - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\Delta(-k)z^{k+1}}.$$

Here as a certain $\delta > 0$ and as $k = 1, 2, \dots, p$ (see (3))

$$\Delta(-k) = \int_0^\delta \left[\frac{1}{F(t)} - 1 \right] t^{-k-1} dt - \frac{\delta^{-k}}{k} + \int_\delta^\infty \frac{t^{-k-1}}{F(t)} dt \neq 0.$$

Now we have all information necessary to define the generalized indicator h_E of the function $E_\rho(\cdot, V)$ (and not its nonnegative cutoff by zero only h_E^+) with respect to the proximate order $\rho(r) \rightarrow \rho$ for the case when $V \in \mathfrak{A}(\rho(r))$. The following theorem describes cases in which the indicator h_E can take negative values, too.

Theorem 9. *In the above notations the following assertions are valid:*

1. *Let $\rho \in (0, 1]$ and besides $L(r) = r^{\rho(r)-\rho} \downarrow 0$ when $\rho = 1$. Then the indicator of the function $E_\rho(\cdot, V)$ with respect to $\rho(r)$ is a 2π -periodic continuation in \mathbb{R} of the function $h_E(\theta) = \cos \rho\theta$, $|\theta| \leq \pi$.*

2. *Let $\rho \in [1, \infty)$ and in addition $L(r) = r^{\rho(r)-\rho} \uparrow \infty$ if $\rho = 1$. Then $h_E(\theta) = \Phi_\rho(e^{i\theta})$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. where*

$$\Phi_\rho(e^{i\theta}) = \begin{cases} |z|^\rho \cos(\rho \arg z), & |\arg z| \leq \gamma_\rho; \\ 0, & \rho \geq \frac{1}{2}; \quad \gamma_\rho \leq |\arg z| \leq \pi. \end{cases} \quad \gamma_\rho = \pi/2\rho.$$

So the generalized indicator of the "exponent" of order $\rho \in (1/2, 1)$ and of order 1 and minimal type is trigonometric on the interval $[-\pi, \pi]$. The first such example was announced by M. A. Yevgrafov in [6].

4°. **Indicator and conjugate diagrams of entire function of order 1 and minimal type.** One of applications of previous results is a proof of the complete analog of theorem by Polya on relation between indicator and conjugate diagrams of an entire function of exponential type for an entire functions of order 1 and minimal type with any generalized indicator.

Let $\rho > 0$; $\rho(r) \rightarrow \rho$ be an proximate order; $V \in \mathfrak{B}(\rho(r))$; $\mathfrak{M}_\rho(V) = \{f\}$ be a class of entire functions in \mathbb{C} such that as certain $M = M(f)$, $m = m(f) > 0$ the following inequality is true:

$$|f(z)| \leq M \exp\{mV(|z|)\} \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Let us consider an generalized Borel transform associated with V .

Definition 4. Let Δ be V -gamma-function (see (2))

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k z^k}{\Delta(k+1)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

be an entire function of the class $\mathfrak{M}_\rho(V)$. By its V -Borel transform we call the function

$$F(p) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k}{p^{k+1}}.$$

It is the analytic function in a vicinity of ∞ such that $F(\infty) = 0$.

We consider an integral representation of entire function of proximate order and analog of Polya theorem. The following integral formula connecting the function f from $\mathfrak{M}_\rho(V)$ and its V -Borel transform F is valid

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_\rho(zp; V) F(p) dp; \quad z \in \mathbb{C} \quad (1.4)$$

where Γ is a closed positively oriented Jordan contour which is the boundary of the domain containing the peculiarities of F ; $E_\rho(w; V)$ is the V -exponent (see definition 3; [1, § 4]).

Let P_1 be a class of finite 2π -periodic trigonometrically convex functions defined in \mathbb{R} ; $h \in P_1$,

$$X_h = \{p \in \mathbb{C} : \Re p e^{i\theta} \leq h(\theta) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}\}.$$

If $h = h_f$ is an indicator of the function f , then the set $I_h = \{w = \bar{p} : p \in X_h\}$ is called *indicator diagram* of the function f .

The following analogue of mentioned theorem by Polya for the entire function of order 1 and minimal type is true.

Theorem 10. *Let f be an entire function of order 1 and minimal type; $\rho(r)$ be its proximate order; $h = h_f$ be its generalized indicator; $V \in \mathfrak{A}(\rho(r))$; $V(r) = \ln g(r)$, where g is the generator of the function V ; K is the conjugate diagram of the function f , i.e. the least convex compact set onto the exterior of which the V -Borel transform of the function f continues analytically. Then the set K coincides with the "indicator diagram" X_h of the function f (see Definition 4).*

Its proof is based on formula (4), theorems 6, 9.

5°. **On expansion of the meromorphic function into simplest fractions.** We'll study properties of expansion of the meromorphic function into partial fractions $1/g$ and its derivative into partial fractions, where g is an entire function of order 1 and maximal type which is the generator of the function V from the class $\mathfrak{A}(\rho(r))$ (see definition 1). At first we'll consider the following elementary convergence criterion of the series of the principal parts of Loran expansion of the meromorphic function and its expansion into partial fractions.

Theorem 11. *Let Φ be a meromorphic function in \mathbb{C} ; $\Lambda = \{b_k\}_1^\infty$ be a convergent to ∞ sequence of all its poles nondecreasing modulo;*

$$\left\{ \Phi_k(z) = \sum_{n=1}^{N_k} \frac{A_{k,n}}{(z - b_k)^n} : k = 1, 2, \dots \right\}$$

be the sequence of principal parts of Loran expansion of the function Φ in the vicinity of its poles. Then the series $\sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z)$ converges at all $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ if and

only if the series

$$R(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{res}_{w=b_k} \Psi(w, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda; \quad \Psi(w, z) = \frac{\Phi(w)}{w-z},$$

converges and moreover

$$\Phi_k(z) = - \operatorname{res}_{w=b_k} \Psi(w, z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda; \quad k \in \mathbb{N}; \quad R(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z).$$

If the series $R(z)$ converges uniformly on every compact set in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, then $\alpha(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z)$ is an entire function coinciding with the total sum of residues of the function $\Psi(w, z)$ in the variable w .

Definition 5. We say that the meromorphic function Φ expands into partial fractions, if in the notations of theorem 11 the formula

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(z) + \alpha(z), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda, \quad (1.5)$$

where the series converges uniformly on every compact set in $\mathbb{C} \setminus \Lambda$ is valid.

This criterion is used to expand into partial fractions a meromorphic function of the form $1/g$, where g is the generator of analytical proximate order $\rho(r)$ such that $\rho(r) \rightarrow 1$, $L(r) = r^{\rho(r)-1} \uparrow \infty$ as $r \rightarrow \infty$.

Theorem 12. Let $V(r) = r^{\rho(r)} = -\ln g(r)$; $Z_g = \{b_1, b_2, \dots\}$ be a sequence of all zeros of the function g such that $0 > b_1 > b_2 > \dots$. Then the function $\Phi = 1/g$ and its derivative Φ' expand into partial fractions, i.e. the equality (5) where $\Lambda = Z_g$, and the formula derived from it by termwise differentiation hold. Here α, α' are entire functions of proximate order $\rho(r)$ such that their generalized indicator is equal to $\max\{0, \cos \theta\}$, $\theta \in \mathbb{R}$, and moreover $\alpha'(z) \equiv E_{\rho}(z; V)$, $z \in \mathbb{C}$ where $E_{\rho}(z; V)$ is V -exponent.

The work has been done with the aid of the support grant for leading scientific schools of the Russian Fundamental Research Fund 00-15-96-140.

REFERENCES

1. Маергойз Л. С. Индикаторная и сопряженная диаграммы целой функции уточненного порядка.— Красноярск, 1998.—56 с. (Препринт / Ин-т физики им. Л. В. Киренского СО РАН: N 789 Ф).
2. Маергойз Л. С. Аналог функции Миттаг-Леффлера, ассоциированный с аналитическим уточненным порядком.// Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск: КГУ,—1998.—С. 102–111.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат,—1956.—632 с.

4. Гольдберг А. А. Интегральное представление монотонных медленно меняющихся функций. // Изв. вузов. Матем.,—1988.—№ 4, С. 21–27.
5. Гришин А. Ф., Малютина Т. И. Об уточненном порядке. // Комплексный анализ и математическая физика. Красноярск: КГУ,—1998.—С. 10–24.
6. Евграфов М. А. Обобщенное преобразование Бореля.—Москва, 1976.—58 с. (Препринт / Ин-т прикладной математики АН СССР: № 35).
7. Bernstein V. Sulla crescenza delle trascendenti intere di ordine finito. // Reale Accad. d'Italia. Memoire della classe di scien. fis. mat. e natur,—1933.—4.—Р. 339–401.
8. Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С. Общие гамма-функции, экспоненты и гипергеометрические функции. // УМН,—1998.—53.—в. 1(319)—С. 3–60.

Ряды Фурье и истинно-субгармонические функции
конечного γ -типа

К. Г. Малютин, С. В. Коломиец

Украинская академия банковского дела, г. Сумы, Украина

Пусть $\gamma(r)$ – функция роста, то есть строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция, определенная на $[0, \infty)$. Мы вводим класс истинно-субгармонических функций конечного γ -типа в полуплоскости и находим критерии принадлежности функции к данному классу. Эти критерии формулируются в терминах коэффициентов Фурье функции.

1991 Mathematics Subject Classification 31A10.

1. Введение

Существуют различные определения порядка функций, голоморфных или субгармонических в полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$. Укажем на определение порядка в смысле Н. В. Говорова и Е. Титчмарша [1], определение формального и полуформального порядков в смысле А. Ф. Гришина [2] и др.¹ При этом в качестве шкалы роста, как правило, выбирается шкала, определяемая функцией r^ρ ($r > 0$), где ρ – фиксированное положительное число (иногда ρ заменяется уточненным порядком [4]). В настоящей работе мы рассматриваем шкалу, которая определяется произвольной функцией роста $\gamma(r)$. Наше определение по духу близко к определению, введенному Л. И. Ронкиным [5]. После того как выбрана шкала роста и введено соответствующее определение порядка функции, возникает проблема нахождения критериев принадлежности субгармонической функции данному классу. Эти критерии формулируются в терминах риссовской меры, определяемой этой функцией, или в каких-либо других, например, в терминах коэффициентов Фурье [6], [7]. Наши критерии мы также получаем в терминах коэффициентов Фурье субгармонических функций.

2. Классы функций в \mathbb{C}_+

Через $C(a, r)$ будем обозначать открытый круг радиуса r с центром в точке a , через Ω_+ пересечение множества Ω с полуплоскостью \mathbb{C}_+ : $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{C}_+$.

¹По поводу различных определений порядка функций, голоморфных в \mathbb{C}_+ , см. также [3].

Следуя А. Ф. Гришину [8], будем называть субгармоническую в \mathbb{C}_+ функцию v истинно-субгармонической, если $\overline{\lim}_{z \rightarrow t} v(z) \leq 0$ для любого числа $t \in \mathbb{R}$.

Класс истинно-субгармонических функций в \mathbb{C}_+ обозначим через JS. Пусть SK – класс субгармонических функций в \mathbb{C}_+ , имеющих положительную гармоническую мажоранту в любой ограниченной области в \mathbb{C}_+ . Функции класса SK обладают следующими свойствами [8]: если $v(z) \in SK$, то

а) $v(z)$ имеет некасательный предел $v(t)$ почти всюду на вещественной оси, $v(t) \in L^1_{loc}(-\infty, \infty)$;

б) на вещественной прямой существует знакопеременная мера ν такая, что

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b v(t + iy) dt = \nu([a, b]) - \frac{1}{2}\nu(\{a\}) - \frac{1}{2}\nu(\{b\}).$$

Мера ν называется *границной мерой функции v* ;

с) $d\nu(t) = v(t) dt + d\sigma(t)$, где σ – сингулярная мера относительно меры Лебега.

Для функции $v \in SK$ определим, следуя [8], *полную меру λ* как

$$\lambda(K) = 2\pi \int_{K_+} \Im \zeta d\mu(\zeta) - \nu(K),$$

где μ – риссовская мера функции v .

Заметим, что $JS \subset SK$. Кроме того, полная мера функции $v \in JS$ является положительной мерой, чем и обоснован термин "истинно-субгармоническая функция". Для заданной меры λ обозначим

$$d\lambda_m(\zeta) = \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} r^{m-1} d\lambda(\zeta) \quad (\zeta = re^{i\varphi}), \quad \lambda_m(r) = \lambda_m(\overline{C(0, r)}),$$

где $\frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} = m$ при $\varphi = 0, \pi$ (определяется по непрерывности).

