

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

Кваліфікаційна робота

магістра

на тему «Відображення траєкторій
канонічної системи на траєкторії деяких
нелінійних систем»

Виконав: студентка групи МП61,
спеціальність
113 – Прикладна математика,
освітньо-професійна програма
«Прикладна математика»
Горбачевська І.О.

Науковий керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики
Сморцова Т.І.

Рецензент: доктор фіз.-мат. наук,
пров. наук. співробітник,
ФТІНТ ім. Б. І. Веркіна
НАН України,
професор
Фардигола Л. В.

Харків — 2025 рік

Анотації

Горбачевська Ірина. Відображення траєкторій канонічної системи на траєкторії деяких нелінійних систем .

У роботі розглядається задача побудови відображення траєкторій канонічної лінійної керованої системи третього порядку на траєкторії нелінійної системи спеціального виду з одновимірним керуванням. Побудова відображення ґрунтується на підході В. І. Коробова побудови неперервного відображення, що зводиться до розв'язання лінійного рівняння в частинних похідних першого порядку. Проведений чисельний експеримент ілюструє отримані результати.

Ключові слова: керовані системи, канонічна система, нелінійна система спеціального виду, S -дифеоморфізм, поверхня перемикання керування.

Horbachevska Iryna. Mapping trajectories of the canonical system onto trajectories of certain nonlinear systems.

The thesis deals with the construction of a mapping of trajectories of a third-order canonical linear control system onto trajectories of a nonlinear system of a special form with one-dimensional control. The construction is based on V. I. Korobov's approach to constructing a continuous mapping which leads to solving a first-order linear partial differential equation. A provided numerical experiment illustrates the results obtained.

Keywords: control systems, canonical system, nonlinear system of special form, S -diffeomorphism, switch surface of control.

Зміст

1	Вступ	4
2	Постановка задачі	5
3	Побудова відображення	7
3.1	Метод характеристик і перші інтеграли	8
3.2	Розщеплення загального розв'язку і введення функцій φ та ψ	9
3.3	Умова неперервності відображення ($F^+ = F^-$) на кривій $l^+ \cup l^-$	11
3.4	Умова неперервності відображення ($F^+ = F^-$) поверхні $S^+ \cup S^-$	13
3.5	Якобіан системи для змінних D_1, D_2	15
4	Чисельний експеримент	18
4.1	Траєкторії канонічної системи	18
4.2	Поверхня $S^+ \cup S^-$	18
4.3	Використання відображення траєкторій систем	20
5	Висновки	24
A	Додаток A. Python-коди для побудови графічних ілюстрацій	27

1 Вступ

Важливу роль у сучасній теорії керування відграють *задачі відображення траєкторій* одних керованих систем на траєкторії інших. Наприклад, це актуально у проблемах еквівалентності систем, синтезу керувань, нелінійної лінерізації та дослідженні оптимальних властивостей керованих процесів тощо. Сама ідея замінити складну нелінійну систему більш простою (лінійною або канонічною) бере початок з класичних робіт з геометричної теорії керування, де вивчались питання локальної еквівалентності та нормальних форм ([4], [1]).

Для спеціального класу керованих нелінійних систем з одновимірним керуванням суттєвий внесок у теорію було зроблено у роботах В. І. Коробова та його співавторів ([3], [5], [6], [2]). У цих роботах розвинуто підхід, що ґрунтується на побудові S -дифеоморфізмів – відображень, які переводять траєкторії однієї системи у траєкторії іншої при збереженні керування.

У цій кваліфікаційній роботі відображення траєкторій, які відповідають тому самому керуванню, будується для канонічної системи та нелінійної системи третього порядку, яка у зазначених вище роботах не розглядалась. Для побудови такого відображення застосовано підхід, розроблений у цих роботах.

2 Постановка задачі

Розглянемо канонічну лінійну керовану систему третього порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1, \\ \dot{x}_3 = x_2, \end{cases} \quad (2.1)$$

де $x = (x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ — вектор стану, а $u = u(t)$ — обмежене керування, $|u(t)| \leq 1$. Система (2.1) називається *канонічною системою* [3].

Нехай задана також нелінійна керована система спеціального виду

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = u, \\ \dot{y}_2 = y_1, \\ \dot{y}_3 = y_1^3, \end{cases} \quad (2.2)$$

де $y = (y_1, y_2, y_3)^\top \in \mathbb{R}^3$. Цю систему будемо називати *нелінійною системою спеціального виду*.

Мета роботи — побудувати таке відображення

$$y = \Phi(x), \quad \Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi \in C(\mathbb{R}^3),$$

щоб для будь-якого допустимого керування $u(t)$ траєкторії канонічної системи (2.1) відображались на траєкторії нелінійної системи (2.2). Іншими словами, потрібно знайти таку зміну змінних, яка переводить розв'язки однієї системи в розв'язки іншої, які відповідають тому самому керуванню.

Побудова такого відображення (S-дифеоморфізму у термінах робіт В. І. Коробова) докладно розглянута для інших класів систем у [5, 6, 2]. В цій роботі будується таке відображення для траєкторій систем (2.1), (2.2).

Будемо шукати відображення траєкторій систем у вигляді

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = F(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \quad (2.3)$$

де $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — невідома неперервна функція. Для того, щоб початок координат відображався в початок координат, покладемо $F(0, 0, 0) = 0$.

