ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 9 1969

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ—ЧЕБЫШЕВА В ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

А. С. Зиновьев

ВВЕДЕНИЕ

Пусть многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормальны на конечном отрезке относительно обложения $d\psi(x)$; не уменьшая общности, можем принять за отрезок ортогональности $[-1, 1]$, так как всякий конечный отрезок может быть сведен к отрезку $[-1, 1]$ путем соответствующего линейного преобразования. Функция $\psi(x)$ предполагается неубывающей и ограниченной на $[-1, 1]$; если $\psi(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке ортогональности или некоторой его части, то на соответствующем отрезке почти всюду $\psi'(x) = \rho(x)$, где $\rho(x)$ — неотрицательная и суммируемая на $[-1, 1]$ функция.

Будем говорить, что вещественная функция $f(x) \in L_\psi^p$ или $f(x) \in L_{\rho(x)}^p$, если она удовлетворяет неравенству

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, d\psi(x) < \infty \quad \text{или} \quad \int_{-1}^{1} |f(x)|^p \rho(x)\, dx < \infty$$

соответственно.

Произвольной вещественной функции $f(x)$, для которой существуют

$$c_k = \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, d\psi(x), \quad (k = 0, 1, \ldots),$$

соответствует формальное разложение в ряд Фурье — Чебышева по многочленам $\{P_n(x)\}$:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k P_k(x). \tag{1}$$

Возникает вопрос о нахождении тех достаточных условий, при которых разложение (1) сходилось бы к $f(x)$.

Определение. *Пусть на отрезке* $[-1, 1]$ *задана вещественная функция* $f(x) \in L_\psi^p$. *Условимся говорить, что точка* $t \in [-1, 1]$ *является* (r, λ) — *точкой Лебега функции* $f(x)$, *если в некоторой* δ_0-*окрестности точки* t

$$\int_{t}^{t+\delta} |f(x) - f(t)|^r \, d\psi(x) = \delta\lambda(\delta), \quad (|\delta| \leqslant \delta_0), \tag{2}$$

где функция $\lambda(\delta)$ *удовлетворяет условию* $\lim_{\delta \to 0} \lambda(\delta) = 0$, *а* t, $t + \delta \in [-1, 1]$.

Полагая в (2) $\psi(x) = x$, $\lambda(\delta) = o(1)$, а $r = p \geqslant 1$, приходим к определению точек Лебега в L^p (см. например, [1, стр. 893—894]); если функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, то, полагая $\lambda(\delta) = o(1)$, а $r = p \geqslant 1$, приходим к определению точек Лебега p-го порядка [2, стр. 289].

В настоящей работе получены достаточные условия сходимости разложений Фурье — Чебышева в $(1, \lambda)$- и $(2, \lambda)$-точках Лебега.

1. СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЕВА В $(1, \lambda)$-ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

Теорема 1. *Пусть в некоторой δ_0-окрестности точки $t \in [-1,1]$ функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, а функция $f(x) \in L_\psi^2$ удовлетворяет условию*

$$\int_t^{t+\delta} |f(x) - f(t)|\, \rho(x)\, dx = \delta\lambda(\delta), \quad (|\delta| \leqslant \delta_0). \tag{3}$$

Если в этой же δ_0-окрестности точки t многочлены $\{P_n(x)\}$ равномерно ограничены, т. е.

$$|P_n(x)| \leqslant C_1, \quad x \in [t - \delta_0,\ t + \delta_0], \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

