УДК 517.977

Е. В. КОРОБОВА, Г. М. СКЛЯР

ОДИН КОНСТРУКТИВНЫЙ МЕТОД ОТОБРАЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НА ЛИНЕЙНЫЕ

В данной работе рассмотрен общий вопрос об отображении нелинейной системы дифференциальных уравнений на линейную систему в форме Фробениуса с помощью замены переменных. Для некоторог ласса так называемых «треугольных» систем [1, 2] такое отображение построено конструктивно. Далее работа продолжает исследоание вопроса об отображении «треугольных» управляемых систем а линейные [1 — 5]. Выделен класс таких систем, отображающихся ез замены управления (в отличие от [1, 2]). На основе применения езультатов работ [6, 7] для этого класса получено точное решение адачи быстродействия.

§ 1. Отображение нелинейных систем на линейные. Пусть задана истема дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

де $x \in R^n$, компоненты $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ вектор-функции f непрерывнодифференцируемы n раз, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим вопрос о существовании биективного отображения ида

$$z = F(x), \quad F: R^n \to R^n, \tag{2}$$

де компоненты $F_i(x_1, \ldots, x_n)$ вектор-функции F предполагаются прерывно-дифференцируемыми $(n-1)$ раз, $z \in R^n$, $x \in R^n$, переводяе систему (1) в линейную систему

$$\dot{z} = Az, \tag{3}$$

A — постоянная матрица в форме Фробениуса, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ — & — & — & — \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

еобходимые и достаточные условия существования такого отобраения дает следующая

Теорема 1. *Для того чтобы система (1) отображалась на нейную систему (3) с помощью биективного отображения (2), обходимо и достаточно, чтобы существовала функция $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ такая, что*

$$\frac{d^n}{dt^n} F_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} F_1(x_1, \ldots, x_n), \tag{4}$$

де $\frac{d}{dt^k}$ — k-я производная в силу системы (1) и

$$\begin{pmatrix} F_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right) F_1 \\ \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{n-1} F_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

ыл биективным. При этом искомое отображение имеет вид $= F(x)$.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть при отображении (2) система (1) переходит в (3). Тогда, поскольку $\dot z_k = z_{k+1}$, $k = \overline{1, n-1}$, для компонент $F_k(x_1, \ldots, x_n)$ отображения F выполнены равенства

$$\frac{d}{dt} F_1(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} F_1(x_1, \ldots, x_n) f_k(x_1, \ldots, x_n) = \\ = F_2(x_1, \ldots, x_n);$$

$$\frac{d}{dt} F_2(x_1, \ldots x_n) = \frac{d^2}{dt^2} F_1(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 F_1(x_1, \ldots x_n) =$$

$$= F_3(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{d}{dt} F_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} F_1(x_1, \ldots, x_n) = \\ = \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{n-1} F_1(x_1, \ldots, x_n) = F_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Поэтому из уравнения $\dot z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k$ следует (4).

Достаточность. Пусть функция $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет (4). Обозначим

$$z_i = \left(f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{i-1} F_1 = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} F_1(x_1, \ldots, x_n),\ i = \overline{1, n}.$$

Тогда $\dot z_i = z_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$ и в силу (4) $\dot z_n = \sum_{k=1}^{n} a_k z_k$, т. е. z удовлетворяет системе (3). Поскольку по предположению оператор $F(x)$, определяемый из (5), биективен, достаточность доказана.

§ 2. Случай «треугольной» системы. Соотношение (4), с одной стороны, можно рассматривать как дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ при заданной правой части системы (1). С другой стороны, можно выбрать функцию $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ так, чтобы оператор $F(x)$ был биективным, и задать любые $(n-1)$ функции из набора $f_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, а соотношение (4) рассматривать как уравнение относительно оставшейся функции, тем самым мы выделим систему, которая отображается на систему (3) с помощью замены (2). Этот прием особенно эффективен для так называемых «треугольных» систем, т. е. систем вида

$$\dot x = f_i(x_1, \ldots, x_{i+1});$$
$$\dot x_n = f_n(x_1, \ldots, x_n), \quad i = \overline{1, n-1}. \tag{6}$$

Положим $F_1(x_1, \ldots, x_n) = x_1$ и зададим функции $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда из соотношения (4) не будет содержать производных в неизвестной функции f_n, что позволяет при известных предположениях легко найти эту функцию.

