

Разработка модели сети виртуальных каналов на основе многоагентного подхода

Т. В. Ивановская, К. М. Руккас

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The paper deals with the multiagent approach to the creation of network control system. The aim of the work is to develop a network simulator system which is the base for future investigation in network resources management.

1. Введение

Последнее десятилетие характеризуется стремительным развитием Интернет технологий. Быстрый рост числа пользователей сетью сопровождался внедрением Интернет технологий во все области жизни. Также быстро развивались и средства связи. Таким образом, на сегодняшний момент структура сети значительно усложнилась, а, следовательно, возросли требования к средствам управления сетью. Количественный рост сети также приводит к необходимости качественно нового управления ею.

2. Основные алгоритмы маршрутизации потоков в сети.

Несмотря на кажущуюся сложность и многообразие, протоколы маршрутизации базируются всего на двух простых алгоритмах, известных уже несколько десятилетий. Для выполнения своей основной функции – управления сетевыми ресурсами – каждый маршрутизатор использует таблицу, в которой отражена топология сети на данный момент времени. В самом общем случае таблица маршрутизации содержит адрес сети назначения, адрес следующего узла на пути к этой сети и метрику (стоимость) пути. Создание и последующее обновление таблицы маршрутизации при изменении топологии сети осуществляется с помощью протоколов маршрутизации. Наибольшей популярностью пользуются протоколы динамической маршрутизации. Алгоритм Беллмана-Форда ¹(также известный как алгоритм Форда-Фулкерсона) был положен в основу первого протокола маршрутизации, созданного для сети ARPANET. Так называемые протоколы вектора расстояния (distance vector protocols), такие, как RIP, IGRP, BGP, используют те же принципы. В 1979 году на смену протоколу вектора расстояний пришел протокол состояния канала (link state protocol), ставший основным в ARPANET. Современные протоколы состояния канала включают OSPF, IS-IS, NLSP и др. В настоящее время оба типа протоколов нашли себе применение, так как у каждого из них есть свои достоинства и недостатки.

¹Савельев А. Современные протоколы маршрутизации. <http://unix.org.ua/routing/1/>

Первый из них, даже с учетом всех улучшений (метода расщепления горизонта, метода временного отказа от приема сообщений – hold-down и т.д.) не решает полностью так называемой проблемы «возрастания до бесконечности» или делает это за счет увеличения реактивности сети. Использование второго метода приводит, с одной стороны, к большой загрузке сети служебной информацией, а с другой – к большей нагрузке на маршрутизаторы, поскольку требует построения полной топологии сети на каждом из них.

3. Современные требования к управлению трафиком и качеству обслуживания (QoS)

В то же время значительно возрос интерес к технологиям, позволяющим предоставлять клиенту необходимый ему уровень услуг (QoS – Quality of Service). QoS представляет собой совокупность технологий, которые позволяют приложениям запрашивать и получать предсказуемый уровень услуг с точки зрения пропускной способности, временного разброса задержки отклика, а также общей задержки доставки данных. В частности, QoS подразумевает улучшение параметров или достижение большей предсказуемости предоставляемых услуг. На сегодняшний день существует два стандарта, представляющих собой два взаимодополняющих подхода управления трафиком: интегрированные службы (Integrated Services - IS) и дифференцированные службы (Differentiated Services - DS). IntServ для явного задания уровня услуги (QoS) использует протокол RSVP. Поставщик интегрированных услуг изучает суммарные требования трафика, ограничивает поддерживаемый трафик объемами, соответствующими текущим возможностям сети и резервируются ресурсы сети для предоставления определенного качества обслуживания в соответствии с конкретными требованиями. Это делается путем уведомления о требовании клиента всех узлов вдоль пути обмена. Если все сетевые устройства вдоль пути могут предоставить запрошенную полосу, резервирование завершается успешно. Дифференцированные службы не пытаются рассматривать суммарные запросы трафика в глобальном смысле и заранее резервировать сетевые ресурсы. Вместо этого в структуре дифференцированных служб трафик классифицируется по группам. На практике DS, вместо того чтобы уведомлять о требованиях приложения, использует в IP-заголовке DiffServ Code Point (DSCP), чтобы указать требуемые уровни QoS. Обе эти службы не всегда эффективно решают задачу качественного обслуживания потоков при ограниченном наборе сетевых ресурсов. IS резервирует потоки без учета требования других потоков, а при использовании DS необходимо заранее разбить трафик на классы, что также снижает эффективность использования сетевых ресурсов.

Из всего вышесказанного следует вывод о необходимости исследования новых схем управления сетевыми ресурсами. Один из перспективных путей – использование многоагентных систем (MAC) для этих целей.

4. Преимущества применения многоагентных систем (MAC) в управлении сетевыми ресурсами.

МАС предназначена для решения широкого ряда вариативных задач. При этом она характеризуется следующими свойствами: автономность, гибкость, ситуативность и социальность. Центральным понятием в теории многоагентных систем является агент. Техническое определение агента следующее: это компьютерная программа, обладающая такими свойствами, как мобильность, автономность, коммуникативность.[5]

МАС идеально подходит для решения задач, имеющих множественные решения, имеет преимущества распределенного и конкурентного решения задач. Поэтому использование многоагентных систем в области динамического управления сетевыми ресурсами является актуальным и перспективным.

5. Общая постановка задачи.

Для решения задач управления сетевыми ресурсами необходимо иметь средства, позволяющие моделировать реальные процессы, происходящие в сети, и оценивать эффективность исследуемых схем. В ходе исследования новых способов управления трафиком была поставлена следующая задача: на основе одной из многоагентных платформ разработать систему моделирования информационных потоков в сети с возможностью управления ими.

6. Выбор основных средств и алгоритмов.

Для построения нашей системы моделирования сети была выбрана многоагентная платформа JADE (Java Agent Development Framework) версии 3.3. После проведения анализа программных средств для разработки приложений, основанных на агентах, было принято решение использовать именно эту платформу, поскольку она совместима со стандартами FIPA [6]², полностью написана на Java, что обеспечивает независимость от операционной системы, является распределенной (см. рис.1).

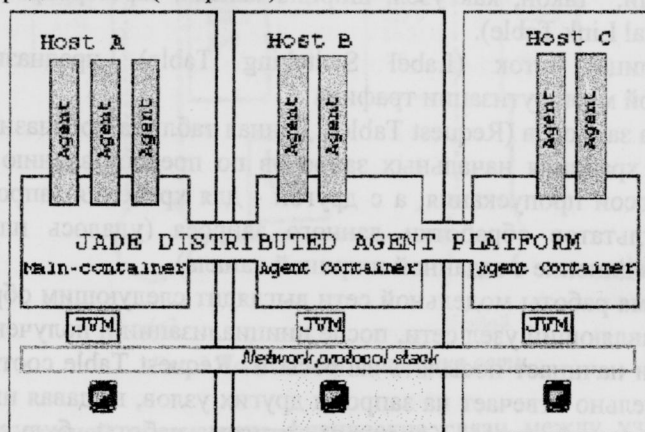


Рис.1. Платформа JADE

Дополнительным преимуществом являются различные средства, позволяющие упростить процесс отладки приложений и визуализировать обмен

²FIPA, Foundation for Intelligent Physical Agents, <http://www.fipa.org>

сообщений между агентами приложения, входящие в состав данной агентной платформы, например, Sniffer.

В качестве протокола, управляющего потоками данных в разработанной модели сети, был выбран протокол коммутации меток, сходный с протоколом MPLS (MultiProtocol Label Switching). Относительно новый протокол MPLS, появившийся в 1997 году является наиболее универсальным решением проблем качества обслуживания (QoS), стоящих перед сегодняшними пакетными сетями. Основной идеей протокола MPLS является идея коммутации по меткам. Она заключается в том, что в сети выделяются так называемые *коммутируемые по меткам тракты* LSP (Label-Switched Path). При поступлении пакетов в сеть граничный маршрутизатор назначает пакету метку, соответствующую его *классу эквивалентности пересылки* – FEC (Forwarding Equivalency Class). Каждому FEC ставится в соответствие LSP, что дает возможность последующим узлам сети просто переключать пакет по метке, не выполняя полного анализа заголовка пакета [3].

7. Описание функционирования системы.

Для эффективного управления сетевыми ресурсами над реальной физической сетью строится сеть логических путей. Управление ресурсами осуществляется с помощью изменения топологии логической сети, а также с помощью перераспределения в ней информационных потоков.

Каждый узел в системе представлен JADE агентом. Отдельным агентом представлен контроллер сети, который создает агентов – узлов, инициализирует их и запускает сеть.

В каждом агенте сети хранятся 3 таблицы:

1 – предназначена для хранения информации о физических связях данного узла с другими, такой, как узел, ширина канала, зарезервированная ширина канала (Physical Link Table).

2 – таблица меток (Label Switching Table), предназначенная для автоматической маршрутизации трафика

3 – таблица запросов (Request Table). Данная таблица предназначена, с одной стороны, для хранения начальных запросов по предоставлению соединения с заданной полосой пропускания, а с другой - для хранения запросов от других узлов и результатов обработки данного запроса (удалось или не удалось установить соединение с заданной шириной канала).

Общая схема работы модельной сети выглядит следующим образом: каждый агент, представляющий узел сети, после инициализации и получения сообщения о запуске сети начинает посылать запросы из Request Table соответствующему узлу и параллельно отвечает на запросы других узлов, выдавая информацию об установлении соединения. Конечным итогом работы будут заполненные таблицы запросов у всех агентов, что дает ответ на вопрос, удастся ли при данной конфигурации физической и логической сети обеспечить клиентов требуемыми ресурсами.

Например, на рис. 2 и рис. 3 представлена физическая и логическая топология сети, соответственно, состоящей из 4 узлов (Node1, Node2, Node3, Node4).

На рисунке 3 изображены следующие логические пути:

LSP0: Node3 – Node1,
 LSP1: Node4 – Node2- Node1,
 LSP2: Node3 –Node1,
 LSP3: Node1 – Node2 - Node4,
 LSP4: Node4 – Node3

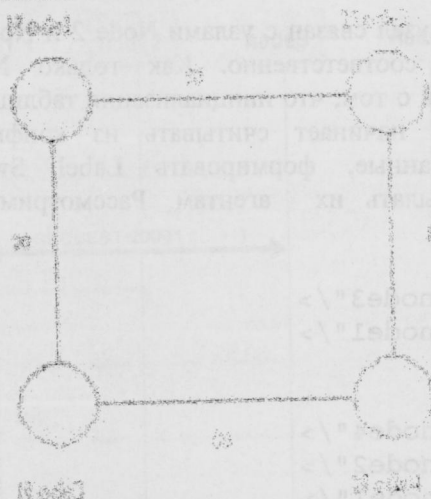


Рис.2. Физическая топология сети

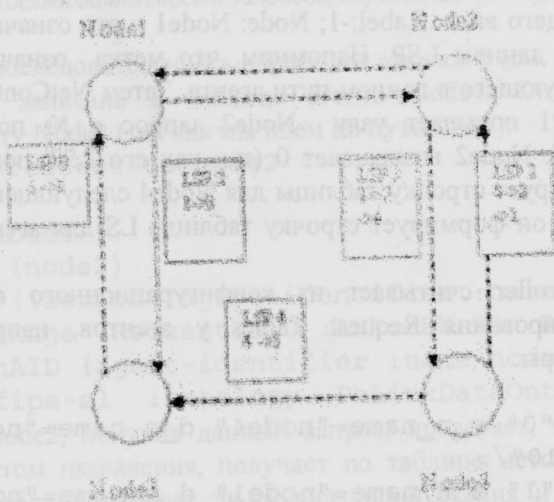


Рис.3. Логическая топология сети

Сплошной линией обозначены физические связи между узлами, цифрами обозначены ширины физических каналов. Штрих - пунктиром обозначена топология логической сети. Итак, класс – контроллер сети (назовем его NetController) считывает из конфигурационного файла nodes.xml имена агентов - узлов и значения ширины канала между ними, создает агентов и отправляет им таблицы физических связей. Например, для агента Node1 таблица физических связей будет выглядеть следующим образом:

```
<node name="node1">
```

```

<physical_link>
  <to_node name="node2" bw="50"/>
  <to_node name="node3" bw="20"/>
</physical_link>
</node>

```

это означает, что этот узел связан с узлами Node 2 и Node3 с шириной канала 50Mb/s и 20 Mb/s соответственно. Как только NetController получает уведомления от агентов о том, что инициализация таблицы физических связей прошла успешно, он начинает считывать из конфигурационного файла логических путей данные, формировать Label Switching Tables и последовательно рассылать их агентам. Рассмотрим это на конкретном примере:

```

<lsp id="0">
  <node name="node3"/>
  <node name="node1"/>
</lsp>
<lsp id="1">
  <node name="node4"/>
  <node name="node2"/>
  <node name="node1"/>
</lsp>

```

Контроллер сети считывает составляющие LSP0, формирует строку таблицы для Node3 следующего вида: Label:-1; Node: Node1 – это означает, что Node1 – последний узел в данном LSP. Напомним, что метка означает смещение в таблице меток следующего в данном пути агента. Затем NetController считывает составляющие LSP1 посылает узлу Node2 запрос о № последней строке таблицы в его LST. Node2 возвращает 0 (так как его LST пока пуста), тогда NetController формирует строку таблицы для Node4 следующего вида: Label:0; Node: Node2, далее он формирует строку таблицы LS для агента Node2 и так далее.

Теперь NetController считывает из конфигурационного файла запросов данные для формирования Request Tables у агентов, например, зададим следующие параметры:

```

<requests>
  <request id="0" s_n_name="node4" d_n_name="node1"
label="0" bw="10"/>
  <request id="1" s_n_name="node1" d_n_name="node2"
label="1" bw="60"/>
  <request id="2" s_n_name="node1" d_n_name="node3"
label="0" bw="20"/>
  <request id="3" s_n_name="node3" d_n_name="node1"
label="0" bw="15"/>
</requests>

```

т.е. первый запрос – из Node4 в Node1 с шириной канала 10Mb/s и меткой 0 (по таблице меток узла Node 4 это означает, что мы выбираем логический путь LSP1). Далее NetController формирует строки таблицы запросов для каждого

агента - источника и отправляет их. Когда все необходимые данные отосланы, контроллер посылает всем агентам уведомление о начале работы. И агенты начинают общаться для того, чтобы получить результат своих запросов, занесенных в их Request Table.

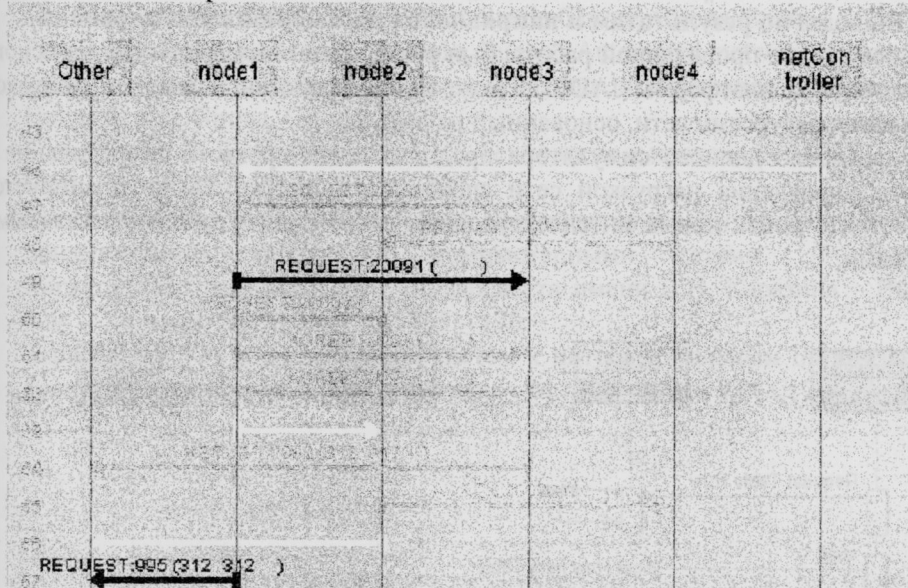


Рис.4. Последовательность запросов, перехваченная sniffer'ом Jade

Рассмотрим последовательность обработки запроса 0 (см. рис.4, 5). Исходная строка запроса записана в таблице агента Node4. Он посылает запрос (REQUEST) агенту Node2 (так как мы идем по пути LSP1):

node4 sent request to node2

(REQUEST

:sender (node4)

:receiver (node2)

:content "((action (agent-identifier :name node4)

(RequestPackage :RequestID 0 :AskedBW 10 :RowLabel 0

:DestinationAID (agent-identifier :name node1))))"

:language fipa-sl :ontology PhLinkDataOntology)³

Агент Node2, получив данный запрос, проверяет, что он не является конечным пунктом назначения, получает по таблице меток следующий узел, проверяет по таблице, хватает ли полосы пропускания и пересылает запрос агенту Node1. Node1, получив запрос, дает на него положительный ответ Node2, который «по цепочке» возвращает положительный ответ Node4. Этот агент, получив положительный ответ, вносит данные в свою таблицу запросов и проверяет, есть ли еще не отосланные запросы. Если их больше нет, то отправляет данные контроллеру. Контроллер в это время ожидает таких сообщений от всех агентов. Как только все агенты пришлют их – контроллер «скажет» агентам-узлам «остановить общение» и выдаст результаты. В указанном примере результаты работы симулятора следующие:

³ Вид сообщения JADE сокращен для удобства чтения

Source:node3 || Destination:node1 || BW:15 || Result:1
 Source:node1 || Destination:node2 || BW:60 || Result:0
 Source:node1 || Destination:node3 || BW:20 || Result:1
 Source:node4 || Destination:node1 || BW:10 || Result:1

8. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований.

В результате проделанной работы был разработан симулятор сети на основе многоагентной платформы JADE.. Также был разработан и внедрен протокол управления ресурсами сети, основанный на MPLS.

С помощью данного симулятора предполагается провести исследование в области управления нагрузкой сети сложной топологии. Также планируется осуществить поиск новых интеллектуальных алгоритмов управления сетевыми ресурсами.

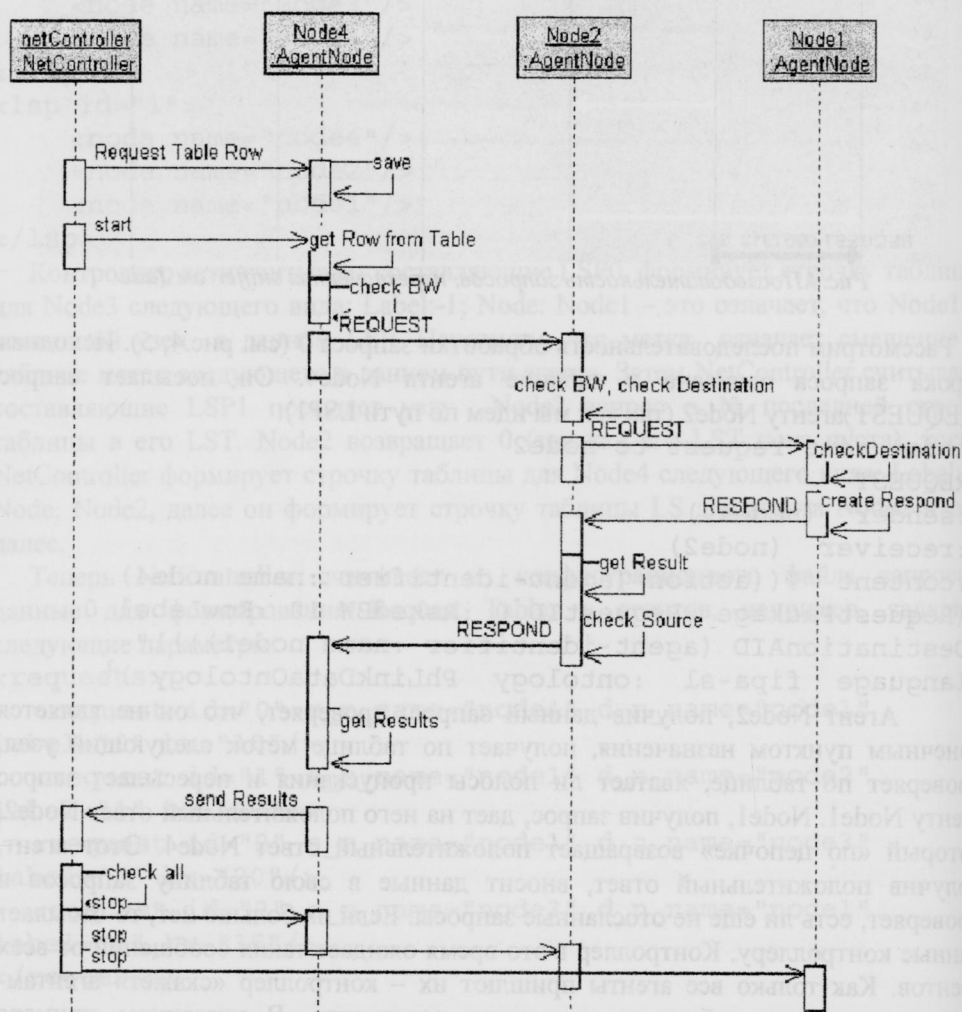


Рис.5. Диаграмма последовательности выполнения запроса на соединение

ЛИТЕРАТУРА

1. Santiago Cots, Teodor Jové, Pere Vilà. A Call-level Network Simulator Framework based on a Standard Agent Platform. - Broadband Communications and Distributed Systems Group Universitat de Girona, Girona, Spain.
2. Pere Vila, Josep L. Marzo, Antonio Bueno. Automated network management using a hybrid multiagent system. - Institut d'Informàtica i Aplicacions, Universitat de Girona, Girona, Spain.
3. Гольдштейн А. Б., Гольдштейн Б. С. Технология и протоколы MPLS. - СПб.: БХВ - Санкт-Петербург, 2005. - 304 с.
4. Руккас К.М. Разработка модели базы знаний агентов многоагентной системы динамического управления компьютерными сетями. // Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина - Выпуск 629. - Харьков: ХНУ, 2004. - С.165 - 170.
5. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. - М.: Эдиториал УРСС, 2002. - 352 с.

Об одном классе алгоритмов кластер-анализа

А. А. Карпенко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Classification - one of fundamental processes in a science which is basic in practical and scientific activity of the person. Mathematical theory were offered, on the basis of which algorithms were developed, which application results in reduction of capacity of set of probable classifications, due to allocation of set of regular classifications was suggested in given article. It allows to facilitate a search extremum of functional qualities of splitting, and therefore a finding of the best classification for some configuration in tasks of automatic classification (cluster-analysis).

Часто утверждается, что *классификация* – один из фундаментальных процессов в науке. Это понятие тесно связано с такими терминами, как группировка, типологизация, кластеризация, систематизация, дискриминация, и является одним из основополагающих в практической и научной деятельности человека. Факты и явления должны быть упорядочены, прежде чем мы сможем их понять и разработать общие принципы, объясняющие их появление и видимый порядок. С этой точки зрения, классификация является интеллектуальной деятельностью высокого уровня, необходимой нам для понимания природы. Но поскольку классификация – это упорядочение объектов по их схожести, а объектом можно назвать все что угодно, включая процессы и действия – все, чему можно приписать вектор дескрипторов (вектор значений признаков), – то можно прийти к заключению, что классификация не ограничена рамками усилий человеческого интеллекта и в действительности является фундаментальным свойством всех живых организмов.

Определяющим моментом в выборе подходящей математической постановки для конкретной задачи классификации является ответ на вопрос, на какой исходной информации будут основаны наши выводы. Исходную информацию целесообразно подразделять на:

- априорные сведения об искомых классах;
- предварительную выборочную информацию (так называемые обучающие выборки);
- наблюдения, подлежащие классификации.