3 Побудова відображення

Позначимо через $x(t)$ траєкторію системи (2.1), яка відповідає деякому керуванню $u(t)$. Тоді, враховуючи (2.3), визначимо

$$y(t) = \Phi(x(t)) = (x_1(t), x_2(t), F(x_1(t), x_2(t), x_3(t)))^\top.$$

Вектор-функція $y(t)$ має задовольняти систему (2.2) з тим же керуванням $u(t)$. Перші два рівняння обертаються на тотожність, бо

$$\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = u, \quad \dot{y}_2 = \dot{x}_2 = x_1 = y_1.$$

Рівняння для F отримаємо із третього рівняння системи, а саме,

$$\dot{y}_3 = y_1^3 = x_1^3.$$

Похідна функції F в силу системи (2.1) має вигляд,

$$\dot{y}_3 = \frac{d}{dt}F(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = F_{x_1}\dot{x}_1 + F_{x_2}\dot{x}_2 + F_{x_3}\dot{x}_3,$$

де

$$F_{x_i} = \partial F / \partial x_i, \quad \dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2.$$

Отже, маємо квазілінійне рівняння в частинних похідних першого порядку для знаходження функції F :

$$u F_{x_1}(x) + x_1 F_{x_2}(x) + x_2 F_{x_3}(x) = x_1^3. \quad (3.1)$$

Розв'яжемо рівняння (3.1) та, з урахуванням умови неперервності відображення, побудуємо явне відображення F . Зазначимо також, що рівняння (3.1) будемо розв'язувати окремо для значень керування 1 та -1 , оскільки саме такі керування є розв'язком задачі швидкодії для канонічної системи, аналітичний вигляд якого отримано в роботі [3]. Проте, питання швидкодії до початку координат в силу нелінійної системи не розглядається у цій роботі. Досліджується лише питання про попадання до початку координат в силу нелінійної системи (2.2).

3.1 Метод характеристик і перші інтеграли

Розглянемо систему характеристик для рівняння (3.1):

$$\frac{dx_1}{u} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_2} = \frac{dF}{x_1^3}, \quad (3.2)$$

де $u = \pm 1$. Ці співвідношення використовуються для пошуку перших інтегралів рівняння (3.1) та його загального розв'язку.

Знайдемо перші інтеграли системи характеристик (3.2).

Із рівності перших двох дробів, маємо перший інтеграл

$$p_1 = x_2 - \frac{1}{2u}x_1^2. \quad (3.3)$$

Перевіримо, що p_1 справді є сталим уздовж характеристик. Диференціюючи за змінною t і враховуючи (2.1), маємо:

$$\frac{dp_1}{dt} = \dot{x}_2 - \frac{1}{2u} \cdot 2x_1\dot{x}_1 = x_1 - \frac{1}{u}x_1u = x_1 - x_1 = 0.$$

Отже, p_1 є першим інтегралом системи характеристик (3.2).

Ще один перший інтеграл знаходимо із рівності першого і третього дробів системи характеристик (3.2), враховуючи вигляд $x_2(t)$ із . Маємо, що

$$p_2 = x_3 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{x_1}{u} \left(x_2 - \frac{1}{2u}x_1^2 \right). \quad (3.4)$$

Аналогічно, диференціюючи (3.4) за змінною t та підставляючи $\dot{x}_1 = u$, $\dot{x}_2 = x_1$, $\dot{x}_3 = x_2$ із (2.1), одержуємо після перетворень, що

$$\frac{dp_2}{dt} = 0,$$

тобто p_2 також набуває сталих значень вздовж розв'язків рівняння (3.1), тобто, за означенням, є першим інтегралом цього рівняння.

Знайдемо тепер перший інтеграл p_3 та загальний вигляд функції F .

Із рівності першого і четвертого дробів системи характеристик (3.2) маємо, що

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{x_1^3}{u}.$$

Інтегруючи за x_1 , отримуємо ще один перший інтеграл системи характеристик (3.2):

$$p_3 = F(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{4u}x_1^4. \quad (3.5)$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (3.1) можна записати у вигляді

$$\hat{\Phi}(p_1, p_2, p_3) = 0, \quad (3.6)$$

де $\hat{\Phi}$ — довільна неперервно диференційовна функція трьох змінних така, що $\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial p_3} \neq 0$. Тоді $p_3 \in$ функцією від p_1, p_2 , тобто $p_3 = \tilde{\Phi}(p_1, p_2)$, звідки, враховуючи (3.5), знаходимо, що

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4u} x_1^4 + \tilde{\Phi}(p_1, p_2), \quad (3.7)$$

де $\tilde{\Phi}$ — довільна неперервно диференційовна функція двох змінних, а p_1, p_2 задані формулами (3.3), (3.4).

Отже, на цьому етапі ми побудували загальний вигляд F уздовж характеристик. Коефіцієнт перед x_1^4 залежить від вибору u . Тому далі розщеплюємо F на дві частини відповідно до $u = +1$ та $u = -1$, вводячи функції, що φ та ψ , та будуємо геометричні об'єкти (лінію l^+ , поверхню S^+), на яких задаються додаткові умови для визначення цих функцій, а саме, умови неперервності відображення Φ , зокрема, функції F .

3.2 Розщеплення загального розв'язку і введення функцій φ та ψ

У попередньому розділі ми отримали загальний вигляд розв'язку рівняння з частинними похідними (3.1):

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4u} x_1^4 + \tilde{\Phi}(p_1, p_2),$$

де

$$p_1 = x_2 - \frac{1}{2u} x_1^2, \quad p_2 = x_3 - \frac{1}{6} x_1^3 - \frac{x_1}{u} \left(x_2 - \frac{1}{2u} x_1^2 \right).$$

Далі, аналогічно до статей [5], [2], спробуємо знайти явний вигляд функції F . Для цього

- перші інтеграли системи характеристик рівняння (3.1), які відповідають $u = +1$ та $u = -1$, позначимо C_1, C_2 та D_1, D_2 відповідно;
- розглянемо ділянки, де керування u є сталим, тобто $u = +1$ та $u = -1$, і для кожної такої ділянки отримаємо формулу для F , а саме, визначимо функції φ, ψ ;

- функції φ, ψ знайдемо так, щоб функція F була неперервною на спеціально вибраних лініях і поверхнях, а саме, на лінії та поверхні перемикавання керування для задачі швидкодії до початку координат для канонічної системи.