Введем предварительно обозначения. Пусть A_0 — тождественный оператор, а A_i — дифференциальный оператор вида

$$A_i = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функции* $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$ $(n - i + 1)$ *раз непрерывно-дифференцируемы,* $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geqslant a > 0$, $i = \overline{1, n-1}$, *а функция* $f_n(x_1, \ldots, x_n)$ *связана с функциями* f_i, $i = \overline{1, n-1}$ *соотношением*

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k A_k A_{k-1} \ldots A_0 x_1 - A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}, \tag{7}$$

где a_i, $i = \overline{0, n-1}$ — *некоторые константы. Тогда система (6) отображается на линейную систему (3) с помощью замены переменных (5), где* $F_1 = x_1$, $F_{k+1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{d^k}{dt^k} F_1(x_1, \ldots, x_n) = A_k \ldots A_0 x_1$, $k = \overline{0, n}$.

Доказательство. Перепишем равенство (7) в виде

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_0 x_1 = \\ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_k A_{k-1} \ldots A_0 x_1. \tag{8}$$

Докажем по индукции формулу

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(A_{k-1} \ldots A_0 x_1) = \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_k} \frac{\partial f_{k-2}}{\partial x_{k-1}} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \quad k = \overline{2, n}. \tag{9}$$

При $k = 2$ равенство (9) очевидно. Пусть оно справедливо при $i = k$. Докажем его справедливость при $i = k + 1$. Поскольку функция $A_{k-1} A_{k-2} \ldots A_0 x_1$ не зависит от x_{k+1}, по предположению индукции имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_{k+1}}(A_k \ldots A_0 x_1) = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}\Big(f_k \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{k-1} \ldots A_0 x_1) + \\ + \sum_{j=1}^{k-1} f_j \frac{\partial}{\partial x_j}(A_{k-1} \ldots A_0 x_1)\Big) = \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} f_k \frac{\partial}{\partial x_k} f_{k-1} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_2},$$

что и требовалось доказать.

Следовательно, равенство (8) может быть переписано в виде

$$A_n A_{n-1} \ldots A_0 x_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_k \ldots A_0 x_1.$$

Поскольку очевидно $\frac{d}{dt^k} F_1(x_1, \ldots, x_n) = A_k \ldots A_0 x_1$, $k = \overline{0, n}$, отсюда следует справедливость равенства (4). Далее, так как матрица Якоби отображения (5) треугольная, причем ее диагональные элементы имеют вид $\frac{dF_1}{dx_1} = 1$, $\frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(A_{i-1} \ldots A_0 x_1) = \frac{\partial f_{i-1}}{\partial x_i} \frac{\partial f_{i-2}}{\partial x_{i-1}} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$, $i = \overline{2, n}$, то $\left|\frac{\partial F_i}{\partial x_i}\right| \geqslant a^{i-1} > 0$, $i = \overline{1, n}$. Следовательно, эта матрица невырождена, и отображение (5) биективно. Применение теоремы 1 завершает доказательство.

§ 3. Отображение нелинейных управляемых систем на линейные. Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2); \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3); \\ \text{— — — — — — — — — — —} \\ \dot{x}_{n-1} = f_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, u), \end{cases} \tag{10}$$

$|u| \leqslant d$, которую назовем «треугольной» управляемой системой. Нас будет интересовать вопрос о возможности отображения этой системы с помощью замены переменных на линейную систему вида

$$\begin{aligned} &\dot{z}_1 = z_2; \\ &\dot{z}_2 = z_3; \\ &\text{— — —} \\ &\dot{z}_{n-1} = z_n; \\ &\dot{z}_n = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \ldots + a_n z_n + u. \end{aligned} \tag{11}$$

Теорема 3. *Пусть в системе (10) функция* $f_i(x_1, \ldots, x_{i+1})$, $i = \overline{1, n-1}$, $(n-i+1)$ *раз непрерывно-дифференцируема* $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geqslant a > 0$. *Пусть функция* $f_n(x_1, \ldots, x_n, u)$ *имеет вид*

$$f_n = \frac{u + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k A_{k-1} A_{k-2} \ldots A_0 x_1 - A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_1 A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \ldots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}}. \tag{12}$$

Тогда система (10) отображается на систему (11) с помощью замены (5), причем $F_1 = x_1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Отметим, что замена (5) впервые предложена в работе [1], где рассмотрен общей вопрос об отображении «треугольных» систем на линейные с помощью замены переменных и управления. В этой работе, наряду с заменой (5), рассматривается замена управления

$$v = \frac{d}{dt} F_n = F_{nx_1} f_1 + F_{nx_2} f_2 + \ldots + F_{nx_n} f_n.$$

ас интересует случай, когда $v=\sum_{i=1}^{n} a_i z_i + u$. Тогда, дифференцируя о u, имеем $F_{nx_n} f_{nu} = 1$. Отсюда $f_{nu} = \frac{1}{F_{nx_n}}$. Поэтому $f_n = \frac{1}{F_{nx_n}} u +$ $+ \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Подставляя значение в равенство $\sum_{i=1}^{n} F_{nx_i} f_i =$ $= \sum_{i=1}^{n} a_i z_i + u$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1} F_{nx_i} f_i + F_{nx_n}\left(\frac{1}{F_{nx_n}} u + \varphi(x_1, \ldots, x_n)\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + u.$$

огда, используя введенные ранее обозначения и формулу (9), имеем

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{-(F_{nx_1} f_1 + F_{nx_{n-1}} f_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n} a_i z_i}{F_{nx_n}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k A_{k-1} A_{k-2} \ldots A_0 z_1 - A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_1 A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_2}},$$

куда следует (11).