Мы рассмотрим задачу классификации объектов без использования обучающего множества. Этот вид классификации называется *автоматической классификацией* или *классификацией без учителя*. Методы самообучения получили широкое распространение в интеллектуальных системах, в частности – в экспертных системах распознавания образов и классификации и т.д. В системах распознавания образов и классификации соответствующий класс задач обучения без учителя получил название *кластер-анализа* (т.е.

самопроизвольного разбиения исходной выборки на компактные подмножества, или *кластеры*).

Задача автоматической классификации не полностью определена, если не указаны свойства, которыми должны обладать искомые классы объектов. Выбор этих свойств или, что то же, определение класса – это основной вопрос теории автоматической классификации. Если имеется адекватное определение класса, становится возможным отличать хорошие классификации от плохих.

Попытки разработать методы автоматической классификации сделали необходимым оценивать сходство количественно. Одним из подходов к количественному определению оценки схожести заключается в попытке найти основу для суждений о сходстве. Это обычно достигается с помощью детального описания свойств, на основе которых, как полагают, можно выразить сходство. Этот подход привел к детализации и дроблению дескрипторов объектов, которые необходимо классифицировать. Каждому объекту приписываются длинные списки дескрипторов, т.е. векторы значений признаков, а классификация проводится по матрице данных, скомпонованной из набора таких векторов. От природы основных признаков объекта зависят важные теоретические выводы, но они различаются в зависимости от области применения.

Несмотря на широкое применение кластер-анализа, общепринятого определения кластеров не существует. Среди большинства разработчиков существует интуитивное понимание, что элементы одного кластера ближе друг к другу, чем к другим элементам, однако особенности этих отношений явно не называются. Для определения кластеров использовались различные параметры: плотность операционных таксономических единиц в признаковом гиперпространстве, объем, занимаемый кластером, связанность элементов определенного кластера, а также промежутки между соседними кластерами в сравнении с их диаметрами.

Кластер-анализ накладывает на объекты отношения на основе численных значений парных функций на этих объектах. Эти отношения нужны для выявления собственной структуры данных, но они зачастую сами налагают структуру, соответствующую особенностям алгоритма группировки. Таким образом, кластер-анализ не только раскрывает истинный порядок, регулярность или естественные законы, но также подгоняет данные под некоторую, заранее заготовленную модель.

При обзоре литературы были использованы источники [1, 2, 3].

1. Математическая постановка задачи автоматической классификации

Для того чтобы построить автоматическую процедуру решения задачи автоматической классификации, необходимо дать более строгое определение класса. Один из возможных путей – это конструирование *критерия качества классификации* [3]. Критерий качества классификации J (*функционал качества разбиения*) ставит в соответствие каждой возможной классификации множества объектов некоторое число. Областью определения J является множество всех возможных классификаций объектов, а областью значений – множество действительных чисел. Предполагается, что классификации, хорошие в смысле

принятого определения класса, соответствуют экстремальным значениям критерия J .

Таким образом, если критерий J задан, то можно оценить любую классификацию. Как правило, однако, нереально вычислить J для каждой возможной классификации. Это связано с тем, что числа Белла $B_n = e^{-1} \cdot \sum_{k=0}^n \frac{k^n}{k!}$

(число способов разбиения n -элементного множества на подмножества) асимптотически равны $m(n)^n \cdot e^{m(n)-n-1/2} / \sqrt{\ln n}$, где $m(n) \cdot \ln m(n) = n - 1/2$ [4].

Поэтому для эффективного определения наилучшей в смысле критерия J классификации необходим алгоритм автоматической классификации. В соответствии с принятой нами системой определения критерия качества классификации и алгоритм автоматической классификации вместе составляют процедуру решения задачи автоматической классификации.

Выбор метрики (или меры близости) между объектами, каждый из которых представлен значениями характеризующего его многомерного признака, является узловым моментом исследования, от которого решающим образом зависит окончательный вариант разбиения объектов на классы при любом используемом для этого алгоритме разбиения. В каждой конкретной задаче этот выбор должен производиться по-своему, в зависимости от главных целей исследования, физической и статистической природы исследуемого многомерного признака, априорных сведений о его вероятностной природе и т.д.

Предположим, что мы хотим классифицировать N объектов, каждый из которых характеризуется n -мерным вектором, т.е. дано множество векторов $\{X_1, \dots, X_N\}$. Мы не называем эти векторы случайными, поскольку в задаче автоматической классификации они предполагаются фиксированными и известными. Каждый объект должен быть отнесен к одному из M классов, $\omega_1, \dots, \omega_M$, где число классов M может быть, а может и не быть заранее известным. Класс, к которому относится i -й объект, обозначим ω_{k_i} , $i=1, \dots, N$. Для удобства будем предполагать, что k_i — целое число, заключенное между 1 и M . Классификацией Ω называют вектор, составленный из ω_i , а конфигурацией X^* — вектор, составленный из X_i . Критерий качества классификации J является функцией от Ω и X^* :

$$J = J(\omega_{k_1}, \omega_{k_2}, \dots, \omega_{k_N}; X_1, X_2, \dots, X_N) = J(\Omega, X^*).$$

По определению, наилучшая классификация Ω_0 удовлетворяет условию

$$J(\Omega_0; X^*) = \min_{\Omega} J(\Omega; X^*),$$

либо

$$J(\Omega_0; X^*) = \max_{\Omega} J(\Omega; X^*).$$

В задаче автоматической классификации конфигурация X^* фиксирована. Алгоритм автоматической классификации модифицирует только классификацию Ω . Обычные методы поиска экстремума здесь неприменимы

вследствие дискретного и неупорядоченного характера множества возможных классификаций.

В результате данной работы предполагается разработать некоторые алгоритмы, применение которых приводит к уменьшению мощности множества возможных классификаций, что позволяет облегчить поиск экстремума функционала качества разбиения $J(\Omega, X^*)$, а, следовательно, нахождение наилучшей классификации Ω_0 для конфигурации X^* в задачах автоматической классификации (кластер-анализа).

2. Необходимые определения, обозначения и утверждения

Будем рассматривать класс Γ всех конечных неориентированных графов. Пусть $G = G(V, E) \in \Gamma$ – конечный неориентированный граф, где V – непустое множество объектов некоторой природы, называемых вершинами графа, а E – множество его ребер – есть подмножество множества $V_-^2 / \sim$ классов эквивалентности, на которые множество $V_-^2 = \{(a, b), a \neq b\}$ разбивается следующим отношением эквивалентности

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \Leftrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2) \text{ или } (a_1, b_1) = (b_2, a_2).$$

Заметим, что данное определение не допускает наличие у графа кратных (параллельных) ребер и петель, т.е. графы из класса Γ являются простыми. Также следует отметить, что класс Γ не содержит нуль-графа, так как мы предположили, что $V \neq \emptyset$. Множество вершин и ребер графа G , обозначим $V(G)$ и $E(G)$, соответственно [5].

Пусть $v_1, v_2, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_k$ – последовательность вершин графа такая, что каждая пара соседних вершин v_i, v_{i+1} определяет ребро в этом графе. Тогда данная последовательность называется *маршрутом*. Маршрут называется *простым* или *цепью*, если ни одна вершина не встречается в нем дважды, и *циклом* или *замкнутой цепью*, если ни одна вершина не встречается в нем дважды и при этом $v_1 = v_k$. Вершины v_1 и v_k называются *концевыми вершинами* цепи [5].

Рассмотрим некоторое свойство P , которое присуще графам. Введем булеву функцию $P(G)$ на классе всех конечных неориентированных графов $P(G): \Gamma \rightarrow \{0, 1\}$, которую определим следующим образом

$$P(G) = \begin{cases} 1, & \text{если для графа } G \text{ можно проверить свойство } P \text{ и он им обладает} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Назовем свойство P *связным свойством графа*, если $(\forall G \in \Gamma)(P(G) \Rightarrow P_{\text{связн.}}(G))$, где $P_{\text{связн.}}$ – свойство связности графа. Из определения следует, что само $P_{\text{связн.}}$ является связным свойством.

Будем говорить, что свойство P является *монотонным свойством графа*, если выполнено следующее условие

$$(\forall G_1, G_2 \in \Gamma)((V(G_1) = V(G_2)) \wedge (E(G_1) \subset E(G_2)) \wedge P(G_1)) \Rightarrow P(G_2),$$

иными словами, если некоторый граф обладает свойством P , то при добавлении ребра в этом графе это свойство не нарушается.

Выделим из всевозможных свойств неориентированных конечных графов классы связных и монотонных свойств:

1. C – класс связных свойств графов, т.е. $(\forall P \in C)(P - \text{связное свойство})$.

Очевидно, что $P_{\text{связн.}} \in C$.

2. M – класс монотонных свойств графов, т.е.

$(\forall P \in M)(P - \text{монотонное свойство})$.

В дальнейшем нас будут особенно интересовать такие свойства, которые являются одновременно и монотонными, и связными. Обозначим класс таких свойств $MC = M \cap C$, т.е. $(\forall P \in MC)(P \in M \wedge P \in C)$.

Очевидно, что $(\forall G \in \Gamma)(\forall P \in MC)(P_{\text{связн.}}(G) \Leftarrow P(G) \Leftarrow P_{\text{полн.}}(G))$, где $P_{\text{связн.}}$ – свойство связности графа, а $P_{\text{полн.}}$ – свойство полноты. Ниже будет показано, что $P_{\text{связн.}} \in MC$ и $P_{\text{полн.}} \in MC$. Таким образом, $P_{\text{связн.}}$ можно назвать минимальным монотонным связным свойством графа, а $P_{\text{полн.}}$ – максимальным.

Приведем еще некоторые примеры монотонных связных свойства графов: n -связность $(P_{n\text{-связн.}})$, неразделимость $(P_{\text{неразд.}})$, гамильтоновость (P_{Γ}) и полугамильтоновость $(P_{\Pi\Gamma})$. В принципе, если свойство P некоторого графа G монотонное, но не связное, то, если это позволяет свойство P , вполне можно требовать от графа G связности, что позволит рассматривать свойство P как элемент класса MC (таким свойством, например, является наличие цикла у графа).

Введем неотрицательную функцию $\Delta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ такую, что $\forall a, b, c, d \in V$ выполняются следующие свойства:

1. $\Delta(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ – различаемость;
2. $\Delta(a, b) = \Delta(b, a)$ – симметричность;
3. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((\Delta(a, b) < \delta \wedge \Delta(c, d) < \delta) \Rightarrow |\Delta(a, c) - \Delta(b, d)| < \varepsilon)$ – устойчивость.

Заметим, что свойство 3 является более слабым свойством, чем неравенство треугольника. Действительно, если выполняется неравенство треугольника, т.е. $(\forall a, b, c \in V)(\Delta(a, b) + \Delta(b, c) \geq \Delta(a, c))$, то $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \varepsilon/2$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} |\Delta(a, c) - \Delta(b, d)| &\leq |\Delta(a, b) + \Delta(b, c) - \Delta(b, d)| = |\Delta(a, b) - (\Delta(b, d) - \Delta(b, c))| \leq \\ &\leq \Delta(a, b) + |\Delta(b, d) - \Delta(b, c)| \leq \Delta(a, b) + \Delta(c, d) \leq \delta + \delta = \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, в качестве функции Δ можно взять обычное расстояние (метрику) между вершинами графа.

Рассмотрим граф $G_\varepsilon(V) \in \Gamma$ такой, что $(\forall a, b \in V)(\Delta(a, b) \leq \varepsilon \Leftrightarrow (a, b) \in E(G_\varepsilon))$, и зафиксируем некоторое свойство графа P из класса MC .

Для непустого множества $A \subset V$ введем функцию, характеризующую рассеянность множества A

$$D_p(A) = \begin{cases} \inf\{\varepsilon > 0 \mid P(G_\varepsilon(A))\}, & |A| > 1 \\ 0, & |A| = 1 \end{cases},$$

а для пары непустых множеств $A, B \subset V$, симметричную функцию, характеризующую удаленность множеств A и B (расстояние между множествами)

$$S(A, B) = \min\{\Delta(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Величина, обратная к рассеянности множества, характеризует его зацепление, а обратная к удаленности двух множеств — их связность.

Следует отметить, что из определения функции $D_p(A)$ следует, что если $(\forall \varepsilon > 0)(\neg P(G_\varepsilon(A)))$, то $D_p(A) = +\infty$. Очевидно также, что функции $D_p(A)$ и $S(A, B)$ являются неотрицательными. Причем, из определения функции $D_p(A)$ следует, что

$$D_p(A) = 0 \Leftrightarrow |A| = 1,$$

а из свойства различаемости функции Δ следует, что

$$S(A, B) = 0 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

Также нетрудно показать, что если $A \cap B = \emptyset$, то для любого непустого подмножества C множества A выполняется следующее неравенство: $S(C, B) \geq S(A, B)$. Это означает, что функция $S(A, B)$ монотонна по любому аргументу, так как она симметрична.

Рассмотрим множество $A^k = \{A_i\}_{i=1}^k$ непустых попарно непересекающихся подмножеств множества V . Для такого множества определим функции $D_p(A^k)$ и $S(A^k)$ следующим образом

$$D_p(A^k) = \max\{D_p(A_i) \mid i = \overline{1, k}\},$$

$$S(A^k) = \begin{cases} \min\{S(A_i, A_j) \mid i \neq j \wedge i = \overline{1, k} \wedge j = \overline{1, k}\}, & k > 1 \\ +\infty, & k = 1 \end{cases}.$$

Так как при добавлении подмножества минимум в определении $S(A^k)$ может только уменьшиться, а максимум в определении $D_p(A^k)$ увеличится, то очевидно, что $(\forall A^l \subseteq A^k \mid 1 < l \leq k)((D_p(A^l) \leq D_p(A^k)) \wedge (S(A^l) \geq S(A^k)))$. Также из определения функции $S(A^k)$ следует, что

$$S(A^k) = +\infty \Leftrightarrow k = 1.$$

Пусть π — некоторое разбиение множества V . Это означает, что $\pi = A^k = \{A_i\}_{i=1}^k$, такое что $\bigcup_{i=1}^k A_i = V$. Множества A_i из разбиения π назовем атомами разбиения. Далее будем использовать обозначение $\pi(a)$ для атома разбиения π , содержащего элемент $a \in V$.

На множестве всех разбиений множества V можно ввести отношение порядка следующим образом

$$\pi' \leq \pi \Leftrightarrow (\forall A' \in \pi')(\exists A'' \in \pi'')(A' \subseteq A'').$$

Очевидно, что

$$\pi' < \pi'' \Rightarrow (\exists A \in \pi'') (\exists! A_1, A_2, \dots, A_l \in \pi', l > 1) (A = \bigcup_{i=1}^l A_i)$$

и

$$\pi' = \pi'' \Leftrightarrow (\pi' \leq \pi'') \wedge (\pi'' \leq \pi').$$

Так же очевидно, что для множества $V = \{a_1, \dots, a_n\}$ разбиение $\pi_{\min} = \{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$ является наименьшим, а разбиение $\pi_{\max} = \{\{a_1, \dots, a_n\}\} = \{V\}$ — наибольшим. Эти два разбиения назовем *тривиальными разбиениями множества V* . Отметим, что для любого разбиения π множества V выполняется неравенство $1 = |\pi_{\max}| \leq |\pi| \leq |\pi_{\min}| = |V|$, а также $|V| = 1 \Leftrightarrow \pi_{\min} = \pi_{\max}$.

С учетом обозначения для разбиения π можно определить пару функций

$$D_p(\pi) = D_p(A^k) \text{ и } S(\pi) = S(A^k),$$

или, что то же самое,

$$D_p(\pi) = \max \{D_p(\pi(a)) \mid a \in V\}$$

и

$$S(\pi) = \begin{cases} \min \{S(\pi(a), \pi(b)) \mid a, b \in V, \pi(a) \neq \pi(b)\}, & |\pi| > 1 \\ +\infty, & |\pi| = 1 \end{cases}.$$

Рассмотрим отдельно случаи, когда разбиение π множества V является тривиальным разбиением:

1. $\pi = \pi_{\min}$ и $|V| > 1 \Leftrightarrow D_p(\pi) = 0$ и $0 < S(\pi) < +\infty$.

$$D_p(\pi_{\min}) = \max \{D_p(A) \mid A \in \pi_{\min}\} = \max \{D_p(\{a\}) \mid a \in V\} = 0,$$

$$S(\pi_{\min}) = \min \{S(A, B) \mid A, B \in \pi_{\min}, A \neq B\} = \min \{S_p(\{a\}, \{b\}) \mid a, b \in V, a \neq b\} > 0$$

$$\text{и } S(\pi_{\min}) < +\infty, \text{ так как } |\pi_{\min}| = |V| > 1;$$

2. $\pi = \pi_{\max}$ и $|V| > 1 \Leftrightarrow D_p(\pi) > 0$ и $S(\pi) = +\infty$.

$$D_p(\pi_{\max}) = \max \{D_p(A) \mid A \in \pi_{\max}\} = D_p(V) > 0,$$

$$S(\pi_{\max}) = +\infty, \text{ так как } |\pi_{\max}| = 1;$$

3. $\pi = \pi_{\max} = \pi_{\min} \Leftrightarrow |V| = 1 \Leftrightarrow D_p(\pi) = 0$ и $S(\pi) = +\infty$.

$$D_p(\pi) = \max \{D_p(A) \mid A \in \pi\} = D_p(V) = 0, \text{ так как } |V| = 1,$$

$$S(\pi) = +\infty, \text{ так как } |\pi| = 1.$$

3. Определение класса регулярных разбиений и исследование его свойств

Впервые понятие регулярного разбиения было введено и исследовано для свойства полноты графов в [6, 7].

Далее, если это не оговорено, считается, что рассматриваемое нами свойство графов $P \in \text{МС}$. Так же будем считать, что $+\infty < +\infty$.

Назовем разбиение π множества V *регулярным*, если для него выполнено следующее условие

$$D_p(\pi) < S(\pi).$$

При этом если для разбиения π выполняется $D_p(\pi) = S_p(\pi) = +\infty$, то в силу нашего предположения, что $+\infty < +\infty$, данное разбиение будет являться регулярным.

Обозначим через Π_P^V множество всех регулярных разбиений множества V на основе свойства P . Из определения следует, что тривиальные разбиения $\pi_{\min} \in \Pi_P^V$ и $\pi_{\max} \in \Pi_P^V$ для любого непустого множества V и любого свойства $P \in \text{МС}$, т.е. $\Pi_P^V \neq \emptyset$.

Содержательно, к классу регулярных разбиений относятся те разбиения, для которых атомы внутри себя зацеплены более сильно, чем связаны между собой.

Основным результатом исследований класса регулярных разбиений является следующая теорема:

Теорема. Пусть $\pi', \pi'' \in \Pi_P^V$, тогда имеют место следующие эквивалентности:

1. $\pi' \leq \pi'' \Leftrightarrow D_p(\pi') \leq D_p(\pi'') \Leftrightarrow S(\pi') \leq S(\pi'')$;
2. $\pi' < \pi'' \Leftrightarrow S(\pi') \leq D_p(\pi'')$.

Перед тем как доказывать данную теорему сформулируем и докажем несколько вспомогательных утверждений:

Утверждение 1. Если $\pi \in \Pi_P^V \setminus \{\pi_{\max}\}$, то $\forall A \in \pi$ разбиение $\pi' = \pi \setminus \{A\} \in \Pi_P^{V \setminus A}$. Причем

1. $D_p(\pi) \geq D_p(\pi')$;
2. $S(\pi) \leq S(\pi')$.

Доказательство.

Пусть $\pi = \{A_i\}_{i=1}^k$, где $k > 1$ (так как $\pi \neq \pi_{\max}$), и $\pi' = \pi \setminus \{A_l\}$ для любого фиксированного $l = \overline{1, k}$.

Тогда рассмотрим:

1. $D_p(\pi') = \max\{D_p(A_i) \mid i = \overline{1, k} \wedge i \neq l\} \leq \max\{D_p(A_i) \mid i = \overline{1, k}\} = D_p(\pi)$, т.е. $D_p(\pi) \geq D_p(\pi')$;
2. $S(\pi') = \begin{cases} \min\{S(A_i, A_j) \mid i, j = \overline{1, k} \wedge i \neq j \wedge i \neq l \wedge j \neq l\}, & |\pi'| > 1 \\ +\infty, & |\pi'| = 1 \end{cases}$
 $\geq \min\{S(A_i, A_j) \mid i, j = \overline{1, k} \wedge i \neq j\} = S(\pi)$, т.е. $S(\pi) \leq S(\pi')$.

Так как π — регулярное разбиение множества V , то получаем $D_p(\pi') \leq D_p(\pi) < S(\pi) \leq S(\pi')$, откуда немедленно следует, что π' является регулярным разбиением множества $V \setminus A_l$. ■

Следствие. Если $\pi = \{A_i\}_{i=1}^k \in \Pi_P^V \setminus \{\pi_{\max}\}$ ($k > 1$, так как $\pi \neq \pi_{\max}$), то $\forall 0 < l < k$ и $\forall \{A_j\}_{j=1}^l \subset \{A_i\}_{i=1}^k$, разбиение $\pi' = \{A_j\}_{j=1}^l \in \Pi_P^{V'}$, где $V' = \bigcup_{j=1}^l A_j$.

Причем $D_p(\pi) \geq D_p(\pi')$ и $S(\pi) \leq S(\pi')$. Данное следствие легко доказывается, последовательно применяя доказанное утверждение.

Утверждение 2. Для любого непустого множества V и любого свойства $P \in \text{МС}$ выполняется следующее:

1. $(\forall A \subseteq V | A \neq \emptyset)(D_{P_{\text{связн.}}} (A) \leq D_P (A) \leq D_{P_{\text{полн.}}} (A))$;
2. $(\forall \pi - \text{разбиение множества } V)(D_{P_{\text{связн.}}} (\pi) \leq D_P (\pi) \leq D_{P_{\text{полн.}}} (\pi))$;
3. $|\Pi_{P_{\text{полн.}}}^V| \leq |\Pi_P^V| \leq |\Pi_{P_{\text{связн.}}}^V|$.

Доказательство.

Из определения функции $D_P(A)$ и свойства монотонных связных свойств графов $(\forall G \in \Gamma)(\forall P \in \text{МС})(P_{\text{связн.}}(G) \Leftarrow P(G) \Leftarrow P_{\text{полн.}}(G))$, вытекает справедливость пунктов 1 и 3 нашего утверждения.

Так как, если $(\forall A \in \pi)(D_{P_{\text{связн.}}} (A) \leq D_P (A) \leq D_{P_{\text{полн.}}} (A))$, то очевидно, что и $\max\{D_{P_{\text{связн.}}} (A) | A \in \pi\} \leq \max\{D_P (A) | A \in \pi\} \leq \max\{D_{P_{\text{полн.}}} (A) | A \in \pi\}$, а, следовательно, $D_{P_{\text{связн.}}} (\pi) \leq D_P (\pi) \leq D_{P_{\text{полн.}}} (\pi)$. Пункт 2 доказан. ■

Утверждение 3. Для любого множества V такого, что $|V| > 1$, имеют место следующие утверждения:

1. $(\forall A' = \{A_i\}_{i=1}^l | 1 < l \leq |V|)(D_P(\bigcup_{i=1}^l A_i) \geq S(A'))$;
2. Если $\pi = A^k = \{A_i\}_{i=1}^k$ – разбиение множества V и $\pi \neq \pi_{\text{max}}$, то $(\forall A' \subseteq A^k | 1 < l \leq k)(D_P(\bigcup_{i=1}^l A_i) \geq S(\pi))$;
3. Если $\pi = A^k = \{A_i\}_{i=1}^k \in \Pi_P^V \setminus \{\pi_{\text{max}}\}$, то $(\forall A' \subseteq A^k | 1 < l \leq k)(\forall 1 < j \leq k)(D_P(\bigcup_{i=1}^l A_i) > D_P(A_j))$.

Доказательство.

