

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

**ПРИКЛАДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ТА ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

У 2 частинах

Частина 2

Електронний ресурс

Харків – 2026

Рецензенти:

В. О. Катрич – доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізичної і біомедичної електроніки і комплексних інформаційних технологій Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

І. К. Кузьмичов – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу вакуумної електроніки Інституту радіофізики та електроніки імені О. Я. Усикова НАН України.

*Затверджено до розміщення в мережі Інтернет рішенням Науково-методичної ради
Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна
(протокол № 6 від 27 березня 2026 року)*

Прикладний математичний аналіз та елементи комп'ютерної математики :
П 75 методичні вказівки до практичних занять для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти. У 2 ч. Ч. 2 [Електронний ресурс] / уклад. М. Є. Каліберда, С. О. Погарський. – Харків : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2026. – (PDF 78 с.)

Методичні вказівки призначено для студентів, які вивчають курс «Прикладний математичний аналіз та елементи комп'ютерної математики» на факультеті радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем. Видання присвячено основам інтегрування функцій однієї змінної. Розглянуто елементарні перетворення, методи інтегрування раціональних дробів, ірраціональних та тригонометричних функцій, а також визначений інтеграл Рімана. Матеріал містить теоретичні відомості, алгоритми розв'язання типових задач та варіанти для самостійної роботи. Особливу увагу приділено алгоритмізації математичних методів, зокрема застосуванню числових підходів, що є базою для подальшого моделювання радіофізичних процесів.

УДК (517, 519.6) (075.8)

© Харківський національний університет
імені В. Н. Каразіна, 2026

© Каліберда М. Є., Погарський С. О., уклад, 2026

ЗМІСТ

Зміст.....	3
Вступ.....	5
Розділ 1. Елементарні перетворення функцій.....	6
Теоретичні відомості	6
Приклади розв'язання задач.....	7
Виділення повного квадрату	7
Елементарні перетворення поліномів	8
Розкладення раціонального дробу на найпростіші. Метод невизначених коефіцієнтів.....	8
Задачі для самостійного розв'язання	10
Розділ 2. Простіші інтеграли.....	13
Теоретичні відомості	13
Приклади розв'язання задач.....	14
Задачі для самостійного розв'язання	16
Розділ 3. Інтеграли від раціональних дробів.....	23
Теоретичні відомості	23
Приклади розв'язання задач.....	26
Задачі для самостійного розв'язання	27
Розділ 4. Інтеграли від деяких ірраціональних функцій	30
Теоретичні відомості	30
Приклади розв'язання задач.....	30
Задачі для самостійного розв'язання	32
Розділ 5. Інтеграли від тригонометричних функцій.....	34
Теоретичні відомості	34
Приклади розв'язання задач.....	35
Задачі для самостійного розв'язання	37
Розділ 6. Інтеграл Рімана.....	39
Теоретичні відомості	39
Визначення.....	39
Властивості	39
Площа плоскої фігури.....	42

Числові методи обчислення інтегралів	44
Приклади розв'язання задач.....	47
Задачі для самостійного розв'язання	51
Розділ 7. Криволінійний інтеграл 1-го роду	53
Теоретичні відомості	53
Визначення.....	53
Довжина дуги кривої	53
Координати центру мас кривої	55
Приклади розв'язання задач.....	55
Задачі для самостійного розв'язання	56
Розділ 8. Криволінійний інтеграл 2-го роду	58
Теоретичні відомості	58
Визначення та властивості	58
Робота векторного поля по переміщенню матеріальної точки	60
Приклад розв'язання задачі.....	60
Задачі для самостійного розв'язання	61
Розділ 9. Невласні інтеграли	63
Теоретичні відомості	63
Приклади розв'язання задач.....	66
Задачі для самостійного розв'язання	70
Обчислення невластних інтегралів	70
Дослідження збіжності невластних інтегралів	71
Таблиця невизначених інтегралів.....	74
Властивості і методи інтегрування.....	75
Основні тригонометричні формули	76

ВСТУП

Методичні вказівки призначено для студентів факультету радіофізики, біомедичної електроніки та комп'ютерних систем, які продовжують вивчення дисципліни «Прикладний математичний аналіз та елементи комп'ютерної математики». Друга частина посібника фокусується на інтегральному численні.