Якщо на певній ділянці траєкторії системи (2.1) (або (2.2)) $u = +1$, то із (3.7) маємо, що частина функції F , яку позначимо через F^+ , має вигляд

$$F^+(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4}x_1^4 + \varphi(C_1, C_2), \quad (3.8)$$

де φ — невідома неперервно диференційовна функція двох змінних, а C_1, C_2 — перші інтеграли системи характеристик рівняння (3.1), які відповідають керуванню $u = +1$, а саме,

$$C_1(x_1, x_2) = x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, \quad C_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \frac{1}{6}x_1^3 - x_1\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right). \quad (3.9)$$

Якщо ж на ділянці $u = -1$, то аналогічно маємо, що

$$F^-(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(D_1, D_2), \quad (3.10)$$

де ψ — невідома неперервно диференційовна функція, а D_1, D_2 — перші інтеграли системи характеристик рівняння (3.1), які відповідають керуванню $u = -1$, а саме,

$$D_1(x_1, x_2) = x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, \quad D_2(x_1, x_2, x_3) = x_3 - \frac{1}{6}x_1^3 + x_1\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right). \quad (3.11)$$

Розщеплення таким чином дозволяє розглядати дві гілки функції F , що відповідають різним знакам керування. Також це дає нам змогу побудувати φ і ψ окремо в кожній області, а потім "зшивати" їх по лініях і поверхнях, на яких керування змінює знак.

Із умови $F(0, 0, 0) = 0$ отримуємо, що

$$\varphi(0, 0) = 0, \quad \psi(0, 0) = 0. \quad (3.12)$$

3.3 Умова неперервності відображення ($F^+ = F^-$) на кривій $l^+ \cup l^-$

Розглянемо тепер лінію перемикання керування $l^+ \cup l^-$ для канонічної системи (2.1), а саме, траєкторії, які ведуть до початку координат без перемикання керування. Ця лінія відіграє роль спільного ребра для двох гілок F^+ та F^- .

Частина l^+ визначається так:

$$l^+ : \quad x_2 = \frac{1}{2}x_1^2, \quad x_3 = \frac{1}{6}x_1^3, \quad x_1 \leq 0. \quad (3.13)$$

Знайдемо вирази для C_1, C_2, D_1, D_2 на l^+ .

Підставимо (3.13) у визначення C_1, C_2, D_1, D_2 – (3.9) та (3.11). Після зведення подібних доданків матимемо, що

$$\begin{aligned} C_1(x_1, x_2)|_{l^+} &= \left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)|_{l^+} = \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 \equiv 0, \\ C_2(x_1, x_2, x_3)|_{l^+} &= \left(x_3 - \frac{1}{6}x_1^3 - x_1\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)\right)|_{l^+} = \\ &= \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{6}x_1^3 - x_1\left(\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right) \equiv 0, \\ D_1(x_1, x_2)|_{l^+} &= \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)|_{l^+} = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 = x_1^2, \\ D_2(x_1, x_2, x_3)|_{l^+} &= \left(x_3 - \frac{1}{6}x_1^3 + x_1\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)\right)|_{l^+} = \\ &= \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{6}x_1^3 + x_1\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2\right) = x_1^3. \end{aligned}$$

Тоді із (3.8) на l^+ маємо, що

$$F^+|_{l^+} = \frac{1}{4}x_1^4 + \varphi(0, 0).$$

Оскільки із умови (3.12) маємо $\varphi(0, 0) = 0$, то

$$F^+|_{l^+} = \frac{1}{4}x_1^4.$$

Із (3.10) на l^+ маємо, що

$$F^-|_{l^+} = -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(D_1|_{l^+}, D_2|_{l^+}) = -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(x_1^2, x_1^3).$$

Тоді із умови неперервності функції F на лінії l^+ , тобто $F^+|_{l^+} = F^-|_{l^+}$, отримуємо співвідношення

$$\frac{1}{4}x_1^4 = -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(x_1^2, x_1^3),$$

із якого знаходимо

$$\psi(x_1^2, x_1^3) = \frac{1}{2}x_1^4. \quad (3.14)$$

Позначимо через $z = x_1^2 \geq 0$. Тоді $x_1^3 = -z^{3/2}$, оскільки $x_1 \leq 0$ на l^+ , і $x_1^4 = z^2$.

Тоді (3.14) набуває вигляду

$$\psi(z, -z^{3/2}) = \frac{1}{2}z^2, \quad z \geq 0. \quad (3.15)$$

Ця рівність означає, що для аргументів спеціального вигляду функція $\psi(D_1, D_2)$ визначена.

Аналогічно розглядаємо криву l^- , яка визначається так:

$$l^- : \quad x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2, \quad x_3 = \frac{1}{6}x_1^3, \quad x_1 \geq 0. \quad (3.16)$$

Ні цій лінії

$$C_1(x_1, x_2)|_{l^-} = \left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)|_{l^-} = -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2 = -x_1^2,$$

$$\begin{aligned} C_2(x_1, x_2x_3)|_{l^-} &= \left(x_3 - \frac{1}{6}x_1^3 - x_1\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)\right)|_{l^-} = \\ &= \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{6}x_1^3 - x_1\left(-\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1^2\right) = x_1^3. \end{aligned}$$

$$D_1(x_1, x_2)|_{l^-} = \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)|_{l^-} = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2 \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} D_2(x_1, x_2x_3)|_{l^-} &= \left(x_3 - \frac{1}{6}x_1^3 + x_1\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)\right)|_{l^+} = \\ &= \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{6}x_1^3 + x_1\left(-\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_1^2\right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Тоді із (3.8) на l^- маємо, що

$$F^+|_{l^-} = \frac{1}{4}x_1^4 + \varphi(C_1|_{l^-}, C_2|_{l^-}) = \frac{1}{4}x_1^4 + \varphi(-x_1^2, x_1^3).$$

Із (3.10) на l^- маємо, що

$$F^-|_{l^-} = -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(0, 0).$$

Оскільки із умови (3.12) маємо $\varphi(0, 0) = 0$, то

$$F^-|_{l^-} = -\frac{1}{4}x_1^4.$$

Тоді із умови неперервності функції F на лінії l^- , тобто $F^+|_{l^-} = F^-|_{l^-}$, отримуємо співвідношення

$$\frac{1}{4}x_1^4 + \varphi(-x_1^2, x_1^3) = -\frac{1}{4}x_1^4,$$

із якого знаходимо

$$\varphi(-x_1^2, x_1^3) = -\frac{1}{2}x_1^4. \quad (3.17)$$

Позначимо через $z = -x_1^2 \leq 0$. Тоді $x_1^3 = (-z)^{3/2}$, і $x_1^4 = z^2$.