Используя утверждение 1, получаем доказательство пункта 1:

$$D_P(\bigcup_{i=1}^l A_i) \geq D_{P_{\text{связн.}}}(\bigcup_{i=1}^l A_i) \geq \min\{S(A_i, A_j) | i \neq j \wedge i = \overline{1, l} \wedge j = \overline{1, l}\} = S(A'),$$

так как $l > 1$. Используя свойства функции $S(A^k)$, отсюда, очевидно, следует доказательство пункта 2, так как $k \geq l > 1$ и $S(A') \geq S(A^k) = S(\pi)$. Если к тому же разбиение π является регулярным, то, продолжая цепочку неравенств

$$S(\pi) > D_P(\pi) \geq D_P(A_j) \text{ для любого } A_j \in \pi,$$

получаем доказательство пункта 3 нашего утверждения. ■

Теперь перейдем к *доказательству теоремы*:

Будем доказывать все три эквивалентности параллельно.

Необходимость.

Если $\pi' = \pi''$ то очевидно, что $D_P(\pi') = D_P(\pi'')$ и $S(\pi') = S(\pi'')$.

Если же $\pi' < \pi''$, то это означает, что $(\exists A \in \pi'')(\exists B_1, \dots, B_l \in \pi' | l > 1)(A = \bigcup_{i=1}^l B_i)$.

Используя регулярность разбиений π' и π'' , свойства функций $D_p(\pi)$ и $S(\pi)$, а также утверждение 3, получаем следующую цепочку неравенств

$$D_p(\pi') < S(\pi') \leq D_p\left(\bigcup_{i=1}^l B_i\right) = D_p(A) \leq D_p(\pi'') < S(\pi'').$$

Откуда немедленно следует, что $D_p(\pi') < D_p(\pi'')$, $S(\pi') < S(\pi'')$, $S(\pi') \leq D_p(\pi'')$.

Достаточность.

Рассмотрим сначала случай, когда $\pi'' = \pi_{\max}$. Теорема будет выполнена, так как очевидно, что любое другое регулярное разбиение будет меньше максимального.

Итак, пусть $\pi'' \neq \pi_{\max}$. Рассмотрим каждое из трех неравенств в отдельности:

$$1. D_p(\pi') \leq D_p(\pi'') \Rightarrow$$

$$D_p(B) \leq D_p(\pi') \leq D_p(\pi'') < S(\pi'') \leq S(A_i, A_j);$$

$$2. S(\pi') \leq S(\pi'') \Rightarrow$$

$$D_p(B) \leq D_p(\pi') < S(\pi') \leq S(\pi'') \leq S(A_i, A_j);$$

$$3. S(\pi') \leq D_p(\pi'') \Rightarrow$$

$$D_p(B) \leq D_p(\pi') < S(\pi') \leq D_p(\pi'') < S(\pi'') \leq S(A_i, A_j).$$

Таким образом, из любого из этих трех неравенств, следует, что $(\forall B \in \pi')(\forall A_i, A_j \in \pi'' | i \neq j)(D_p(B) < S(A_i, A_j))$.

Будем вести доказательство от противного. Пусть $\neg(\pi' \leq \pi'')$ ($\neg(\pi' < \pi'')$), тогда

$$(\exists B \in \pi')(\exists A_1, \dots, A_l \in \pi'' | l > 1)((A_i \cap B \neq \emptyset | i = \overline{1, l}) \wedge (A_j \cap B = \emptyset | j > l)),$$

причем элементы из множества $\{A_i \cap B\}_{i=1}^l$ попарно не пересекаются, так как множества A_i являются атомами разбиения π'' . Используя утверждение 3, рассмотрим величину $D_p(B)$:

$$D_p(B) = D_p\left(\bigcup_{i=1}^l (A_i \cap B)\right) \geq S(\{A_i \cap B\}_{i=1}^l).$$

Без ограничения общности можно считать, что минимум в определении функции $S(\{A_i \cap B\}_{i=1}^l)$ достигается на элементах $A_1 \cap B$ и $A_2 \cap B$. Таким образом, мы имеем следующее:

$$D_p(B) = D_p\left(\bigcup_{i=1}^l (A_i \cap B)\right) \geq S(\{A_i \cap B\}_{i=1}^l) = S(A_1 \cap B, A_2 \cap B) \geq S(A_1, A_2).$$

Последнее неравенство следует из свойств симметричности и монотонности функции $S(A, B)$.

В результате мы получили, что $(\exists B \in \pi')(\exists A_1, A_2 \in \pi'')(D_p(B) \geq S(A_1, A_2))$, но это приводит нас к противоречию. Следовательно, предположение о том, что $\neg(\pi' \leq \pi'')$ ($\neg(\pi' < \pi'')$), неверно.

Таким образом, мы имеем $\pi' \leq \pi''$ ($\pi' < \pi''$), что и требовалось доказать.

Очевидно, что из равенства $S(\pi') = D_p(\pi'')$ не может следовать равенство разбиений π' и π'' . Это следует из регулярности разбиений, так как по определению у регулярного разбиения $D_p(\pi) < S(\pi)$. ■

Следствие. Если $\pi', \pi'' \in \Pi_p^V$, то

$$\pi' = \pi'' \Leftrightarrow D_p(\pi') = D_p(\pi'') \Leftrightarrow S(\pi') = S(\pi'').$$

Доказательство следует из эквивалентности $\pi' = \pi'' \Leftrightarrow (\pi' \leq \pi'') \wedge (\pi'' \leq \pi')$.

Замечание. Следует отметить, что эквивалентность

$$\pi' < \pi'' \Leftrightarrow S(\pi') \leq D_p(\pi'')$$

в формулировке теоремы является более сильной, чем другие эквивалентности, так как из неравенства $S(\pi') \leq D_p(\pi'')$ и регулярности разбиений следуют неравенства $D_p(\pi') < D_p(\pi'')$ и $S(\pi') < S(\pi'')$:

$$D_p(\pi') < S(\pi') \leq D_p(\pi'') < S(\pi''). \quad \blacksquare$$

Доказанная теорема дает нам право утверждать, что множество регулярных разбиений $\Pi_p^V = \{\pi_1, \dots, \pi_N\}$ некоторого непустого множества V на основе монотонного связного свойства P является линейно упорядоченным множеством относительно порядка на разбиениях, т.е. из всех элементов этого множества можно выстроить следующую цепочку неравенств:

$$\pi_{\min} = \pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_{N-1} < \pi_N = \pi_{\max}.$$

Откуда немедленно следует, что $|\Pi_p^V| \leq |V|$.

4. Описание алгоритмов построения всех регулярных разбиений некоторого множества

Здесь мы рассмотрим два алгоритма построения множества Π_p^V для произвольного непустого множества V и произвольного монотонного связного свойства графов P — алгоритмы построения объединением и дроблением.

Алгоритм построения множества Π_p^V объединением:

1. $R = \emptyset$ — здесь мы будем накапливать полученные регулярные разбиения;
2. Строим множество $S = \{\Delta(a, b) \mid a, b \in V, a \neq b\} \cup \{0, +\infty\}$;
3. Сортируем множество S по возрастанию;
4. Для каждого $\alpha \in S$:
 - a. Строим граф $G_\alpha(V)$;
 - b. Выделяем компоненты связности $\{G_i\}_{i=1}^k$ графа $G_\alpha(V)$;
 - c. Если выполнено одно из следующих трех условий, то добавляем разбиение $\pi_\alpha = \{V(G_i)\}_{i=1}^k$ к множеству R (конечно, если еще $\pi_\alpha \notin R$):

$$1) \quad \alpha = 0 - \pi_\alpha = \pi_{\min};$$

$$2) \quad \alpha = +\infty - \pi_\alpha = \pi_{\max};$$

$$3) (\forall i = \overline{1, k})(P(G_i)).$$

5. $\Pi_p^V = R$. Конец.

Алгоритм построения множества Π_p^V дроблением идентичен предыдущему алгоритму, за исключением того, что множество S нужно сортировать не по возрастанию, а по убыванию.

Докажем корректность приведенных алгоритмов:

Пусть множество R — это множество, полученное в результате работы любого из приведенных выше алгоритмов. Очевидно, что элементами данного множества являются различные разбиения множества V , так как компоненты связности графа разбивают его на попарно непересекающиеся по вершинам части. Покажем, что любое разбиение π_α из множества R является регулярным. Действительно, если π_{α_0} — разбиение, добавленное к множеству R на некотором шаге работы алгоритма, то по построению π_{α_0} является либо тривиальным разбиением, либо $(\forall A \in \pi_{\alpha_0})(P(G_{\alpha_0}(A)))$. Если π_{α_0} — тривиальное разбиение, то оно является регулярным. Теперь рассмотрим случай, когда π_{α_0} не является тривиальным разбиением. В этом случае по построению мы имеем, что

$$(\forall A \in \pi_{\alpha_0})(D_p(A) \leq \alpha_0)$$

и

$$(\forall A, B \in \pi_{\alpha_0} | A \neq B)((A \cap B = \emptyset) \wedge ((\forall a \in A)(\forall b \in B)(\Delta(a, b) > \alpha_0))).$$

А это означает, что $(\forall A, B, C \in \pi_{\alpha_0} | A \neq B)(D_p(C) \leq \alpha_0 < S(A, B))$. Следовательно, $D_p(\pi_{\alpha_0}) < S(\pi_{\alpha_0})$, что и требовалось доказать. Также из доказанной нами теоремы, следует, что множество R состоит из всевозможных регулярных разбиений множества V , так как используемый алгоритм построения множества R перебирает все возможные различные $D_p(\pi_\alpha)$. Таким образом мы получаем, что $\Pi_p^V = R$. ■

Следует отметить, что полученное, в результате работы рассмотренных нами алгоритмов, множество Π_p^V уже является линейно упорядоченным. Соответственно, построение объединением упорядочивает множество Π_p^V по возрастанию, а построение дроблением — по убыванию.

Проведем оценку данных алгоритмов:

Оценку сложности алгоритмов будем производить в зависимости от количества элементов множества V . Пусть $|V| = n$.

Оценим отдельно некоторые шаги алгоритмов:

1. Построение множества S : $O(n^2)$;
2. Сортировка множества S независимо от направления: $O(n^2 \cdot \log_2 n)$;
3. Построение графа $G_\alpha(V)$: $O(n^2)$;
4. Выделение компонент связности графа $G_\alpha(V)$: $O(n^2)$;

5. Вычисление функции $P(G_i): O(p(|V(G_i)|))$, где $p(n)$ – оценка сложности алгоритма проверки выполнимости свойства P для графа с n вершинами.

Теперь легко видеть, что сложность как алгоритма построения объединением, так и алгоритма построения дроблением, не превосходит $O(n^3 \cdot \max\{n, p(n)\})$.

5. Некоторые примеры регулярных разбиений

Ниже приведены все регулярные разбиения множества из 10 точек. В качестве Δ -функции взята евклидова метрика, а монотонного связного свойства графов – полнота.



Рис. 1.1. Первое регулярное разбиение.

Рис. 1.2. Второе регулярное разбиение.

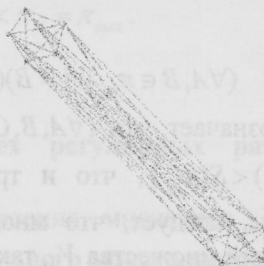


Рис. 1.3. Третье регулярное разбиение.

Рис. 1.4. Четвертое регулярное разбиение.

На рисунках 1.1 и 1.3 находятся тривиальные разбиения.

Вот еще несколько примеров регулярных разбиений, различных множеств, при различных параметрах:

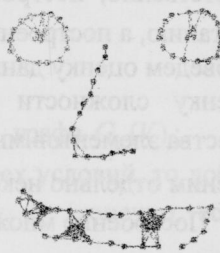


Рис. 2.1. Множество точек.

Рис. 2.2. Регулярное разбиение. Евклидова метрика. Связность.

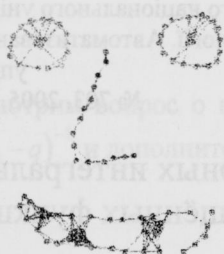


Рис. 2.3. Регулярное разбиение.
Чебышевская метрика. Связность.



Рис. 2.4. Регулярное разбиение. Уличная
метрика. Связность.

КЛАСТЕР -
АНАЛИЗ

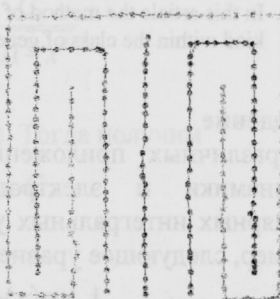


Рис. 3. Регулярное разбиение. Уличная
метрика. Связность.

Рис. 4. Регулярное разбиение. Уличная
метрика. Связность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Патрик Э.А. Основы теории распознавания образов. — М.: Советское радио, 1980. — 408 с.
2. Сокал Р.Р. Классификация и кластер. — М.: Мир, 1980.
3. Фукунага К., Введение в статистическую теорию распознавания образов. — М.: Наука, 1979. — 368 с.
4. Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. — М.: Мир, 1998. — 703 с.
5. Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — 1104 с.
6. Жолткевич Г.Н. Автоматизация проектирования технологической оснастки: теория и практика. — К.: Техніка, 1988. — 263 с.
7. Жолткевич Г.Н., Сергеев Л.Е. Многоуровневая структура компонентных архитектур программного обеспечения. — Інформаційно-керуючі системи в залізничному транспорті. — №6, 2003. — с. 8-10.

Метод дискретных вихрей для сингулярных интегральных уравнений первого рода в классе обобщённых функций

И. К. Лифанов, А. С. Ненашев

Институт Вычислительной математики РАН

Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского

In this article the method of discrete curls for the singular integral equations of the first kind within the class of generalized functions is considered.

Введение

В различных приложениях, связанных с решением прикладных задач аэродинамики и электродинамики приходится рассматривать решение сингулярных интегральных уравнений в классе обобщённых функций, то есть, например, следующее уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{x - x_0} + \alpha \int_{-1}^1 K(x, x_0) g(x) dx = f(x_0), \quad x_0 \in (-1, 1). \quad (1)$$

где $K(x, x_0)$ геллеровская функция, рассматривается в случаях, когда правая часть может быть неинтегрируемой функцией $f(x_0) = (x_0 - q)^{-1}$. Как показано в [1] для характеристического уравнения (1) ($\alpha = 0$) частное решение $g(x)$ является дельта-функцией. Для таких функций сингулярный интеграл в (1) надо понимать как оператор в обобщённых весовых Соболевских пространствах, опираясь на известные [2] спектральные соотношения

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) dx}{\sqrt{1-x^2} (x_0 - x)} = U_{n-1}(x_0), \quad (2)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} U_n(x) dx}{x_0 - x} = T_{n+1}(x_0), \quad (3)$$

где $x_0 \in (-1, 1)$, $n = 0, 1, \dots$, $T_n(x)$, $U_n(x)$ - полиномы Чебышева первого и второго рода, кроме того, будем считать, что $U_{-1}(x) \equiv 0$.

При $\alpha = 0$ получим так называемое характеристическое сингулярное интегральное уравнение на отрезке

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{x - x_0} = f(x_0). \quad (4)$$

Будем рассматривать решения уравнений (1) и (4) в классе функций, обращающихся в бесконечность на концах отрезка $[-1, 1]$ и удовлетворяющих дополнительному условию

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = C. \quad (5)$$

Рассмотрим вопрос о нахождении решения уравнения (4) с правой частью типа $(x_0 - q)^{-1}$ и дополнительным условием (5)

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x) dx}{x - x_0} = \frac{1}{x_0 - q}, \quad q \in (-1, 1). \quad (6)$$

Если понимать интегральные оператор в уравнении (6) как оператор в обобщённых Соболевских пространствах, то можно записать решение уравнения (6) в следующем виде

$$g(x) = -\pi \delta(x - q) + \frac{C_0}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (7)$$

где C_0 - константа, подлежащая определению.

Для нахождения C_0 воспользуемся условием (5). Тогда получим

$$-\pi + C_0 \arcsin x \Big|_{-1}^1 = C, \\ C_0 = \frac{C}{\pi} + 1. \quad (8)$$

Вернемся теперь к рассмотрению общего сингулярного уравнения на отрезке (1). Так как функция $K(x, x_0)$ является гёлдеровской по обоим своим аргументам, то можно применить обратный сингулярный оператор для соответствующего характеристического уравнения (4) к обеим частям уравнения (1)

$$g(x) + \alpha S^{-1} \left(\int_{-1}^1 K(x, x_0) g(x) dx, x \right) = S^{-1} (f(x_0), x), \quad (9)$$

где $S^{-1}(\cdot)$ - обратный сингулярный оператор для характеристического уравнения (4) в соответствующем классе поиска решений.

Поскольку применение обратного сингулярного оператора к гёлдеровской функции даёт также гёлдеровскую функцию, то ядро интегрального оператора в уравнении (9) является гёлдеровским, поэтому данное уравнение является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. В тех случаях, когда α не является собственным числом, можно рассматривать вопрос о построении численного метода решения данного уравнения.

Вычислительная схема метода дискретных вихрей для характеристического уравнения (3) при указанной правой части

Возьмём на отрезке $[-1, 1]$ точки $x_i = -1 + (i-1)h$, $i = 1, \dots, N$, $h = 2(N-1)^{-1}$ и точки $x_{0j} = x_j + h/2$, $j = 1, \dots, N-1$. Для численного решения уравнения (1) при правой части вида $(x_0 - q)^{-1}$ надо взять схему

$$\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^N g_N(x_i) \frac{h}{x_i - x_{0j}} = \frac{1}{x_{0j} - q}, \quad j=1, \dots, N-1,$$

$$\sum_{i=1}^N g_N(x_i) = C, \quad (10)$$

где $q \in \{x_i\}$, $i=2, \dots, N-1$.

Как следует из результатов [2], имеем

$$g_N(x_i) = \pi \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} \frac{h}{x_i - x_{0j}} \frac{1}{x_{0j} - q} + \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} C, \quad i=1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\text{где } I_{1,i}^{(N)} = \frac{1}{x_{0N} - x_i} \frac{\prod_{m=1}^N (x_{0m} - x_i)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N (x_m - x_i)}, \quad I_{1,0j}^{(N)} = (x_{0N} - x_{0j}) \frac{\prod_{m=1}^N (x_{0j} - x_m)}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^N (x_{0j} - x_{0m})}.$$

Перепишем систему (11) в виде

$$g_N(x_i) = \pi \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} \sum_{j=1}^N \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} \frac{1}{x_i - q} \left(\frac{h}{x_i - x_{0j}} + \frac{h}{x_{0j} - q} \right) + \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} C, \quad (12)$$

$$i \neq i_q, \quad x_{i_q} = q,$$

$$g_N(q) = -\pi \frac{1}{h} I_{1,i_q}^{(N)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} \frac{h}{(x_{0j} - q)^2} + \frac{1}{h} I_{1,i_q}^{(N)} C. \quad (13)$$

В работе [2] получены следующие асимптотические представления

$$\frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} + O\left(\frac{h}{(1-x_i^2)^{3/2}}\right), \quad (14)$$

$$\frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{1-x_{0j}^2} + O\left(\frac{h}{\sqrt{1-x_{0j}^2}}\right). \quad (15)$$

Введём теперь в рассмотрение две функции

$$g_N^*(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi}\right), & i=i_q, \\ g_N(x_i), & i=1, \dots, N, \quad i \neq i_q, \end{cases} \quad (16)$$

$$g_N^{**}(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq i_q, \\ g_N(q) - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi}\right), & i=i_q. \end{cases} \quad (17)$$

Из формул (16) и (17) видно, что выполняется равенство

$$g_N^*(x_i) + g_N^{**}(x_i) = g_N(x_i), \quad i=1, \dots, N. \quad (18)$$

Рассмотрим вначале функцию $g_N^*(x_i)$. При $i \neq i_q$ с учётом соотношений (14) и (15) получим, что

$$\begin{aligned} g_N^*(x_i) &= \pi \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} \frac{h}{x_i - x_{0j}} \frac{1}{x_{0j} - q} + \frac{1}{h} I_{1,i}^{(N)} C = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \frac{1}{x_i - q} \sum_{j=1}^{N-1} \sqrt{1-x_{0j}^2} \left(\frac{1}{x_{0j} - x_i} - \frac{1}{x_{0j} - q} \right) h + \frac{1}{\pi} \frac{C}{\sqrt{1-x_i^2}} + O \left(\frac{h}{(1-x_i^2)^{3/2}} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \frac{1}{x_i - q} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x_0^2} \left(\frac{1}{x_0 - x_i} - \frac{1}{x_0 - q} \right) dx_0 + \frac{1}{\pi} \frac{C}{\sqrt{1-x_i^2}} + O \left(\frac{h}{(1-x_i^2)^{3/2}} \right). \end{aligned}$$

Напомним известное равенство [3]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x_0 - x} dx = x_0, \quad x_0 \in (-1, 1). \quad (19)$$

Поэтому с учётом определения (16)

$$g_N^*(x_i) = \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi} \right) + O \left(\frac{h}{(1-x_i^2)^{3/2}} \right), \quad i = 1, \dots, N. \quad (20)$$

Вычислим теперь значение функции $g_N^{**}(x_i)$ при $x_i = q$.

$$\begin{aligned} g_N^{**}(q) &= -\pi \frac{1}{h} I_{1,i_q}^{(N)} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{h} I_{1,0j}^{(N)} \frac{h}{(x_{0j} - q)^2} + \frac{1}{h} I_{1,i_q}^{(N)} C - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi} \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-x_{0j}^2}}{(x_{0j} - q)^2} h - \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} + O \left(\frac{h}{(1-x_i^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Представим конечную сумму в следующем виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-x_{0j}^2} h}{(x_{0j} - q)^2} &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-x_{0j}^2} - \sqrt{1-q^2} + \frac{q(x_{0j} - q)}{\sqrt{1-q^2}}}{(x_{0j} - q)^2} h + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-q^2}}{(x_{0j} - q)^2} h - \\ &= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{qh}{\sqrt{1-q^2}(x_{0j} - q)} = S_N^{(1)} + S_N^{(2)} - S_N^{(3)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим каждую из этих сумм в отдельности.

Так как

$$\lim_{x_0 \rightarrow q} \frac{\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-q^2} + \frac{q(x_0 - q)}{\sqrt{1-q^2}}}{(x_0 - q)^2} = \lim_{x_0 \rightarrow q} \frac{\frac{-x_0}{\sqrt{1-x_0^2}} + \frac{q}{\sqrt{1-q^2}}}{2(x_0 - q)} = -\frac{1}{(1-q^2)^{3/2}} < \infty,$$

то $S_N^{(1)}$ является суммой Дарбу соответствующего определённого интеграла, поэтому

$$S_N^{(1)} = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2} - \sqrt{1-q^2} + \frac{q(x_0-q)}{\sqrt{1-q^2}}}{(x_0-q)^2} dx_0 + O\left(\frac{h}{(1-q^2)^{3/2}}\right) = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x_0^2}}{(x_0-q)^2} dx_0 -$$

$$-\sqrt{1-q^2} \int_{-1}^1 \frac{dx_0}{(x_0-q)^2} + \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^1 \frac{dx_0}{(x_0-q)} + O\left(\frac{h}{(1-q^2)^{3/2}}\right).$$

Напомним известное равенство [2]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{(x-x_0)^2} dx = -1, \quad (22)$$

тогда

$$S_N^{(1)} = -\pi + \sqrt{1-q^2} \left(\frac{1}{1-q} + \frac{1}{1+q} \right) + \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^1 \frac{dx_0}{(x_0-q)} + O\left(\frac{h}{(1-q^2)^{3/2}}\right) =$$

$$= -\pi + \frac{2}{\sqrt{1-q^2}} + \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^1 \frac{dx_0}{(x_0-q)} + O\left(\frac{h}{(1-q^2)^{3/2}}\right). \quad (23)$$

Вычислим теперь $S_N^{(3)}$.

$$S_N^{(3)} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h}{x_{0j}-q} \quad (24)$$

Согласно свойств квадратурных сумм для сингулярных интегралов [3] получим, что

$$S_N^{(3)} = \frac{q}{\sqrt{1-q^2}} \int_{-1}^1 \frac{dx_0}{(x_0-q)} + O\left(\frac{h}{(1-q^2)^{3/2}}\right). \quad (25)$$

Из выражений (23) и (25) следует

$$S_N^{(1)} - S_N^{(3)} = -\pi + \frac{2}{\sqrt{1-q^2}} + O\left(\frac{h}{(1-q^2)^{3/2}}\right). \quad (26)$$

Наконец, вычислим сумму $S_N^{(2)}$.

$$S_N^{(2)} = \sqrt{1-q^2} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{h}{(x_{0j}-q)^2} = \frac{\sqrt{1-q^2}}{h} \left(2 \sum_{k=1}^m \frac{1}{(k+1/2)^2} + \sum_{k=m}^M \frac{1}{(k+1/2)^2} \right), \quad (27)$$

где $m = \min(i_q, N-i_q-1)$, $M = \max(i_q, N-i_q-1)$.