Таким образом, для того чтобы система (9) отображалась на инейную с помощью замены (5) и без замены управления, необхоимо и достаточно, чтобы функция f_n имела вид (11).

Следствие из теоремы 3.

Если система (10) точно отображается на систему

$$\dot{z}_i = z_{i+1},\ i = \overline{1, n-1};\ \dot{z}_n = u,\ |u| \leqslant d, \tag{13}$$

. е. $\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{i+1}}\right| \geqslant a > 0$, $\quad f_n = \frac{u - A_{n-1}^2 A_{n-2} \ldots A_0 x_1}{\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n}}$, то управление, существляющее оптимальный по быстродействию переход из x^0 x^1 в силу системы (10), совпадает с соответствующим управлением, существляющим переход из $z^0 = F(x^0)$ в $z^1 = F(x^1)$ в силу системы 13), и может быть найдено применением методов работы [6] (следтвие из теоремы 1, с. 198).

Пример. Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2;\ \dot{x}_2 = x_1 + \frac{1}{3} x_3^3 + x_3;\ \dot{x}_3 = -\frac{x_2}{1 + x_3^2} + \frac{u}{1 + x_3^2}. \tag{14}$$

та система отображается на систему $\dot{z}_1 = z_2$, $\dot{z}_2 = z_3$, $\dot{z}_3 = u$ с пооощью замены $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_1 + \frac{1}{3} x_3^3 + x_3$. Найдем управение, осуществляющее оптимальный по быстродействию переход из очки $x^0 = \left(\frac{4}{3}\ 0\ -1\right)$ в $x^1 = (0\ 0\ 0)$ в силу системы (14). Имеем

$z(x^0) = \left(\frac{4}{3}\ 0\ 0\right)$, $z(x^1) = (0\ 0\ 0)$. Применяя следствие из теоремы 1 работы [6], имеем.

1. Время оптимального быстродействия Θ_0 является максимальным положительным корнем уравнения $\Delta_3 = 0$, где $\Delta_3 = \frac{1}{64}\Theta^4 - \frac{2}{3}\Theta$, т. е. $\Theta_0 = 4\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$;

2. Оптимальное управление u_0 является управлением первого рода, т. е. $u_0 = -1$, $t \in [0, t_1]$, $t \in [t_2, \Theta_0]$; $u_0 = +1$, $t \in (t_1, t_2)$, $0 < t_1 < t_2 < \Theta_0$;

3. Моменты переключения оптимального управления определяются из следующих уравнений: $t_1 : \alpha_1 t_1 - \alpha_2 = 0$, где $\alpha_1 = \frac{\Theta_0}{2}$, $\alpha_2 = \frac{\Theta_0^2}{8}$, т. е. $t_1 = \frac{1}{4}\Theta_0 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; $t_2 : (t - t_1) - \alpha_1 = 0$, где $\alpha_1 = \frac{\Theta_0}{2}$, т. е. $t_2 = \frac{\Theta_0}{4} + \frac{\Theta_0}{2} = \frac{3\Theta_0}{4} = 3\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Список литературы: 1. *Коробов В. И.* Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем // Диф. уравнения. 1973. **7,** № 6. С. 1120—1123. 2. *Коробов В. И.* Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости // Мат. сборник. 1979. **109(151),** № 4 (8). С 582—606. 3. *Кунцевич В. М., Лычак М. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функции Ляпунова. М., 1977. 400 с. 4. *Ковалев А. М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. К., 1980. 175 с. 5. *Жевнин С. Т., Крищенко А. П., Глушко Ю. В.* Управляемость, наблюдаемость нелинейных систем // Докл. АН СССР. 1982. **266.** С. 807—811. 6. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Оптимальное быстродействие и степенная проблема моментов // Мат. сборник. 1987. **134(176),** № 2 (10). С. 185—206. 7. *Коробов В. И., Скляр Г. М.* Точное решение одной *n*-мерной задачи быстродействия // Докл. АН СССР. 1988. **298,** № 6. С. 120—125.

Поступила в редколлегию 30.05.89