Тоді (3.17) набуває вигляду

$$\varphi(z, (-z)^{3/2}) = -\frac{1}{2}z^2, \quad z \leq 0. \quad (3.18)$$

Ця рівність означає, що для аргументів спеціального вигляду функція $\varphi(C_1, C_2)$ визначена.

3.4 Умова неперервності відображення ($F^+ = F^-$) поверхні $S^+ \cup S^-$

Далі переходимо до *поверхні* $S^+ \cup S^-$ - поверхні перемикування керування для задачі швидкодії до початку координат в силу канонічної системи. Спочатку розглянемо її частину S^+ , яка відповідає керуванню $u = +1$. На цій частині отримуємо вираз для функції ψ і, відповідно, для функції F^- .

Поверхня S^+ задається рівнянням [3]

$$S^+ : \quad x_3 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_1x_2 - \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2\right)^{3/2} = 0, \quad (3.19)$$

причому

$$x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \leq 0. \quad (3.20)$$

Знайдемо вираз для функції ψ на S^+ .

Як і в попередньому пункті, спочатку знайдемо вирази для C_1, C_2, D_1, D_2 на цій поверхні. Для цього підставимо x_3 із (3.19) у визначення (3.9) та (3.11). Після зведення подібних доданків матимемо, що

$$\begin{aligned} C_1(x_1, x_2) &= x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, \\ C_2(x_1, x_2, x_3)|_{S^+} &= -\frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \left(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)^{3/2} - \frac{1}{6}x_1^3 - x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^3 = \\ &= \left(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)^{3/2}, \\ D_1(x_1, x_2) &= x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, \\ D_2(x_1, x_2, x_3)|_{S^+} &= -\frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \left(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)^{3/2} - \frac{1}{6}x_1^3 + x_1x_2 + \frac{1}{2}x_1^3 = \\ &= 2x_1x_2 + \left(-x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)^{3/2}. \end{aligned}$$

Тоді на поверхні S^+ (тобто для точок, що задовольняють (3.19)–(3.20)), враховуючи (3.18), маємо

$$\varphi(C_1, C_2)|_{S^+} = \varphi(C_1, (-C_1)^{3/2}) = -\frac{1}{2}C_1^2. \quad (3.21)$$

Підставляючи знайдені C_1, C_2 та (3.21) у (3.8), отримуємо вигляд функції F^+ на S^+ :

$$F^+(x_1, x_2, x_3)|_{S^+} = \frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2. \quad (3.22)$$

Підставляючи знайдені D_1, D_2 у (3.10), отримуємо вигляд функції F^- на S^+ :

$$\begin{aligned} F^-(x_1, x_2, x_3)|_{S^+} &= -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(D_1, D_2) = \\ &= -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, 2x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2\right)^{3/2}\right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Із умови неперервності функції F на S^+ маємо співвідношення

$$\frac{1}{4}x_1^4 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2 = -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, 2x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2\right)^{3/2}\right), \quad (3.24)$$

звідки

$$\psi\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, 2x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2\right)^{3/2}\right) = \frac{1}{2}x_1^4 - \frac{1}{2}\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2\right)^2. \quad (3.25)$$

Аналогічно, із умови неперервності функції F на S^- , яка задається рівнянням [3]

$$S^- : \quad x_3 + \frac{1}{3}x_1^3 + x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 + x_2\right)^{3/2} = 0, \quad x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| \geq 0, \quad (3.26)$$

отримуємо співвідношення

$$\varphi\left(x_2 - \frac{1}{2}x_1^2, -2x_1x_2 - \left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)^{3/2}\right) = -\frac{1}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}\left(x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right)^2. \quad (3.27)$$

3.5 Якобіан системи для змінних D_1, D_2

Розглянемо вираз для функції ψ з формули (3.25). Позначимо

$$v = x_2 + \frac{1}{2}x_1^2, \quad w = 2x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2\right)^{3/2}.$$

Розглянемо в області

$$\mathcal{D} = \left\{ (x_1, x_2) : x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1| < 0 \right\}$$

систему алгебраїчних рівнянь відносно x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 = v, \\ 2x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2\right)^{3/2} = w \end{cases} \quad (3.28)$$

Обчислимо Якобіан цієї системи.

Матриця частинних похідних має вигляд

$$J(x_1, x_2) = \frac{\partial(v, w)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Оскільки

$$v = x_2 + \frac{1}{2}x_1^2,$$

маємо

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = x_1, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = 1.$$

Далі,

$$w = 2x_1x_2 + \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2\right)^{3/2},$$

тому

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x_1} &= 2x_2 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2 \right)^{1/2} \cdot x_1, \\ \frac{\partial w}{\partial x_2} &= 2x_1 - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2}x_1^2 - x_2 \right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Отже, Якобіан

$$\Delta(x_1, x_2) = \det J(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ 2x_2 + \frac{3}{2}x_1\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2 - x_2} & 2x_1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2 - x_2} \end{vmatrix}$$

дорівнює

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, x_2) &= x_1 \left(2x_1 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2 - x_2} \right) - \left(2x_2 + \frac{3}{2}x_1\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2 - x_2} \right) \\ &= 2x_1^2 - 2x_2 - 3x_1\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2 - x_2}.\end{aligned}$$

Розв'язуючи рівняння $\Delta(x_1, x_2) = 0$, одержуємо

$$2x_1^2 - 2x_2 = 3x_1\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2 - x_2}.$$