Так как точка q - фиксированная точка, то из $N \rightarrow \infty$ и $m \rightarrow \infty$ следует, что второе слагаемое в формуле (27) стремиться к нулю. Далее известна формула [2]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad (28)$$

поэтому

$$S_N^{(2)} = \frac{\sqrt{1-q^2}\pi^2 + O(h)}{h}. \quad (29)$$

Окончательно получим

$$\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\sqrt{1-x_{0j}^2}h}{(x_{0j}-q)^2} = -\pi + \frac{\sqrt{1-q^2}\pi^2 + O(h)}{h} + \frac{2}{\sqrt{1-q^2}} + O\left(\frac{h}{(1-q^2)^{3/2}}\right) \quad (30)$$

Подставим (30) в (21), тогда

$$g_N^{**}(q) = \frac{-\pi + O(h)}{h}. \quad (31)$$

Нетрудно заметить, что функция $g_N^{**}(x_i)$ является дискретным аналогом дельта - функции. Действительно, если ввести в рассмотрение кусочно-непрерывную функцию

$$G_N^{**}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [x_{0i_q-1}, x_{0i_q}], \\ g_N^{**}(q), & x \in [x_{0i_q-1}, x_{0i_q}], \end{cases} \quad (32)$$

то для любой интегрируемой на интервале $(-1,1)$ и липшицевой в окрестности точки q функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 G_N^{**}(x) f(x) dx = -\pi f(q). \quad (33)$$

На основе выражений (20) и (31) получаем, что

$$g_N(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi}\right) + O\left(\frac{h}{(1-x_i^2)^{3/2}}\right), & i \neq i_q, \\ -\frac{\pi}{h} + \frac{1}{\sqrt{1-x_i^2}} \left(1 + \frac{C}{\pi}\right) + O\left(\frac{h}{(1-x_i^2)^{3/2}}\right), & i = i_q. \end{cases} \quad (34)$$

Перейдём теперь к рассмотрению численного решения полного сингулярного уравнения на отрезке (1).

Вычислительная схема метода дискретных вихрей для полного уравнения (1) при указанной правой части

Введём каноническое разбиение отрезка $[-1,1]$ как и в предыдущем пункте. Тогда численная схема для решения уравнения (1) будет выглядеть следующим образом

$$\frac{1}{\pi} \gamma_n + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} g_N(x_i) \left(\frac{h}{x_i - x_{0j}} + hK(x_i, x_{0j}) \right) = \frac{1}{x_{0j} - q}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (35)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} g_N(x_i) = C, \quad (36)$$

где $q \in \{x_i\}$, $i = 2, \dots, N-2$.

Для доказательства сходимости данной численной схемы представим численное решение уравнения (35) в виде следующей суммы

$$g_N(x_i) = \psi_N(x_i) + \rho_N(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad (37)$$

где $\psi_N(x_i)$ - численное решение соответствующего характеристического уравнения, рассмотренное в предыдущем пункте. Тогда система уравнений (35) и (36) преобразуется к следующему виду

$$\frac{1}{\pi} \gamma_n^* + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \rho_N(x_i) \left(\frac{h}{x_i - x_{0j}} + hK(x_i, x_{0j}) \right) = -\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \psi_N(x_i) hK(x_i, x_{0j}), \quad (38)$$

$$\sum_{i=1}^{N-1} \rho_N(x_i) = 0. \quad (39)$$

Рассмотрим предел правой части уравнения (38) при $h \rightarrow 0$. Согласно свойству решения характеристического уравнения получим, что

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \psi_N(x_i) hK(x_i, x_{0j}) = K(q, x_{0j}) + O\left(\frac{h}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Таким образом, правая часть системы (38) является дискретным приближением гёльдеровской функции. Для систем такого вида в [2] была доказана сходимость к точному решению соответствующего полного сингулярного уравнения (1) на отрезке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифанов И.К., Ненашев А.С. Гиперсингулярные интегральные уравнения и теория проволочных антенн, Дифференциальные уравнения, 2005, т. 41, № 1, с. 121-137.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент, Москва, ТОО "Янус", 1995, 520 с.
3. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях, Москва, Наука, 1985, 256 с.

Алгоритм функционирования многоагентной системы динамического управления компьютерными сетями

Ю. И. Лосев, К. М. Руккас

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The modern approach to artificial intelligence is centered around the concept of a multiagent system. The paper describes variant of the work of agent of an information network control system. In the article proposes algorithm of work for multiagent system of network control.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

В настоящее время растет потребность в передаче различного вида информации по компьютерным сетям. Важнейшей задачей решаемой в компьютерных сетях является динамическое управление (ДУ), которое обеспечивает распределение потоков информации с целью наилучшего использования ресурсов сети при удовлетворении требований абонентов по доставке информации. Однако при динамическом управлении компьютерными сетями возникают трудности, связанные с интеграцией различных потоков информации, которые предъявляют различные требования к качеству доставки информации. Одним из путей решения этой проблемы является использование многоагентных систем (МАС).

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа опирается на анализ методов синтеза МАС [2], анализ особенностей использования МАС при динамическим управления цифровыми сетями интегрального обслуживания.

3. Нерешенные проблемы и цели работы

Разработать модель взаимодействия агентов, которая бы обеспечила эффективное функционирование МАС динамического управления компьютерными сетями.

4. Анализ структуры МАС динамического управления компьютерными сетями

В [2] приведены различные типы структур МАС. Из которых наиболее общими типами структур являются иерархические и гетерархии. Подробный анализ эффективности таких систем применительно к динамическому управлению компьютерными сетями приведен в [1]. На основании проведенного анализа в работе [1] разработана структура МАС ДУ компьютерными сетями (см. Рис. 1). Алгоритм работы такой МАС состоит в следующем: на центральном узле коммутации располагается агент, управляющий сетью. Его

задача состоит в том, что он устанавливает наиболее важные требования по качеству обслуживания той или иной информации в сети, в случае необходимости с помощью управляющих воздействий корректирует действия других агентов, а также устраняет возникающие в системе конфликтные ситуации.

На других узлах располагаются агенты, управляющие соответствующими центрами коммутации. Эти агенты решают задачу управления распределением ресурсов в центрах коммутации.

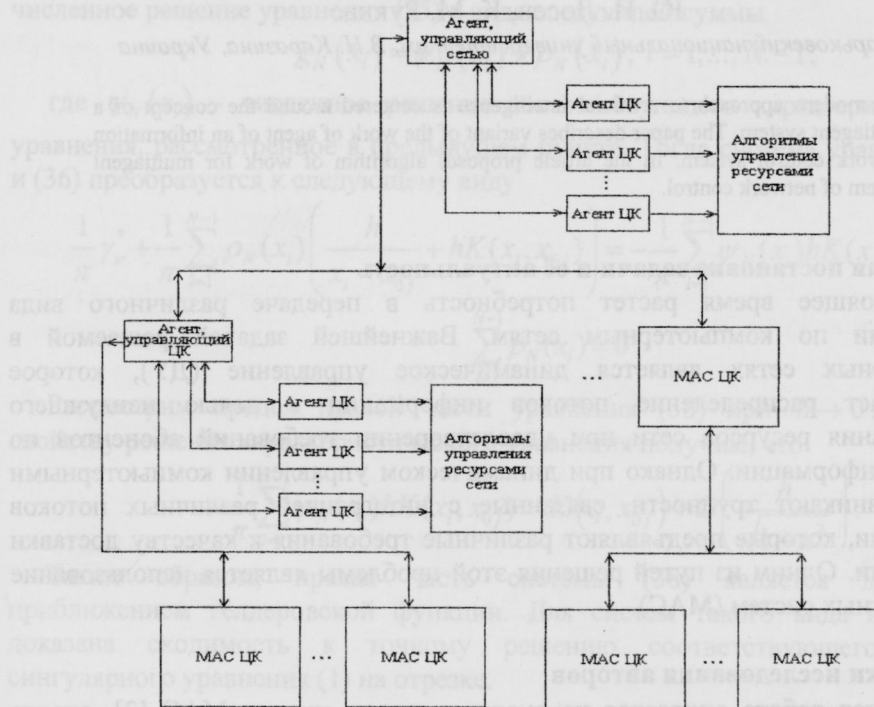


Рис.1. Структурная схема МАС ДУ компьютерной сети.

На каждом центре коммутации кроме управляющего агента располагаются другие агенты, отмеченные на рассматриваемой схеме как агенты центра коммутации. Они решают частные задачи и участвуют в управлении распределением отдельных видов ресурсов. Функции агента, управляющего ЦК, по сути, аналогичны функциям агента, управляющего сетью, но только распространяются в масштабах узла. Таким образом, на каждом центре коммутации располагается совокупность взаимосвязанных агентов, образующих многоагентную систему динамического управления центром коммутации – МАС ЦК. Многоагентные системы отдельных ЦК являются подсистемами многоагентной системы динамического управления всей сети. Структурная схема МАС ЦК представлена на Рис. 2. На этой схеме каждому направлению связи соответствует свой управляющий агент. Число таких агентов соответствует количеству направлений передачи на данном ЦК. Эти агенты определяют значения показателей, по которым осуществляется выбор направления передачи. Полученные результаты передаются агенту,

управляющему ЦК, который осуществляет выбор направления. Кроме того, агент, управляющий ЦК, оценивая эффективность передачи информации, определяет правильность выбора направления. Если эффективность доставки сообщений не удовлетворяет предъявляемым требованиям, то для их передачи выбирается другое направление.

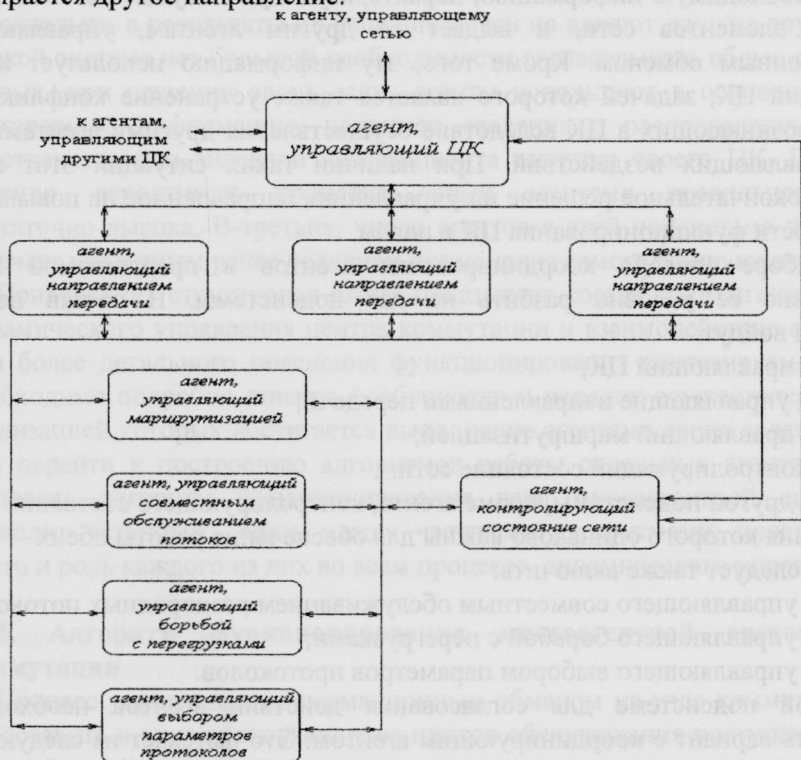


Рис. 2. Структурная схема МАС ЦК.

Агент, управляющий выбранным направлением передачи, взаимодействует с агентом, управляющим маршрутизацией, и дает ему необходимую информацию для выбора маршрута. Выполнив свою задачу, агент, управляющий маршрутизацией, передает данные о выбранном маршруте агенту, управляющему совместным обслуживанием разнородных потоков. С помощью этого агента, который отвечает за формирование очередности передачи поступающей информации, определяется момент времени начала передачи обслуживаемой информации. Задачей этого агента является также установления факта возникновения в канале перегрузки. Если этот факт установлен, то соответствующая информация передается агентам, управляющим борьбой с перегрузками. С помощью этих агентов принимаются меры, направленные на уменьшение загруженности узлов и эффективное распределение ресурсов буферного пространства. Выполнение этих мер способствуют ликвидации перегрузки и уменьшению вероятности возникновения блокировок.

Перед тем, как передавать информацию, свою задачу выполняет агент, управляющий выбором параметров протокола. С помощью этого агента устанавливаются такие значения величины окна и длительности тайм-аута для

данного соединения, которые обеспечат максимальную эффективность доставки.

Выполнение указанными агентами своих задач возможно при их взаимодействии с агентом, контролирующим состояние сети. Этот агент собирает необходимую информацию, характеризующую текущее состояние тех или иных элементов сети, и выдает ее другим агентам, управляющим информационным обменом. Кроме того, эту информацию использует агент, управляющий ЦК, задачей которого является также устранение конфликтных ситуаций, возникающих в ЦК вследствие осуществления другими агентами ЦК своих управляющих воздействий. При наличии таких ситуаций этот агент принимает окончательное решение по управлению, направленное на повышение эффективности функционирования ЦК в целом.

При выборе способа координирования агентов в предлагаемой MAC целесообразно ее условно разбить на две подсистемы. В состав первой подсистемы войдут:

- агент, управляющий ЦК;
- агенты, управляющие направлениями передачи;
- агент, управляющий маршрутизацией;
- агент, контролирующий состояние сети.

В состав другой подсистемы, кроме агента, контролирующего состояние сети, действия которого одинаково важны для обеспечения работы обеих подсистем, следует также включить:

- агента, управляющего совместным обслуживанием разнородных потоков;
- агента, управляющего борьбой с перегрузками;
- агента, управляющего выбором параметров протоколов.

В первой подсистеме для согласования действий агентов необходимо использовать вариант с координирующим агентом. Это вытекает из следующих соображений. Во-первых, указанный способ координации соответствует порядку выполнения агентами данной подсистемы своих задач. Например, окончательное решение по выбору направления передачи принимается агентом, управляющим ЦК, на основе анализа частных решений, предоставляемых ему агентами, управляющими направлениями передачи. Во-вторых, в этой системе для принятия решения в основном используется неполная информация о состоянии сети. На основании такой информации агенту достаточно трудно принять правильное решение. Как следует из анализа вариантов координирования, проведенного в [1], в ситуациях, когда вероятность правильного решения управляемым агентом своей задачи сравнительно невелика, целесообразно использовать систему с координирующим агентом. В роли такого агента следует использовать агента, управляющего ЦК. За этим агентом должно быть закреплено право контролировать результаты управления других агентов, бороться с возникающими конфликтными ситуациями, а также принимать окончательное решение по выбору варианта управления. В-третьих, число агентов в указанной подсистеме зависит от количества в центре коммутации направлений передачи. В общем случае этих направлений может быть достаточно много. Тогда число агентов в рассматриваемой подсистеме также будет большим. Согласно проведенным ранее исследованиям, этот факт

также подтверждает необходимость использования в данном случае системы с координирующим агентом.

В другой подсистеме для координации действий агентов следует использовать метод саморегуляции. Это обусловлено, во-первых, сравнительной независимостью задач, решаемых агентами. Эти задачи агенты могут решать параллельно, а результаты их решения почти не влияют друг на друга. Поэтому в такой системе нет большой необходимости согласовывать общее решение. Во-вторых, при решении своих задач агенты используют в основном полную и достоверную информацию, например сведения о распределении буферного пространства или значении коэффициента загрузки своего ЦК. Поэтому, как правило, вероятность принятия этими агентами правильного решения достаточно высока. В-третьих, число агентов в этой подсистеме невелико, что отвечает указанным ранее условиям применения саморегулирующихся систем.

Приведенная структурная схема показывает состав многоагентной системы динамического управления центра коммутации и взаимодействие ее элементов. Для более детального пояснения функционирования синтезируемой МАС ЦК необходимо подробно описать особенности и порядок осуществления методов, реализацией которых достигается выполнение агентами своих задач. Но прежде чем перейти к построению алгоритмов работы отдельных агентов, требуется составить алгоритм функционирования всей многоагентной системы. Это позволит установить связь между частными алгоритмами, проанализировать место и роль каждого из них во всем процессе динамического управления.

5. Алгоритм функционирования многоагентной системы центра коммутации

Процесс управления информационным обменом на узле коммутации можно представить в виде повторяющихся циклов обслуживания поступающих заявок. Каждый такой цикл включает следующие процедуры:

- выбор направления передачи;
- маршрутизацию;
- постановку заявки в канальную очередь;
- выбор параметров для передачи;
- определение наличия перегрузки;
- в случае необходимости принятие мер по устранению перегрузки;
- оценку эффективности осуществляемого управления и, если требуется, его корректировку.

Поэтому последовательность функционирования МАС ЦК, направленного на управление указанными процедурами, удобно описывать в виде алгоритма, выполнение которого повторяется для каждой поступающей заявки. Блок-схема такого алгоритма представлена на рис. 3.

При поступлении заявки на обслуживание агент, управляющий ЦК, получает о ней исходные данные (блок 1). Агенты, управляющие направлениями передачи, получают от агента, управляющего ЦК, задание определить, с каким качеством поступившая информация будет передаваться по каждому из направлений (блок 2), а затем путем взаимодействия с агентом, контролирующим состояние сети, определяют значения показателей, по которым будет осуществляться выбор наилучшего направления (блок 3). Эти

результаты отправляются агенту, управляющему ЦК, который принимает решение о выборе направления передачи (блок 4). Агент, управляющий выбранным направлением, принимает задание передавать информацию по своему направлению, а также необходимые для этого исходные данные (блок 5). Затем он отправляет данные о поступившей заявке и направлении, в пределах которого ее следует передавать, агенту, управляющему маршрутизацией. В процессе управления этой процедурой производится выбор алгоритма маршрутизации в зависимости от присутствующих в сети условий (блок 5). После того, как определится маршрут передачи информации, полученная заявка ставится в соответствующую канальную очередь. Управление этим процессом осуществляется агентом, управляющим совместным обслуживанием разнородных потоков (блок 6). На этом этапе определяется место заявки в канальной очереди на передачу в соответствии с установленной дисциплиной обслуживания. Кроме того, указанный агент определяет факт возникновения в канале перегрузки.

Если перегрузка имеется (проверка этого условия производится в блоке 7), то активизируется агент, управляющий борьбой с перегрузками (блок 8). Его действие продолжается до тех пор, пока перегрузка не будет устранена. Результаты его функционирования контролируются агентом, управляющим совместным обслуживанием разнородных потоков, путем проверки наличия перегрузки (блок 7).

В случае отсутствия переполнения запоминающего устройства в блоке 9 соответствующим агентом производится управление выбором параметров протокола. В результате выполнения этой процедуры в зависимости от состояния сети устанавливаются значения величины окна и длительности тайм-аута.

Далее в процессе передачи агентом, управляющим ЦК, производится контроль правильности осуществляемого управления (блок 10). Если в результате контроля обнаружено, что эффективность передачи не удовлетворяет требованиям (блок 10), то уточняются исходные данные (блок 11) и процесс управления осуществляется заново, начиная с этапа выбора направления передачи. Если же результаты контроля положительны, то дальнейшая передача продолжается до ее окончания.

Данный алгоритм содержит лишь основные этапы процесса функционирования МАС ЦК. В дальнейшем необходима его детализация, которая сводится к описанию особенностей используемых методов динамического управления и составлению алгоритмов работы агентов по их реализации.

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

На основании проведенного анализа задач динамического управления компьютерными сетями и структуры МАС ДУ компьютерной сетью разработан алгоритм функционирования МАС ДУ компьютерной сети, который позволит эффективно решать задачи динамического управления компьютерными сетями.

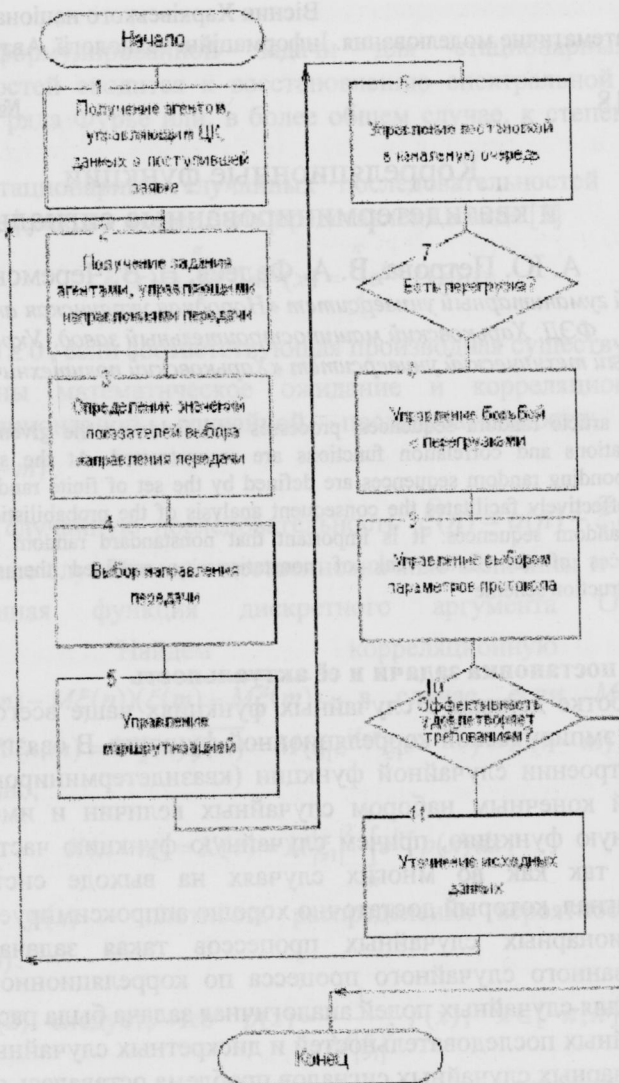


Рис. 3. Блок-схема алгоритма функционирования МАС ЦК.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лосев Ю.И., Руккас К.М., Польщиков К.А. Особенности использования многоагентных систем при динамическом управлении цифровыми сетями интегрального обслуживания. // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. Сб.науч.тр. - Выпуск 97.- Харьков: ХГПУ, 2000. – С.226-229.
2. Тарасов В.Б. От многоагентных систем к интеллектуальным организациям: философия, психология, информатика. - М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 352 с.
3. Люгер Дж. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем, 4-е издание. – М.: "Вильямс", 2003.- 864 с.