Следующая формула для функции $v \in SK$ — это формула Карлемана в обозначениях А.Ф. Гришина:

$$\frac{1}{r^k} \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} dt + \frac{1}{r_0^k} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin k\varphi d\varphi, \quad (2.1)$$

в частности, (при $k = 1$)

$$\frac{1}{r} \int_0^\pi v(re^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi = \int_{r_0}^r \frac{\lambda(t)}{t^3} dt + \frac{1}{r_0} \int_0^\pi v(r_0 e^{i\varphi}) \sin \varphi d\varphi. \quad (2.2)$$

для всех $r > r_0$.

Отметим ещё полезное неравенство:

$$\begin{aligned} |\lambda_m(r)| &= \left| \iint_{C(0,r)} d\lambda_m(\zeta) \right| = \left| \iint_{C(0,r)} \frac{\sin m\varphi}{\sin \varphi} \tau^{m-1} d\lambda(\zeta) \right| \leq \\ & m \iint_{C(0,r)} \tau^{m-1} d|\lambda|(\zeta) \leq mr^{m-1} |\lambda|(r). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначим через $D_+(R_1, R_2) = \overline{C_+(0, R_2)} \setminus C_+(0, R_1)$, $R_1 < R_2$. Для функций $v \in SK$ справедливо представление в полукольце $z \in D_+(R_1, R_2)$:

$$\begin{aligned} v(z) &= -\frac{1}{2\pi} \iint_{D_+(R_1, R_2)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + \frac{R_2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_2 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_2 e^{i\varphi}) d\varphi + \\ & \frac{R_1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_1 e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1 e^{i\varphi}) d\varphi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $G(z, \zeta)$ – функция Грина полукольца, $\frac{\partial}{\partial n}$ – означает производную по внутренней нормали, $K(z, \zeta) = G(z, \zeta) / \Im \zeta$ при $\zeta \in D_+(R_1, R_2)$ и продолжена по непрерывности на вещественную ось при $R_1 \leq |t| \leq R_2$.

Используя теорию эллиптических функций (см., например, [9]) можно получить разложения ядра в формуле (2.4) при $R_1 = qR$, $R_2 = R/q$, $q \in (0, 1)$, $z = re^{i\theta}$, $\zeta = \tau e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} G(z, \zeta) &= \\ & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{\tau}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{\tau^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \\ & qR \leq \tau < r < R/q, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} G(z, \zeta) &= \\ & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{r}{\tau}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{\tau^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} \tau^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \\ & qR \leq r < \tau \leq R/q, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} &= \frac{2}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{t}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{t^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta, \\ & qR \leq |t| \leq r \leq R/q, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} &= \frac{2}{t} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1-q^{4m})} \left(\frac{r}{t}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} t^{2m}}{R^{2m}}\right) \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta, \\ & qR \leq r \leq |t| \leq R/q, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial G(z, qRe^{i\varphi})}{\partial n} = \frac{4}{qR} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{4m}} \left(\frac{qR}{r}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} r^{2m}}{R^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial G\left(z, \frac{1}{q}Re^{i\varphi}\right)}{\partial n} = \frac{4q}{R} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^{4m}} \left(\frac{qr}{R}\right)^m \left(1 - \frac{q^{2m} R^{2m}}{r^{2m}}\right) \sin m\theta \sin m\varphi, \quad (2.10)$$

3. Коэффициенты Фурье функций класса SK

Коэффициенты Фурье функции v из класса SK определяются обычным образом [10]

$$c_k(r, v) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin k\theta \, d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из формулы (2.1) получим следующие выражения для коэффициентов Фурье при $r > r_0$:

$$c_k(r, v) = \alpha_k r^k + \frac{2r^k}{\pi} \int_{r_0}^r \frac{\lambda_k(t)}{t^{2k+1}} \, dt, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

где $\alpha_k = r_0^{-k} c_k(r_0, v)$.

Применяя формулу интегрирования по частям к интегралу в (3.1), получим

$$c_k(r, v) = \alpha_k r^k + \frac{r^k}{\pi k r_0^{2k}} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k \, d\lambda(\zeta) + \frac{r^k}{\pi k} \iint_{D_+(r_0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\tau^k \Im \zeta} \, d\lambda(\zeta) - \frac{1}{r^k \pi k} \iint_{C_+(0, r)} \frac{\sin k\varphi}{\Im \zeta} \tau^k \, d\lambda(\zeta), \quad (3.2)$$

где $\zeta = \tau e^{i\varphi}$.

Утверждение 1. Коэффициенты Фурье $c_k(r, v)$ функции v класса SK являются непрерывными функциями от r .

Это вытекает из того, что правые части соотношений (3.1) являются непрерывными в каждой точке r функциями.

4. Субгармонические функции конечного γ -типа

Строго положительная, непрерывная, возрастающая и неограниченная функция $\gamma(r)$, определенная на $[0, \infty)$, называется *функцией роста* [11].

Обозначим через

$$\Phi(r, v) = \int_0^{\pi} |v(re^{i\varphi})| \sin \varphi \, d\varphi.$$

Функция $v \in JS$ называется функцией *конечного γ -типа*, если существуют постоянные A и $B > 0$ такие, что

$$\Phi(r, v) \leq A\gamma(Br), \quad (4.1)$$

$$v(re^{\varphi}) \leq A\gamma(Br), \quad (4.2)$$

для всех $r > 0$.

Ниже через A, B, \dots мы будем обозначать положительные константы, которые могут изменяться на протяжении статьи. Класс истинно-субгармонических функций конечного γ -типа обозначим через $JS(\gamma(r))$.

Теорема 4.1. Пусть γ - функция роста, $v \in JS$. Следующие два утверждения эквивалентны:

- 1) $v \in JS(\gamma(r))$;
- 2) при некоторых положительных A, B и всех $r > 0$ выполняется неравенство:

$$|c_k(r, v)| \leq A\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

Доказательство. Пусть $v \in JS(\gamma(r))$. Тогда

$$|c_k(r, v)| \leq k\Phi(r, v) \leq kA\gamma(Br), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Из формулы (2.2) получаем

$$\begin{aligned} \lambda(r) &\leq \frac{8}{3}r^2 \int_r^{2r} \frac{\lambda(t)}{t^3} dt \leq \\ &\frac{8}{3}r^2 \left[\frac{1}{2r} \Phi(2r, v) + \frac{1}{r} \Phi(r, v) \right] \leq Ar\gamma(Br). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Отсюда и из неравенства (2.3) имеем

$$|\lambda_m(r)| \leq mr^{m-1} \lambda(r) \leq Amr^m \gamma(Br). \quad (4.6)$$

Применяя формулу (2.1) и используя (4.4), (4.6), получим

$$\begin{aligned} |c_k(r, v)| &\leq \frac{k}{2^k} |c_k(2r, v)| + r^k \int_r^{2r} \frac{|\lambda_k(t)|}{t^{2k+1}} dt \leq \\ &\frac{Ak}{2^k} \gamma(2Br) + Ak r^k \gamma(2Br) \int_r^{2r} \frac{dt}{t^{k+1}} \leq A' \gamma(B'r). \end{aligned}$$

Тем самым импликация 1) \implies 2) доказана.

Пусть теперь выполнено условие 2) теоремы. Из неравенства $|c_1(r, v)| \leq A\gamma(Br)$ и формулы (2.2) теми же рассуждениями, что и выше

получаем неравенство (4.5). Используя разложение в ряд Фурье (2.9), (2.10), при $q = 1/2$, $R = r$, получим:

$$\left| \frac{r}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, 2re^{i\varphi})}{\partial n} v(2re^{i\varphi}) d\varphi + \frac{r}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, \frac{1}{2}re^{i\varphi})}{\partial n} v\left(\frac{1}{2}re^{i\varphi}\right) d\varphi \right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \frac{4^m}{1+4^m} \left[2|c_m(2r, v)| + 8 \left| c_m\left(\frac{1}{2}r, v\right) \right| \right] \leq A\gamma(Br).$$

Из этого неравенства и формулы (2.4) при $R_1 = r/2$, $R_2 = 2r$, получаем:

$$|v(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{D_+(\frac{1}{2}r, 2r)} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) + A\gamma(Br).$$

Теперь, используя ортогональность системы полиномов $\{\sin k\theta\}$, $k = 1, 2, \dots$, на отрезке $[0, \pi]$, из формул (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(r, v) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \iint_{D_+(r/2, r)} + \iint_{D_+(r, 2r)} \right\} K(z, \zeta) d\lambda(\zeta) \sin \theta d\theta + 2A\gamma(Br) \leq \\ &\frac{1}{2} \iint_{D_+(r/2, r)} \frac{\sin \varphi}{\Im \zeta} \frac{\tau}{r} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2}\right) d\lambda(\zeta) + \frac{1}{2} \iint_{D_+(r, 2r)} \frac{\sin \varphi}{\Im \zeta} \frac{r}{\tau} \frac{4}{5} \left(1 - \frac{\tau^2}{4r^2}\right) d\lambda(\zeta) + \\ 2A\gamma(Br) &\leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^r \left(1 - \frac{r^2}{4\tau^2}\right) d\lambda(\tau) + \frac{2}{5r} \int_r^{2r} \left(1 - \frac{\tau^2}{4r^2}\right) d\lambda(\tau) + \\ 2A\gamma(Br) &\leq \frac{2}{5r} \int_{r/2}^{2r} d\lambda(\tau) + 2A\gamma(Br) \leq \frac{2\lambda(2r)}{5r} + 2A\gamma(Br). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Отсюда следует выполнение неравенства (4.1).

Далее из (2.4) и неотрицательности меры λ имеем

$$v(z) \leq \frac{R_2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_2e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_2e^{i\varphi}) d\varphi + \frac{R_1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G(z, R_1e^{i\varphi})}{\partial n} v(R_1e^{i\varphi}) d\varphi,$$

для всех $R_1 < |z| < R_2$. Далее, как и при доказательстве неравенства (4.7), получаем выполнение условия (4.2). Теорема полностью доказана.

5. Пример

В дополнение к теореме 4.1 покажем, что из условия 1) не следует такое усиление 2): $|c_k(r)| \leq \varepsilon_k \gamma(Br)$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Это показывает следующий

Пример. Рассмотрим неположительную, гармоническую в \mathbb{C}_+ функцию

$$v(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \Im \frac{2^{(\rho+1)k}}{z - 2^k}, \quad 0 < \rho < 1.$$

Функция v удовлетворяет соотношению $v(2z) = 2^\rho v(z)$. Действительно,

$$v(2z) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \Im \frac{2^{(\rho+1)k}}{2z - 2^k} = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \Im \frac{2^{(\rho+1)k}}{z - 2^{k-1}} = 2^\rho \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \Im \frac{2^{(\rho+1)k}}{z - 2^k}.$$

Отсюда получаем

$$C_1 r^\rho \leq \Phi(r, v) \leq C_2 r^\rho,$$

где

$$C_1 = 2^{-\rho} \inf_{1 \leq r \leq 2} \left(- \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right), \quad C_2 = 2^\rho \sup_{1 \leq r \leq 2} \left(- \int_0^\pi v(re^{i\theta}) \sin \theta d\theta \right).$$

Пусть $z = re^{i\theta}$, $2^{k_0} < r < 2^{k_0+1}$. Из разложения

$$v(re^{i\theta}) = - \sum_{2^k < r} 2^{\rho(k+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{mk} \sin(m+1)\theta}{r^{m+1}} - \sum_{2^k > r} 2^{\rho k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m \sin m\theta}{2^{mk}}$$

непосредственным подсчетом убеждаемся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} c_n(r, v) &= - \frac{1}{r^n} \sum_{2^k < r} 2^{k(\rho+n)} - r^n \sum_{2^k > r} 2^{k(\rho-n)} = \\ &= - \frac{1}{r^n} \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k(\rho+n)} - r^n \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{k(\rho-n)} = - \frac{1}{r^n} \frac{2^{k_0(\rho+n)}}{1 - 2^{-(\rho+n)}} - r^n \frac{2^{(k_0+1)(\rho-n)}}{1 - 2^{\rho-n}}. \end{aligned}$$

В силу утверждения 1 эти соотношения имеют место и при $r = r_0 = 2^{k_0}$

$$\begin{aligned} c_n(r_0, v) &= - \frac{1}{2^{k_0}} \frac{2^{k_0(\rho+n)}}{1 - 2^{-(\rho+n)}} - 2^{k_0} \frac{2^{(k_0+1)(\rho-n)}}{1 - 2^{\rho-n}} = \\ &= - \frac{r_0^\rho}{1 - 2^{-(\rho+n)}} - \frac{2^\rho r_0^\rho}{2^n (1 - 2^{\rho-n})}. \end{aligned}$$

Откуда получаем неравенство

$$|c_n(r_0, v)| \geq r_0^\rho, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Так как число $r_0 = 2^{k_0}$ может быть выбрано как угодно большим, то последнее неравенство показывает невозможность усиления теоремы 4.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом.—М.: Наука,—1986.
2. Гришин А.Ф. Функции первого порядка, субгармонические в полуплоскости, и одна тауберова теорема.// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков,—1990.— Выпуск 53.—С. 87—94.
3. Рашковский А.Ю. Рост и убывание субгармонических функций в конусе.// Деп. в ВИНТИ,—1986.—№ 7977-В.—С. 1—20.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций.—М.: ГИТТЛ,—1956.
5. Ронкин Л.И. Регулярность роста и D' -асимптотика голоморфных функций в S^+ .// Изв. вузов. Математика,—1990.—№ 2.—С. 16—28.
6. Rubel L.A., Taylor W.A. A Fourier series method for meromorphic and entire functions.// Bull. Soc. Math. France,—1968.—No 96.—P. 53—96.
7. Азарин В.С. О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции.// Теория функций, функциональный анализ и их приложения. Харьков,—1977.— Выпуск 27.—С. 9—22.
8. Гришин А.Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций.// Математическая физика, анализ, геометрия,—1994.—1.—№ 2.—С. 193—215.
9. Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций.—М.: Наука,—1970.
10. Малютин К.Г. Ряды Фурье и δ -субгармонические функции.// Труды ИПММ НАН Украины. Донецк,—1988.—3.—С. 146—157.
11. Кондратюк А.А. Ряды Фурье и мероморфные функции.—Львов: Вища школа,—1988.