За умови $x_1 \neq 0$ обидві частини можна піднести до квадрату, після чого після елементарних перетворень отримуємо два можливі розв'язки:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2, \quad x_2 = \frac{1}{4}x_1^2.$$

З іншого боку, в області \mathcal{D} маємо

$$x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 < 0 \quad \implies \quad x_2 < -\frac{1}{2}x_1^2,$$

отже жодна з кривих $x_2 = -\frac{1}{2}x_1^2$, $x_2 = \frac{1}{4}x_1^2$ не належить області \mathcal{D} . Звідси випливає, що

$$\Delta(x_1, x_2) \neq 0 \quad \text{для всіх } (x_1, x_2) \in \mathcal{D}.$$

Тому, згідно з теоремою про неявне відображення, у кожній точці області \mathcal{D} система (3.28) однозначно розв'язується відносно $x_1(v, w)$ та $x_2(v, w)$, причому функції $x_1(v, w)$, $x_2(v, w)$ є неперервно диференційовними. Це забезпечує коректність задання функції ψ через змінні v, w і,

відповідно, гілки F^- . Підставляючи замість v, w вирази (3.11), отримуємо явний вигляд функції F^- .

Аналогічно отримуємо, що функція φ і, відповідно, гілка F^+ , теж задається коректно, і її явний вигляд отримаємо з використанням (3.9)

4 Чисельний експеримент

Розглядається канонічна керована система

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2, \quad (4.1)$$

та нелінійна система вигляду

$$\dot{y}_1 = u, \quad \dot{y}_2 = y_1, \quad \dot{y}_3 = y_1^3. \quad (4.2)$$

У попередньому розділі побудовано відображення траєкторій канонічної системи, які відповідають керуванням $u = \pm 1$ на траєкторії нелінійної системи, які відповідають тому самому керуванню.

4.1 Траєкторії канонічної системи

У випадку сталого керування

$$u(t) \equiv 1, \quad t \in [0, T], \quad (4.3)$$

система (4.1) інтегрується аналітично:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= t + c_1, & x_2(t) &= \frac{1}{2}t^2 + c_1t + c_2, \\ x_3(t) &= \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}c_1t^2 + c_2t + c_3, & t &\in [0, T]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

На Рис. 1 зображено траєкторію, яка відповідає керуванню (4.3) та проходить через початок координат.

4.2 Поверхня $S^+ \cup S^-$

На Рис. 2 показано поверхню $S^+ \cup S^-$, яка отримана в [3] і задається рівняннями (3.19), (3.26). Чисельне побудування цих поверхонь виконувалось шляхом обчислення x_3 з використанням цих формул на прямокутній сітці за змінними x_1, x_2 з урахуванням умов на знак виразу $\frac{1}{2}x_1^2 - x_2$ та нерівностей для $x_2 + \frac{1}{2}x_1|x_1|$.

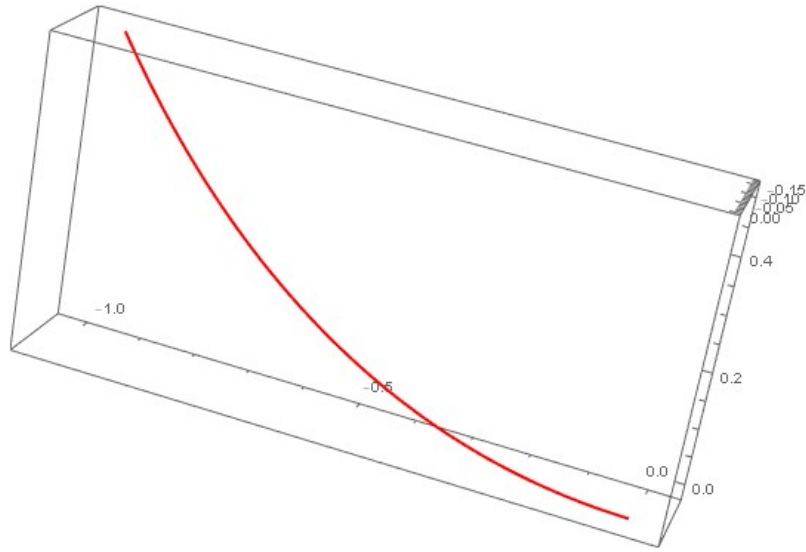


Рис. 1: Траєкторія канонічної системи (4.1) при керуванні (4.3).

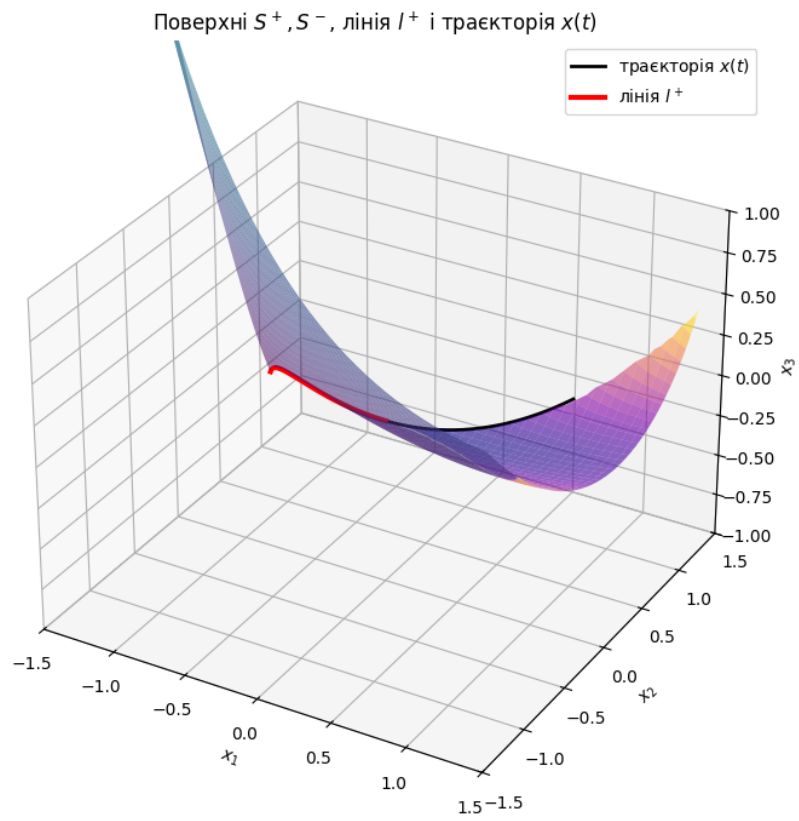


Рис. 2: Поверхня $S^+ \cup S^-$.