Корреляционные функции и квазидетерминированные сигналы

А. Ю. Петрова, В. А. Фадеев, Н. В. Черемская

Харьковский гуманитарный университет «Народная украинская академия», Украина

ФЭД, Харьковский машиностроительный завод, Украина

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»

In the article random sequences, processes and fields on the given mathematical expectations and correlation functions are reconstructed. At the same time the corresponding random sequences are defined by the set of finite random quantities, what effectively facilitates the consequent analysis of the probabilistic models with such random sequences. It is important that nonstandard random processes and sequences of the finite rank of nonstationarity confined themselves to the reconstruction scheme

1. Общая постановка задачи и её актуальность

При обработке данных о случайных функциях чаще всего ограничиваются построением эмпирической корреляционной функции. В связи с этим возникает задача о построении случайной функции (квазидетерминированного сигнала), определяемой конечным набором случайных величин и имеющей заданную корреляционную функцию, причем случайную функцию часто можно считать гауссовской, так как во многих случаях на выходе системы получается случайный сигнал, который достаточно хорошо аппроксимируется гауссовским.

Для стационарных случайных процессов такая задача моделирования детерминированного случайного процесса по корреляционной функции была решена в [1], для случайных полей аналогичная задача была рассмотрена в [2].

Для случайных последовательностей и дискретных случайных полей, а также для нестационарных случайных сигналов проблема оставалась открытой.

2. Постановки задачи

Рассмотрим сначала задачу о восстановлении случайной последовательности по известным математическому ожиданию и корреляционной функции. Строится такая модельная случайная последовательность, у которой математическое ожидание и корреляционная функция совпадают с заданными.

Математическое ожидание и корреляционная функция являются простейшими вероятностными числовыми характеристиками, но они не определяют однозначно соответствующий набор плотностей распределения вероятностей, удовлетворяющие условиям нормировки и согласованности (кроме гауссовских стационарных последовательностей) [3], при условии, что при каждом фиксированном целом значении параметра случайная последовательность является непрерывной случайной величиной.

3. Решение

Решение сформулированной задачи для стационарных случайных последовательностей сводится к восстановлению спектральной плоскости по коэффициентам ряда Фурье или, в более общем случае, к степенной проблеме моментов.

В случае стационарных случайных последовательностей известно, что корреляционная функция может быть представлена в виде [3]

$$K(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} dF(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} f(x) dx, \quad (1)$$

где $f(x) = F'(x) \geq 0$, если соответствующая производная существует.

Пусть заданы математическое ожидание и корреляционная функция некоторой стационарной случайной последовательности: $M\xi(n) = a(n)$, $K_{\xi}(n, m) = K(n - m)$.

Рассмотрим случайную последовательность $\xi(n) = a(n) + \xi_1 e^{i\xi_2 n}$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные вещественнозначные величины и $M\xi_1 = 0$, $a(n)$ — детерминированная функция дискретного аргумента. Очевидно, что $M\xi(n) = a(n)$. Найдем корреляционную функцию $K(n, m) = M(\xi(n) - M\xi(n))(\xi(m) - M\xi(m))$, в случае, если $M\xi(n) \neq 0$. Если $M\xi(n) = 0$, то $K(n, m) = M\xi(n)\xi(m) = M(\xi_1 e^{i\xi_2 n} \xi_1 e^{-i\xi_2 m}) = K(n - m)$.

Следовательно,

$$K(n - m) = K(\tau) = M|\xi_1|^2 \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} p(x) dx, \quad (2)$$

где $\tau = n - m$, $p(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины $\xi_2(\omega)$.

Из (1) и (2) следует, что $p(x) = \frac{1}{M|\xi_1|^2} f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, где $f(x)$ — спектральная плотность, т. е. плотность распределения вероятностей случайной величины $\xi_2(\omega)$ пропорциональна спектральной плоскости, которая восстанавливается по корреляционной функции $K(n - m)$ по формуле

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-ix\tau} K(\tau) \quad [3].$$

4. Стационарный случай.

Пример 1. Рассмотрим случайную стационарную последовательность с корреляционной функцией $K(0) = 1$, $K(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$ и математическим ожиданием равным нулю [3].

Построим квазидетерминированный дискретный сигнал $\xi(n)$ с $M\xi(n) = 0$: $\xi(n) = \xi_1 e^{i\xi_2 n}$, ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины и $M|\xi_1|^2 = 1$.

Найдем его корреляционную функцию при условии, что спектральная плотность имеет вид $f(x) = \frac{1}{2\pi}$.

При $\tau \neq 0$ и τ — целое $K(n-m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} dx = \sin \pi\tau = 0$. При

$\tau = 0$ $K(n-m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = 1$. В результате,

$$K(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{если } \tau \neq 0, \\ 1, & \text{если } \tau = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, стационарная случайная последовательность, у которой корреляционная функция имеет форму (3), а $M\xi(n) = 0$ (для простоты), может быть представлена в виде $\xi(n) = \xi_1 e^{i\xi_2 n}$, причем ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, $M\xi_1 = 0$, $M|\xi_1|^2 = 1$, а $M\xi_2 = 0$ и ξ_2 — равномерно распределена на интервале $[-\pi, \pi]$.

Пример 2. $\xi(n) = \xi_1 e^{i\xi_2 n}$, $M|\xi_1|^2 = 1$, $M\xi_1 = 0$, ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины. Пусть спектральная плотность имеет вид [3]

$$f(x) = \frac{C}{2\pi} \cdot \frac{1-a^2}{|e^{ix} - a|^2}, \quad \text{где } |a| < 1, a - \text{вещественное.}$$

Спектральную плотность,

пронормируем на единицу: $\frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-a^2}{|e^{ix} - a|^2} dx = 1$. Легко проверить, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-a^2)dx}{(e^{ix} - a)(e^{-ix} - a)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-a^2)dx}{1 - 2a \cos x + a^2} = 1. \text{ Отсюда, } C = 1.$$

Пусть $a(n) = 0$, $K(\tau) = Ca^{|\tau|}$, $|a| < 1, C > 0$. Тогда последовательность $\xi(n) = \xi_1 e^{i\xi_2 n}$ имеет заданную корреляционную функцию, если $M|\xi_1|^2 = 1$, $M\xi_1 = 0$, $M\xi_2 = 0$, а ξ_2 на интервале $[-\pi, \pi]$ имеет распределение

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1-a^2}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

Пример 3. Пусть спектральная плотность имеет вид [3]

$$f(x) = \frac{C}{2\pi} \cdot \frac{|e^{ix} - b|^2}{|e^{ix} - a|^2} = \frac{C}{2\pi} \cdot \frac{(e^{ix} - b)(e^{-ix} - b)}{(e^{ix} - a)(e^{-ix} - a)}, \quad (4)$$

где a и b — вещественные, $|a| < 1$, $|b| < 1$, тогда корреляционная функция

$$\text{вычисляется по формуле } K(n, m) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} f(x) dx = \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\tau} \frac{(e^{ix} - b)(e^{-ix} - b)}{(e^{ix} - a)(e^{-ix} - a)} dx.$$

В случае спектральной плотности (4) корреляционная функция равна

$$K(\tau) = \begin{cases} \frac{C(a-b)(1-ab)}{1-a^2} \cdot a^{|\tau|-1} & \text{при } \tau \neq 0, \\ \frac{C(1-2ab+b^2)}{1-a^2} & \text{при } \tau = 0. \end{cases}$$

Причем C и b можно определить из системы
$$\begin{cases} \frac{C(a-b)(1-ab)}{a(1-a^2)} = C_1, \\ \frac{Cb}{a} = C_2. \end{cases}$$

5. Нестационарный случай

Рассмотрим теперь восстановление квазидетерминированного сигнала в нестационарном случае, когда корреляционная функция не является функцией разности.

Пусть корреляционная функция имеет вид [4]:

$$K(n, m) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi(n+\tau) \overline{\varphi(m+\tau)}, \quad (5)$$

τ – целое, а функции $\varphi(k)$ строятся специальным образом по комплексным числам, расположенным в единичной окружности на комплексной плоскости (дискретный спектр).

В этом случае структура квазидетерминированного сигнала более сложная, чем в предыдущих случаях, но легко проверить, что случайная последовательность вида $\xi(n) = \frac{\xi_1(\omega)\varphi(n+\xi_0(\omega))}{\sqrt{p_{\xi_0(\omega)}}}$, где $M\xi_1(\omega) = 0$, $M|\xi_1(\omega)|^2 = 1$,

$\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины $\xi_0(\omega)$ – дискретная случайная величина, принимающая счетное количество значений $0, 1, 2, \dots$ с вероятностями $p_0, p_1, p_2, \dots$, имеет корреляционную функцию вида (5).

Если обратиться к случаю непрерывного параметра t , то для диссипативного нестационарного случайного процесса $\xi(t)$ с $M\xi(t) = 0$ ранга нестационарности один корреляционная функция имеет вид [5]:

$$K(t, s) = \int_0^{\infty} \varphi(t+\tau) \overline{\varphi(s+\tau)} d\tau, \quad (6)$$

тогда легко проверить, что квазидетерминированный сигнал вида

$\xi(n) = \xi_1(\omega) \cdot \frac{\varphi(n+\xi_0(\omega))}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}}$ имеет корреляционную функцию вида (6), где

$M\xi_1(\omega) = 0$, $M|\xi_1(\omega)|^2 = 1$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины $\xi_0(\omega)$ – непрерывная случайная величина, $\xi_0(\omega) \in [0, \infty)$, а $p(x)$ – плотность распределения вероятности этой случайной величины.

В случае спектра, расположенного в верхней полуплоскости $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Lambda_k(t), \quad \text{где} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty, \quad \Lambda_k(t) \quad \text{имеет вид} \quad \Lambda_k(t) = \sum_{j=1}^k b_j e^{i\lambda_j t}, \quad \text{где}$$

$\lambda_j = \alpha_j + \frac{1}{2}\beta_j^2$, $\lambda_l \neq \lambda_m$, $l \neq m$, тогда квазидетерминированный сигнал $\xi(t)$

$$\text{имеет вид} \quad \xi(t) = \frac{\xi_1(\omega)}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^k b_j e^{i\lambda_j(t+\xi_0(\omega))}, \quad \text{где} \quad M\xi_1(\omega) = 0, \quad M|\xi_1(\omega)|^2 = 1,$$

$\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины, т. е. представляется в виде суперпозиции внутренних состояний осцилляторов с комплексными частотами, в отличие от стационарного случая, когда можно было ограничиться одним слагаемым и вещественной частотой.

В случае бесконечнократного спектра в нуле $\varphi(t) = \int_0^t f_0(x) J_0(\sqrt{2tx}) dx$ и тогда

очевидно, что соответствующий квазидетерминированный сигнал, имеющий корреляционную функцию (6), представляется в виде

$$\xi(t) = \frac{\xi_1(\omega)}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}} \int_0^t f_0(x) J_0(\sqrt{2(t+\xi_0(\omega))x}) dx, \quad \text{где} \quad M\xi_1(\omega) = 0, \quad M|\xi_1(\omega)|^2 = 1,$$

$\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины, $f_0(x) \in L^2_{[0;\ell]}$, $J_0(z)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

6. Выводы и направления дальнейших исследований

Отметим, что аналогичный подход можно использовать для моделирования квазидетерминированных сигналов для случайных неоднородных полей (дискретных или непрерывных аргументов) с заданной корреляционной функцией.

Так, для диссипативных случайных полей корреляционная функция имеет вид $K(x, y) = \int_0^{\infty} \int \varphi(x_1 + \tau_1, x_2 + \tau_2, x_3 + \tau_3) \overline{\varphi(y_1 + \tau_1, y_2 + \tau_2, y_3 + \tau_3)} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$, где структура функции $\varphi(x)$ определяется спектром неоднородного поля [6].

Тогда как и для квазидетерминированных сигналов, зависящих от одного параметра, легко видеть, что квазидетерминированное непрерывное случайное поле вида $\xi(x) = \frac{\xi_1(\omega)\varphi(x+\xi_0(\omega))}{\sqrt{p(\xi_0(\omega))}}$, где $M\xi_1(\omega) = 0$, $M|\xi_1(\omega)|^2 = 1$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_0(\omega)$ – независимые случайные величины, $\xi_0(\omega) = (\xi_{01}(\omega), \xi_{02}(\omega), \xi_{03}(\omega))$ – случайный абсолютно непрерывный вектор с $0 \leq \xi_0(\omega) < \infty$ и совместной плотностью распределения вероятностей $p(t_1, t_2, t_3)$.

Использование модели случайных функций, определяемых конечным числом параметров, позволяет существенно упростить анализ прикладных задач, решение которых связано с дифференциальными уравнениями со случайными коэффициентами, которые являются такими квазидетерминированными

сигналами. При этом нет необходимости использовать сложный аппарат стохастических дифференциальных уравнений, так как решение такого уравнения просто зависит от случайных величин, как от параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем / Учебн. пособие для высш. учебн. заведений. – М.: Радио и связь, 1991. – 608 с.
2. Петрова А. Ю. Восстановление случайных полей по корреляционным функциям // Вестник НТУ «ХПИ». Сб. науч. тр. Вып. «Системный анализ, управление и информационные технологии». – Х.: НТУ «ХПИ», 2003. – № 6. – Т. 1. – С. 174–182.
3. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций // Успехи математических наук, 1952. – № 5. – С. 3–168.
4. Янцевич А. А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве. I. Корреляционная теория // Сб. Теория функций, функциональный анализ и приложение. – Х., 1986. – Вып. 45. – С. 139 – 141.
5. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовом пространстве. – Х.: ХГУ, 1971. – 160 с.
6. Абауи Л. Об одном классе неоднородных случайных полей // Вестник Харьковского ун-та: Сер. Механика, теория управления и математическая физика. – 1984. – № 254. – С. 49–53.

Математическое моделирование аэродинамики и динамики вертикально-осевых ветроагрегатов

А. А. Приходько, Д. А. Редчиц

*Днепропетровский национальный университет, Украина
Институт транспортных систем и технологий НАН Украины*

For the solution of the coupled problem of dynamics and aerodynamics of vertical - axis wind turbine the numerical algorithm is designed on the basis of Navier-Stokes equations. Algorithms of the solution of unsteady incompressible Navier-Stokes equations in mobile curvilinear coordinates are implemented on the basis of implicit schemes. Testing of numerical algorithms for problems steady and unsteady flows past a cylinder, laminar flow past a rotating circular cylinder is carried out. Solution results of the coupled problem of dynamics and aerodynamics of Savonius rotor are parsed

1. Введение

В последнее время большое внимание уделяется развитию возобновляемых, экологически чистых источников энергии. Одним из наиболее перспективных направлений является ветроэнергетика. Во всем мире с середины 70-х годов XX века наблюдается непрерывный рост установленной мощности ветроэнергетических установок (ВЭУ). Ветроэнергетика может стать источником наиболее дешевой электроэнергии, вырабатываемой в промышленных масштабах.

Эффективность ВЭУ напрямую связана с величиной коэффициента использования ветра. Аэродинамическая оптимизация формы лопастей ветроколес является актуальной задачей повышения коэффициента полезного действия энергоустановки.

Существующие методики конструирования роторов ВЭУ опираются на известные данные по авиационным крыльевым профилям. Это не позволяет в должной мере учесть особенности обтекания вращающихся ветроколес. При выборе конструкции ВЭУ следует проводить комплексное исследование аэродинамических характеристик лопастей с учетом как нестационарных, так и пространственных эффектов.

При конструировании ветроагрегатов необходим учет взаимодействия многих физических процессов (отрыв потока, взаимодействие лопастей, течение в следе и вблизи гондолы ветроагрегата), которые происходят при вращении ветроколеса. Экспериментальные методы исследований зачастую оперируют ограниченными объемами данных. Кроме того, натурные эксперименты не всегда возможны, как по техническим, так и экономическим соображениям.

В настоящей работе представлены результаты численного исследования динамики и аэродинамики ВЭУ на примере роторов Дарье, Савониуса и их элементов.

2. Постановка задачи

Процессы динамики и аэродинамики ветроагрегата описываются уравнением вращения твердого тела относительно неподвижной оси и уравнениями Навье-Стокса.

Используя произвольные подвижные координаты $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, запишем систему нестационарных уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в безразмерном виде

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V}{J} \right) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{e} - \bar{e}_v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{f} - \bar{f}_v) \equiv -\bar{r}, \quad (2.2)$$

где $\bar{r}$ — правая часть уравнений количества движения,

$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$ — якобиан преобразования координат,

$$\bar{u} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \bar{e} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \xi_x p + uU + \xi_t u \\ \xi_y p + vU + \xi_t v \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \eta_x p + uV + \eta_t u \\ \eta_y p + vV + \eta_t v \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$U = \xi_x u + \xi_y v$, $V = \eta_x u + \eta_y v$, U, V — контравариантные компоненты скорости, $\xi_t = -x_t \xi_x - y_t \xi_y$, $\eta_t = -x_t \eta_x - y_t \eta_y$, $\xi_x = Jy_\eta$, $\xi_y = -Jx_\eta$, $\eta_x = -Jy_\xi$, $\eta_y = Jx_\xi$ — метрические коэффициенты.

Вязкие члены в неортогональной системе координат имеют вид

$$\bar{e}_v = \frac{\nu}{\text{Re} J} \begin{bmatrix} (\xi_x^2 + \xi_y^2) u_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_\eta \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2) v_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) v_\eta \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\bar{f}_v = \frac{\nu}{\text{Re} J} \begin{bmatrix} (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta \\ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) v_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) v_\eta \end{bmatrix},$$

где Re — число Рейнольдса, ν — кинематическая вязкость.

Для определения положения ротора и текущей угловой скорости ветротурбины, одновременно с аэродинамической задачей, решалось уравнение вращения твердого тела относительно неподвижной оси

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_{aэp} - M_{наэp} - M_{сопp}, \quad (2.5)$$

где I_z — момент инерции ротора, $M_{aэp}$ — аэродинамический момент, определяемый из решения задачи аэродинамики, $M_{наэp}$ — момент нагрузки на валу ветроагрегата, $M_{сопp}$ — момент трения на оси.

Момент сопротивления на валу ветроагрегата определялся квадратичной функцией угловой скорости вращения $M_{\text{comp}} = A\omega^2 + B\omega + C$, а момент нагрузки – из условия поддержания заданной угловой скорости вращения ω_3

$$M_{\text{нагр}} = \begin{cases} 0, & \omega < \omega_3 \\ M_{\text{аэр}} - M_{\text{нагр}}, & \omega = \omega_3 \end{cases} \quad (2.6)$$

Начальные и граничные условия. В качестве начальных условий для стационарных задач задавались параметры невозмущенного потока во всей расчетной области. Для нестационарных задач использовалось решение уравнений Навье-Стокса в стационарной формулировке. На внешней границе, за исключением выходного участка, где задавались условия Неймана, значения зависимых переменных рассчитывались по методу характеристик. На поверхности тела ставилось условие прилипания. При вычислении давления на обтекаемой поверхности нормальный градиент давления полагался равным нулю.

3. Численный алгоритм. Стационарная формулировка.

Метод искусственной сжимаемости [1] модифицирует уравнение неразрывности путем добавления производной давления по псевдовремени

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\beta \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V}{J} \right) \right], \quad (3.1)$$

где τ – псевдовремя, β – параметр искусственной сжимаемости.

В уравнения количества движения также вводится псевдовременная производная скорости. В случае стационарной формулировки, уравнения интегрируются до тех пор, пока правая часть $\bar{F}$ в уравнении (2.2) и дивергенция скорости не обратится в ноль. Таким образом, система уравнений имеет вид

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial \xi} (\bar{E} - \bar{E}_v) - \frac{\partial}{\partial \eta} (\bar{F} - \bar{F}_v) = -\bar{R}, \quad (3.2)$$

где $\bar{R}$ – вектор невязок этих уравнений,

$$\bar{D} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} \beta U \\ J \\ \bar{e} \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \beta V \\ J \\ \bar{f} \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{e}_v \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{f}_v \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Аппроксимируем псевдовременную производную с помощью неявной схемы Эйлера

$$\frac{\bar{D}^{m+1} - \bar{D}^m}{\Delta \tau} = -\bar{R}^{m+1}, \quad (3.4)$$

где верхний индекс m соответствует псевдовременному итерационному слою. После линеаризации правой части $\bar{R}^{m+1}$, уравнение (3.4) принимает вид

$$\left[\frac{1}{\Delta \tau} I + \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{D}} \right)^m \right] (\bar{D}^{m+1} - \bar{D}^m) = -\bar{R}^m, \quad (3.5)$$

где I – единичная 3×3 матрица. Это уравнение итерационно решается до тех пор, пока норма невязки $\bar{R}$ не станет меньше некоторой, наперед заданной, малой величины.

Нестационарная формулировка

При исследовании нестационарных течений в уравнениях количества движения производные по времени вычисляются по конечно-разностной второго порядка трехточечной схеме

$$\frac{3\bar{u}^{n+1} - 4\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1}}{2\Delta t} = -\bar{r}^{n+1}, \quad (3.6)$$

где верхний индекс n обозначает величину времени $t = n\Delta t$ и $\bar{r}$ – правая часть в уравнениях количества движения (2.2).

Для решения уравнений (3.2) и выполнения уравнения неразрывности на временном слое $n+1$, введем псевдовременной слой и обозначим верхним индексом m . Уравнения решаются итеративно так, чтобы $\bar{u}^{n+1,m+1}$, $\bar{v}^{n+1,m+1}$ приближались к значению скорости $\bar{u}^{n+1}$, $\bar{v}^{n+1}$ на новом временном слое, а дивергенция скорости стремилась к нулю.

Когда дивергенция скорости обращается в нуль, формулировка искусственной сжимаемости представляется в виде очень похожем для стационарного случая, а уравнение неразрывности совпадает с уравнением неразрывности для стационарных течений

$$\frac{\partial \bar{D}}{\partial \tau} + \frac{1}{2\Delta t} \begin{bmatrix} 0 \\ 3\bar{u}^{n+1} - 4\bar{u}^n + \bar{u}^{n-1} \end{bmatrix} = -\bar{R}^{n+1}. \quad (3.7)$$

Это уравнение решается до тех пор, пока производная по псевдовремени $\partial \bar{D} / \partial \tau$ не обратится в нуль. В этом случае, уравнение (2.1) выполняется и дивергенция скорости обращается в нуль. Применяя неявную конечно-разностную схему Эйлера к псевдовременной производной

$$I_{\tau\tau} (\bar{D}^{n+1,m+1} - \bar{D}^{n+1,m}) = -\bar{R}^{n+1,m+1} - \frac{I_m}{\Delta t} (1.5\bar{D}^{n+1,m} - \bar{D}^n + 0.5\bar{D}^{n-1}), \quad (3.8)$$

где

$$I_{\tau\tau} = \text{diag} \left[\frac{1}{\Delta \tau}, \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1.5}{\Delta t}, \frac{1}{\Delta \tau} + \frac{1.5}{\Delta t} \right], \quad I_m = \text{diag} [0, 1, 1]. \quad (3.9)$$

Линеаризуем невязку $\bar{R}^{n+1,m+1}$ и запишем уравнение (3.7) в дельта форме [2]

$$\begin{aligned} & \left[I_{\tau\tau} + \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{D}} \right)^{n+1,m} \right] (\bar{D}^{n+1,m+1} - \bar{D}^{n+1,m}) = \\ & = -\bar{R}^{n+1,m} - \frac{I_m}{\Delta t} (1.5\bar{D}^{n+1,m} - \bar{D}^n + 0.5\bar{D}^{n-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Линеаризация уравнения (3.8) выполнено по псевдовремени. В случае нестационарной постановки задачи, необходимо устанавливать решение по псевдовремени на каждом шаге физического времени. Обе системы уравнений (3.4) и (3.8) требуют дискретизации вектора невязки $\bar{R}$. Производные

в вязких членах аппроксимируются центрально-разностной схемой второго порядка. Для конвективных потоков используется противопоточное дифференцирование, основанное на методе Roe [3]. Для всех результатов, полученных в настоящей работе, использовался пятый порядок для внутренних точек и второй вблизи границ.