Рост мероморфных в круге функций бесконечного
порядка

И. И. Марченко, И. Г. Николенко

Харьковский национальный университет, Украина

Для мероморфных в круге функций рассматриваются аналоги величин $b(a, f)$, введенных А. Еременко. Для этих величин, в частности, получены точные оценки, а также соотношение дефектов.

1991 *Mathematics Subject Classification* 30D35.

Мы будем использовать стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений мероморфных функций: $T(r, f)$, $m(r, a, f)$, $N(r, a, f)$, $\Delta(a, f)$ [1], [2]. В 1969 году в работах В.П. Петренко [3] была заложена теория роста мероморфных функций. В теории Петренко в отличие от неванлинновской теории отклонение мероморфной функции рассматривается в равномерной метрике :

$$\mathcal{L}(r, a, f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z) - a|}, \quad \mathcal{L}(r, \infty, f) = \max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|.$$

Величина

$$\beta(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)}$$

называется величиной отклонения мероморфной функции $f(z)$ относительно значения a . Для мероморфных в плоскости функций конечного нижнего порядка $\lambda := \lim_{r \rightarrow \infty} \log T(r, f) / \log r$ В.П. Петренко [3] получил точную оценку для этой величины :

$$\beta(a, f) \leq \begin{cases} \frac{\pi \lambda}{\sin \pi \lambda}, & \text{если } \lambda < \frac{1}{2}, \\ \pi \lambda, & \text{если } \lambda \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

В работе [4] получен аналог соотношения дефектов для величин отклонений :

$$\sum_{(a)} \beta(a, f) \leq \begin{cases} \frac{2\pi \lambda}{\sin \pi \lambda}, & \text{если } \lambda < \frac{1}{2}, \\ 2\pi \lambda, & \text{если } \lambda \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

В случае мероморфных в круге функций конечного нижнего порядка

$$\lambda := \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\log T(r, f)}{\log \frac{1}{1-r}}$$

величина $\beta(a, f)$ может быть равна ∞ . В связи с этим, А.В. Крытов [5] ввел в рассмотрение величину

$$\hat{\beta}(a, f) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{(1-r)\mathcal{L}(r, a, f)}{T(r, f)}$$

и получил некоторую оценку для этой величины через нижний порядок λ и валлироновский дефект :

$$\hat{\beta}(a, f) \leq C(\lambda + 1)\sqrt{\Delta(a, f)}.$$

В работе [4] получена точная оценка для величины $\hat{\beta}(a, f)$ и аналог соотношения дефектов для этих величин :

$$\hat{\beta}(a, f) \leq \pi \lambda \cos^{-1-\lambda} \frac{\pi}{2(\lambda + 1)}.$$

Если $\lim_{r \rightarrow 1} \frac{\ln(1-r)}{T(r, f)} = 0$, то

$$\sum_{(a)} \hat{\beta}(a, f) \leq 2\pi \lambda \cos^{-1-\lambda} \frac{\pi}{2(1 + \lambda)}.$$

Для мероморфных в плоскости функций бесконечного порядка величина отклонения может быть равна ∞ . Поэтому в этом случае интересен результат В. Бергвайлера и Г. Бока [6]:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|}{rT'_-(r, f)} \leq \pi,$$

где $T'_-(r, f)$ — левосторонняя производная неванлинновской характеристики. В 1997 году А. Еременко ввел новую величину

$$b(a, f) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{rT'_-(r, f)}.$$

Из результата В. Бергвайлера и Г. Бока сразу следует, что для мероморфных функций бесконечного порядка

$$b(a, f) \leq \pi.$$

А. Еременко [7] получил соотношение дефектов для величин $b(a, f)$:

$$\sum_{(a)} b(a, f) \leq 2\pi.$$

В работе [8] получены оценки для величин $b(a, f)$, $\sum_{a \neq \infty} b(a, f)$ соответственно через валироновские дефекты $\Delta(a, f)$, $\Delta(0, f')$.

В нашей работе мы рассматриваем аналоги величин $b(a, f)$ для функций, мероморфных в круге. Пусть $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция. Положим :

$$\hat{b}(a, f) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{\mathcal{L}(r, a, f)}{T'_-(r, f)}.$$

Теорема 1. Пусть $f(z)$ — мероморфная в круге функция бесконечного нижнего порядка. Тогда для каждого $a \in \bar{\mathbb{C}}$ имеем

$$\hat{b}(a, f) \leq \pi \sqrt{\Delta(a, f)(2 - \Delta(a, f))}.$$

Следствие 1. Для мероморфной функции $f(z)$ бесконечного нижнего порядка

$$\{a : \hat{b}(a, f) > 0\} \subset E_V(f) = \{a : \Delta(a, f) > 0\}.$$

Следствие 2. Пусть $f(z)$ — мероморфная в круге функция бесконечного нижнего порядка и $a \in \bar{\mathbb{C}}$. Тогда

$$\hat{b}(a, f) \leq \pi.$$

Оценка в следствии 2 является точной. Она достигается на функции $f_0(z) = E_0(\frac{1+z}{1-z})$, где $E_0(z)$ — целая функция из работы [9], с. 126. Легко видеть, что при $r \rightarrow 1$ справедливы соотношения :

$$T(r, f_0) = \frac{1}{2\pi}(1 - r^2)e^{\frac{2}{1-r}}(1 + o(1)), \quad T'(r, f_0) = \frac{1}{\pi}e^{\frac{2}{1-r}}(1 + o(1)),$$

$$\log M(r, f_0) = e^{\frac{2}{1-r}}(1 + o(1)).$$

Таким образом, $\hat{b}(\infty, f_0) = \pi$.

По-видимому и оценка в теореме 1 является точной.

Следующий результат является аналогом соотношения дефектов для величин $\hat{b}(a, f)$.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ — мероморфная в круге функция бесконечного нижнего порядка. Тогда

$$\sum_{a \neq \infty} \hat{b}(a, f) \leq 2\pi \sqrt{\Delta(0, f')(2 - \Delta(0, f'))}.$$

Следствие 3. Для мероморфных в единичном круге функций бесконечного нижнего порядка

$$\sum_{(a)} \hat{b}(a, f) \leq 2\pi.$$

Вспомогательные результаты. В работе [6] были введены последовательности, которые являются обобщениями пиков Полюа для функций бесконечного нижнего порядка. Пусть $T_1(r)$ — непрерывная монотонно возрастающая на $(1, +\infty)$, стремящаяся к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$ функция бесконечного нижнего порядка. Тогда существуют последовательности $\rho_j \rightarrow \infty$, $\mu_j \rightarrow \infty$, $\varepsilon_j \rightarrow 0$ и $M_j \rightarrow \infty$ такие, что для всех r , удовлетворяющих неравенству

$$|\log(r/\rho_j)| \leq M_j/\mu_j$$

выполняется:

$$T_1(r) \leq (1 + \varepsilon_j) \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T_1(\rho_j). \quad (1)$$

Последовательности μ_j , M_j и ρ_j можно выбрать так, чтобы:

$$\mu_j = o(\log^{3/2} T_1(\rho_j)), \quad M_j = O(\log T_1(\rho_j)) \quad (j \rightarrow \infty).$$

В этом случае последовательность ρ_j называется последовательностью обобщенных пиков Полюа.

Положим

$$P_j = \rho_j e^{-\frac{M_j}{\mu_j}}, \quad Q_j = \rho_j e^{\frac{M_j}{\mu_j}}.$$

Тогда неравенство (1) выполняется для всех $r \in [P_j, Q_j]$.

Рассмотрим множества [6]:

$$A_j = \left\{ r \in [\rho_j, Q_j] : T_1(r) \leq \frac{1}{\sqrt{M_j}} \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T_1(\rho_j) \right\},$$

$$B_j = \left\{ r \in [P_j, \rho_j] : T_1(r) \leq \frac{1}{\sqrt{M_j}} \left(\frac{r}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T_1(\rho_j) \right\}.$$

Положим

$$R_j = \begin{cases} \min A_j, & \text{если } A_j \neq \emptyset, \\ Q_j & \text{если } A_j = \emptyset, \end{cases} \quad t_j = \begin{cases} \max B_j, & \text{если } B_j \neq \emptyset, \\ P_j, & \text{если } B_j = \emptyset, \end{cases}$$

$$S_j = e^{-\frac{1}{\mu_j}} R_j, \quad F_j = e^{-\frac{2}{\mu_j}} R_j.$$

Легко видеть, что

$$t_j < \rho_j < F_j < S_j < R_j \quad (j \rightarrow \infty).$$

Действительно, если $A_j \neq \emptyset$, то

$$T_1(R_j) = \frac{1}{\sqrt{M_j}} \left(\frac{R_j}{\rho_j} \right)^{\mu_j} T_1(\rho_j).$$

Так как $R_j > \rho_j$ и $T_1(R_j) \geq T_1(\rho_j)$, то выполняется неравенство :

$$\frac{1}{\sqrt{M_j}} \left(\frac{R_j}{\rho_j} \right)^{\mu_j} \geq 1.$$

Отсюда получаем :

$$R_j \geq \rho_j M_j^{\frac{1}{2\mu_j}} = \rho_j e^{\frac{\log M_j}{2\mu_j}}.$$

Поэтому

$$R_j e^{-\frac{1}{2\mu_j}} \geq \rho_j e^{\frac{\log M_j - 1}{2\mu_j}}.$$

Так как $M_j \rightarrow \infty$, то $M_j > e$ ($j \rightarrow \infty$). Таким образом при $j > j_0$

$$F_j = R_j^{-\frac{1}{2\mu_j}} > \rho_j.$$

Если $A_j = \emptyset$, то это неравенство также выполняется.

В работе [6] доказано, что

$$\frac{T_1(R_j)}{R_j^{\mu_j}} + \frac{T_1(t_j)}{t_j^{\mu_j}} = o \left(\mu_j \int_{t_j}^{F_j} \frac{T_1(r)}{r^{\mu_j+1}} dr \right) \quad (j \rightarrow \infty). \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть $f(z)$ — мероморфная функция бесконечного нижнего порядка и $T(r)$ — ее неванлинновская характеристика. Тогда для каждого фиксированного числа $B > 1$ существуют последовательности $\{V_j\}$ и $\{K_j\}$, зависящие от B , такие, что $\lim_{j \rightarrow \infty} V_j = \lim_{j \rightarrow \infty} K_j = \lim_{j \rightarrow \infty} K_j/V_j = 0$ и выполняется равенство

$$T \left(1 - \frac{V_j}{B} \right) \frac{V_j^{\mu_j}}{\mu_j} + T \left(1 - \frac{K_j}{B} \right) \frac{K_j^{\mu_j}}{\mu_j} = o \left(\int_{K_j}^{V_j} T(1-r)r^{\mu_j-1} dr \right) \quad (j \rightarrow \infty). \quad (3)$$

Доказательство леммы 1. В равенстве (2) положим $T_1(r) = T \left(1 - \frac{1}{B_r} \right)$, а последовательности $\{V_j\}$ и $\{K_j\}$ выберем так, что $V_j = (Bt_j)^{-1}$, $K_j = (BF_j)^{-1}$. Тогда получаем :

$$\begin{aligned} T \left(1 - \frac{V_j}{B} \right) \frac{V_j^{\mu_j}}{\mu_j} + T \left(1 - \frac{K_j}{B} \right) \frac{K_j^{\mu_j}}{\mu_j} &= \frac{T_1(t_j, f)}{B^{\mu_j} \mu_j t_j^{\mu_j}} + \frac{T_1(F_j, f)}{B^{\mu_j} \mu_j F_j^{\mu_j}} \leq \\ \frac{1}{\mu_j B^{\mu_j}} \left[\frac{T_1(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} + \frac{T_1(R_j, f)}{e^{-2} R_j^{\mu_j}} \right] &\leq \frac{e^2}{\mu_j B^{\mu_j}} \left[\frac{T_1(t_j, f)}{t_j^{\mu_j}} + \frac{T_1(R_j, f)}{R_j^{\mu_j}} \right] = \end{aligned}$$

$$\frac{e^2}{\mu_j B^{\mu_j}} o \left(\mu_j \int_{t_j}^{F_j} \frac{T_1(r, f)}{r^{\mu_j+1}} dr \right) = o \left(\frac{1}{B^{\mu_j}} \int_{t_j}^{F_j} T \left(1 - \frac{1}{Br} \right) \left(\frac{1}{r} \right)^{\mu_j+1} dr \right) =$$

$$o \left(\int_{K_j}^{V_j} T(1-t)t^{\mu_j-1} dt \right).$$

Лемма 1 доказана.