У методичних вказівках детально розглянуто методи знаходження невизначених інтегралів, починаючи з елементарних перетворень функцій та виділення повного квадрата, що є критично важливим для інтегрування раціональних дробів. Окремі розділи присвячені роботі з ірраціональними та тригонометричними виразами. Подальший виклад охоплює визначений інтеграл Рімана та невластні інтеграли, що складають основу для розв'язання широкого кола прикладних задач. Завершують посібник розділи, присвячені криволінійним інтегралам 1-го та 2-го родів.

Кожен розділ містить необхідний теоретичний мінімум, приклади з покроковим розв'язанням та комплекс завдань для самостійного опрацювання. Такий підхід стимулює студентів до глибокого розуміння внутрішньої логіки математичних операцій.

З огляду на специфіку спеціальності, значна увага приділяється підготовці до комп'ютерної реалізації обчислень. Розуміння структури інтегрування раціональних та ірраціональних функцій є необхідним етапом для подальшої побудови алгоритмів обробки сигналів та аналізу полів у задачах дифракції, що складають основу професійної підготовки майбутніх фахівців з прикладної фізики.

РОЗДІЛ 1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУНКЦІЙ

Теоретичні відомості

Методи інтегрування раціональних та деяких ірраціональних функцій вимагають попереднього алгебраїчного перетворення підінтегрального виразу. До основних таких перетворень належать виділення повного квадрата та розкладення раціонального дробу на суму найпростіших.

Виділення повного квадрату

Задачею виділення повного квадрату є зведення квадратного тричлена $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ до вигляду $f(x) = A(x + B)^2 + C$, де A, B, C – сталі. Для цього використовують формули скороченого множення

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

У загальному випадку формула виділення повного квадрата має вигляд:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \left(\gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} \right).$$

Розкладення раціонального дробу на найпростіші

Раціональним дробом називається відношення двох многочленів $\frac{P(x)}{Q(x)}$.

Дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника, $\deg P(x) < \deg Q(x)$. Якщо дріб неправильний, перед розкладенням необхідно виділити його цілу частину шляхом елементарних перетворень.

Будь-який правильний раціональний дріб можна подати як суму найпростіших дробів.

$$\forall R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \deg P(x) < \deg Q(x),$$

$$R(x) = \sum_{i=1}^S \sum_{j=1}^{M_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^T \sum_{j=1}^{N_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_i x + q_i)^j},$$

де S – кількість різних лінійних множників знаменника $Q(x)$ вигляду $(x - a_i)$, T – кількість різних квадратичних множників знаменника $Q(x)$ вигляду $(x^2 + p_i x + q_i)$, причому $D = p_i^2 - 4q_i < 0$, M_i, N_i – кратності, A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – сталі коефіцієнти, тобто

$$Q(x) = \frac{1}{\prod_{i=1}^S (x - a_i)^{M_i} \prod_{i=1}^T (x^2 + p_i x + q_i)^{N_i}}.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} використовують метод невизначених коефіцієнтів. При його застосуванні праву частину приводять до спільного знаменника, після чого прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x у чисельниках лівої та правої частин, утворюючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Лінійні перетворення поліномів

При інтегруванні дробів застосовують зведення чисельника до похідної знаменника. Для цього лінійний двочлен $Mx + N$ подають через похідну квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$: $Mx + N = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Приклади розв'язання задач

Виділення повного квадрату

Виділіть повний квадрат.