4.3 Використання відображення траєкторій систем

Розглянемо початкову точку для канонічної системи (4.1):

$$x(0) = x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)^\top = (-1, 2, -5)^\top.$$

Для цієї точки обчислюємо значення перших інтегралів для гілки $u = +1$:

$$C_1^0 = x_2^0 - \frac{1}{2}(x_1^0)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$C_2^0 = x_3^0 - \frac{1}{6}(x_1^0)^3 - x_1^0 \left(x_2^0 - \frac{1}{2}(x_1^0)^2 \right) = -5 - \frac{(-1)^3}{6} - (-1) \cdot \frac{3}{2} = -\frac{10}{3}.$$

На цій парі значень (C_1^0, C_2^0) розв'язується система, що виникає з умов потрапляння на поверхню S^+ та подальшого переходу між гілками $u = \pm 1$ (аналогічно до побудови в [6]). Чисельно (у середовищі *Mathematica*) одержано значення функції $\varphi(C_1, C_2)$ у точці (C_1^0, C_2^0) :

$$\Phi_0 \approx 1.34856.$$

Відповідне початкове значення для нелінійної системи (4.2) має перші дві координати, що збігаються з канонічною системою, а третю координату визначено за допомогою побудованого відображення:

$$y(0) = y^0 = (y_1^0, y_2^0, y_3^0)^\top = (x_1^0, x_2^0, F(x^0))^\top,$$

$$F(x^0) = \frac{1}{4}(x_1^0)^4 + \varphi(C_1^0, C_2^0) \approx \frac{1}{4} \cdot 1 + \Phi_0 \approx 1.59856,$$

тобто

$$y^0 \approx (-1, 2, 1.59856)^\top.$$

Далі обчислюються моменти перемикань керування $u(t)$, яке має вигляд

$$u(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t < t_1, \\ -1, & t_1 \leq t < t_2, \\ +1, & t_2 \leq t \leq T : \end{cases}$$

$$t_1 \approx 1.38606, \quad t_2 \approx 3.05627, \quad T \approx 4.34042,$$

Це керування переводить задану початкову точку x^0 до початку координат за час T в силу канонічної системи. Відповідні графіки координат ($x_1(t)$ – червоний, $x_2(t)$ – синій, $x_3(t)$ – зелений) та фазова траєкторія зображені на Рис. 3 та 4.

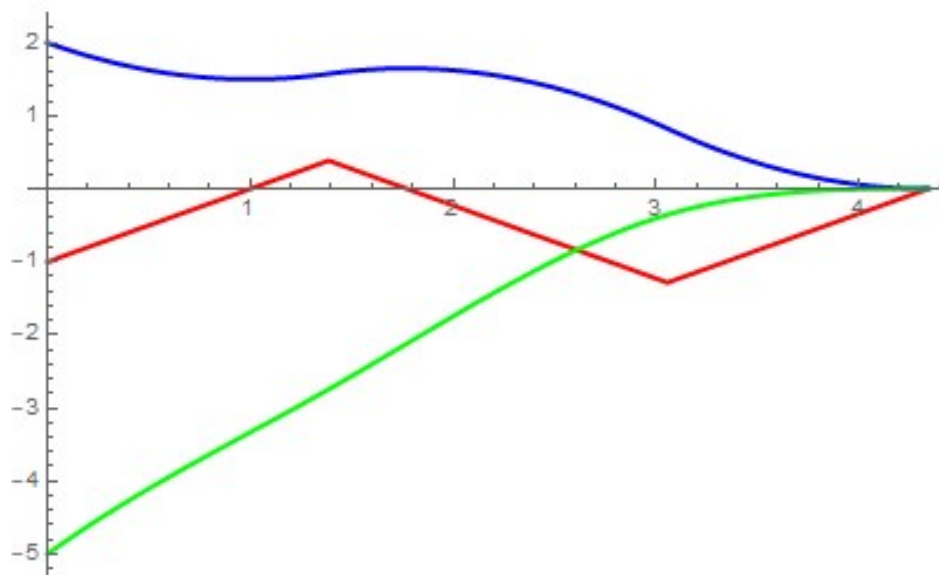


Рис. 3: Графіки координат $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ канонічної системи для початкової точки x^0 .

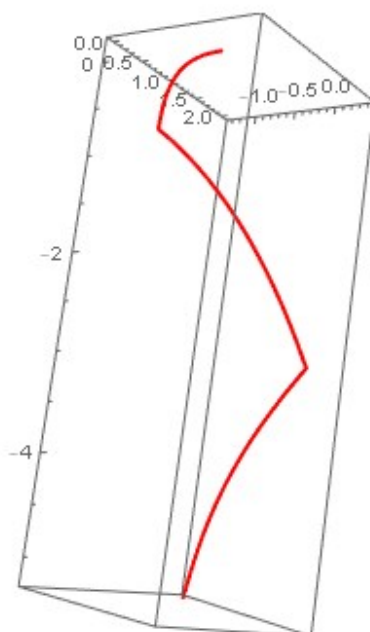


Рис. 4: Фазова траєкторія канонічної системи з керуванням (4.3) для початкової точки x^0 .

Те саме керування $u(t)$ переводить початкове значення y^0 до початку координат за час T в силу нелінійної системи (4.2).