Так как функция $f(z)$ — мероморфная в единичном круге, то она представляется в виде отношения двух голоморфных в круге функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Поэтому функция $u(z) = \ln^+ |f(z)| = \max\{\log |f_1(z)|, \log |f_2(z)|\} - \log |f_2(z)|$ является δ -субгармонической в единичном круге. Далее нам понадобится определение T^* -функции Бернштейна [10].

Для произвольных чисел $r \in (0, 1)$, $\theta \in [0, \pi]$ положим :

$$m^*(r, \theta, f) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi,$$

$$T^*(r, \theta, f) = T^*(re^{i\theta}) = m^*(r, \theta, f) + N(r, \infty, f),$$

где супремум берется по всем измеримым подмножествам единичной окружности лебеговой меры 2θ , $N(r, \infty, f)$ — неванлинновская считающая функция полюсов $f(z)$.

Для каждого t , $-\infty \leq t \leq +\infty$, рассмотрим

$$F_t = \{re^{i\varphi} : \log^+ |f(re^{i\varphi})| > t\}, \quad u^*(re^{i\varphi}) = \sup\{t : re^{i\varphi} \in F_t^*\},$$

где $F_t^* = \{re^{i\varphi} : 0 \leq r < 1, |\varphi| \leq \frac{1}{2} \text{mes}\{F_t \cap \{z : |z| = r\}\}\}$ — симметрическая перестройка множества F_t [11].

Отметим основные свойства функций $u^*(z) = u^*(re^{i\varphi})$ и $T^*(z)$, которые нам потребуются в дальнейшем [10], [11] :

1) $u^*(re^{i\varphi})$ — неотрицательная невозрастающая на $[0, \pi]$ четная функция от φ , равноизмерима при каждом фиксированном r , $0 < r < 1$, с $\log^+ |f(re^{i\varphi})|$, и выполнены следующие соотношения:

$$u^*(r, 0) = \max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|, \quad m^*(r, \theta, f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\theta u^*(r, \varphi) d\varphi;$$

2) $T^*(re^{i\varphi})$ — субгармоническая функция в $K^+(0, 1) = \{re^{i\varphi} : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\}$, непрерывная в $K^+(0, 1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1)$, логарифмически выпуклая по r при каждом фиксированном $\varphi \in [0, \pi]$, вогнутая функция по φ при каждом r , $0 < r < 1$, и, кроме того,

$$T^*(r, 0) = N(r, \infty, f), \quad T(r, f) = T^*(r, \pi) = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} T^*(re^{i\theta}),$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} T^*(r, \theta) = \frac{u^*(r, \theta)}{\pi} \quad (0 < \theta < \pi), \quad (4)$$

где $T(r, f)$ — неванлинновская характеристика функции $f(z)$.

Обозначим

$$\tilde{T}(R, \varphi) = T^*(1 - Re^{-i\varphi}) = T^*(r, \theta),$$

где $z = re^{i\theta} = 1 - \bar{w} = 1 - Re^{-i\varphi}$. Так как $z = 1 - \bar{w}$ ($w = Re^{i\varphi}$) — антиголоморфная функция в \mathbb{C} , то в силу субгармоничности функции $T^*(z)$ следует субгармоничность функции $\tilde{T}(w) = \tilde{T}(R, \varphi)$ в полукруге $\{w : |w - 1| < 1, \text{Im} w > 0\}$.

Рассмотрим, следуя [12], [13], функцию

$$\sigma_j(R) = \int_0^\alpha \tilde{T}(R, \varphi) \cos \mu_j(\varphi + \psi) d\varphi.$$

Будем считать, что величины α, ψ и R удовлетворяют соотношениям : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2\mu_j}$, $-\frac{\pi}{2\mu_j} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2\mu_j} - \alpha$, $R \in [K_j, V_j]$, где последовательности K_j, V_j определены в лемме 1.

Лемма 2. Для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ при $j > j_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство:

$$V_j^{\mu_j+1} |\sigma'_j(V_j)| + K_j^{\mu_j+1} |\sigma'_j(K_j)| + \mu_j V_j^{\mu_j} \sigma_j(V_j) + \mu_j K_j^{\mu_j} \sigma_j(K_j) \leq \varepsilon \mu_j \int_{K_j}^{V_j} T(1 - R, f) R^{\mu_j-1} dR.$$

Лемма 3. Для каждого $\varepsilon > 0$ при $j > j_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\int_{K_j}^{V_j} T(|1 - Re^{-i\alpha}|, f) R^{\mu_j-1} dR \leq \frac{1 + \varepsilon}{\cos^{\mu_j} \alpha} \int_{K_j}^{V_j} T(1 - R, f) R^{\mu_j-1} dR.$$

Леммы 2, 3 доказываются точно так же как леммы 4, 5 из работы [4], с использованием вышедоказанной леммы 1.

Доказательство теоремы 1. Теорему 1 докажем для $a = \infty$. Если $a \neq \infty$, необходимо рассмотреть функцию $\mathcal{F}(z) = \frac{1}{f(z)-a}$. Проведем доказательство теоремы 1 при дополнительном предположении, что $\tilde{T}(R, \varphi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. В [4] рассматривался случай конечного нижнего порядка. Там приведены рассуждения, позволяющие переходить от гладкого случая к общему. В нашем случае эти рассуждения можно повторить.

Применим дифференциальный оператор $L = R \frac{d}{dR} R \frac{d}{dR}$ к функции $\sigma_j(R)$ и используем субгармоничность функции $\tilde{T}(R, \varphi)$ (т.е. $L\tilde{T}(R, \varphi) + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{T}(R, \varphi) \geq 0$), а также формулу интегрирования по частям :

$$\begin{aligned} R \frac{d}{dR} (R \sigma_j'(R)) &= \int_0^\alpha L\tilde{T}(R, \varphi) \cos \mu_j(\varphi + \psi) d\varphi \geq \\ &= \int_0^\alpha \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tilde{T}(R, \varphi) \cos \mu_j(\varphi + \psi) d\varphi = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, \varphi) \cos \mu_j(\varphi + \psi) \Big|_0^\alpha - \mu_j \int_0^\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, \varphi) \sin \mu_j(\varphi + \psi) d\varphi = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, \varphi) \cos \mu_j(\varphi + \psi) \Big|_0^\alpha - \mu_j \tilde{T}(R, \varphi) \sin \mu_j(\varphi + \psi) \Big|_0^\alpha + \mu_j^2 \sigma_j(R) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, \alpha) \cos \mu_j(\alpha + \psi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, 0) \cos \mu_j \psi - \\ &= \mu_j \tilde{T}(R, \alpha) \sin \mu_j(\alpha + \psi) + \mu_j \tilde{T}(R, 0) \sin \mu_j \psi + \mu_j^2 \sigma_j(R) \equiv \\ &= h(R) + \mu_j^2 \sigma_j(R). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R \frac{d}{dR} (R \sigma_j'(R)) \geq h(R) + \mu_j^2 \sigma_j(R). \quad (5)$$

Умножим неравенство (5) на R^{μ_j-1} и проинтегрируем его по R от K_j до V_j :

$$\begin{aligned} \int_{K_j}^{V_j} h(R) R^{\mu_j-1} dR + \mu_j^2 \int_{K_j}^{V_j} \sigma_j(R) R^{\mu_j-1} dR &\leq \int_{K_j}^{V_j} R^{\mu_j+1} \frac{d}{dR} R \sigma_j'(R) dR = \\ &= R^{\mu_j+1} \sigma_j'(R) \Big|_{K_j}^{V_j} - (\mu_j + 1) \int_{K_j}^{V_j} \sigma_j'(R) R^{\mu_j} dR \leq R^{\mu_j+1} \sigma_j'(R) \Big|_{K_j}^{V_j} - \\ &= \mu_j \int_{K_j}^{V_j} \sigma_j'(R) R^{\mu_j} dR = R^{\mu_j+1} \sigma_j'(R) \Big|_{K_j}^{V_j} - \mu_j \sigma_j(R) \Big|_{K_j}^{V_j} + \mu_j^2 \int_{K_j}^{V_j} \sigma_j(R) R^{\mu_j-1} dR. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{K_j}^{V_j} h(R) R^{\mu_j-1} dR = \int_{K_j}^{V_j} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, \alpha) \cos \mu_j(\alpha + \psi) + \right. \\ \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, 0) \cos \mu_j \psi - \mu_j \tilde{T}(R, \alpha) \sin \mu_j(\alpha + \psi) + \right.$$

$$\mu_j \tilde{T}(R, 0) \sin \mu_j \psi \} R^{\mu_j - 1} dR \leq R^{\mu_j + 1} \sigma'_j(R) \Big|_{K_j}^{V_j} - \mu_j \sigma_j(R) \Big|_{K_j}^{V_j}.$$

Выберем $\psi = \frac{\pi}{2\mu_j} - \alpha$ и воспользуемся леммой 2 :

$$\int_{K_j}^{V_j} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, 0) \sin \mu_j \alpha - \mu_j \tilde{T}(R, \alpha) + \mu_j \tilde{T}(R, 0) \cos \mu_j \alpha \right\} R^{\mu_j - 1} dR \leq \varepsilon \mu_j \int_{K_j}^{V_j} T(1 - R, f) R^{\mu_j - 1} dR \quad (j \rightarrow \infty). \quad (6)$$

Так как $re^{i\theta} = 1 - Re^{-i\varphi}$, то

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, \varphi) = \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} T^*(r, \theta) \cos(\theta + \varphi) + r \frac{\partial}{\partial r} T^*(R, \theta) \sin(\theta + \varphi).$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \tilde{T}(R, 0) = \frac{R}{1 - R} \frac{\partial}{\partial \theta} T^*(r, 0).$$

Отсюда и (6) следует, что

$$\int_{K_j}^{V_j} \left\{ \frac{R}{1 - R} \frac{\partial}{\partial \theta} T^*(r, 0) \sin \mu_j \alpha - \mu_j T^*(1 - Re^{-i\alpha}, f) + \mu_j T^*(1 - R, f) \cos \mu_j \alpha \right\} R^{\mu_j - 1} dR \leq \varepsilon \mu_j \int_{K_j}^{V_j} T(1 - R, f) R^{\mu_j - 1} dR \quad (j \rightarrow \infty).$$

Используя (4) и лемму 3, получаем:

$$\int_{K_j}^{V_j} \left\{ \frac{R}{1 - R} \frac{u^*(1 - R, 0)}{\pi} \sin \mu_j \alpha + \mu_j N(r, \infty, f) \cos \mu_j \alpha \right\} R^{\mu_j - 1} dR \leq \mu_j \frac{1 + \varepsilon}{\cos \mu_j \alpha} \int_{K_j}^{V_j} T(1 - R, f) R^{\mu_j - 1} dR \quad (j \rightarrow \infty). \quad (7)$$

Напомним определение валироновского дефекта:

$$\Delta(\infty, f) = \lim_{r \rightarrow 1} \frac{m(r, \infty, f)}{T(r, f)} = 1 - \lim_{r \rightarrow 1} \frac{N(r, \infty, f)}{T(r, f)}.$$

Отсюда при $r > r_0(\varepsilon)$ получаем

$$N(r, \infty, f) > (1 - \Delta(\infty, f) - \varepsilon)T(r, f).$$

Подставим это неравенство в соотношение (7) :

$$\int_{K_j}^{V_j} \left\{ \frac{R}{1-R} \frac{u^*(1-R, 0)}{\pi} \sin \mu_j \alpha \right\} R^{\mu_j-1} dR < \\ \mu_j \left(\frac{1+\varepsilon}{\cos^{\mu_j} \alpha} - (1-\Delta-\varepsilon) \cos \mu_j \alpha \right) \int_{K_j}^{V_j} T(1-R, f) R^{\mu_j-1} dR, \quad (8)$$

где $\Delta = \Delta(\infty, f)$.