Приклад 1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

$$f(x) = x^2 - \underbrace{6}_{6=2 \cdot 3}x + 8 = x^2 - 2 \cdot \underbrace{3}_{2ab}x + 8 = (\text{додамо і віднімемо } b^2 = 3^2)$$

$$= \underbrace{x^2}_{a^2} - 2 \cdot \underbrace{3x}_{2ab} + \underbrace{3^2}_{b^2} + 8 - 3^2 = (\text{перші три доданки згортаємо за формулою скороченого множення}) = (x - 3)^2 + 8 - 9 = (x - 3)^2 - 1.$$

Приклад 2. $f(x) = 9x^2 - 12x + 2$.

$$f(x) = 9x^2 - 12x + 2 = 9\left(x^2 - \frac{12}{9}x + \frac{2}{9}\right) = 9\left(x^2 - \underbrace{\frac{4}{3}}_{2ab}x + \frac{2}{9}\right) = 9\left(x^2 - 2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{2ab}x + \frac{2}{9}\right) =$$

$$(\text{додамо і віднімемо } b^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2) = 9\left(x^2 - 2 \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{2ab}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = (\text{перші три доданки згортаємо за формулою скороченого множення})$$

$$= 9\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 9\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{9} - \frac{4}{9}\right) = 9\left(\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9}\right) =$$

$$= 9 \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 - 2.$$

Елементарні перетворення поліномів

Подайте поліном другого степеня $f(x)$ як $f(x) = Ag(x) + Bx + C$, де A, B, C – сталі.

Приклад 3. Подайте функцію $2x^2 + 6x + 4$ як $A(3x^2 + 8x + 4) + Bx + C$.

$$\begin{aligned} 2x^2 + 6x + 4 &= 2(x^2 + 3x + 2) = \frac{2}{3}(3(x^2 + 3x + 2)) = \frac{2}{3}(3x^2 + 9x + 6) = \\ &= \frac{2}{3}(3x^2 + 8x + 4 + x + 2) = \frac{2}{3}(3x^2 + 8x + 4) + \frac{2}{3}x + \frac{2 \cdot 2}{3} = \\ &= \frac{2}{3}(3x^2 + 8x + 4) + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Подайте похідну полінома другого степеня $f(x)$ як $f'(x) = Ag(x) + B$, де A, B – сталі.

Приклад 4. Подайте функцію $(2x^2 + 6x + 4)'$ як $A(3x + 8) + B$.

$$\begin{aligned} (2x^2 + 6x + 4)' &= 4x + 6 = 4 \left(x + \frac{6}{4} \right) = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \left(x + \frac{3}{2} \right) = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \left(x + \frac{3}{2} \right) = \\ &= \frac{4}{3} \left(3x + 3 \cdot \frac{3}{2} \right) = \frac{4}{3} \left(3x + \frac{9}{2} \pm 8 \right) = \frac{4}{3} \left(3x + 8 + \frac{9}{2} - 8^{(2)} \right) = \frac{4}{3} \left(3x + 8 + \frac{9-16}{2} \right) = \\ &= \frac{4}{3}(3x + 8) - \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{2} = \frac{4}{3}(3x + 8) - \frac{28}{6} = \frac{4}{3}(3x + 8) - \frac{14}{3} \end{aligned}$$

Розкладення раціонального дробу на найпростіші. Метод невизначених коефіцієнтів

Приклад 5.

Розкладіть на найпростіші $\frac{1}{x^2 - 16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{8} \frac{1}{x-4} - \frac{1}{8} \frac{1}{x+4}$.

Застосуємо метод *невизначених коефіцієнтів*:

$$\frac{1}{x^2 - 16} = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4) + B(x-4)}{(x-4)(x+4)} =$$

$$= \frac{Ax + 4A + Bx - 4B}{(x-4)(x+4)} = \frac{(A+B)x + 4A - 4B}{(x-4)(x+4)}.$$
 Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях “ x ”:

$$0: \quad 1 = 4A - 4B$$

$$1: \quad 0 = A + B$$

– це система рівнянь відносно невідомих A і B . З другого рівняння маємо $A = -B$. Підставимо у перше рівняння, $1 = 4A + 4A = 8A \Rightarrow A = \frac{1}{8}, B = -\frac{1}{8}$.

Приклад 6.