Кінцева точка, отримана таким після чисельного інтегрування нелінійної системи, має вигляд

$$y(T) \approx (-1.67 \cdot 10^{-10}, 1.84 \cdot 10^{-10}, 1.65 \cdot 10^{-10})^T.$$

На Рис. 5 подано графіки координат компонент ($y_1(t)$ – червоний, $y_2(t)$ – синій, $y_3(t)$ – зелений), а на Рис. 6 – фазову траєкторію нелінійної системи.

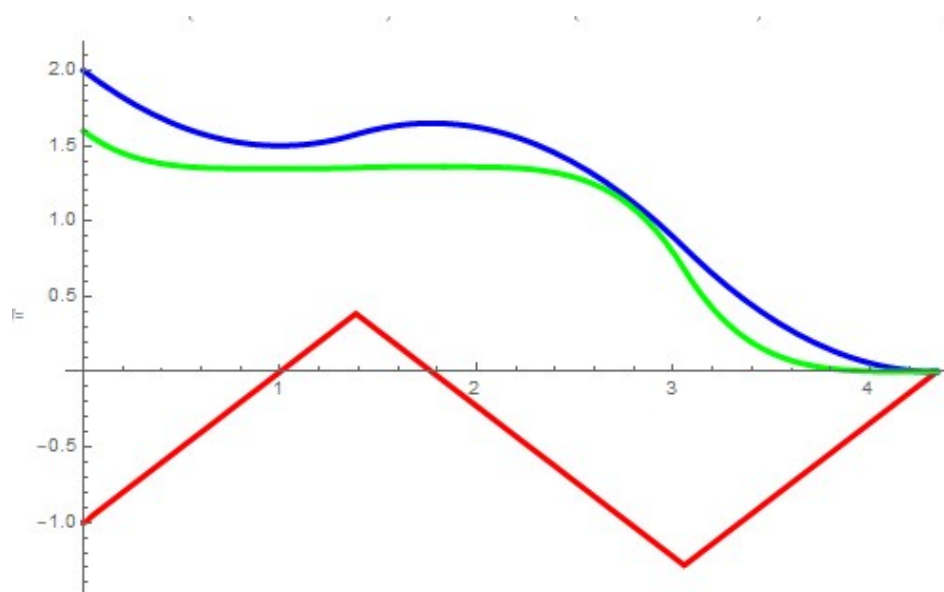


Рис. 5: Графіки координат $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ нелінійної системи для початкової точки y^0 .

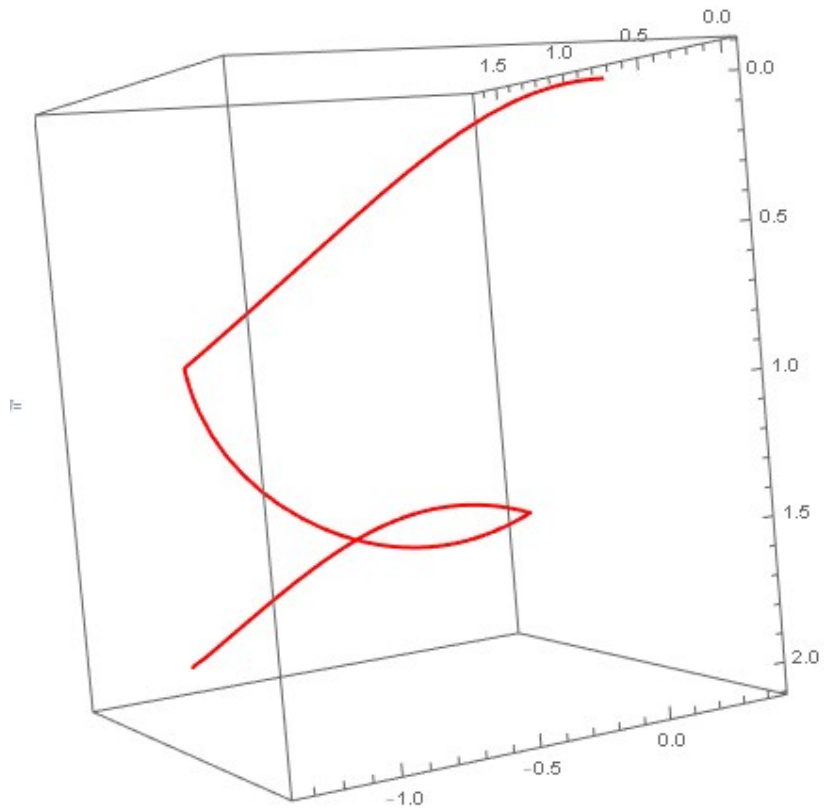


Рис. 6: Фазова траєкторія нелінійної системи з керуванням (4.3) для початкової точки y^0 .

5 Висновки

У роботі було побудовано відображення траєкторій канонічної системи третього порядку

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = x_1, \quad \dot{x}_3 = x_2,$$

на траєкторії нелінійної системи спеціального виду

$$\dot{y}_1 = u, \quad \dot{y}_2 = y_1, \quad \dot{y}_3 = y_1^3.$$

Побудова відображення зводилася до знаходження неперервно диференційовної функції $F(x_1, x_2, x_3)$. Для її знаходження було розв'язано лінійне рівняння в частинних похідних першого порядку

$$uF_{x_1} + x_1F_{x_2} + x_2F_{x_3} = x_1^3,$$

і методом характеристик отримано повний набір перших інтегралів. Це дозволило подати загальний розв'язок у вигляді

$$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4u}x_1^4 + \Phi(p_1, p_2),$$

де p_1, p_2 — перші інтеграли системи характеристик.

З урахуванням різних знаків керування $u = \pm 1$ було отримано дві гілки розв'язку:

$$F^+ = \frac{1}{4}x_1^4 + \varphi(C_1, C_2), \quad F^- = -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(D_1, D_2),$$

де (C_1, C_2) та (D_1, D_2) — перші інтеграли системи характеристик, які відповідають керуванню $u = +1$ та $u = -1$ відповідно. На лінії $l^+ \cup l^-$ та на поверхні перемикання керування $S^+ \cup S^-$ знайдено умови для функцій φ і ψ .