Используя формулу интегрирования по частям и лемму 1, имеем

$$\mu_j \int_{K_j}^{V_j} T(1-R, f) R^{\mu_j-1} dR = T(1-R, f) R^{\mu_j} \Big|_{K_j}^{V_j} + \int_{K_j}^{V_j} T'_-(1-R, f) R^{\mu_j} dR = \\ = o \left(\mu_j \int_{K_j}^{V_j} T(1-R, f) R^{\mu_j-1} dR \right) + \int_{K_j}^{V_j} T'_-(1-R, f) R^{\mu_j} dR.$$

Отсюда

$$\mu_j \int_{K_j}^{V_j} T(1-R, f) R^{\mu_j-1} dR = (1+o(1)) \int_{K_j}^{V_j} T'_-(1-R, f) R^{\mu_j} dR. \quad (9)$$

В силу (8), (9) существует $\tilde{R}_j \in [K_j, V_j]$ такое, что при $j > j_0(\varepsilon)$

$$\frac{\tilde{R}_j}{1-\tilde{R}_j} \frac{u^*(1-\tilde{R}_j, 0)}{\pi} \sin \mu_j \alpha < \\ \left(\frac{1+\varepsilon}{\cos^{\mu_j} \alpha} - (1-\Delta-\varepsilon) \cos \mu_j \alpha \right) T'_-(1-\tilde{R}_j, f) \tilde{R}_j.$$

Следовательно, при $j > j_0(\varepsilon)$

$$\frac{u^*(1-\tilde{R}_j, 0)}{1-\tilde{R}_j} < \frac{\pi(1+\varepsilon)}{\sin \mu_j \alpha} \left(\frac{1}{\cos^{\mu_j} \alpha} - (1-\Delta_1) \cos \mu_j \alpha \right) T'_-(1-\tilde{R}_j, f), \quad (10)$$

где $\Delta_1 = \frac{\Delta(\infty, f) + 2\varepsilon}{1+\varepsilon}$. Легко видеть, что минимум правой части достигается в точке α_0 , где α_0 — наименьший положительный корень уравнения

$$\cos(\mu_j + 1)\alpha_0 = (1-\Delta_1) \cos^{\mu_j+1} \alpha_0.$$

Так как $\mu_j \rightarrow \infty$ и $\alpha < \frac{\pi}{2\mu_j}$, то $\alpha_0 \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\cos \mu_j \alpha_0 = (1-\Delta_1) \cos^{\mu_j} \alpha_0 + o(1) \quad (j \rightarrow \infty).$$

Кроме того,

$$\cos^{\mu_j} \alpha_0 = e^{\mu_j(\cos \alpha_0 - 1)}(1 + o(1)) = e^{\frac{\mu_j \alpha_0^2}{2}}(1 + o(1)) \quad (j \rightarrow \infty).$$

Но α_0 удовлетворяет неравенству $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2\mu_j}$, поэтому $\mu_j \alpha_0^2 \rightarrow 0$ ($j \rightarrow \infty$). Тогда

$$\cos^{\mu_j} \alpha_0 = 1 + o(1) \quad (j \rightarrow \infty).$$

Из полученных асимптотических формул следует, что

$$\cos \mu_j \alpha_0 = 1 - \Delta_1 + o(1) \quad (j \rightarrow \infty).$$

Таким образом, соотношение (10) дает

$$\frac{u^*(1 - \tilde{R}_j, 0)}{1 - \tilde{R}_j} < \frac{\pi(1 + \varepsilon)}{\sqrt{1 - (1 - \Delta_1 + o(1))^2}}(1 - (1 - \Delta_1)^2)T'_-(1 - \tilde{R}_j, f).$$

Отсюда

$$\hat{b}(\infty, f) \leq \pi(1 + \varepsilon)\sqrt{\Delta_1(2 - \Delta_1)}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем

$$\hat{b}(\infty, f) \leq \pi\sqrt{\Delta(\infty, f)(2 - \Delta(\infty, f))}.$$

Теорема 1 доказана.

Наметим ход доказательства теоремы 2. Пусть $\{a_k\}_{k=1}^q$ — набор различных комплексных чисел такой, что

$$\hat{b}(a_k, f) > 0, \quad c = \min\{|a_i - a_j| : i \neq j\} \quad (q \geq 2).$$

Для каждого фиксированного ε , $0 < \varepsilon < 1$, положим, следуя [4],

$$G_j = \left\{ z \in K \left(1 - 2V_j, 1 - \frac{2K_j}{B} \right) : \ln |f'(z)| < -2\varepsilon T \left(1 - \frac{1 - |z|}{8}, f \right) \right\},$$

где K_j, V_j — последовательности, определенные в лемме 1, G_{jk} — множества, образованные теми связными компонентами множества G_j , в каждой из которых найдется точка z_1 такая, что $|f(z_1) - a_k| < c/4$. Множества G_{jk} попарно не пересекаются при разных k (см. [4], с.23).

Рассмотрим [4]

$$u_{jk}(z) = \begin{cases} \max \left\{ \ln \frac{1}{|f'(z)|}, 4\varepsilon T \left(1 - \frac{1 - |z|}{8}, f \right) \right\}, & \text{если } z \in G_{jk}, \\ 4\varepsilon T \left(1 - \frac{1 - |z|}{8}, f \right), & \text{если } z \notin G_{jk}. \end{cases}$$

Применяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3 из [4], и лемму 3, получаем следующее неравенство :

$$\int_{K_j}^{V_j} \left\{ \frac{R}{1 - R} \frac{\sin \mu_j \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^q u_{jk}^*(1 - R, 0) - \frac{\mu_j}{\cos^{\mu_j} \alpha} T \left(1 - R, \frac{1}{f'} \right) + \right.$$

$$\mu_j N \left(r, \infty, \frac{1}{f'} \right) \cos \mu_j \alpha \left\} R^{\mu_j - 1} dR < \mu_j \varepsilon \int_{K_j}^{V_j} T(1 - R, f) R^{\mu_j - 1} dR. \quad (11)$$

Используя доказательство леммы 9 из [4] ($\lambda = \mu_j$) и лемму 1, приходим к следующему варианту леммы о логарифмической производной для мероморфной в единичном круге функции бесконечного нижнего порядка.

Лемма 4. Пусть $f(z)$ — мероморфная в единичном круге функция бесконечного нижнего порядка. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ при $j > j_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство :

$$\int_{K_j}^{V_j} \max_{|z|=1-R} \log^+ \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| R^{\mu_j} dR < \varepsilon \mu_j \int_{K_j}^{V_j} T(1 - R, f) R^{\mu_j - 1} dR, \quad (12)$$

где K_j, V_j, μ_j определены в лемме 1.

Если воспользоваться соотношениями (9), (11), (12), определением валироновского дефекта $\Delta(0, f')$, а также рассуждениями из [4], то получим

$$\int_{K_j}^{V_j} \left\{ \frac{R}{1-R} \frac{\sin \mu_j \alpha}{\pi} \sum_{k=1}^q u_{jk}^*(1-R, 0) \right\} R^{\mu_j - 1} dR < \left(\frac{2 + \varepsilon}{\cos^{\mu_j} \alpha} - (1 - \Delta(0, f') - \varepsilon) \cos \mu_j \alpha \right) \int_{K_j}^{V_j} T'_-(1 - R, f) R^{\mu_j} dR.$$

Далее, рассуждая аналогично как при доказательстве теоремы 3 из [4] и теоремы 1, приходим к утверждению теоремы 2.

Это исследование частично поддерживается грантом INTAS-99-00089.

REFERENCES

1. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. — М.: ГИТЛ, — 1941. — 388 с.
2. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, — 1970. — 591 с.
3. Петренко В.П. Рост мероморфных функций. — Харьков: Вища школа, — 1978. — 136 с.
4. Марченко И.И., Щерба А.И. О величинах отклонений мероморфных функций // Матем. сб. — 1990. — Т. 181, 1. — С. 3-24.

5. Крытов А.В. О росте мероморфных функций и аналитических кривых в единичном круге // Рукопись деп. в ВИНТИ 1657 – 81. Деп.
6. Bergweiler W., Bock H. On the growth of meromorphic functions of infinite order // J. Analyse Math. – 1994. – **64**. – P. 327–336.
7. Eremenko A. An analogue of the defect relation for the uniform metric // Complex Variables Theory Appl. – 1997. – **34**. – P. 83–97.
8. Марченко И.И. О росте целых и мероморфных функций // Мат. сб. – 1998. – Т. 189, **6**. – С. 59–84.
9. Хейман У.К. Мероморфные функции. – М.: Мир, – 1966. – 287 с.
10. Baernstein A. Integral means, univalent functions and circular symmetrization // Acta. Math. – 1974. – **133**. – P. 139–169.
11. Хейман У.К. Многолистные функции. – М.: ИЛ, – 1960. – 179 с.
12. Essen M., Shea D.F. Applications of Denjoy integral inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions, research announcement // Lond. Math. Soc. Lect. Notes. – 1974. – **12**. – P. 59–68.
13. Gariepy R., Lewis I.L. Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions // Arkiv Math. – 1975. – Т. 13, **1**. – P. 91–105.

Новая теорема типа Мореры в единичном круге

П. А. Машаров

Донецкий государственный университет, Украина

Получено новое уточнение классической теоремы Мореры в единичном круге. Интегралы рассматриваются по границам секторов, конгруэнтных данному.

1991 Mathematics Subject Classification 53C65.

1. Введение

Различные уточнения классической теоремы Мореры исследовались во многих работах (см. [1]–[3]). Большой интерес представляет случай, когда в качестве контуров γ , по которым ведется интегрирование, рассматриваются кривые, конгруэнтные данной (см. [4]–[8]).

В настоящей статье изучается вопрос о голоморфности непрерывной в $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функции f с равными нулю интегралами по границам конгруэнтных секторов.

Пусть $ISO(2)$ — группа евклидовых движений плоскости \mathbb{C} , $S(r, \alpha) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r, |\arg z| \leq \alpha/2\}$ — сектор радиуса r и угловой меры α ($r > 0$, $0 < \alpha < 2\pi$). Всюду в дальнейшем предполагается, что множество $\Lambda(r, \alpha) = \{\sigma \in ISO(2) : \sigma S(r, \alpha) \subset D\}$ не пусто. Основным результатом работы является

Теорема 1.1. Пусть $f \in C(D)$ и

$$\int_{\partial(\sigma S(r, \alpha))} f(z) dz = 0 \quad \forall \sigma \in \Lambda(r, \alpha). \quad (1.1)$$

Тогда если выполнено одно из условий

- 1) $0 < \alpha < \arccos \frac{4}{5}$, $r < \frac{8}{5}$;
- 2) $\arccos \frac{4}{5} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, $r < 2\cos \alpha$;
- 3) $\frac{\pi}{3} < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \pi$, $r < 1$;
- 4) $\alpha = \pi$, $r < \frac{2}{\sqrt{5}}$,

то f голоморфна в D .

В каждом из следующих случаев

- 5) $0 < \alpha < \arccos \frac{4}{5}$, $r > \frac{8}{5}$;
 6) $\arccos \frac{4}{5} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, $r > 2 \cos \alpha$;
 7) $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$, $r > 1$;
 8) $\alpha = \pi$, $r > \frac{2}{\sqrt{5}}$.

существует неголоморфная $f \in C^\infty(\mathbf{D})$, удовлетворяющая (1.1).

Отметим, что в случае $\alpha = \pi$ утверждение теоремы 1.1 было известно ранее (см. [9]).

2. Вспомогательные утверждения

Всюду в дальнейшем точка $(x, y) \in R^2$ отождествляется с комплексным числом $z = x + iy = \rho e^{i\varphi}$ ($\rho = |z|$, $-\pi < \varphi \leq \pi$). Обозначим $M_{r,\alpha}$ — множество комплекснозначных функций $f \in C^\infty(\mathbf{D})$, для которых

$$\int_{\sigma S(r,\alpha)} f(x,y) dx dy = 0 \quad \forall \sigma \in \Lambda(r,\alpha). \quad (2.1)$$

Пусть $K_{\lambda,\mu} = \{z \in \mathbb{C} : \lambda < |z| < \mu\}$. Рассмотрим дифференциальные операторы:

$$D_1 = \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \sin \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$D_3 = (x - \xi) \frac{\partial}{\partial y} - (y - \eta) \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_4 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.9)$$

Для любого числа $w \in \mathbb{C}$ и множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ положим $\Omega + w = \{z \in \mathbb{C} : z - w \in \Omega\}$. Символами C, c_1, c_2, \dots будем обозначать постоянные, в разных случаях, вообще говоря, разные.