Розкладіть на найпростіші $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} =$

(дріб правильний, рівняння $x^2 + x + 1 = 0$ не має дійсних розв’язків, $D = 1 - 4 = -3 < 0$)

$$= \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} =$$

$$= \frac{A(x^2 + x + 1) + B(x-1)(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^3 - B + Cx^3 - 2Cx^2 + Cx - 2Dx + Dx^2 + D}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)}.$$

Прирівняємо

коефіцієнти при однакових степенях “ x ”:

$$0: \quad 0 = A - B + D$$

$$1: \quad 1 = A + C - 2D$$

$$2: \quad 0 = A - 2C + D$$

$$3: \quad 0 = B + C$$

$$3: B = -C; 0 - 2: 0 = -B + 2C \Rightarrow B = 2C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow B = 0.$$

$$1 - 2: 1 = -2D - D = -3D \Rightarrow D = -\frac{1}{3}.$$

$$2: 0 = A - \frac{1}{3} \Rightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Остаточного маємо розкладення: $\frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{1}{3(x^2+x+1)}$

Задачі для самостійного розв'язання

I Виділіть повний квадрат, подайте функцію як $f(x) = A(x + B)^2 + C$, де A, B, C – сталі.

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $f(x) = 12x^2 + 36x + 23$	3) $f(x) = 2x^2 + 4x + 7$
2) $f(x) = x^2 - 6x + 11$	4) $f(x) = 3x^2 - 12x + 17$

II Подайте поліном другого степеня $f(x)$ як $f(x) = Ag(x) + Bx + C$, де A, B, C – сталі.

- 1) Подайте функцію $2x^2 + x$ як $A(x^2 - x - 1) + Bx + C$.
- 2) Подайте функцію $6x^2 + 11x + 1$ як $A(2x^2 + 3x) + Bx + C$.
- 3) Подайте функцію $4x^2 + 19x + 7$ як $A(x^2 + 4x + 2) + Bx + C$.
- 4) Подайте функцію $-2x^2 + 5x - 7$ як $A(-x^2 + 2x - 3) + Bx + C$.
- 5) Подайте функцію $-3x^2 - 5x - 6$ як $A(x^2 + 2x + 3) + Bx + C$.
- 6) Подайте функцію $10x^2 + 7x - 4$ як $A(5x^2 + 3x - 2) + Bx + C$.
- 7) Подайте функцію $x^2 + 2x + 1$ як $A(2x^2 + 2x + 3) + Bx + C$.
- 8) Подайте функцію $6x^2 - 2$ як $A(3x^2 - x - 2) + Bx + C$.
- 9) Подайте функцію $6x^2 + 14x + 2$ як $A(2x^2 + 4x + 1) + Bx + C$.
- 10) Подайте функцію $-2x^2 + 6x$ як $A(x^2 - x + 1) + Bx + C$.
- 11) Подайте функцію $-4x^2 + x - 9$ як $A(x^2 + 2) + Bx + C$.
- 12) Подайте функцію $x^2 + x - 2$ як $A(3x^2 + 2x - 6) + Bx + C$.
- 13) Подайте функцію $2x^2 + 5x + 2$ як $A(4x^2 + 4x + 2) + Bx + C$.
- 14) Подайте функцію $2x^2 + x + 3$ як $A(3x^2 + 4x + 3) + Bx + C$.

III Подайте похідну полінома другого степеня $f(x)$ як $f'(x) = Ag(x) + B$, де A, B – сталі.

- 1) Подайте функцію $(-2x^2 + 3x + 1)'$ як $A(-x + 2) + B$.