Вектор потоков $\bar{E}_i$ отличается от стационарной формулировки метода искусственной сжимаемости наличием нестационарных метрических членов, которые являются ненулевыми в случае подвижных сеток. Применение противопоточных схем, основанных на расщеплении разностей потоков, позволяет естественным образом добавлять диссипацию в исходную систему, в то время как центрально-разностное дифференцирование требует введения искусственных диссипативных членов. Исходя из этого, в данной работе для дискретизации конвективных членов в уравнении (3.2) используется противопоточная схема, основанная на расщеплении разностей потоков [2].

Противопоточная схема требует использования собственных чисел матрицы Якоби векторов конвективных потоков. Обобщенный вектор потоков для двумерной системы уравнений имеет вид

$$\bar{E}_i = \begin{bmatrix} \beta Q \\ k_x p + uQ + k_t u \\ k_y p + vQ + k_t v \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

где $\bar{E}_i = \bar{E}, \bar{F}$ для $i=1,2$ соответственно, нормированные метрики определяются из следующих соотношений

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad i=1,2, \\ k_y &= \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad i=1,2, \\ k_t &= \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad i=1,2, \end{aligned} \quad (3.12)$$

контравариантная компонента скорости

$$Q = k_x u + k_y v. \quad (3.13)$$

Преобразуем матрицу Якоби к диагональному виду

$$\bar{A}_i = \frac{\partial \bar{E}_i}{\partial D} = \begin{bmatrix} 0 & \beta k_x & \beta k_y \\ k_x & k_x u + Q & k_y u \\ k_y & k_x v & k_y v + Q \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Аналог преобразования для матрицы Якоби

$$A_i = X_i \Lambda_i X_i^{-1}, \quad (3.15)$$

где Λ_i – диагональная матрица собственных значений

$$\Lambda_i = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3], \quad (3.16)$$

$$\lambda_1 = Q + k_t,$$

$$\lambda_2 = Q + c + \frac{1}{2}k_t, \quad (3.17)$$

$$\lambda_3 = Q - c + \frac{1}{2}k_t,$$

и c — искусственная скорость звука

$$c = \sqrt{\left(Q + \frac{1}{2}k_t\right)^2 + \beta(k_x^2 + k_y^2)}. \quad (3.18)$$

Эта величина всегда больше чем Q , следовательно, второе собственное значение λ_2 будет всегда положительным, а третье — всегда отрицательным.

Матрица левых собственных векторов

$$X_i = \frac{1}{2\beta c\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right)} \begin{bmatrix} 0 & \beta\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right) & -\beta\left(c^2 - \frac{1}{4}k_t^2\right) \\ -2\beta c k_y & (u\lambda_2 + \beta k_x)\left(c + \frac{1}{2}k_t\right) & (u\lambda_3 + \beta k_x)\left(c - \frac{1}{2}k_t\right) \\ 2\beta c k_x & (v\lambda_2 + \beta k_y)\left(c + \frac{1}{2}k_t\right) & (u\lambda_3 + \beta k_y)\left(c - \frac{1}{2}k_t\right) \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

и ей обратная матрица правых собственных векторов

$$X_i^{-1} = \begin{bmatrix} k_y u - k_x v & -v\lambda_1 - \beta k_y & u\lambda_1 + \beta k_x \\ -\lambda_3 & \beta k_x & \beta k_y \\ -\lambda_2 & \beta k_x & \beta k_y \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Противопоточная схема обладает диссипацией, которая автоматически подавляет осцилляции, возникающие вследствие нелинейности конвективных членов. В дополнении, вектор потока, основанный на противопоточном дифференцировании, вводит члены на главную диагональ матрицы Якоби вектора невязки, которые в центрально-разностной схеме отсутствуют. Это приводит к диагональному преобладанию в неявной схеме и устойчивости численного алгоритма.

Противопоточная схема рассмотрена для одномерного случая и применяется для каждого направления отдельно. Расщепление разностей потоков основано на знаке собственных значений матрицы Якоби конвективных членов. Эта схема была описана Roe [3] для аппроксимаций решения задачи Риммана уравнений сжимаемого газа и модифицирована Rogers и Kwak [2] для несжимаемых течений.

Производная конвективных потоков в направлении ξ аппроксимируется

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} \approx \frac{[E_{j+1/2} - E_{j-1/2}]}{\Delta \xi}, \quad (3.21)$$

где $E_{j+1/2}$ — вектор потока, j — индекс для направления ξ .

Вектор потока определяется соотношением

$$E_{j+1/2} = \frac{1}{2} [E(D_{j+1}) + E(D_j) - \phi_{j+1/2}], \quad (3.22)$$

где $\phi_{j+1/2}$ — диссипативный член.

Для $\phi_{j+1/2} = 0$ эта запись соответствует центрально-разностной схеме. Противопоточная схема первого порядка имеет вид

$$\phi_{j+1/2} = \Delta E_{j+1/2}^+ - \Delta E_{j+1/2}^-, \quad (3.23)$$

где $\Delta E^\pm$ – разность потоков в направлении положительного и отрицательного распространения волн. Разность потоков вычисляется как

$$\Delta E_{j+1/2}^\pm = A^\pm(\bar{D}) \Delta D_{j+1/2}, \quad (3.24)$$

где

$$\Delta D_{j+1/2} = D_{j+1} - D_j. \quad (3.25)$$

Плюс (минус) матрицы Якоби имеют только положительные (отрицательные) собственные значения

$$A^\pm = X \Lambda^\pm X^{-1}, \quad (3.26)$$

$$\Lambda^\pm = \frac{1}{2}(\Lambda \pm |\Lambda|). \quad (3.27)$$

При расчете матрицы Якоби используется некоторое промежуточное значение, которое является функцией окрестностей точек j и $j+1$. Свойства Roe [3], которые необходимы для консервативной схемы, удовлетворяются, если оно берется как среднее из этих величин

$$\bar{D} = \frac{1}{2}(D_{j+1} + D_j). \quad (3.28)$$

Схемы более высокого порядка могут быть получены с использованием разностей потоков. Схема третьего порядка записывается с помощью соотношения

$$\phi_{j+1/2} = -\frac{1}{3}[\Delta E_{j-1/2}^+ - \Delta E_{j+1/2}^+ + \Delta E_{j+1/2}^- - \Delta E_{j+3/2}^-]. \quad (3.29)$$

Основная проблема с использованием схем выше второго порядка заключается в сохранении точности вблизи границ. Увеличение порядка точности приводит к расширению вычислительного шаблона. Так схема, предложенная Rai [4], пятого порядка точности, основанная на противопоточном дифференцировании требует 11 точек для расчетного шаблона, а схема Rogers и Kwak [2] лишь 7 точек и имеет вид

$$\begin{aligned} \phi_{j+1/2} = -\frac{1}{30}[-2\Delta E_{j-3/2}^+ + 11\Delta E_{j-1/2}^+ - 6\Delta E_{j+1/2}^+ - 3\Delta E_{j+3/2}^+ + \\ + 2\Delta E_{j+5/2}^- - 11\Delta E_{j+3/2}^- + 6\Delta E_{j+1/2}^- + 3\Delta E_{j-3/2}^-]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

В точках вблизи границ порядок схемы должен быть понижен до второго с помощью соотношения

$$\phi_{j+1/2} = \epsilon [\Delta E_{j+1/2}^+ - \Delta E_{j+1/2}^-], \quad (3.31)$$

где $\epsilon = 0$ соответствует центрально-разностной схеме второго порядка. Для $\epsilon = 1$ это получаем схему первого порядка в соотношении (3.22). Ненулевое значение коэффициента ϵ в уравнении (3.31) приводит к добавлению диссипации вблизи границ. В настоящей работе, в соответствии с рекомендациями [2], принято значение $\epsilon = 0.01$.

Матрицы левых и правых собственных векторов (3.19), (3.20) четко показывают, что параметр искусственной сжимаемости β оказывает влияние не

только в уравнении неразрывности, но и в уравнениях количества движения. Анализ для декартовых координат показывает, что диссипативные члены, добавляя диссипацию в уравнения количества движения, растут пропорционально корню квадратному из β [5].

Неявная схема

Матрица Якоби вектора невязок $\bar{R}$ необходима для добавления в левую часть уравнения (3.10). Используя формулу (3.22) для конвективных и центрально-разностную для вязких членов запишем численную аппроксимацию вектора невязки относительно точки $x_{j,k}, y_{j,k}$

$$R_{j,k} = \frac{\tilde{E}_{j+1/2,k} - \tilde{E}_{j-1/2,k}}{\Delta\xi} + \frac{\tilde{F}_{j,k-1/2} - \tilde{F}_{j,k+1/2}}{\Delta\eta} - \frac{(\bar{E}_v)_{j+1,k} - (\bar{E}_v)_{j-1,k}}{2\Delta\xi} - \frac{(\bar{F}_v)_{j,k+1} - (\bar{F}_v)_{j,k-1}}{2\Delta\eta}, \quad (3.32)$$

где численные потоки $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ определяются с помощью соотношения (3.22) с первым, третьим или пятым порядком диссипативных членов выражений (3.23), (3.29), (3.30), соответственно. Дальнейший вывод сделан в предположении, что $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ эквивалентны единице.

Формирование точной матрицы Якоби вектора невязки сложно для практической реализации, особенно, когда используется противопоточное дифференцирование высокого порядка точности. Поэтому, в неявной части используют первый порядок противопоточного дифференцирования. Применяя первый порядок для конвективных членов, получим вектор невязки

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left[\bar{E}_{j+1,k} - \bar{E}_{j-1,k} - \Delta E_{j+1/2,k}^+ + \Delta E_{j+1/2,k}^- + \Delta E_{j-1/2,k}^+ - \Delta E_{j-1/2,k}^- + F_{j,k+1} - F_{j,k-1} - \Delta F_{j,k+1/2}^+ + \Delta F_{j,k+1/2}^- + \Delta F_{j,k-1/2}^+ - \Delta F_{j,k-1/2}^- - (\bar{E}_v)_{j+1,k} + (\bar{E}_v)_{j-1,k} - (\bar{F}_v)_{j,k+1} + (\bar{F}_v)_{j,k-1} \right]. \quad (3.33)$$

Аппроксимируя матрицы Якоби вектора невязки сформируем ленточную матрицу

$$\frac{\partial R}{\partial D} = B \left[\frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k-1}}, 0, \dots, 0, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j-1,k}}, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k}}, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j+1,k}}, 0, \dots, 0, \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k+1}} \right], \quad (3.34)$$

где B – ленточная матрица.

Члены, входящие в неявную часть, определяются с помощью следующих соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k-1}} &\approx \frac{1}{2} \left[-\bar{B}_{j,k-1} - B_{j,k-1/2}^+ + B_{j,k-1/2}^- + (\gamma_2)_{j,k-1} \right], \\ \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j-1,k}} &\approx \frac{1}{2} \left[-\bar{A}_{j-1,k} - A_{j-1/2,k}^+ + A_{j-1/2,k}^- + (\gamma_1)_{j-1,k} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k}} &\approx \frac{1}{2} \left[A_{j+1/2,k}^+ + A_{j-1/2,k}^+ - A_{j+1/2,k}^- - A_{j-1/2,k}^- \right. \\ &\quad \left. + B_{j,k+1/2}^+ + B_{j,k-1/2}^+ - B_{j,k+1/2}^- - B_{j,k-1/2}^- \right], \\ \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j+1,k}} &\approx \frac{1}{2} \left[A_{j+1,k} - A_{j+1/2,k}^+ + A_{j+1/2,k}^- - (\gamma_1)_{j+1,k} \right], \\ \frac{\partial R_{j,k}}{\partial D_{j,k+1}} &\approx \frac{1}{2} \left[B_{j,k+1} - B_{j,k+1/2}^+ + B_{j,k+1/2}^- - (\gamma_2)_{j,k+1} \right],\end{aligned}\quad (3.35)$$

где $\bar{A} = \bar{A}_1$, $\bar{B} = \bar{A}_2$ в уравнении (3.14)

$$\begin{aligned}A^\pm &= X_1 \Lambda_1^\pm X_1^{-1}, \\ B^\pm &= X_2 \Lambda_2^\pm X_2^{-1}.\end{aligned}\quad (3.36)$$

В левой части уравнения (3.10) сохранялись вязкие члены лишь для ортогональной сетки. В результате

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{\nu}{\text{Re}J} (\xi_x^2 + \xi_y^2) I_m \frac{\partial}{\partial \xi}, \\ \gamma_2 &= \frac{\nu}{\text{Re}J} (\eta_x^2 + \eta_y^2) I_m \frac{\partial}{\partial \eta},\end{aligned}\quad (3.37)$$

где I_m — модифицированная единичная матрица

$$I_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\quad (3.38)$$

Система уравнений решалась с помощью метода Гаусса-Зейделя. В этой процедуре матрица в левой части неявного уравнения формировалась из величин с предыдущего временного слоя. Для каждой точки

$$B[V, 0, \dots, 0, X, Y, Z, 0, \dots, 0, W] \Delta D = R.\quad (3.39)$$

4. Результаты расчетов

Рассмотренный алгоритм был применен для расчета стационарного и нестационарного обтекания цилиндра, вращающегося цилиндра (эффект Магнуса) и трехлопастного ротора Савониуса.

4.1. Обтекание кругового неподвижного цилиндра. С целью проверки эффективности разработанного численного алгоритма рассчитано стационарное (рис. 1 а, б, в) и нестационарное течение несжимаемой жидкости за круговым цилиндром (рис. 1 г, д). Краткий обзор работ посвященной этой задаче приведен в [6-8].

Ламинарное течение в следе за цилиндром при обтекании несжимаемой жидкостью характеризуется следующими режимами: безотрывное стационарное, стационарный отрыв и нестационарное отрывное периодическое. Линии тока, построенные по мгновенному полю скоростей, для различных чисел Рейнольдса приведены на рис. 1. При числах Рейнольдса $\text{Re} < 5$ обтекание

цилиндра происходит без отрыва пограничного слоя (рис. 1 а). Увеличение числа Рейнольдса приводит к отрыву ламинарного пограничного слоя от поверхности цилиндра. Отрыв является следствием взаимодействия конвективных, вязких сил и градиента давления. Под действием положительного градиента давления возникает возвратное течение, которое приводит к утолщению пограничного слоя. В точке отрыва потока, где касательные напряжения обращаются в нуль, поток отходит от поверхности цилиндра. Экспериментальные и численные расчеты свидетельствуют, что при значении Рейнольдса $Re < Re_{кр}$ (для цилиндра $Re = 40$) реализуется стационарный режим течения, характеризующийся наличием в ближнем следе двух симметричных вихрей. При малых числах Рейнольдса $Re = 5 - 40$ ширина и длина вихревого следа увеличивается с ростом числа Рейнольдса (рис. 1 б, в). При увеличении числа Рейнольдса размеры вихревой зоны растут до тех пор, пока не будет достигнуто его критическое значение. В этом случае длина отрывной зоны равна примерно двум диаметрам цилиндра. Границу вихревой области для стационарного режима течения можно определить по линии нулевой скорости.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса течение в следе приобретает асимметричный характер (рис. 1 г, д и рис. 6 а). Обтекание цилиндра, при числах Рейнольдса, превышающих критическое значение, сопровождается отрывом вихрей, которые сносятся вниз по потоку через равные интервалы времени. Периодическое вихревое течение можно разделить на два диапазона в зависимости от числа Рейнольдса. Для $40 < Re < 300$ реализуется устойчивый ламинарный режим течения, с регулярной вихревой дорожкой, при котором можно еще не учитывать влияние турбулентных пульсаций. При высоких числах Рейнольдса возникает турбулизация течения в следе за цилиндром, что приводит к необходимости моделирования турбулентности.

Распределение коэффициентов давления C_p и трения C_f по поверхности цилиндра при изменении Рейнольдса приведены на рис. 2 и 3. Рост числа Рейнольдса является причиной понижения коэффициента давления в передней и увеличения в задней критических точках, а, следовательно, и уменьшения лобового сопротивления. Анализируя коэффициент трения можно установить положение точки отрыва потока от поверхности цилиндра. Угол отрыва пограничного слоя, отсчитываемый от задней критической точки, растет с увеличением числа Рейнольдса. Нестационарный режим течения $Re > 40$ не имеет строго определенного угла отрыва. В донной части цилиндра может формироваться сразу несколько вихрей. Их количество и интенсивность зависит от времени и числа Рейнольдса, и они влияют на положение точек отрыва и присоединения потока на поверхности цилиндра.

Численный расчет вихревой структуры течения для числа Рейнольдса $Re = 140$ сравнивался с экспериментом из альбома течений Ван-Дайка [9].

Зависимость чисел Струхала St от Рейнольдса Re , которые сопоставляются с экспериментальными данными Roshko [10] приведены на рис. 5.

4.2. Эффект Магнуса. При расчете нагрузок, действующих на опорную башню, необходимо учитывать нестационарные эффекты, возникающие при

взаимодействии подвижных элементов конструкции с набегающим потоком ветра. Одной из таких нестационарных нагрузок является поперечная сила, возникающая при вращении несущего цилиндра опорной башни. Такое явление известно в литературе как эффект Магнуса. Течение, за вращающимся цилиндром, исследовалось многими авторами: экспериментально Taneda [11], Tokumaru и Dimotakis [12], Filler [13] и численно Wu [14], Beak [15].

В настоящей работе проведены численные исследования двумерного ламинарного течения за круговым цилиндром, вращающимся против часовой стрелки с постоянной скоростью. Моделирование выполнено для течений при различных числах Рейнольдса Re и линейной скорости поверхности цилиндра α , отнесенной к скорости невозмущенного потока в диапазоне $0 \leq \alpha \leq 2$. В расчетах α определяется как $\alpha = \omega d / (2U_\infty)$, где ω – угловая скорость цилиндра. Численное моделирование показало, что вихревой след существует при низких скоростях вращения и полностью подавляется при $\alpha > \alpha_L$, где критическая скорость вращения α_L зависит от числа Рейнольдса, например, $\alpha_L \approx 1.4, 1.8, 1.9$ и 2.0 для $Re = 60, 100, 160$ и 200 , соответственно. При $Re = 40$ след за цилиндром носит стационарный характер и не зависит от скорости вращения α . Вращение цилиндра приводит к изменению течения в следе и конфигурации вихревой дорожки, которая может уменьшить осцилляции, вызванные течением, и величину подъемной силы. Вращение цилиндра приводит к ускорению течения на одной стороне цилиндра и замедлению на другой. Давление на верхней части цилиндра становится больше, чем на нижней, и появляется ненулевая поперечная сила, осредненная по времени. Как результат, вращение сильно видоизменяет структуру течения, что приводит к понижению осцилляций. Течение за цилиндром было стационарным или нестационарным (периодическим) в зависимости от двух параметров Re и α .

Контуры завихренности для трех различных значений α для одного момента времени при $Re = 200$, показаны на рис.6. При наличии вихревого следа, распределения завихренности за цилиндром подобны по форме (рис.6 а, б), а эффекты вращения проявляются в окрестностях поверхности цилиндра. В потоке жидкости вблизи верхней поверхности цилиндра, отрицательная завихренность с возрастанием α , доминирует над положительной завихренностью на нижней стороне. Для значений $\alpha > \alpha_L$ вихревой след полностью подавляется и наблюдается наличие 2-х стационарных вихрей, присоединенных к цилиндру (рис. 6 в). При дальнейшем возрастании α , вихри становятся вытянутыми и смещенными в направлении вращения.

Распределение коэффициента давления по поверхности цилиндра в момент времени, при котором коэффициент лобового сопротивления имеет минимальное значение, а коэффициент подъемной силы обращается в нуль, для случаев с различными комбинациями скорости вращения, показано на рис.7. Влияние эффекта вращения на количественные характеристики течения, приведено для фиксированного значения числа Рейнольдса ($Re = 200$).

Средние значения коэффициента давления для $\alpha = 0$ симметрично относительно $\theta = 180^\circ$, что приводит к нулевому значению средней подъемной силы (рис.8). При возрастании α , поток становится ассиметричным и за тот же

промежуток времени давление на нижней стороне цилиндра ($\theta = 270^\circ$) понижается, в результате появляется отрицательная средняя сила (рис.8). С ростом α , задняя критическая точка перемещается по поверхности цилиндра в направлении противоположном вращению.

В результате численного исследования установлено, что для ламинарного режима течения ($47 \leq Re \leq 200$), вихревой след существует при низких скоростях вращения и полностью подавляется при $\alpha > \alpha_L$. Рост числа Рейнольдса дестабилизирует течение в следе за цилиндром, в то время как вращение стабилизирует его.

Вращение цилиндра в вязких течениях может сильно повлиять на структуру течения, понизить, индуцируемые потоком, осцилляции в вихревом следе. При наличии вихревого следа, в диапазоне $\alpha \leq \alpha_L$, наблюдаются изменения в структуре течения. Во-первых, числа Струхала почти не зависят от скорости вращения, но сильно зависят от чисел Рейнольдса. Во-вторых, при увеличении скорости вращения, средние значения подъемной силы возрастают почти линейно α , а лобового сопротивления понижаются.

Результаты показывают, что вращение цилиндра может подавлять интенсивность вихревой структуры. Вихревой след существует при низких скоростях вращения и полностью исчезает при $\alpha > \alpha_L$, где α_L – критическая скорость вращения, которая логарифмически зависит от числа Рейнольдса. Пока существует вихревой след, числа Струхала остаются почти постоянными, при изменении α . С возрастанием α , значение подъемной силы линейно возрастает, а значение лобового сопротивления понижается и значительно отличается от результатов, получаемых по теории потенциального течения.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что при постоянной скорости ветра на несущий цилиндр опорной башни действуют аэродинамические силы, переменные по величине, направлению и частоте, зависящие от значений текущей угловой скорости.

4.3. Ротор Савониуса. Для совершенствования ветроэнергетической установки (ВЭУ), важным моментом является анализ поля течения вокруг вращающегося ротора ВЭУ. В качестве вертикально-осевой ВЭУ выбран трехлопастный ротор Савониуса. При взаимодействии с набегающим потоком ветра ротор Савониуса генерирует сложное поле течения с большими отрывными зонами. Основными преимуществами этого класса ВЭУ является простота конструкции, независимость от направления ветра, низкая скорость и большой крутящий момент. Так как скорость вращения ротора Савониуса не высока и числа Маха низкие ($M < 0.1$), поле течения можно считать несжимаемым.

На базе разработанного численного алгоритма решена связанная задача динамики и аэродинамики ротора Савониуса. Расчетная сетка, построенная возле ротора, содержала порядка миллиона узлов. Расчет проводился в два этапа. На первом этапе задавался невозмущенный поток во всей области, в который внезапно вносили преграду – ротор Савониуса. Целью первого этапа было получение периодического течения, по структуре похожего на дорожку Кармана. На втором этапе совместно с аэродинамической задачей решалось

уравнение вращения. В некоторый момент времени, который принимается за начало отсчета, «вынимается стопор» и ротор начинает вращение под действием набегающего потока ветра.

Контуры завихренности возле неподвижного и подвижного ротора приведены на рис. 7. В случае неподвижного ротора Савониуса за лопастями формируются вихри, которые поочередно отрываются от лопастей и сносятся вниз по потоку. Когда ротор приводится в движение, интенсивность вихрей резко возрастает, а геометрические размеры уменьшаются. В этом случае, период схода вихрей определяется не только скоростью набегающего потока и характерными размерами, но и частотой вращения самого ротора. От того, с какой угловой скоростью вращается ротор Савониуса, зависит интенсивность и частота схода вихрей. Вихри, сходящие с лопастей идущих на встречу потоку, имеют меньшую интенсивность, чем те, которые сходят с лопастей, которые движутся по потоку. Это объясняется тем, что в первом случае, вихри под тормаживаются, за счет действия вязких эффектов, а во втором случае, они, наоборот, подталкиваются движущимися лопастями. Направление вращения их различно.