Лемма 2.1. Пусть $f \in M_{r,\alpha}$. Тогда

1) все частные производные от f принадлежат $M_{r,\alpha}$; $\bar{f} \in M_{r,\alpha}$ (черта означает комплексное сопряжение);

2) $D_4 f \in M_{r,\alpha}$;

3) каждое слагаемое ряда Фурье $f(\rho e^{i\varphi}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n(\rho) e^{in\varphi}$ $0 < \rho < 1$, доопределенное в точке $z = 0$ по непрерывности, принадлежит $M_{r,\alpha}$;

4) для любого $n \in \mathbb{Z}$ функции $(f'_n(\rho) \pm \frac{n}{\rho} f_n(\rho)) e^{i(n \mp 1)\varphi}$, доопределенные в точке $z = 0$ по непрерывности, принадлежат $M_{r,\alpha}$;

5) $\int_{\partial(\sigma S(r,\alpha))} f(z) dz = 0 \quad \forall \sigma \in \Lambda(r,\alpha)$.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Lambda(r,\alpha)$. Тогда для достаточно малого $\varphi \geq 0$ $\int_{\sigma S(r,\alpha)} f(x \cos \varphi - y \sin \varphi; x \sin \varphi + y \cos \varphi) dx dy = 0$. Дифференцируя полученное

равенство по φ и полагая $\varphi = 0$, получим утверждение 2). Доказательство остальных утверждений подобны аналогичным в [6].

Лемма 2.2. Пусть $z_1 = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$, $z_2 = z_1 + re^{-i\alpha/2}$, $z_3 = z_1 + re^{i\alpha/2}$, $S = S(r, \alpha) + z_1$ и $f \in C^5(S)$. Тогда

$$\int_S D_3 D_1^2 D_2^2 f(x, y) dx dy =$$

$$[D_2^2 - D_1^2]f(z_1) + [D_1^2 - rD_1^2 D_2]f(z_2) + [rD_1 D_2^2 - D_2^2]f(z_3). \quad (2.2)$$

Доказательство. В интеграле, стоящем слева в (2.2), переходим к повторному интегралу (здесь необходимо учесть, что случаи $0 < \alpha < \pi$ и $\pi < \alpha < 2\pi$ рассматриваются отдельно). Далее используя формулу Ньютона-Лейбница, после стандартных замен и приведения подобных получаем интегралы по радиусам сектора. После их интегрирования с учетом определения D_1 и D_2 , находим (2.2).

Следствие. Пусть $f \in M_{r, \alpha}$ и $S(r, \alpha) + z_1 \subset D$. Тогда

$$[D_2^2 - D_1^2]f(z_1) + [D_1^2 - rD_1^2 D_2]f(z_2) + [rD_1 D_2^2 - D_2^2]f(z_3) = 0. \quad (2.3)$$

Доказательство следует из (2.2) и утверждений 1), 2) леммы 2.1.

Для доказательства следующих лемм введем некоторые обозначения. Положим

$$\Omega_1(r, \alpha) = \{z \in \mathbb{C} : S(r, \alpha) - |z| \subset D\},$$

$$\Omega_2(r, \alpha) = \{z = (t + re^{i\alpha/2})e^{i\varphi} : t \in \mathbb{R}, S(r, \alpha) + t \subset D\},$$

$$\Omega_3(r, \alpha) = \{z = (z_1 + re^{-i\alpha/2})e^{i\varphi} : z_1 \in \mathbb{C}, z_1 + S(r, \alpha) \subset D\},$$

$$\Omega(r, \alpha) = \Omega_1(r, \alpha) \cup \Omega_2(r, \alpha).$$

Лемма 2.3. Пусть $f(z) = f_0(|z|) \in M_{r, \alpha}$. Тогда $\exists n \in \mathbb{N}$ такое, что функции $f, \Delta f, \dots, \Delta^n f$ — линейно зависимы в $\Omega(r, \alpha)$.

Доказательство. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a_k \in \mathbb{C}, k = 0, \dots, n$ функция

$$F(z) = F_0(|z|) = \sum_{k=0}^n a_k \Delta^k f_0(|z|) \in M_{r, \alpha}.$$

Рассмотрим

$$g(|z|^2) = F_0(|z|); \quad u(z) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = xyh(|z|^2),$$

где $h(|z|^2) = 4g''(|z|^2)$, $v(z) = \Delta u(z) = xy[12h'(|z|^2) + 4|z|^2 h''(|z|^2)]$. Подставляя поочередно в (2.3) вместо $f(z)$ функции $u(z)$ и $v(z)$, при $z_1 = x_1 \in \mathbb{R}$ получим выражения вида

$$h(x_1^2) + 2x_1^2 h'(x_1^2) =$$

$$h(|z_2|^2) + h'(|z_2|^2)P_2(x_2) + h''(|z_2|^2)P_3(x_2) + h'''(|z_2|^2)P_4(x_2), \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
 & 12h'(x_1^2) + 36x_1^2h''(x_1^2) + 8x_1^4h'''(x_1^2) = 12h'(|z_2|^2) + \\
 & h''(|z_2|^2)[4|z_2|^2 + P_2(x_2)] + h'''(|z_2|^2)[4|z_2|^2P_2(x_2) + 20P_3(x_2)] + \\
 & h^{IV}(|z_2|^2)[4|z_2|^2P_3(x_2) + 24P_4(x_2)] + 4|z_2|^2P_4(x_2)h^V(|z_2|^2), \quad (2.5)
 \end{aligned}$$

где $P_j(x)$ — многочлены степени не выше j .

Учитывая, что $x_1 = x_2 + r \cos \frac{\alpha}{2}$, из (2.4) и (2.5) получаем выражение вида

$$\begin{aligned}
 0 = & 24(2 \sin \alpha - 1)h'(|z_2|^2) + [(352 \sin \alpha + 24)x_2^2 + Q_1(x_2)]h''(|z_2|^2) + \\
 & Q_4(x_2)h'''(|z_2|^2) + Q_6(x_2)h^{IV}(|z_2|^2) + Q_7(x_2)h^V(|z_2|^2) + \\
 & 8(x_2 - r \cos \frac{\alpha}{2})x_2(x_2 - |z_2|^2)P_4(x_2)h^{VI}(|z_2|^2), \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

где $Q_j(x)$ — многочлены степени не выше j .

Предположим теперь, что $\forall n \in \mathbb{N}$ функции $f, \Delta f, \dots, \Delta^n f$ — линейно независимы в $\Omega(r, \alpha)$. Пусть $x_1^* > 0$ такое, что $-x_1^* + S(r, \alpha) \subset \mathbb{D}$ и $(x_2^* - r \cos \frac{\alpha}{2})x_2^*P_4(x_2^*) \neq 0$, где $x_2^* = \operatorname{Re} z_2^*$, а $z_2^* = -x_1^* + \rho e^{-i\alpha/2}$. Тогда существуют $n \in \mathbb{N}$ и $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{0, n}$, не все равные нулю, такие, что верны равенства

$$g(x_1^{*2}) = g'(x_1^{*2}) = 0; \quad (2.7)$$

$$g(|z_2^{*2}|) = g'(|z_2^{*2}|) = 0, \quad (2.8)$$

$$h(x_1^{*2}) = 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
 h(|z_2^{*2}|) = h'(|z_2^{*2}|) = h''(|z_2^{*2}|) = h'''(|z_2^{*2}|) = \\
 h^{IV}(|z_2^{*2}|) = h^V(|z_2^{*2}|) = 0. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

По теореме единственности для решения задачи Коши, из (2.6), (2.10) следует, что $h(|z|^2) = 0$ в $\Omega_2(r, \alpha)$. Подставляя в (2.4), учитывая (2.9), получаем $h(|z|^2) = 0$ в $\Omega_1(r, \alpha)$, откуда, учитывая (2.7) и (2.8), получаем $F = 0$ в $\Omega(r, \alpha)$, что противоречит линейной независимости $f, \Delta f, \dots, \Delta^n f$ в $\Omega(r, \alpha)$.

Следствие. Пусть $0 < \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$, $f(z) = f_0(|z|) \in M_{r, \alpha}$. Тогда функции $f, \Delta f, \dots, \Delta^n f$ — линейно зависимы в $\Omega_3(r, \alpha)$.

Доказательство. Рассмотрим построенную в лемме 2.3 функцию $F(z) = 0$ в $\Omega(r, \alpha)$. Так как $F(z) \in M_{r, \alpha}$, то для нее верно (2.3). Выберем z_1 таким образом, чтобы $F(z_1) = F(z_3) = 0$. Поскольку $F = 0$ в $\Omega(r, \alpha)$, из полученного дифференциального уравнения, имеем $F' = 0$ в $\Omega_3(r, \alpha)$.

Лемма 2.4. Пусть $F(z) = F_0(|z|) \in M_{r, \alpha}$, и выполнено одно из условий:

$$1) \quad 0 < \alpha < \arccos \frac{4}{5}, \quad r < \frac{8}{5}, \quad F = 0 \text{ в } \Omega_3(r, \alpha);$$

$$2) \quad \arccos \frac{4}{5} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, \quad r < 2 \cos \alpha, \quad F = 0 \text{ в } \Omega_3(r, \alpha);$$

$$3) \quad \frac{\pi}{3} < \alpha < 2\pi, \quad \alpha \neq \pi, \quad r < 1, \quad F = 0 \text{ в } \Omega(r, \alpha);$$

тогда $F = 0$ в \mathbb{D} .

Доказательство. Случай $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$, $r < 1$ рассматривать не нужно, так как здесь $\Omega_3(r, \alpha) = \mathbf{D}$.

Пусть $z_1 \in \mathbb{C}$ и $S(z_1) = z_1 + S(r, \alpha)e^{i\alpha/2} \subset \mathbf{D}$. Поскольку $F(z)$ и $\frac{\partial F}{\partial x} \in M_{r, \alpha}$, имеем

$$0 = \int_{S(z_1)} \frac{\partial F}{\partial x} dx dy = \int_0^{r \sin \alpha} dy \int_{z_1 + yctg \alpha}^{z_1 + \sqrt{r^2 - y^2}} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx = \\ \int_0^{r \sin \alpha} [F(z_1 + \sqrt{r^2 - y^2}) - F(z_1 + yctg \alpha)] dy.$$

Учитывая, что дуга сектора $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_1| = r, 0 \leq (z - z_1) \leq \alpha\}$ лежит в области нулей F , получаем

$$\int_{L(z_1)} F(z) |dz| = \frac{1}{\sin \alpha} \int_0^{r \sin \alpha} F(z_1 + yctg \alpha, y) dy = 0, \quad (2.11)$$

где $L(z_1)$ — отрезок, соединяющий z_1 и $z_1 + re^{i\alpha}$.

Далее рассмотрим отдельно случаи $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3} < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \pi$.

При $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ из (2.11), полагая $F(z) = 0$ при $|z| \geq 1$, получаем, что преобразование Радона функции F (см., например, [10]) равно нулю на всех прямых. Отсюда $F = 0$ в \mathbf{D} (см. [10]).

Пусть $\frac{2\pi}{3} < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \pi$. Учитывая, что $F = 0$ в $\Omega(r, \alpha)$, из (2.11), получаем, что $\exists \varepsilon > 0 : F(x) = 0$;

$$\int_0^{\sqrt{1-x^2}} F(\sqrt{x^2 + y^2}) dy = 0 \quad \forall x \in (0, \varepsilon).$$

Из последнего равенства при $x \in (0, \frac{\varepsilon}{2})$, имеем

$$\int_{\sqrt{x^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}}}^1 F(t) \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(2k-1)!!}{k!2^k} \int_{\sqrt{x^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}}}^1 \frac{F(t)}{t^{2k}} dt \right] x^{2k} = 0.$$

Отсюда $\int_{\sqrt{x^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}}}^1 \frac{F(t)}{t^{2k}} dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+$, следовательно, $F = 0$ в \mathbf{D} .

Лемма 2.5. Пусть $f(z) \in C(\mathbf{D})$ удовлетворяет (2.1) и выполнено одно из условий:

- 1) $0 < \alpha < \arccos \frac{4}{5}$, $r < \frac{8}{5}$;
- 2) $\arccos \frac{4}{5} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, $r < 2 \cos \alpha$;
- 3) $\frac{\pi}{3} < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \pi, r < 1$.

Тогда $f = 0$ в \mathbf{D} .