- 2) Подайте функцію $(-5x^2 - 10x + 2)'$ як $A(-5x - 3) + B$.
- 3) Подайте функцію $\left(\frac{3}{2}x^2 - 10x - 2\right)'$ як $A(-x + 3) + B$.
- 4) Подайте функцію $(6x^2 - 19x + 2)'$ як $A(-3x + 4) + B$.
- 5) Подайте функцію $(-3x^2 - 9x + 3)'$ як $A(3x + 5) + B$.
- 6) Подайте функцію $(-4x^2 - 12x + 2)'$ як $A(-2x - 4) + B$.
- 7) Подайте функцію $\left(-\frac{25}{2}x^2 + 21x - 1\right)'$ як $A(-5x + 5) + B$.
- 8) Подайте функцію $(-5x^2 + 12x + 345123575312)'$ як $A(2x - 2) + B$.
- 9) Подайте функцію $\left(\frac{5}{2}x^2 + 2x - 2\right)'$ як $A(-5x - 1) + B$.
- 10) Подайте функцію $(-5x^2 + 11x + 3)'$ як $A(2x - 3) + B$.
- 11) Подайте функцію $\left(-\frac{15}{2}x^2 - 20x - 1\right)'$ як $A(-3x - 5) + B$.
- 12) Подайте функцію $(-6x^2 + 11x + 1)'$ як $A(4x - 3) + B$.
- 13) Подайте функцію $\left(\frac{15}{2}x^2 + 16x - 1\right)'$ як $A(3x + 3) + B$.
- 14) Подайте функцію $\left(\frac{15}{2}x^2 + 8x + 1\right)'$ як $A(5x + 2) + B$.
- 15) Подайте функцію $\left(-\frac{15}{2}x^2 - 15x - 3\right)'$ як $A(3x + 2) + B$.
- 16) Подайте функцію $(-4x^2 - 21x + 1)'$ як $A(2x + 4) + B$.
- 17) Подайте функцію $\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x - 3\right)'$ як $A(-x - 1) + B$.
- 18) Подайте функцію $(x^2 - 3x + 1)'$ як $A(-2x + 1) + B$.
- 19) Подайте функцію $(2x^2 + 6x + 3)'$ як $A(-4x - 3) + B$.

IV Розкладіть раціональний дріб на найпростіші

$$1) \frac{-3}{(x+1)(x-2)}$$

$$2) \frac{x^2 + x + 3}{(x+1)^2(x-2)}$$

$$3) \frac{7x+11}{(x+2)^2(x-1)}$$

$$4) \frac{x+5}{(x-1)^2(x+1)}$$

$$5) \frac{x-2}{(x-1)(x^2+x+2)}$$

$$6) \frac{2}{(x+1)(x^2+2x+3)}$$

$$7) \frac{1}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$$8) \frac{x+1}{x^2+5x+6}$$

$$9) \frac{2x^2-3x}{x^3-4x^2+5x}$$

$$10) \frac{3x}{(x^2+x+1)(x-1)}$$

$$11) \frac{2x+1}{(x-2)(x^2+x-1)}$$

РОЗДІЛ 2. ПРОСТІШІ ІНТЕГРАЛИ

Теоретичні відомості

Позначення. Під $\langle a, b \rangle$ будемо розуміти або відрізок, або інтервал, або напівінтервал, $\langle a, b \rangle = [a, b]$, або $\langle a, b \rangle = (a, b)$, або $\langle a, b \rangle = (a, b]$, або $\langle a, b \rangle = [a, b)$.

Визначення. Нехай функція $f(x)$ визначена на $\langle a, b \rangle$. Функція $F(x)$ є первісною для $f(x)$ на $\langle a, b \rangle$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Зауваження. Якщо $F(x)$ – це первісна для $f(x)$, то $F(x) + C$ (де $C = \text{const}$) також первісна для $f(x)$.

Визначення. Сукупність всіх первісних для $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається як $\int f(x)dx$,

$\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – будь-яка первісна для $f(x)$, C – довільна стала.

Властивості невизначеного інтеграла

$$1) \left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$$

$$2) \int F'(x)dx = F(x) + C$$

3) Лінійність.

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}: \int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Методи інтегрування

1) Інтегрування частинами.

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

або у іншому вигляді

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

2) Заміна змінної.

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, $\exists g'(t)$, $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$, і $g(\langle \alpha, \beta \rangle) \subset \langle a, b \rangle$
 $\Rightarrow \int f(g(t))g'(t)dt = F(g(t)) + C$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграл $\int \frac{1}{x} dx$.

Використаємо таблицю невизначених інтегралів

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Приклад 2. Обчисліть інтеграл $\int (2x + 3) dx$.