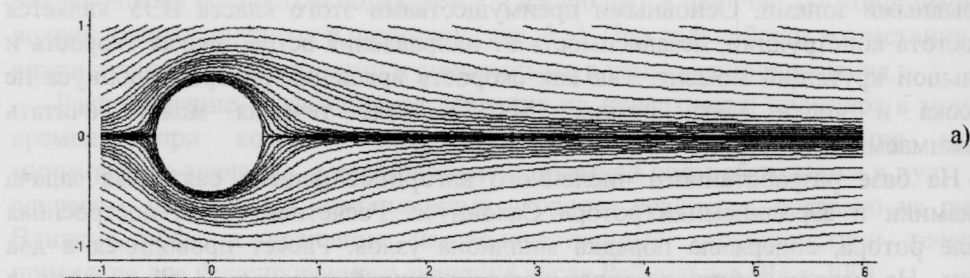
Результаты решения связанной задачи динамики и аэродинамики ротора ветроколеса сравнивались с экспериментальными данными и результатами расчетов по инженерной методике, разработанной авторами [16].

6. Выводы

Для исследования связанной задачи динамики и аэродинамики вертикально-осевого ветроагрегата разработан неявный численный алгоритм на основе уравнения вращения и нестационарных двумерных уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости в подвижных криволинейных координатах.

Проведено тестирование численного алгоритма на задачах о развитии течения в следе за неподвижным и вращающимся цилиндром.

Выполнен расчет связанной задачи динамики и аэродинамики ротора Савониуса. Разработанные математические модели, алгоритмы, вычислительные программы позволяют рассчитывать изменение во времени угловой скорости вращения ветротурбины, внешней нагрузки, выбирать рациональные компоновочные схемы (количество лопастей, форму и углы установки профиля) с учетом их движения под действием нестационарного набегающего потока ветра.



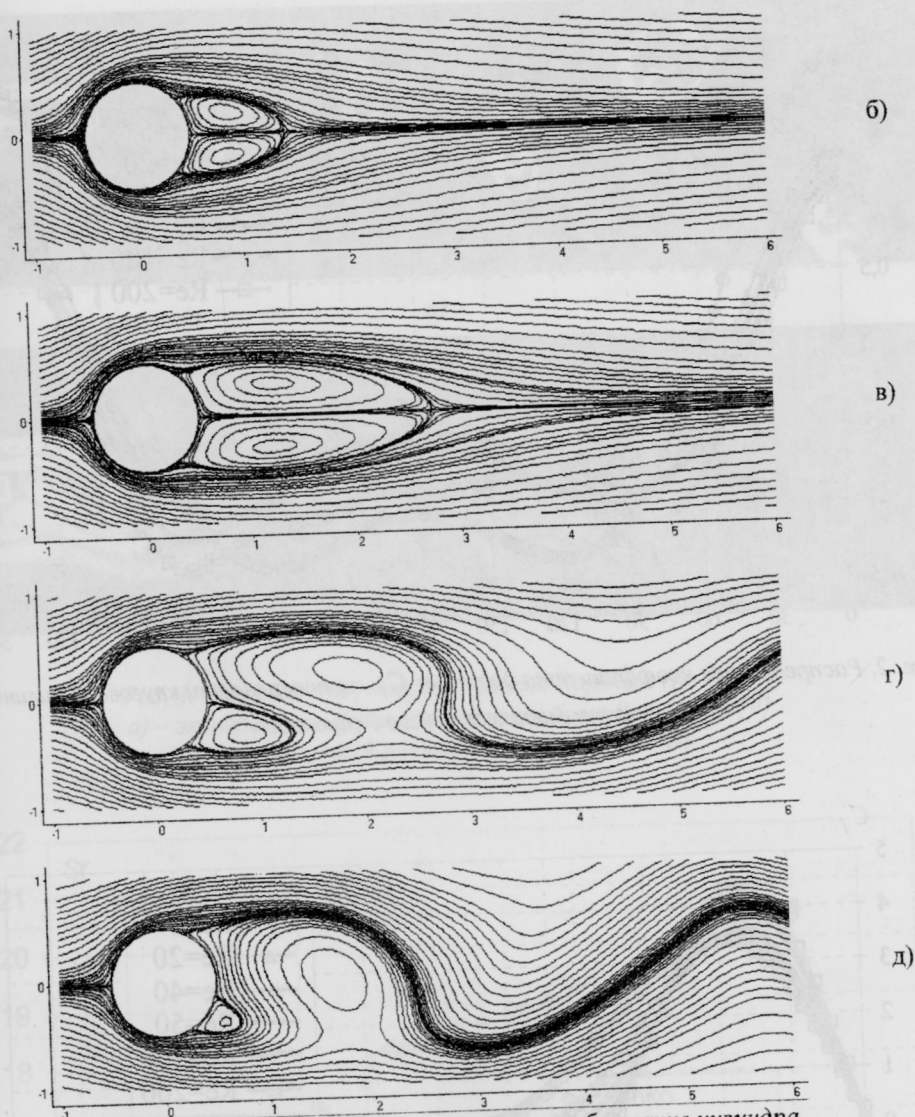


Рис. 1. Стационарное и нестационарное обтекание цилиндра.
Линии тока построенные по мгновенному полю скоростей:
а - $Re = 5$, б - $Re = 20$, в - $Re = 40$, г - $Re = 50$, д - $Re = 100$

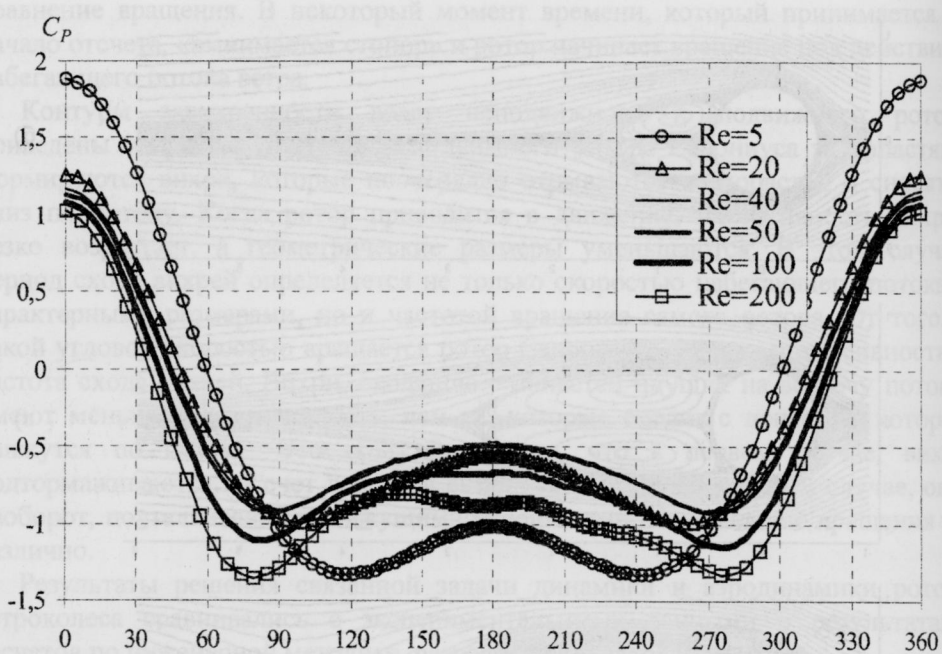


Рис. 2. Распределение коэффициента давления C_p по поверхности кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса

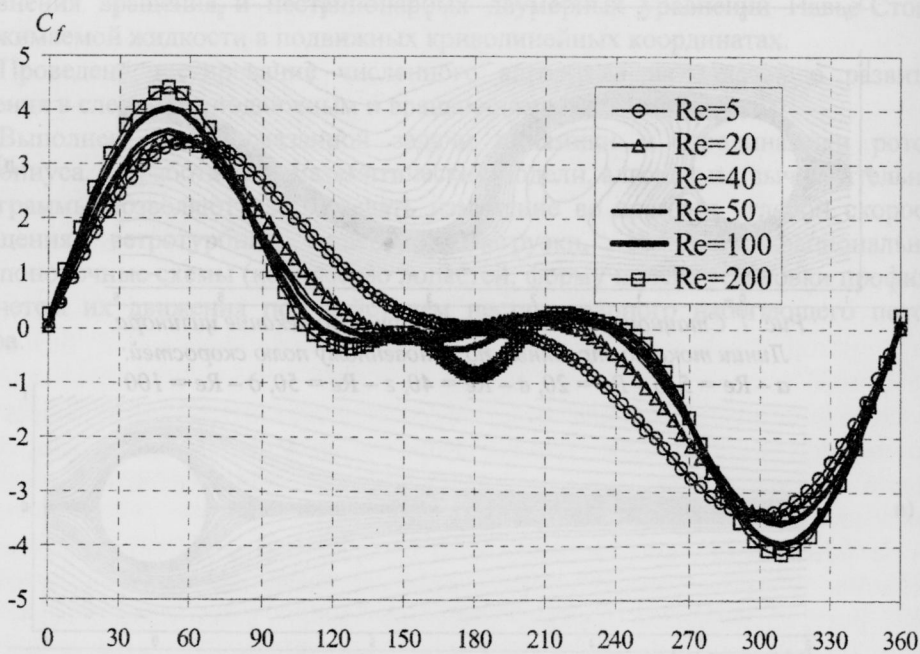
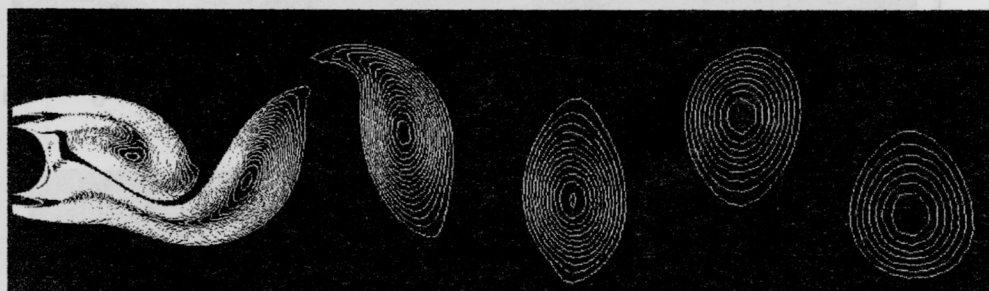


Рис. 3. Распределение коэффициента трения C_f по поверхности кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса



а)



б)

Рис. 4. Вихревая структура дорожки Кармана ($Re = 140$)

а) – эксперимент, фотография из альбома Ван-Дайка [9]

б) – численный расчет настоящей работы

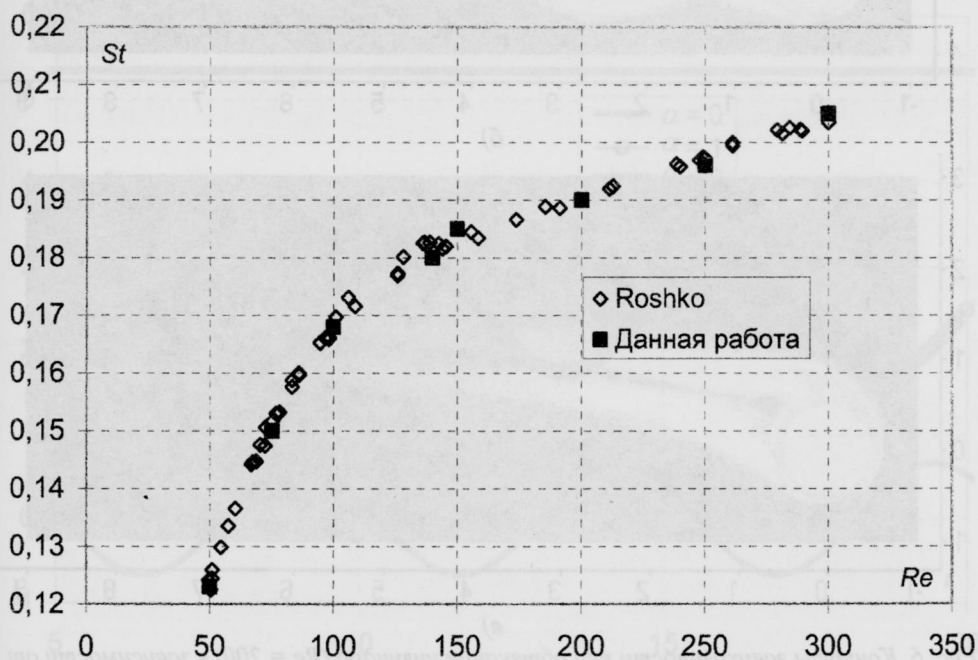


Рис. 5. Зависимость числа Струхала от числа Рейнльда. Сравнение данных настоящей работы с экспериментальными данными Roshko [10]

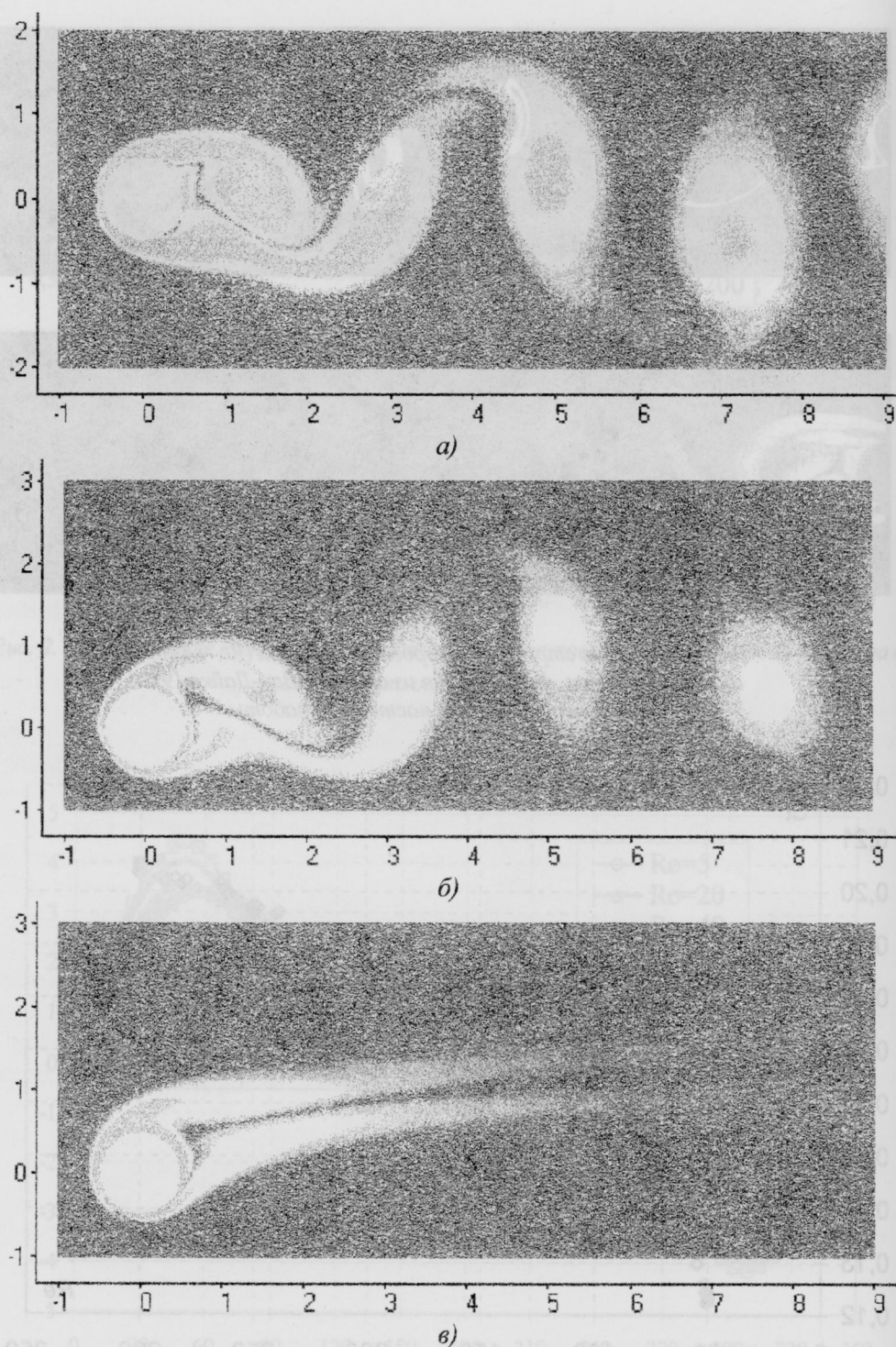


Рис. 6. Контуры завихренности при обтекании цилиндра ($Re = 200$) в зависимости от линейной скорости вращения: а - $\alpha = 0$, б - $\alpha = 1$, в - $\alpha = 2$

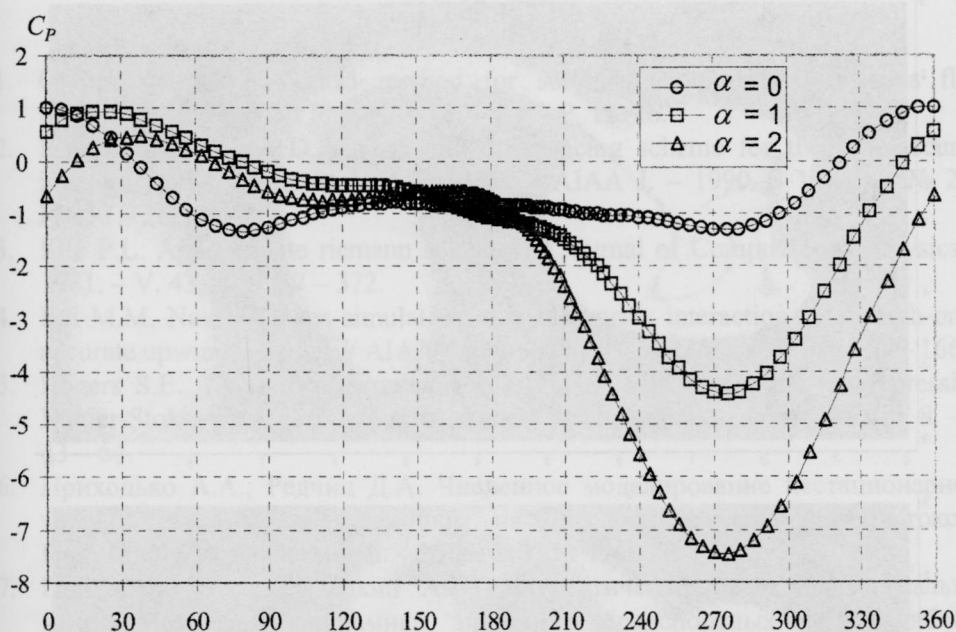


Рис. 7. Распределение коэффициента давления C_p по поверхности кругового цилиндра ($Re=200$) в зависимости от линейной скорости вращения

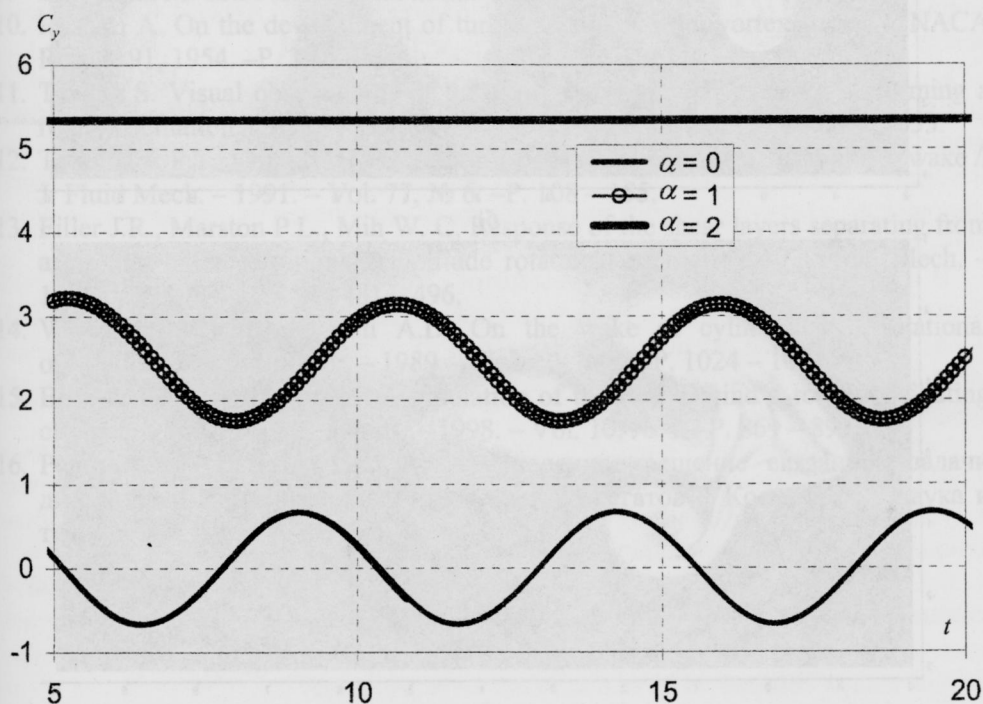
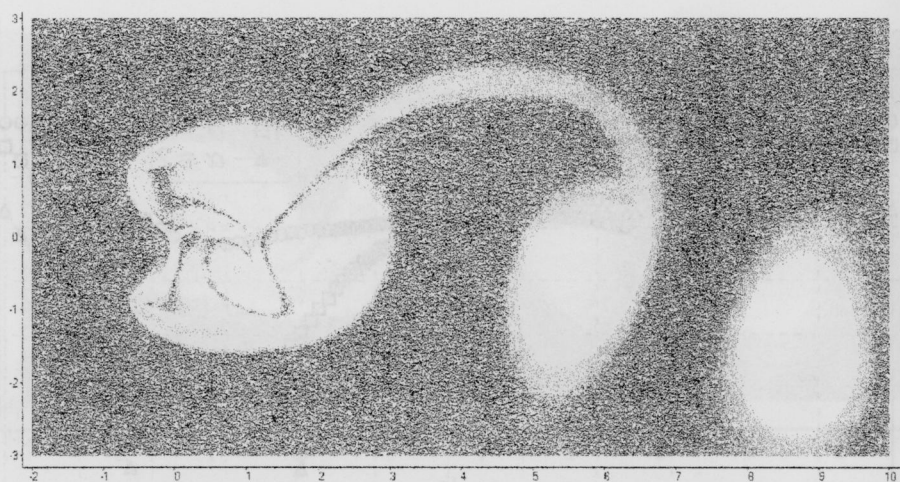
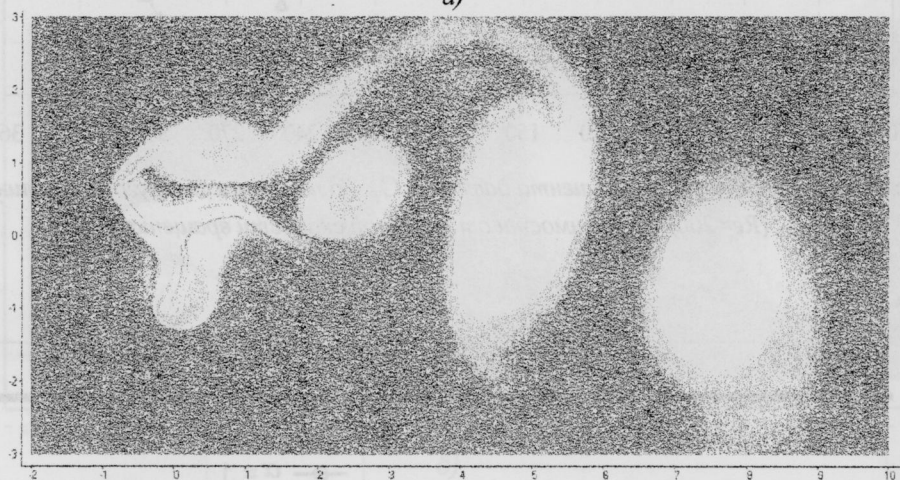