а функция

$$\frac{\lambda(x)}{x} \in L[-\delta_0, \delta_0], \tag{4}$$

то разложение (1) *функции $f(x)$ сходится при $x = t$ к $f(t)$.*

Доказательство. Обозначим через $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x)$ частичную сумму разложения (1) и рассмотрим разность

$$S_n(t) - f(t) = \int_{-1}^{1} [f(x) - f(t)]\, K_n(x, t)\, d\psi(x), \tag{5}$$

$$K_n(x; t) = \sum_{k=0}^{n} P_k(x) P_k(t) = \gamma_n \frac{P_{n+1}(x) P_n(t) - P_n(x) P_{n+1}(t)}{x - t} \times \tag{6}$$

$$\times (0 < \gamma_n \leqslant 1).$$

Пусть $-1 < t < 1$; выберем $\delta > 0$ так, чтобы выполнялись условия теоремы, а точки $t - \delta$ и $t + \delta$ принадлежали $(-1, 1)$ и запишем (5) в виде

$$S_n(t) - f(t) = \int_{-1}^{t-\delta} + \int_{t-\delta}^{t} + \int_{t}^{t+\delta} + \int_{t+\delta}^{1} = \sum_{i=1}^{4} I_i, \tag{7}$$

откуда

$$|S_n(t) - f(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} |I_i|. \tag{8}$$

Оценим каждый из интегралов I_i $(i = 1, 2, 3, 4,)$; учитывая, что интегралы I_1 и I_4, а также I_2 и I_3 оцениваются аналогично, остановимся на оценках интегралов I_3 и I_4;

$$|I_3| = \left| \int_t^{t+\delta} [f(x) - f(t)]\, K_n(x, t)\, \rho(x)\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_n |P_n(t) A_{n+1} - P_{n+1}(t) A_n| \leqslant C_1 \{ |A_{n+1}| + |A_n| \}, \tag{9}$$

где

$$|A_k| = \left| \int_t^{t+\delta} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} P_k(x)\, \rho(x)\, dx \right| \leqslant C_1 \int_t^{t+\delta} \frac{|f(x) - f(t)|}{x - t} + \rho(x)\, dx$$

$$\times (k = n,\ n + 1). \tag{10}$$

Из (3), полагая $y = x - t$, $0 \leqslant y \leqslant \delta$, находим

$$\int_0^\delta |f(y+t) - f(t)|\,\rho(y+t)\,dy = \delta\lambda(\delta).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi_t(z) = \int_0^z |f(y+t) - f(t)|\,\rho(y+t)\,dy \quad (0 \leqslant z \leqslant \delta),$$

откуда почти всюду на $[0, \delta]$

$$\frac{d\varphi_t(z)}{dz} = |f(z+t) - f(t)|\,\rho(z+t). \tag{11}$$

Ясно, что когда $z \in [0, \delta]$, то $\varphi_t(z) = z\lambda(z)$.

Из (10) и (11) тогда следует

$$|A_k| \leqslant C_1 \int_0^\delta \frac{|f(z+t) - f(t)|}{z}\,\rho(z+t)dz = C_1 \int_0^\delta \frac{d\varphi_t(z)}{z} =$$

$$= C_1 \left\{ \frac{\varphi_t(z)}{z}\Big|_0^\delta + \int_0^\delta \frac{\varphi_t(z)}{z^2}\,dz \right\} = C_1 \left\{ \lambda(\delta) + \int_0^\delta \frac{\lambda(z)}{z}\,dz \right\}, \quad (k = n,\ n+1).$$

Отсюда и из условий теоремы вытекает, что для всякого произвольно малого положительного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что как только $0 < \delta \leqslant \delta_\varepsilon$, то $|A_n| < \frac{\varepsilon}{8C_1}$ и аналогично $|A_{n+1}| < \frac{\varepsilon}{8C_1}$; тогда из (9) для I_3 находим оценку

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{12}$$

Такая же оценка имеет место и для интеграла I_2

$$|I_2| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{13}$$

Рассмотрим

$$|I_4| = \left| \int_{t+\delta}^1 [f(x) - f(t)]\,K_n(x, t)\,d\psi(x) \right| \leqslant \gamma_n |P_n(t) B_{n+1} -$$

$$- P_{n+1}(t) B_n| \leqslant C_1 \{ |B_{n+1}| + |B_n| \}; \tag{14}$$

коэффициент

$$B_k = \int_{t+\delta}^1 \frac{f(x) - f(t)}{x - t}\,P_k(x)\,d\psi(x), \quad (k = n,\ n+1)$$