Доказательство. Применяя стандартный процесс сглаживания (см. [10]), видим, что лемму 2.5 достаточно доказать для $f \in M_{r,\alpha}$. По лемме 2.1, $f_n(\rho)e^{in\varphi} \in M_{r,\alpha} \forall n \in \mathbb{Z}$. Пусть $n = 0$. Из лемм 2.3, 2.4 следует, что $\exists m \in \mathbb{N}$ и ненулевой набор $a_k \in \mathbb{C}, k = \overline{0, m}$ такой, что $\sum_{k=0}^m a_k \Delta^k f_0(|z|) = 0$ в \mathbf{D} . Пусть b_1, \dots, b_m — корни многочлена $p(z) = \sum_{k=0}^m a_k z^k$. Обозначим

$$g_j(z) = g_j(|z|) = \left[\prod_{k=j}^m (\Delta - b_k) \right] f_0(|z|), \quad j = \overline{2, m}.$$

Функция $g_2(z) \in M_{r,\alpha}$ и удовлетворяет в \mathbf{D} дифференциальному уравнению $\Delta g_2 - b_1 g_2 = 0$. Его общее решение имеет вид

$$g_2(|z|) = C_1 J_0(\sqrt{-b_1}|z|) + C_2 N_0(\sqrt{-b_1}|z|), \quad \text{при } b_1 \neq 0$$

$$g_2(|z|) = C_3 + C_4 \ln|z|, \quad \text{при } b_1 = 0.$$

Поскольку g_2 непрерывна в $z = 0$, имеем $C_2 = C_4 = 0$. $\Phi = J_0(\sqrt{-b_1}|z|)$ — вещественно-аналитическая, поэтому для нее из (2.1) следует

$$\int_{\sigma S(r,\alpha)} C_1 \Phi(x, y) dx dy = 0 \quad \forall \sigma \in ISO(2).$$

Так как сектор является множеством Помпейю в R^2 (см. [11]), имеем $C_1 = 0$. Из (2.1) также следует $C_3 = 0$, откуда $g_2 = 0$ в \mathbf{D} .

Рассуждая последовательно таким же самым образом для $g_3(|z|), \dots, g_m(|z|), f_0(|z|)$, получаем f_0 в \mathbf{D} .

Докажем теперь индукцией по $n = 1, 2, \dots$, что $f_{-n}(\rho) = 0$ в \mathbf{D} . Пусть $n = 1$. Из утверждения 4) леммы 2.1 следует, что $(f'_{-1}(\rho) + \frac{1}{\rho} f_{-1}(\rho)) \in M_{r,\alpha}$. По доказанному выше, $f'_{-1}(\rho) + \frac{1}{\rho} f_{-1}(\rho) = 0$ в \mathbf{D} , следовательно, $f_{-1}(\rho) = \frac{C}{\rho}$ в \mathbf{D} . Так как $f_{-1}(\rho) \in C(\mathbf{D})$, то $C = 0$, значит $f_{-1}(\rho) = 0$ в \mathbf{D} .

Предположим, что утверждение верно при некотором $n \geq 1$, докажем его для $n + 1$. По лемме 2.1, имеем $f_{-n-1}(\rho)e^{-i(n+1)\varphi} \in M_{r,\alpha}$ и $(f'_{-n-1}(\rho) + \frac{n+1}{\rho} f_{-n-1}(\rho))e^{-in\varphi} \in M_{r,\alpha}$. По индуктивному предположению $\rho f'_{-n-1}(\rho) = -(n+1)f_{-n-1}(\rho)$, откуда $f_{-n-1}(\rho) = C\rho^{-n-1}$ в \mathbf{D} и $C = 0$. Итак, $\forall n \in \mathbb{N} f_{-n}(\rho) = 0$ в \mathbf{D} . Из утверждения 1) леммы 2.1 следует, что это же верно при всех целых $n \neq 0$. Таким образом, $f = 0$ в \mathbf{D} .

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1.1.

Пусть выполнено одно из условий 1) – 3) теоремы. Не ограничивая общности, можно считать $f \in C^1(\mathbf{D})$ (общий случай следует отсюда применением стандартного процесса сглаживания). Тогда из формулы Грина следует, что

для $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ имеет место (2.1). Отсюда из леммы 2.5 получаем $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, что означает голоморфность f в D .

Пусть выполнено одно из условий 5) – 7). Тогда достаточно показать, что существует ненулевая $f \in C^\infty(D)$. Имеем две ситуации

1) $\exists \varepsilon > 0: \forall \sigma \in \Lambda(r, \alpha) B_\varepsilon \subset \sigma S(r, \alpha)$. Тогда в качестве $f(z)$ следует взять такую, что $\int_{B_\varepsilon} f(z) dz = 0$, $f(z) = 0$ при $|z| \geq \varepsilon$.

2) В остальных случаях выбираем такую $f(z) = f(|z|)$, чтобы $f = 0$ в $\Omega_3(r, \alpha) = K_{\delta,1}$ и преобразование Радона $\mathcal{R}_f(p) = 0$ при $0 \leq p \leq \sqrt{1 - \frac{r^2}{4}}$ и не равно нулю при $\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} < p < \delta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Agranovsky M., Berenstein C. A., Chang D. C. Morera theorem for holomorphic H^p spaces in the Heisenberg group. // J. Reine Angew. Math., -1993.-443.-P. 49-89.
2. Волчков В. В. Теоремы типа Мореры на областях со слабым условием конуса. // Изв. вузов. Математика.-1993.-№ 10.-С. 15-20.
3. Berenstein C. A., Chang D. C., Pascuas D., Zalzman L. Variations on the theorem of Morera. // Contemp. Math.,-1992.-137.-P. 63-78.
4. Айзенберг Л. А. Вариации на тему теоремы Морера и проблемы Помпейю. // Докл. РАН,-1994.-337.-№ 6.-С. 709-712.
5. Zalzman L. Analyticity and the Pompeiu problem. // Arch. Rational Mech. Anal.,-1972.-47.-P. 237-254.
6. Волчков В. В. Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры. // Матем. заметки,-1996.-60.-№ 6.-С. 804-809.
7. Волчков В. В. Об одной проблеме Зальцмана и ее обобщениях. // Матем. заметки,-1993.-53.-№ 2.-С. 30-36.
8. Волчков В. В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю. // Матем. сборник,-1998.-189.-№ 7.-С. 3-22.
9. Волчков В. В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю. // Матем. заметки,-1996.-59.-№ 5.-С. 671-680.
10. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ.-М.: Мир,-1987.
11. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu proble. // Math. Ann.,-1976.-223.-P. 183-190.

On the Cauchy Transform of Weighted Bergman Spaces

S. Merenkov

Purdue University, USA

The problem of describing the range of a Bergman space $B_2(G)$ under the Cauchy transform K for a Jordan domain G was solved by Napalkov (Jr) and Yulmukhametov. It turned out that $K(B_2(G)) = B_2^1(C\bar{G})$ if and only if G is a quasidisk; here $B_2^1(C\bar{G})$ is a Dirichlet space of the complement of \bar{G} . The description of $K(B_2(G))$ for an integrable Jordan domain is given by the author earlier. In the present paper we give a description of $K(B_2(G, \omega))$ for a weighted Bergman space $B_2(G, \omega)$ with a weight ω which is constant on level lines of the Green function of G . In case $G = \mathbb{D}$, the unit disk, and under some additional conditions on the weight ω , $K(B_2(\mathbb{D}, \omega)) = B_2^1(C\bar{\mathbb{D}}, \omega^{-1})$, a weighted analogy of a Dirichlet space.

1991 Mathematics Subject Classification 30H05.

1. Introduction

Let G be a bounded domain in the complex plane \mathbb{C} whose boundary is a rectifiable Jordan curve and let φ be a conformal map of the unit disk \mathbb{D} onto G . Let $\omega(t)$ be a positive measurable function on $(0, 1]$ that is called a weight. We consider weights ω for which the integral

$$\iint_G \omega(1 - |\psi(z)|) dm_2(z) \quad (1.1)$$

converges, where ψ is the inverse function of φ and dm_2 is the Lebesgue area measure.

Introduce a weighted Bergman space:

$$B_2(G, \omega) = \left\{ g(z) \in \text{Hol}(G), \|g\|_{B_2} = \left(\iint_G |g(z)|^2 \omega(1 - |\psi(z)|) dm_2(z) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Consider the weighted Cauchy transform K of functions from the space $B_2(G, \omega)$:

$$(Kg)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{g(z)} \omega(1 - |\psi(z)|)}{z - \zeta} dm_2(z), \quad \zeta \in C\bar{G}, g \in B_2(G, \omega), \quad (1.2)$$

where $C\bar{G}$ means the complement of \bar{G} . The integrability of $\overline{g(z)}\omega(1 - |\psi(z)|)$ follows from the convergence of (1.1).

The problem of describing the range of $B_2(G, \omega)$ under the Cauchy transform for $\omega = 1$ and different domains was studied in [5], [6] and in the work V.V. Napalkov, R.S. Yulmukhametov. A criterion of surjectivity of Cauchy transform operator on a Bergman space which will be printed in Entire Functions in Modern Analysis, Isr. Math. Conf. Proc.. In the present paper we are concerned with studying the same question for weighted spaces. The main result of the paper is a theorem describing the range in terms of spaces $W_\omega(0, 2\pi)$ which are introduced in §2. The method of proof of the main theorem is similar to the one in [5], but here we use the approximation of functions instead of the domain G when describing $K(B_2(G, \omega))$.

2. More Spaces

To state the theorem of this paper we need to introduce some more spaces, but first we give an example.

Example. Let $g \in B_2(\mathbb{D}, \omega)$, $g(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$. Taking as a conformal map of \mathbb{D} onto itself $\varphi(z) = z$ we can easily calculate the norm $\|g\|_{B_2} = (\pi \sum_0^\infty |a_k|^2 \omega_k)^{1/2}$, where $\{\omega_k = 2 \int_0^1 r^{2k+1} \omega(1-r) dr\}_0^\infty$ which is a positive decreasing sequence. Also we can compute the Cauchy transform Kg :

$$(Kg)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{g(z)}\omega(1-|z|)}{z-\zeta} dm_2(z) = \sum_1^\infty \frac{b_k}{\zeta^k}, \quad \text{where } b_k = -\bar{a}_{k-1}\omega_{k-1}.$$

So K is an isometry between $B_2(\mathbb{D}, \omega)$ and the space

$$B_2^1(C\bar{\mathbb{D}}, \omega) = \left\{ \gamma(\zeta) \in \text{Hol}(C\bar{\mathbb{D}}), \gamma(\zeta) = \sum_1^\infty \frac{b_k}{\zeta^k}, \|\gamma\|_{B_2^1} = \left(\pi \sum_1^\infty \frac{|b_k|^2}{\omega_{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Now we introduce the spaces $W_\omega(0, 2\pi)$ and $\bar{W}_\omega(0, 2\pi)$:

$$W_\omega(0, 2\pi) = \left\{ f(e^{i\theta}) \in L^1(0, 2\pi), f(e^{i\theta}) \sim \sum_{k=-\infty}^\infty f_k e^{ik\theta}, \right. \\ \left. \rho(f) = \left(\pi \sum_{k=1}^\infty \frac{|f_{-k}|^2}{\omega_{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}. \quad (2.1)$$

Let $\{G_n\}_1^\infty$ be a sequence of domains approximating the domain G from the inside, that is a) $\bar{G}_n \subset G_{n+1} \subset G$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\bigcup_{n=1}^\infty G_n = G$. We say that a function $\gamma(\zeta)$ analytic in $C\bar{G}$ belongs to $\bar{W}_\omega(0, 2\pi)$ if for some sequence of domains $\{G_n\}_1^\infty$ approximating the domain G from the inside there exists a sequence of functions $\{\gamma_n\}_1^\infty$ satisfying the following conditions:

- (1) γ_n is analytic in $C\overline{G}_n$;
- (2) γ_n converges to γ uniformly on every compact $K \subset C\overline{G}$;
- (3) $\sup_n \rho(\gamma_n \circ \varphi) < \infty$, where \circ means composition.

The space $\overline{W}_\omega(0, 2\pi)$ is a kind of closure of the system of functions γ analytic in CG with $\gamma \circ \varphi \in W_\omega(0, 2\pi)$, but the closure is in the topology of uniform convergence on compact sets of $C\overline{G}$.

In order to prove the theorem of this paper we need to impose an additional condition on the weight ω . Let $P_2(G, \omega)$ be the closure of all analytic polynomials in $B_2(G, \omega)$. Throughout the paper we assume that ω is chosen in such a way that

$$P_2(G, \omega) = B_2(G, \omega). \tag{2.2}$$

In connection with (2.2) see, for example, [1], [2], [7]. One condition that guarantees that ω satisfies (2.2) is (see [7])

$$\begin{cases} t \log 1/\omega(t) \uparrow +\infty, & \text{as } t \downarrow 0, \\ \int_0^1 \log \log 1/\omega(t) dt = \infty. \end{cases}$$

3. The Main Theorem

Theorem. *Let G be a bounded domain in \mathbb{C} whose boundary is a rectifiable Jordan curve, and let $\omega(t)$ be a positive measurable function on $(0, 1]$ such that integral (1.1) converges and condition (2.2) is satisfied. Then a function γ analytic in $C\overline{G}$ belongs to $K(B_2(G, \omega))$ if and only if $\gamma \in \overline{W}_\omega(0, 2\pi)$, i.e.*

$$K(B_2(G, \omega)) = \overline{W}_\omega(0, 2\pi). \tag{3.5}$$

Proof. Suppose that $\gamma \in \overline{W}_\omega(0, 2\pi)$. This means that there exists a sequence of domains $\{G_n\}_1^\infty$ approximating the domain G from the inside and a sequence of functions $\{\gamma_n\}_1^\infty$ with

- (1) γ_n analytic in $C\overline{G}_n$;
- (2) $\gamma_n \rightarrow \gamma$ uniformly on every compact set $K \subset C\overline{G}$;
- (3) $\sup_n \rho(\gamma_n \circ \varphi) < \infty$, where ρ is from (2.1).