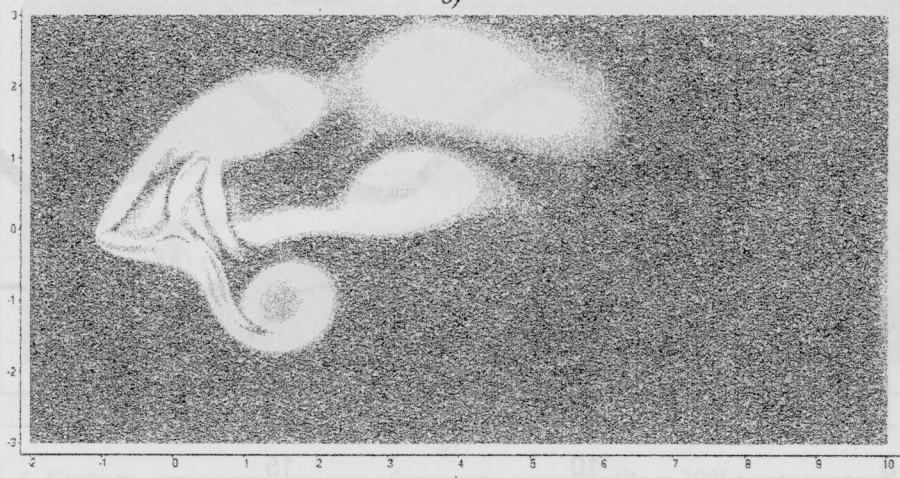
Рис. 8. Зависимость коэффициента подъемной силы C_y для кругового цилиндра ($Re=200$) в зависимости от линейной скорости вращения



a)



6)



в)

Рис. 9. Контуры завихренности вокруг ротора Савониуса:
а – невращающийся, б, в – вращающийся

ЛИТЕРАТУРА

1. Chorin A.J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems // J. Comput. Phys. – 1967. – V.2. – P. 12–26.
2. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations // AIAA J. – 1990. – Vol. 28, № 2. – P. 253 – 262.
3. Roe P.L. Approximate riemann schemes // Journal of Computational Physics. – 1981. – V. 43. – P. 357 – 372.
4. Rai M.M. Navier-Stokes simulation of blade-vortex interaction using high-order accurate upwind schemes // AIAA Paper. – 1987. – Vol. 43, № 5. –P. 153 – 166.
5. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // Journal Numerical Mathematics. – 1991. – Vol. 8. – P. 43 – 64.
6. Приходько А.А., Редчиц Д.А. Численное моделирование нестационарного течения в следе за цилиндром на основе уравнений Навье-Стокса // Прикладная гидромеханика. – 2005. Т. 7, № 1.-С. 56-71.
7. Приходько А.А., Сохацкий А.В. Математическое и экспериментальное моделирование аэродинамики элементов транспортных систем вблизи экрана. – Днепропетровск: Наука и образование, 1998. – 160 с.
8. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и теплообмене. Киев.: Наукова думка, 2003. – 240 с.
9. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. – М.: Мир. 1986. – 184с.
10. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets // NACA Rep. 1191, 1954. –P. 32 – 65.
11. Taneda S. Visual observations of the flow past a circular cylinder performing a rotary oscillation // J. Phys. Soc. Jpn. – 1978. – Vol. 45, № 5. –P. 1038 – 1053.
12. Tokumaru P.T., Dimotakis P.E. Rotary oscillation control of a cylinder wake // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 77, № 6. –P. 108 – 155.
13. Filler J.R., Marston P.L., Mih W. C. Response of the shear layers separating from a circular cylinder to small-amplitude rotational oscillations // J. Fluid Mech. – 1991. – Vol. 78, № 7. –P. 481 – 496.
14. Wu J.M., Mo J.D., Vakili A.D. On the wake of cylinder with rotational oscillations // AIAA Paper. – 1989. – Vol. 10, № 2. –P. 1024 – 1043.
15. Baek S., Sung H.J. Numerical simulation of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder // Phys. Fluids. – 1998. – Vol. 10, № 4. –P. 869 – 893.
16. Редчиц Д. А., Приходько А. А. Численное решение связанной задачи динамики и аэродинамики ротора ветроагрегатов // Космическая наука и технология, 2005. Т. 11, № 1.-С. 27-35.

Морфизмы полусхем и их приложения

Т. В. Семенова

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

In the article the instrument of semischeme mapping using morphisms is suggested. The possibility of using semischemes and semischeme morphisms for describing tools of modelling and mapping of one mathematical apparatus concepts on concepts of another one is showed. The example of the transfer from model built using Petri nets to the model built on the base of the time probability graph using semischeme morphisms is showed

1. Постановка проблемы. Математическое моделирование является общепринятым средством исследования сложных систем. Для получения наиболее полной информации о системе исследователь, как правило, производит построение нескольких моделей (аналитических и имитационных), используя различные математические аппараты. Особенностью такого подхода является невозможность использования уже построенных моделей для разработки последующих. Следовательно, необходим инструмент, который бы позволил описывать понятия различных средств моделирования и строить отображение между ними.

2. Анализ публикаций и постановка задачи. В статье [1] представлена формальная модель описания понятий различных предметных областей, средствами полусхем. В частности, этот подход может быть применен для описания средств математического моделирования. Тогда, актуальной становится задача разработки механизма отображения понятий одного математического аппарата на понятия другого.

В качестве примера в статье рассмотрен процесс описания аппаратов сетей Петри [2] и вероятностно временных графов (ВВГ) [3], средствами полусхем. После чего доказана возможность перехода от модели построенной с помощью сетей Петри к модели построенной с помощью ВВГ путем задания некоторого морфизма полусхем.

Автор выражает благодарность профессору Жолткевичу Г.Н., обратившему ее внимание на возможность применения теории категорий для исследования полусхем, а также Дуравкину Е.В., в процессе обсуждения статьи с которым возник основной пример содержательного морфизма.

3. Основная часть. Выше было указано, что понятия предметной области описываются средствами полусхем. Следовательно, необходимо разработать механизм отображения одной полусхемы на другую. Один из методов решения данной задачи базируется на использовании морфизмов.

Определим понятие морфизма для полусхем и исследуем критерий существования изоморфизма между двумя полусхемами.

Определение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы. **Морфизмом** $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ назовем пару отображений $\varphi = (\varphi_N, \varphi_R)$ таких, что $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$ и выполнено соотношение:

$$(\forall n \in N_1)(\forall f \in nD_1)(\exists g \in \varphi_N(n)D_2) \quad \varphi_N \circ f = g \circ \varphi_R.$$

Утверждение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы.

$\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ - морфизм такой, что $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$ - инъективные отображения. Тогда φ является мономорфизмом.

Доказательство.

В силу определения, φ является мономорфизмом, если для любой полусхемы $S(N, R, D)$ и любых двух морфизмов ψ' и ψ'' , действующих из S в S_1 выполнено соотношение $\psi' \neq \psi'' \Rightarrow \varphi \circ \psi' \neq \varphi \circ \psi''$.

Пусть ψ' и ψ'' - морфизмы, действующие из S в S_1 , такие, что $\psi' \neq \psi''$. Тогда выполнено хотя бы одно из двух соотношений:

$$1. (\exists n \in N) \quad \psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$$

$$2. (\exists r \in R) \quad \psi'_R(r) \neq \psi''_R(r)$$

Для определенности будем считать, что выполнено первое утверждение (для второго случая утверждения проводятся аналогично).

Таким образом, для некоторого понятия n из N выполнено $\psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$. В силу инъективности φ_N имеем:

$$\varphi_N(\psi'_N(n)) \neq \varphi_N(\psi''_N(n)).$$

Следовательно,

$$\varphi \circ \psi' \neq \varphi \circ \psi''.$$

Доказательство завершено.

Утверждение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы.

$\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ - морфизм такой, что $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$.

Тогда φ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда отображения $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$ являются сюръективными.

Доказательство.

Проведем доказательство в одну сторону. Докажем достаточность.

Доказательство будем вести от противного. Предположим, что φ не является эпиморфизмом. Значит, существует такая полусхема $S(N, R, D)$ и морфизмы ψ' и ψ'' ($\psi' \neq \psi''$), действующих из S_2 в S , для которых выполнено $\varphi \circ \psi' = \varphi \circ \psi''$. Поскольку $\psi' \neq \psi''$, то выполнено хотя бы одно из двух соотношений:

$$1. (\exists n \in N) \quad \psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$$

$$2. (\exists r \in R) \quad \psi'_R(r) \neq \psi''_R(r)$$

Для определенности будем считать, что выполнено первое утверждение (для второго случая утверждения проводятся аналогично).

Таким образом, для некоторого понятия n из N_2 выполнено $\psi'_N(n) \neq \psi''_N(n)$.

В силу сюръективности φ_N имеем:

$$(\exists n' \in N_1) \quad \varphi_N(n') = n.$$

Следовательно,

$$\psi'(\varphi_N(n')) \neq \psi''(\varphi_N(n')).$$

Таким образом,

$$\psi' \circ \varphi \neq \psi'' \circ \varphi.$$

Полученное соотношение противоречит предположению.

Доказательство достаточности завершено.

Проведем доказательство в противоположную сторону. Пусть φ является эпиморфизмом. Покажем, что $\varphi_N: N_1 \rightarrow N_2$, $\varphi_R: R_1 \rightarrow R_2$ - сюръективные отображения.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что одно из отображений φ_N или φ_R не является сюръективным. Для определенности будем считать, что это φ_N .

Тогда существует такое понятие n из N_2 у которого нет прообраза, то есть $(\exists n \in N_2)(\forall m \in N_1) \quad \varphi_N(m) \neq n$.

Построим полусхему $S(N, R, D)$ и отображения ψ' и ψ'' таким образом, чтобы нарушалось свойство эпиморфизма. Полученное противоречие и станет доказательством утверждения.

В качестве полусхемы $S(N, R, D)$ возьмем копию полусхемы S_2 , в которую добавлено еще одно понятие $\tilde{n}$ с такой же структурой, как у n , то есть

$$N = N_2 \cup \{\tilde{n}\}$$

$$R = R_2$$

$$D = D_2 \cup D', \text{ где } D' = \{(\tilde{n}, f) \mid f \in nD_2\}.$$

Определим ψ' как тождественный морфизм. А ψ'' определим аналогично ψ' кроме действия на элементе n . Положим $\psi''_N(n) = \tilde{n}$. В силу определения полусхемы $S(N, R, D)$ ψ'' является морфизмом.

Таким образом,

$$(\forall r \in R_2) \quad \psi'_R(r) = \psi''_R(r)$$

$$(\forall m \in N_2 \setminus \{n\}) \quad \psi'_N(m) = \psi''_N(m)$$

$$\psi'_N(n) = n, \quad \psi''_N(n) = \tilde{n}$$

Поскольку у элемента n из N_2 нет прообраза, то

$$(\forall m \in N_1) \varphi_N(\psi'_N(m)) = \varphi_N(\psi''_N(m)).$$

Следовательно, $\psi' \circ \varphi = \psi'' \circ \varphi$ при $\psi' \neq \psi''$. Это противоречит изначальному условию о том, что φ является эпиморфизмом.

Доказательство необходимости завершено.

Утверждение доказано полностью.

Утверждение

Пусть $S_1(N_1, R_1, D_1)$ и $S_2(N_2, R_2, D_2)$ - полусхемы.

Морфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ является изоморфизмом, если φ является биморфизмом и $\tilde{\varphi}(\varphi_N^{-1}, \varphi_R^{-1})$ является морфизмом из S_2 в S_1 .

Доказательство.

В силу определения, $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ является изоморфизмом, если существует такой морфизм $\psi: S_2 \rightarrow S_1$, что $\psi \circ \varphi = 1_{S_1}$ и $\varphi \circ \psi = 1_{S_2}$.

Возьмем в качестве морфизма $\psi: S_2 \rightarrow S_1$ морфизм. Очевидно, что в этом случае, оба соотношения $\psi \circ \varphi = 1_{S_1}$ и $\varphi \circ \psi = 1_{S_2}$ выполнены.

Доказательство завершено.

Рассмотрим возможность использования разработанного механизма отображения полусхем на конкретных средствах математического моделирования. В качестве средства имитационного моделирования выбран аппарат сетей Петри, как наиболее часто используемый при анализе информационно-вычислительных систем. В качестве средства аналитического моделирования был выбран аппарат ВВГ, обладающий широкими возможностями при анализе систем.

Временная маркированная сеть Петри (СП): $C = (P, T, I, O, A)$, где

$P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ - конечное множество позиций СП,

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ - конечное множество переходов СП,

I - входная функция переходов, которая определяется как отображение $I: P \times T \rightarrow B$, где $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ - множество вероятностей перехода,

O - выходная функция переходов, которая определяется как отображение $O: T \times P \rightarrow B$

A - временная функция переходов, которая определяется как отображение $A: T \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ задает время перехода.

Тогда инцидентность позиций p_i и p_j через переход t_k характеризуется парой:

$t_{ij} = A(t_k)$ - время перехода,

$p_{ij} = I((p_i, t_k)) \cdot O((t_k, p_j))$ - вероятность перехода

Представим описание аппарата временных маркированных сетей Петри в терминах полусхем.

Множество терминальных понятий $N_0 = \{\text{Целое, Вещественное}\}$, множество понятий $N_1 = \{\text{Инцидентность, Позиция, Переход}\} \cup N_0$;

множество ролей $R_1 = \{\text{Начальная позиция, Конечная позиция, Функция перехода, Идентификатор, Вероятность, Время}\}$;

набор частично определенных функций f_1, f_2, f_3 :

f_1 :

f_1 (Начальная позиция) = Позиция

f_1 (Конечная позиция) = Позиция

f_1 (Функция перехода) = Переход

f_2 :

f_2 (Идентификатор) = Целое

f_3 :

f_3 (Вероятность) = Вещественное

f_3 (Время) = Вещественное

Множество $D_1 = \{(\text{Инцидентность}, f_1), (\text{Позиция}, f_2), (\text{Переход}, f_3)\}$.

Применяя алгоритмы, описанные в [1], легко увидеть, что описанная таким образом полусхема $S_1 = (N_1, R_1, D_1)$ является схемой.

Приведенное формальное описание представлено в графическом виде на рис. 1.

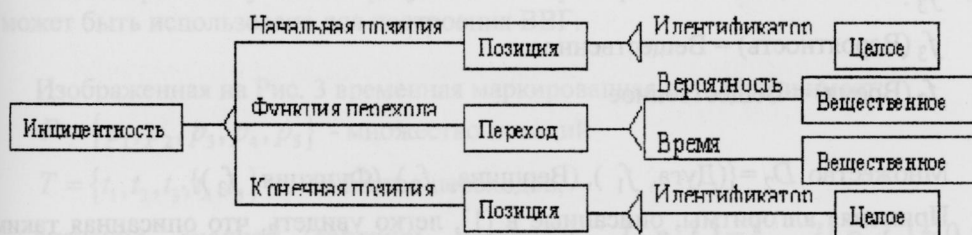


Рис. 1. Схема, описывающая сеть Петри

Вероятностно-временной граф: $G = (V, P, T, M)$, где

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ - множество вершин,

P - функция, задающая вероятностную характеристику дуги, которая определяется как отображение $P: V \times V \rightarrow B$, где $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ - множество вероятностей (обозначим $P((v_i, v_j)) = P_{ij}$),

T - функция, задающая временную характеристику дуги, которая определяется как отображение $T: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ (обозначим $T((v_i, v_j)) = T_{ij}$),

F - множество функций вида $f(z) = p \cdot z'$

M - функция, задающая вероятностно-временную характеристику дуги в виде функции из F , которая определяется как отображение $M: V \times V \rightarrow F$, т.е. паре (v_i, v_j) ставится в соответствие функция $P_{ij} \cdot z^{T_{ij}}$.

Представим описание аппарата вероятностно временного графа в терминах полусхем.

Множество терминальных понятий $N_0 = \{\text{Целое, Вещественное}\}$,

множество понятий $N_2 = \{\text{Дуга, Вершина, Функция}\} \cup N_0$;

множество ролей $R_2 = \{\text{Вершина выхода, Вершина входа, Характеристика, Идентификатор, Вероятность, Время}\}$;

набор частично определенных функций f_1, f_2, f_3 :

f_1 :

$f_1(\text{Вершина выхода}) = \text{Вершина}$

$f_1(\text{Вершина входа}) = \text{Вершина}$

$f_1(\text{Характеристика}) = \text{Функция}$

f_2 :

$$f_2(\text{Идентификатор}) = \text{Целое}$$

 $f_3:$

$$f_3(\text{Вероятность}) = \text{Вещественное}$$

$$f_3(\text{Время}) = \text{Вещественное}$$

Множество $D_2 = \{(\text{Дуга}, f_1), (\text{Вершина}, f_2), (\text{Функция}, f_3)\}$.

Применяя алгоритмы, описанные в [1], легко увидеть, что описанная таким образом полусхема $S_2 = (N_2, R_2, D_2)$ является схемой.

Приведенное формальное описание представлено в графическом виде на Рис. 2.

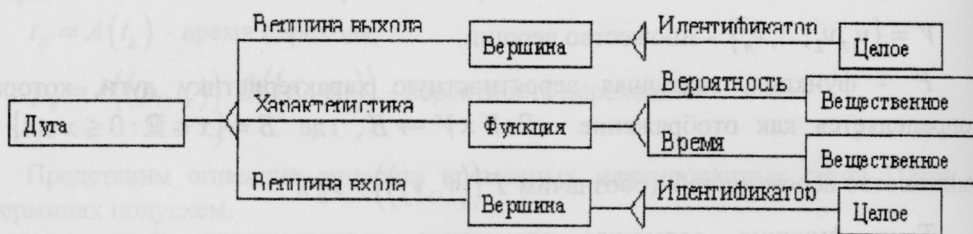


Рис. 2. Схема, описывающая ВВГ

Применение алгоритмов, описанных в [1], к построенным полусхемам $S_2 = (N_2, R_2, D_2)$

Зададим отображение $\varphi(\varphi_R, \varphi_N): S_1 \rightarrow S_2$ для построенных схем, которое действует следующим образом:

$$\varphi_R(\text{Начальная позиция}) = \text{Вершина выхода}$$

$$\varphi_R(\text{Конечная позиция}) = \text{Вершина входа}$$

$$\varphi_R(\text{Функция перехода}) = \text{Характеристике}$$

$$\varphi_R(\text{Вероятность}) = \text{Вероятность}$$

$$\varphi_R(\text{Время}) = \text{Время}$$

$$\varphi_R(\text{Идентификатор}) = \text{Идентификатор}$$

$$\varphi_N(\text{Инцидентность}) = \text{Дуга}$$

$$\varphi_N(\text{Позиция}) = \text{Вершина}$$

$$\varphi_N(\text{Переход}) = \text{Функция}$$

$$\varphi_N(\text{Целое}) = \text{Целое}$$

$$\varphi_N(\text{Вещественное}) = \text{Вещественное}$$

Легко показать, что приведенное отображение является морфизмом. Полученный результат позволяет утверждать, что имитационная модель,

представленная временной сетью Петри может быть отображена на аналитическую модель, построенную с помощью ВВГ.

Рассмотрим полученный результат на примере. Покажем, как сеть Петри может быть использована для построения ВВГ.

Изображенная на Рис. 3 временная маркированная сеть Петри имеет:

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ - множество позиций

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ - множество переходов,

значения входной функции переходов $I(p_1, t_1) = 1$, $I(p_1, t_2) = 0,5$, $I(p_2, t_2) = 0,5$, $I(p_3, t_3) = 0,5$, $I(p_4, t_3) = 0,5$, $I(p_4, t_4) = 0,5$, $I(p_5, t_5) = 1$, остальные $I(p_i, t_j) = 0$,

значения выходной функции переходов $O(t_i, p_j) = 0$ для всех i и j ,

значения временной функции переходов $A(t_1) = T_1$, $A(t_2) = T_2$, $A(t_3) = T_3$, $A(t_4) = T_4$, $A(t_5) = T_5$.

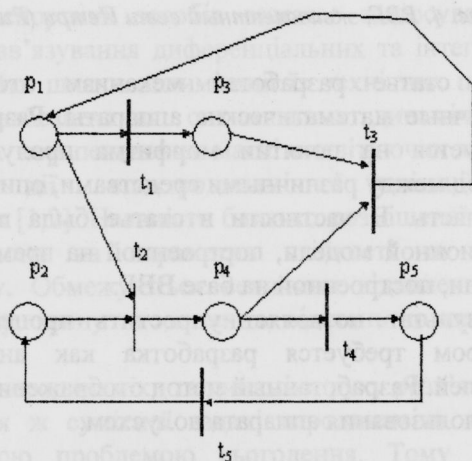


Рис. 3. Пример графа сети Петри

Изображенный на Рисунке 4 вероятностно временной граф имеет:

множество вершин $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

значения функции, задающей вероятностную характеристику дуг
 $P_{13} = P(v_1, v_3) = 1$, $P_{14} = P(v_1, v_4) = 0,5$, $P_{24} = P(v_2, v_4) = 0,5$,
 $P_{31} = P(v_3, v_1) = 0,5$, $P_{41} = P(v_4, v_1) = 0,5$, $P_{45} = P(v_4, v_5) = 1$,
 $P_{52} = P(v_5, v_2) = 1$,

значения функции, задающей временную характеристику дуг
 $T_{13} = T(v_1, v_3) = T_1$, $T_{14} = T(v_1, v_4) = T_2$, $T_{24} = T(v_2, v_4) = T_2$, $T_{31} = T(v_3, v_1) = T_3$,
 $T_{41} = T(v_4, v_1) = T_3$, $T_{45} = T(v_4, v_5) = T_4$, $T_{52} = T(v_5, v_2) = T_5$,

Тогда $f_1 = 1 \cdot z^{T_1}$, $f_2 = 0,5 \cdot z^{T_3}$, $f_3 = 0,5 \cdot z^{T_2}$, $f_4 = 0,5 \cdot z^{T_3}$, $f_5 = 1 \cdot z^{T_4}$, $f_6 = 1 \cdot z^{T_5}$, $f_7 = 0,5 \cdot z^{T_2}$.

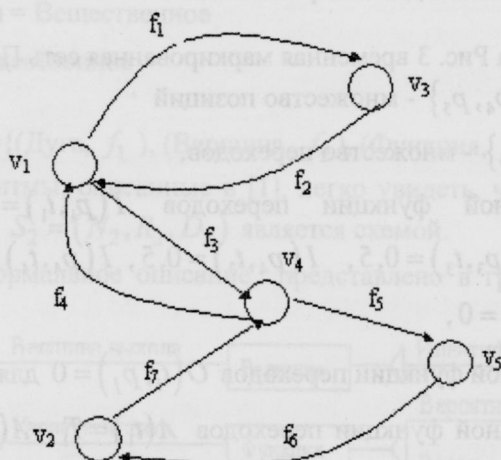


Рис. 4. ВВГ, эквивалентный сети Петри (Рис. 3)

4. Выводы. В статье разработан механизм отображения полусхем, описывающих различные математические аппараты. Разработанный механизм отображения базируется на понятии морфизма пролусхем. Это позволяет осуществлять переход между различными средствами, описывающими одну и ту же предметную область. В частности в статье была показана возможность перехода от имитационной модели, построенной на временных сетях Петри к аналитической модели, построенной на базе ВВГ.

Полученный результат позволяет упростить процесс анализа сложных систем, при котором требуется разработка как аналитических, так и имитационных моделей. Разработанный метод отображения моделей показывает один из способов использования аппарата полусхем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жолткевич Г.Н., Семенова Т.В. К проблеме формализации концептуального моделирования информационных систем // Вісник Харк. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. "Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління". – Харків: ХНУ. – 2003. – № 605, вип. 2. – С. 33 - 43.
2. Мурата Т. Сети Петри: Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР. №4. 1989.
3. Лосев Ю.И. и др. Автоматизированное управление в сетях с коммутацией пакетов. – К.: Техника, 1994. – 312 с.