можно рассматривать как $k+1$-й коэффициент разложения в ряд Фурье — Чебышева по многочленам $\{P_n(x)\}$ функции

$$F_t(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(t)}{x - t}, & x \in [t+\delta,\ 1] \\ 0 \quad, & x \overline{\in} [t+\delta,\ 1], \end{cases} \tag{15}$$

которая, очевидно, принадлежит L^2_ψ. Из неравенства Бесселя тогда следует: для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $N = N(\varepsilon)$, что как только $k \geqslant N$, то $|B_k| < \frac{\varepsilon}{8C_1}, = (k = n,\ n+1)$. Отсюда и из (14) вытекает

$$|I_4| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ и аналогично } |I_1| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{16}$$

Из неравенств (12), (13), (16) и (8) вытекает

$$|S_n(t)-f(t)|<\varepsilon,\ n>N(\varepsilon). \tag{17}$$

Если точка t совпадает с одним из концов отрезка ортогональности, например, $t=-1$, то (5) можно записать в виде

$$|S_n(-1)-f(-1)|=\int_{-1}^{-1+\delta}+\int_{-1+\delta}^{1},\quad (\delta>0), \tag{18}$$

где интегралы оцениваются подобно тому, как были оценены интегралы I_3 и I_4; так же, когда $t=1$.

Таким образом, теорема 1 доказана полностью.

Следствие. *Из теоремы 1, в частности, следует теорема Алексича [2, стр. 35]: если в точке $t\in(-1,\ 1)$ функция $f(x)\in L^2_{\rho(x)}$ удовлетворяет условию Дини — Липшица порядка $\alpha>1$ и если в окрестности точки t как весовая функция $\rho(x)$, так и ортонормированная с весом $\rho(x)$ система многочленов $\{P_n(x)\}$ равномерно ограничены, то разложение (1) функции $f(x)$ сходится в точке t к $f(t)$.*

Действительно, если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини — Липшица порядка $\alpha>1$ в некоторой окрестности точки t, то она удовлетворяет и соотношению (3), где $\lambda(\delta)=O\left(\frac{1}{|\ln|\delta||^{\alpha}}\right)$. Но при этом условии выполнено и (4). Остальное очевидно.

Теорема 2. *Пусть многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормальны на $[-1,\ 1]$ относительно веса $\rho(x)$ и выполняется неравенство*

$$\sqrt{\rho(x)}\,|P_n(x)|\leqslant C_2,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\ (n=0,\ 1,\ \dots). \tag{19}$$

Если функция $f(x)\in L_{\sqrt{\rho(x)}}$ и $\in L_{\rho(x)}$ *удовлетворяет условию* (3), *где функция $\lambda(\delta)$ такова, что выполнено* (4) *и, кроме того,*

$$\rho(x)\geqslant m>0,\quad x\in[t-\delta_0,\ t+\delta_0], \tag{20}$$

то разложение функции

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_kP_k(x),\quad c_k=\int_{-1}^{1}f(x)P_k(x)\rho(x)dx \tag{21}$$

сходится при $x=t$ к $f(t)$.

Доказательство. Имеем

$$S_n(t)-f(t)=\int_{-1}^{1}[f(x)-f(t)]K_n(x,\ t)\rho(x)\,dx, \tag{22}$$

где ядро $K_n(x,\ t)$ определяется соотношением (6). Если точка t лежит внутри $[-1,\ 1]$, то, выбирая $\delta>0$ так, как это делалось при доказательстве теоремы 1, (22) можно записать в виде

$$S_n(t)-f(t)=\int_{-1}^{t-\delta}+\int_{t-\delta}^{t}+\int_{t}^{t+\delta}+\int_{t+\delta}^{1}=\sum_{i=1}^{4}I_i, \tag{23}$$