Застосуємо властивість лінійності інтеграла

$$\int (2x + 3) dx = \int 2x dx + \int 3 dx = 2 \int x^1 dx + 3 \int dx =$$

далі використаємо таблицю невизначених інтегралів

$$= 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + C = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3x + C = x^2 + 3x + C.$$

Приклад 3. Обчисліть інтеграл $\int \left(\frac{8}{x} + x^3 \right) dx$.

Застосуємо властивість лінійності інтеграла

$$\int \left(\frac{8}{x} + x^3 \right) dx = \int \frac{8}{x} dx + \int x^3 dx = 8 \int \frac{1}{x} dx + \int x^3 dx =$$

далі використаємо таблицю невизначених інтегралів

$$= 8 \ln |x| + \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = 8 \ln |x| + \frac{x^4}{4} + C$$

Приклад 4. Обчисліть інтеграл $\int f(ax + b) dx$

Застосуємо метод заміни змінної

$$\int f(ax + b) dx = \left| \begin{array}{l} y = ax + b \\ dy = d(ax + b) = (ax + b)' dx = \\ = a \cdot dx \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{a} dy \end{array} \right| = \int f(y) \frac{dy}{a} = \frac{1}{a} \int f(y) dy =$$

$$= \frac{1}{a} F(y) + C = \text{виконаємо обернену заміну, підставимо } y = ax + b,$$

$$= \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \text{ де } F(x) - \text{первісна функції } f(x).$$

Приклад 5. Обчисліть інтеграл $\int \sin(5x+3)dx$

Застосуємо метод заміни змінної

$$\int \sin(5x+3)dx = \left| \begin{array}{l} y = 5x+3 \\ dy = d(5x+3) = (5x+3)'dx = \\ = 5 \cdot dx \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{5} dy \end{array} \right| = \int \sin(y) \frac{dy}{5} = \frac{1}{5} \int \sin(y)dy =$$

$$= -\frac{1}{5} \cos(y) + C = \text{виконаємо обернену заміну, підставимо } y = 5x+3,$$

$$= -\frac{1}{5} \cos(5x+3) + C.$$

Порівняємо з результатами прикладу 4. Тут $a=5$, $b=3$, згідно таблиці невизначених інтегралів $\int \sin x dx = -\cos x + C$, первісною для $\sin x$ є $-\cos x$. Тоді

$$\int f(ax+b)dx = \int \sin(5x+3)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C = -\frac{1}{5} \cos(5x+3) + C.$$

Приклад 6. Обчисліть інтеграл $\int \sin(x) \cos^9 x dx$

Застосуємо метод заміни змінної

$$\int \sin(x) \cos^9 x dx = \left| \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = d \cos x = -\sin x dx = \\ \Rightarrow \\ dx = -\frac{1}{\sin x} dy \end{array} \right| = \int \sin(x) y^9 \left(-\frac{dy}{\sin x} \right) =$$

$$= -\int y^9 dy = -\frac{y^{9+1}}{9+1} + C = -\frac{y^{10}}{10} + C = \text{виконаємо обернену заміну, підставимо } y = \cos x,$$

$$= -\frac{\cos^{10} x}{10} + C.$$

Приклад 7. $\int x e^{5x} dx$

Застосуємо метод інтегрування частинами: $\int u dv = uv - \int v du$. Для цього виберемо u і знайдемо v . У якості u візьмемо $u = x$. Тоді $dv = e^{5x} dx$. Проінтегруємо ліву і праву частину

$$\int dv = \int e^{5x} dx \Rightarrow \int dv = v.$$

$$\text{Знайдемо } \int e^{5x} dx = \left. \begin{array}{l} y = 5x \\ dy = d(5x) = 5dx \\ dx = \frac{dy}{5} \end{array} \right| = \int e^y \frac{dy}{5} = \frac{1}{5} \int e^y dy = \frac{1}{5} e^y = \frac{1}{5} e^{5x}. \quad \text{Одразу}$$