For every $n \in \mathbb{N}$ consider the linear functional \mathbb{F}_n on functions $h \in \text{Hol}(\overline{G})$ given by

$$\mathbb{F}_n(h) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \gamma_n(\xi) h(\xi) d\xi. \tag{3.1}$$

We are going to prove that \mathbb{F}_n is a bounded linear functional in the norm of the space $B_2(G, \omega)$.

If we make the change of variables $\xi = \varphi(e^{i\theta})$ in the integral in (3.1) we get

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \gamma_n(\varphi(e^{i\theta}))h(\varphi(e^{i\theta}))\varphi'_\theta(e^{i\theta}) d\theta.$$

Since the boundary ∂G is a rectifiable curve, the function $h(\varphi(e^{i\theta}))\varphi'_\theta(e^{i\theta})$ is the restriction of the function $h_1(z)zi$ on the unit circumference, where $h_1(z) = h(\varphi(z))\varphi'(z)$ [3, p. 405]. Thus, the last integral is equal to

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_n(\varphi(e^{i\theta}))h_1(e^{i\theta})e^{i\theta} d\theta.$$

The operator $\Phi : h \rightarrow h_1$ is an isometry between the spaces $B_2(G, \omega)$ and $B_2(\mathbb{D}, \omega)$, that is

$$\|h_1\|_{B_2} = \|h\|_{B_2}. \tag{3.2}$$

Let $\gamma_n(\varphi(e^{i\theta})) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^n e^{ik\theta}$, $h_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, then

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \gamma_n(\xi)h(\xi) d\xi = -\sum_{k=0}^{\infty} c_{-(k+1)}^n a_k.$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality we get

$$|\mathbb{F}_n(h)| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_{-k}^n|^2}{\omega_{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \omega_k |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi} \rho(\gamma_n \circ \varphi) \|h\|_{B_2}, \tag{3.3}$$

where we used (3.2).

Since polynomials are dense in $B_2(G, \omega)$ the functional \mathbb{F}_n is uniquely extended to a bounded linear functional, which we also call \mathbb{F}_n , on $B_2(G, \omega)$ with $\|\mathbb{F}_n\| \leq \frac{1}{\pi} \rho(\gamma_n \circ \varphi)$.

The space $B_2(G, \omega)$ is a Hilbert space, hence for every $n \in \mathbb{N}$ there exists a function $g_n \in B_2(G, \omega)$, such that

$$\mathbb{F}_n(h) = \frac{1}{\pi} \iint_G h(z) \overline{g_n(z)} \omega(1 - |\psi(z)|) dm_2(z).$$

Moreover,

$$\|g_n\|_{B_2} = \|\mathbb{F}_n\|. \tag{3.4}$$

From (3.3), (3.4), condition (3) for the sequence $\{\gamma_n\}_1^\infty$ and applying the Banach-Alaoglu theorem we conclude that there exists a bounded linear functional \mathbb{F} on

$B_2(G, \omega)$ such that some subsequence $\{\mathbb{F}_{n(k)}\}_{k=1}^\infty$ of $\{\mathbb{F}_n\}_{n=1}^\infty$ converges to \mathbb{F} in the weak-star topology. Let $g \in B_2(G, \omega)$ be a function such that

$$\mathbb{F}(h) = \frac{1}{\pi} \iint_G h(z) \overline{g(z)} \omega(1 - |\psi(z)|) dm_2(z), \quad h \in B_2(G, \omega)$$

and $\|g\|_{B_2} = \|\mathbb{F}\|$. Computing the value of \mathbb{F}_n at $h(z) = 1/(z - \zeta)$, $\zeta \in C\overline{G}$ we get

$$\gamma_n(\zeta) = \mathbb{F}_n\left(\frac{1}{z - \zeta}\right) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{g_n(z)}}{z - \zeta} \omega(1 - |\psi(z)|) dm_2(z).$$

Letting $n = n(k)$ tend to infinity and using condition (2) for the sequence $\{\gamma_n\}_1^\infty$ reveals that

$$\gamma(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{g(z)} \omega(1 - |\psi(z)|)}{z - \zeta} dm_2(z), \quad \zeta \in C\overline{G},$$

i.e. $\gamma(\zeta) = (Kg)(\zeta)$.

To prove the converse, take any function $\gamma \in K(B_2(G, \omega))$, i.e., by (1.2),

$$\gamma(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{g(z)} \omega(1 - |\psi(z)|)}{z - \zeta} dm_2(z), \quad \zeta \in C\overline{G},$$

$g \in B_2(G, \omega)$. We shall now prove that γ belongs to $\overline{W}_\omega(0, 2\pi)$.

For any $n \in \mathbb{N}$ consider a function α_n such that

- (1) α_n is continuous on $[0, 1]$, $0 \leq \alpha_n(t) \leq 1$;
- (2) $\alpha_n(t) = 0$, $t \in [0, 1/n]$; $\alpha_n(t) = 1$, $t \in [2/n, 1]$.

Set

$$\gamma_n(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{g(z)} \omega(1 - |\psi(z)|)}{z - \zeta} \alpha_n(1 - |\psi(z)|) dm_2(z). \tag{3.5}$$

First, it is evident that if we take $G_n = \{z \in G : |\psi(z)| < 1 - 1/n\}$ then γ_n is analytic in $C\overline{G}_n$. Next we prove that $\gamma_n \rightarrow \gamma$ uniformly on a compact $K \subset C\overline{G}$.

$$|\gamma(\zeta) - \gamma_n(\zeta)| = \frac{1}{\pi} \left| \iint_G \frac{\overline{g(z)} \omega(1 - |\psi(z)|)}{z - \zeta} (1 - \alpha_n(1 - |\psi(z)|)) dm_2(z) \right| \leq \frac{C_K}{\pi} \|g\|_{B_2} \left(\iint_G (1 - \alpha_n(1 - |\psi(z)|))^2 \omega(1 - |\psi(z)|) dm_2(z) \right)^{\frac{1}{2}},$$

where the constant C_K depends on the compact set K . The last integral, after changing variables, becomes

$$\iint_{1-2/n \leq |z| < 1} |\varphi'(z)|^2 \omega(1 - |z|) dm_2(z).$$

Hence $\sup_K |\gamma(\zeta) - \gamma_n(\zeta)| \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

Finally, it remains to prove that $\sup \rho(\gamma_n \circ \varphi) < +\infty$, where γ_n is defined by (3.5). For $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, $f(e^{i\theta}) \sim \sum_{-\infty}^n f_k e^{ik\theta}$ the corresponding Cauchy type integral

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f(t)}{t - \zeta} dt, \quad \zeta \in C\bar{\mathbb{D}}$$

has the Taylor expansion $F(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{-k}/\zeta^k$, $\zeta \in C\bar{\mathbb{D}}$. With this in mind, consider

$$F_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\gamma_n \circ \varphi(t)}{t - \zeta} dt, \quad \zeta \in C\bar{\mathbb{D}}. \tag{3.6}$$

If we substitute (3.5) in (3.6), using $\zeta = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{D}$, change the order of integration, and compute the inner integral, we get

$$F_n(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{\overline{g(z)}\omega(1 - |\psi(z)|)}{(\psi(z) - \zeta)\varphi'(\psi(z))} \alpha_n(1 - |\psi(z)|) dm_2(z).$$

Make the change of variable $w = \psi(z)$ to obtain

$$F_n(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{g(\varphi(w))}\varphi'(w)\omega(1 - |w|)}{w - \zeta} \alpha_n(1 - |w|) dm_2(w) =$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta^{k+1}} \iint_{\mathbb{D}} \overline{g(\varphi(w))}\varphi'(w)w^k\omega(1 - |w|)\alpha_n(1 - |w|) dm_2(w).$$

As was noted above, $g(\varphi(z))\varphi'(z) \in B_2(\mathbb{D}, \omega)$. Let $g(\varphi(z))\varphi'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_j z^j$.

Then $F_n(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^n/\zeta^k$, where $b_k^n = \bar{a}_{k-1} 2 \int_0^1 r^{2k-1} (\alpha_n \omega)(1-r) dr$. We need to check that $\sup_n (\pi \sum_{k=1}^{\infty} |b_k^n|^2/\omega_{k-1})^{\frac{1}{2}} < \infty$. Since $0 \leq \alpha_n \leq 1$,

$$\frac{|b_k^n|^2}{\omega_{k-1}} \leq |a_{k-1}|^2 \omega_{k-1}.$$

Hence

$$\sup_n \left(\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|b_k^n|^2}{\omega_{k-1}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\pi \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \omega_k \right)^{\frac{1}{2}} = \|g\|_{B_2}.$$

Thus the theorem is proved.

4. Description of $W_\omega(0, 2\pi)$

Let $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, that is $f(e^{i\theta}) \in L^1(0, 2\pi)$, $f(e^{i\theta}) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ik\theta}$. The Cauchy-type integral F corresponding to f is $F(\zeta) = -\sum_{k=1}^{\infty} f_{-k}/\zeta^k$, $\zeta \in C\bar{\mathbb{D}}$. We prove that under some condition on the weight ω , $f \in W_\omega(0, 2\pi)$ if and only if $F \in B_2^1(C\bar{\mathbb{D}}, \omega^{-1})$, where

$$B_2^1(C\bar{\mathbb{D}}, \omega^{-1}) = \left\{ f(\zeta) \in \text{Hol}(C\bar{\mathbb{D}}), \quad F(\infty) = 0, \right.$$

$$\left. \|F\|_{B_2^1} = \left(\iint_{C\bar{\mathbb{D}}} |F'(\zeta)|^2 \frac{dm_2(\zeta)}{\omega(1-1/|\zeta|)} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Proposition. Assume that ω satisfies the following condition:

$$\sup_k \left\{ (k+1)^2 \int_0^1 r^{2k+1} \omega(1-r) dr \int_0^1 r^{2k+1} \frac{dr}{\omega(1-r)} \right\} \leq C < \infty. \tag{4.1}$$

Then $f \in W_\omega(0, 2\pi)$ if and only if $F \in B_2^1(C\bar{\mathbb{D}}, \omega^{-1})$.

Proof. First we show that

$$\inf_k \left\{ (k+1)^2 \int_0^1 r^{2k+1} \omega(1-r) dr \int_0^1 r^{2k+1} \frac{dr}{\omega(1-r)} \right\} \geq c, \tag{4.2}$$

where c is some positive constant:

$$\frac{1}{4(k+1)^2} = \left(\int_0^1 r^{2k+1} dr \right)^2 \leq \int_0^1 r^{2k+1} \omega(1-r) dr \int_0^1 r^{2k+1} \frac{dr}{\omega(1-r)}, \tag{1}$$

which is (4.2) with $c = 1/4$. Now we are ready to prove the proposition.

$$\begin{aligned} \iint_{C\bar{\mathbb{D}}} |F'(\zeta)|^2 \frac{dm_2(\zeta)}{\omega(1-1/|\zeta|)} &= 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |f_{-k}|^2 \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2k+1} \omega(1-1/r)} = \\ &2\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |f_{-k}|^2 \int_0^1 \frac{r^{2k-1} dr}{\omega(1-r)} \asymp \pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_{-k}|^2}{\omega_{k-1}}, \end{aligned} \tag{2}$$

where $a \asymp b$ means that there exist two positive constants m, M such that $ma \leq b \leq Ma$; here we used (4.1), (4.2). This proves the proposition.

Remark. The condition (4.1) is similar to the Mackenhaupt condition [4, p. 254].

REFERENCES

1. Brennan J. E. Weighted polynomial approximation, quasianalyticity and analytic continuation.// J. für die Reine und Ang. Math.,-1985.-**357**.-p. 23-50.
2. Brennan J. E. Functions with fast decreasing negative Fourier coefficients.// Lect. Notes. Math.,-1987.-**1275**.-p. 31-43.
3. Golusin G. M. Geometric function theory of one complex variable (Russian).-Moscow: Nauka,-1966.
4. Garnett J. B. Bounded analytic functions.-N.Y.: Academic Press,-1981.
5. Merenkov S. A. On the Cauchy transform of the Bergman space.// Matematicheskaya Fizika, Analiz i Geometriya, Kharkov,-2000.-**7**.-No 1.-p. 119-127.
6. Napalkov V. V., Yulmukhametov R. S. On the Cauchy transform of functionals on the Bergman space (Russian).// Mat. Sb.,-1994.-**185**.-№ 7.-p. 77-86.
7. Volberg A. L. Weighted approximation by polynomials in simply connected domains.-1989, preprint.