откуда

$$|S_n(t)-f(t)|\leqslant\sum_{i=1}^{4}I_i. \tag{24}$$

Интегралы I_2 и I_3 в (23) оцениваются точно так же, как и соответствующие интегралы в (7), поэтому

$$|I_2|<\frac{\varepsilon}{4},\quad |I_3|<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{25}$$

Для I_4 из (23), учитывая (19) и (20), получаем

$$|I_4| < C_3\{|R_{n+1}| + |R_n|\}, \ \left(C_3 = \frac{C_2}{m}\right),$$

где

$$R_k = \int_{t+\delta}^{1} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} P_k(x)\rho(x)\,dx, \quad (k = n, \ n+1).$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_t(x) = \begin{cases} \sqrt{\rho(x)}\ \dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}, & x \in [t+\delta, \ 1] \\ 0 & , \quad x \bar{\in} [t+\delta, \ 1]; \end{cases}$$

тогда

$$R_k = \int_{-1}^{1} \Phi_t(x) P_k(x) \sqrt{\rho(x)}\,dx \quad (k = n, \ n+1)$$

можно рассматривать как $k+1$-й коэффициент разложения функции $\Phi_t(x) \in L$ по ортонормированной системе функций $\{\sqrt{\rho(x)}\,P_n(x)\}$. Из теоремы Мерсера [1, стр. 76] и (19) следует, что при $k \to \infty$ $R_k \to \infty$; следовательно, для всякого произвольно малого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших k, $(k > N(\varepsilon))$, $|R_k| < \frac{\varepsilon}{8C_3}$, $(k = n, \ n+1)$. Тогда для I_4 и аналогично для I_1 получаем оценки

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |I_4| < \frac{\varepsilon}{4}, \ n > N(\varepsilon). \tag{26}$$

Из (24) — (26) находим, что

$$|S_n(t) - f(t)| < \varepsilon, \ n > N(\varepsilon). \tag{27}$$

Если точка t совпадает с одним из концов отрезка ортогональности, например, $t = -1$, то (21) можно записать в виде (18), где оценка интегралов теперь не вызывает затруднений и приводит к неравенству (27), доказывающему теорему.

§ 2. О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЕВА В (2, λ)-ТОЧКАХ ЛЕБЕГА

Теорема 3. *Пусть в некоторой δ_0-окрестности точки $t \in [-1, 1]$ функция $\psi(x)$ абсолютно непрерывна, а функция $f(x) \in L^2_\psi$ удовлетворяет условию*

$$\int_{t}^{t+\delta} |f(x) - f(t)|^2 \rho(x)\,dx = \delta\lambda(\delta), \ (|\delta| \leqslant \delta_0). \tag{28}$$

Пусть многочлены $\{P_n(x)\}$, ортонормальные на $[-1, 1]$ относительно $d\psi(x)$, ограничены в точке t, т. е.

$$|P_n(t)| \leqslant C_4, \ (n = 0, \ 1, \ \ldots). \tag{29}$$

Если функция $\lambda(\delta)$ удовлетворяет обоим условиям

1) $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{\lambda(\delta)}{\delta} = 0$

и

2) $\dfrac{\lambda(x)}{x^2} \in L[-\delta_0, \ \delta_0]$,

то разложение (1) *функции $f(x)$ сходится при $x = t$ к $f(t)$.*

Доказательство. Ясно, что (5) — (8) остаются верными и в том случае; оценка интегралов I_1 и I_4 ничем не отличается от оценок соответствующих интегралов при доказательстве теоремы 1, поэтому

$$|I_1| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad |I_4| < \frac{\varepsilon}{4}, \ n > N(\varepsilon), \tag{30}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно малое число. Интегралы I_2 и I_3 оцениваются одинаково, поэтому остановимся на оценке I_3. Из (7), (6) и (29) находим