Розв'язання системи, що пов'язує змінні (x_1, x_2) та (D_1, D_2) , потребувало аналізу якобіана. Показано, що визначник цієї системи

$$\Delta(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_2 - 3x_1\sqrt{\frac{1}{2}x_1^2 - x_2}$$

невироджений, що гарантує коректність параметризації.

У підсумку було отримано явний кусково-диференційовне відображення

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ F(x_1, x_2, x_3) \end{pmatrix},$$

де F задається формулами

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x_1^4 + \varphi(C_1, C_2), & u = +1, \\ -\frac{1}{4}x_1^4 + \psi(D_1, D_2), & u = -1, \end{cases}$$

а функції φ та ψ визначені з умов неперервності на $l^+ \cup l^-$ та на $S^+ \cup S^-$.

Чисельний експеримент підтвердив правильність побудови, а саме траєкторії нелінійної системи із керуванням, знайденим для відповідної точки канонічної системи, ведуть до початку координат.

Отримані результати можуть бути використані для подальшого розвитку теорії побудови відображень траєкторій систем та їх застосувань у задачах нелінійного керування. Зокрема, подальші дослідження можуть бути спрямовані на такі напрямки:

- Виділення класу нелінійних систем, для яких можливо побудувати таке відображення траєкторій.
- Дослідження задач оптимального керування (наприклад, швидкодії) для нелінійних систем.

Література

- [1] Korobov V. I. Geometric criterion for controllability under arbitrary constraints on the control. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 134(2):161—176, 2017.
- [2] Korobov V. I. and Ivanova T. I. Nonsmooth mapping of linear control systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 108(2):389–405, 2001.
- [3] Korobov V. I. and Sklyar G. M. Time optimality and the power moment problem. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 62(1):185—205, 1989.
- [4] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer, Berlin, 3rd edition, 1995.
- [5] Коробов В. І. та Іванова Т. І. Негладкі відображення траєкторій лінійних керованих систем. *Доповіді НАН України*, 8:9–14, 2001.
- [6] Коробов В. І. та Смрцова Т. І. *Керованість та стабілізація*. Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, 1st edition, 2017.

А Додаток А. Python-коди для побудови графічних ілюстрацій

У цьому додатку наведено фрагменти коду мовою Python, що були використані для побудови графічних матеріалів у розділі чисельного експерименту.

А.1. Траєкторія канонічної системи у просторі (x_1, x_2, x_3)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Аналітичний розв'язок для  $u = 1$ 
T = 1.0
t = np.linspace(0, T, 400)

x1 = t
x2 = 0.5 * t**2
x3 = (1/6) * t**3

fig = plt.figure(figsize=(7,5))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x1, x2, x3, 'k', linewidth=2)

ax.set_xlabel('x1')
ax.set_ylabel('x2')
ax.set_zlabel('x3')
ax.set_title('Траєкторія канонічної системи у просторі  $(x_1, x_2, x_3)$ ')

plt.savefig('Figure1.png', dpi=300)
plt.show()
```

A.2. Поверхні S^+ , S^- , лінія l^+ та траєкторія системи

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Густина сітки
x1 = np.linspace(-2, 2, 200)
x2 = np.linspace(-2, 2, 200)
X1, X2 = np.meshgrid(x1, x2)

# Формула поверхні
inside = 0.5*X1**2 - X2
inside[inside < 0] = np.nan # Заборона від'ємних значень під коренем

X3 = -1/3*X1**3 + X1*X2 + inside**1.5

fig = plt.figure(figsize=(8,6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

ax.plot_surface(X1, X2, X3, cmap='viridis', alpha=0.55)

# Лінія зшивання
x1_l = np.linspace(-2, 0, 200)
x2_l = 0.5 * x1_l**2
x3_l = (1/6) * x1_l**3
ax.plot(x1_l, x2_l, x3_l, 'r', linewidth=3, label='l+')

# Траєкторія канонічної системи
t = np.linspace(0, 1, 200)
ax.plot(t, 0.5*t**2, (1/6)*t**3, 'k', linewidth=2, label='x(t)')

ax.set_xlabel('x1')
ax.set_ylabel('x2')
ax.set_zlabel('x3')
```

```
ax.set_title('Поверхні S+, S-, лінія l+ та траєкторія канонічної системи')
ax.legend()

plt.savefig('Figure2.png', dpi=300)
plt.show()
```

А.3. Траєкторія $y(t) = \Phi(x(t))$ у просторі y

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = 1.0
t = np.linspace(0, T, 400)

# Канонічна система
x1 = t
x2 = 0.5 * t**2
C1 = x2 - 0.5 * x1**2 # тут C1 = 0
y3 = 0.25 * x1**4      # F+(x) на траєкторії

fig = plt.figure(figsize=(7,5))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x1, x2, y3, 'm', linewidth=2)

ax.set_xlabel('y1')
ax.set_ylabel('y2')
ax.set_zlabel('y3')
ax.set_title('Траєкторія  $y(t) = \Phi(x(t))$  у просторі  $y$ ')

plt.savefig('Figure3.png', dpi=300)
plt.show()
```

А.4. Порівняння значень F^+ та F^- на лінії l^+

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Лінія зшивання
x1 = np.linspace(-2, 0, 300)
z = x1**2

F_plus = 0.25 * x1**4
F_minus = -0.25*x1**4 + 0.5*x1**4 # (z, -z^{3/2}) = 0.5 z^2

plt.figure(figsize=(7,5))
plt.plot(x1, F_plus, label='F+', linewidth=2)
plt.plot(x1, F_minus, label='F-', linewidth=2)

plt.xlabel('x1')
plt.ylabel('F')
plt.title('Порівняння частин  $F^+$  і  $F^-$  на лінії зшивання  $l^+$ ')
plt.legend()
plt.grid(True)

plt.savefig('Figure4.png', dpi=300)
plt.show()
```