$$|I_3| \leqslant C_4 \{ |A_{n+1}| + |A_n| \}, \tag{31}$$

$$|A_k| = \left| \int_t^{t+\delta} \frac{f(x)-f(t)}{x-t} P_k(x)\rho(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_t^{t+\delta} \frac{[f(x)-f(t)]^2}{(x-t)^2} \rho(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_t^{t+\delta} P_k^2(x)\rho(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_t^{t+\delta} \frac{[f(x)-f(t)]^2}{(x-t)^2} \rho(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_{-1}^{1} P_k^2(x)\,d\psi(x) \right\}^{\frac{1}{2}}, \ (k=n, \ n+1).$$

Таким образом,

$$|A_k| \leqslant \left\{ \int_t^{t+\delta} \frac{[f(x)-f(t)]^2}{(x-t)^2} \rho(x)\,dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \ (k=n, \ n+1),$$

или, вводя новую переменную $y = x - t$, $0 \leqslant y \leqslant \delta$,

$$|A_k| \leqslant \left\{ \int_0^{\delta} \frac{[f(y+t)-f(t)]^2}{y^2} \rho(y+t)\,dy \right\}^{\frac{1}{2}}, \ (k=n, \ n+1). \tag{32}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\Gamma_t(y) = \int_0^y [f(x+t)-f(t)]^2 \rho(x+t)\,dx; \tag{33}$$

очевидно, что когда $y \in [0, \delta]$,

$$\Gamma_t(y) = y\lambda(y). \tag{34}$$

Из (33) находим, что почти всюду на $[0, \delta]$

$$\frac{d\Gamma_t(y)}{dy} = [f(y+t)-f(t)]^2 \rho(y+t),$$

а тогда из (32), (34) и условий 1) и 2) теоремы

$$|A_k| \leqslant \left\{ \frac{\Gamma_t(y)}{y^2} \Bigg|_0^{\delta} + 2\int_0^{\delta} \frac{\Gamma_t(y)}{y^3}\,dy \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{\lambda(\delta)}{\delta} + 2\int_0^{\delta} \frac{\lambda(y)}{y^2}\,dy \right\}^{\frac{1}{2}} \to 0, \ \delta \to 0, \ (k=n, \ n+1).$$

Таким образом, для всякого произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_\varepsilon > 0$, что как только $0 < \delta \leqslant \delta_\varepsilon$, то

$$|A_k| < \frac{\varepsilon}{8C_4}, \quad (k = n, \ n+1).$$

Отсюда и из неравенства (31) находим, что

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ и аналогично } |I_2| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{35}$$

Тогда из (8), (30) и (35) следует (17), случай, когда точка t совпадает с одним из концов отрезка ортогональности не представляет исключения. Если предположить, что $t = -1$, то (5) можно записать в виде (18), где оценка интегралов теперь очевидна и приводит к (17).

Как видно, теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть многочлены $\{P_n(x)\}$ ортонормальны на $[-1, 1]$ относительно веса $\rho(x)$ и имеет место неравенство*

$$\sqrt{\rho(x)}\,|P_n(x)| \leqslant C_5, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Если функция $f(x) \in L_{\sqrt{\rho(x)}}$ и $\in L_{\rho(x)}$ удовлетворяет условию (28), где функция $\lambda(\delta)$ такова, что имеют место условия 1) и 2) теоремы 3 и, кроме того, $\rho(t) \geqslant m > 0$, то разложение (21) функции $f(x)$ сходится при $x = t$ к $f(t)$.

Доказательство этой теоремы не вызывает затруднений, если проследить внимательно доказательства теорем 2 и 3. Поэтому мы опускаем его, чтобы не повторять уже имеющиеся соотношения и неравенства.

Автор выражает искреннюю благодарность Я. Л. Геронимусу за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. К. Бари. Тригонометрические ряды. Физматгиз М., 1961.
2. Г. Алексич. Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., ИЛ, 1963.

Поступила 15 апреля 1968 г.