зауважимо, що тут “+ C” не пишемо, оскільки константа з’явиться у самому кінці після обчислення останнього інтеграла. Отримали, що $v = \frac{1}{5} e^{5x}$. Тоді

$$\int x \underbrace{e^{5x} dx}_{dv} = x \frac{1}{5} e^{5x} - \int \frac{1}{5} e^{5x} dx = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \int e^{5x} dx = \text{інтеграл від } e^{5x} \text{ вже обчислено при пошуках } v,$$

$$= \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} e^{5x} = \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x}$$

або, якщо винести $\frac{1}{5}$ і e^{5x} за дужки,

$$= \frac{1}{5} e^{5x} \left(x - \frac{1}{5} \right).$$

Зауваження. В даному прикладі у якості u було обрано $u = x$, тому що в правій частині $\int u dv = uv - \int v du$ фактично стоїть похідна від u , $du = dx = x' dx = dx$, яка знищую x , перетворюючи його на одиницю. Тим самим інтеграл спрощується.

Задачі для самостійного розв’язання

I Обчисліть інтеграли

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\int 8dx$	43) $\int 2dx$
2) $\int 8xdx$	44) $\int (3x+1)dx$
3) $\int 8e^x dx$	45) $\int 5 \sin x dx$
4) $\int 8e^t dt$	46) $\int 4e^t dt$

5) $\int (x^2 + x)dx$	47) $\int 6 \cos x dx$
6) $\int (3x^2 + 5x)dx$	48) $\int (\sin x + e^x)dx$
7) $\int (4x^5 + 2x^2)dx$	49) $\int x^3 dx$
8) $\int (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1)dx$	50) $\int (x^5 + 2x^2 - 4)dx$
9) $\int \sqrt{x}dx$	51) $\int \sqrt[3]{x}dx$
10) $\int \frac{1}{x} dx$	52) $\int \left(\cos x + \frac{1}{x} \right) dx$
11) $\int \frac{1}{x^2} dx$	53) $\int \left(\sin x + \frac{1}{x^3} \right) dx$
12) $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$	54) $\int \left(e^x + \frac{1}{x^5} \right) dx$
13) $\int (x + e^x) dx$	55) $\int \left(\cos x + \frac{1}{x^2} \right) dx$
14) $\int \left(\frac{1}{x^3} + e^x \right) dx$	56) $\int \left(6e^x + \frac{2}{x^8} \right) dx$
15) $\int \frac{1}{x^2 - 1} dx$	57) $\int \frac{3}{x^2 - 1} dx$
16) $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$	58) $\int \frac{1}{x^2 - 16} dx$
17) $\int \frac{1}{x^2 - 5} dx$	59) $\int \frac{1}{x^2 - 6} dx$
18) $\int \left(\frac{1}{x^2 - 5} + 3 \right) dx$	60) $\int \left(\frac{1}{x^2 - 5} + 3 \right) dx$
19) $\int \left(\frac{1}{x^2 - 9} + 2 \right) dx$	61) $\int \left(\frac{1}{x^2 - 25} + 7x \right) dx$
20) $\int \left(\frac{1}{x^2 - 9} + \sin x \right) dx$	62) $\int \left(\frac{1}{x^2 - 9} + \cos x \right) dx$
21) $\int \frac{x^2}{x^2 - 9} dx$	63) $\int \frac{x^2}{x^2 - 4} dx$
22) $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 - 9} dx$	64) $\int \frac{x^2 + 5}{x^2 - 4} dx$
23) $\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2} dx$	65) $\int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 3} dx$
24) $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	66) $\int \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} dx$

25) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$	67) $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx$
26) $\int \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} dx$	68) $\int \frac{1}{\sqrt{5-x^2}} dx$
27) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{1}{x} \right) dx$	69) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$
28) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{9-x^2}} + x^2 \right) dx$	70) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + e^x \right) dx$
29) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{5-x^2}} + \frac{1}{x^2-4} \right) dx$	71) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{1}{x^2-9} \right) dx$
30) $\int \frac{1}{x^2+9} dx$	72) $\int \frac{1}{x^2+25} dx$
31) $\int \frac{1}{x^2+3} dx$	73) $\int \frac{1}{x^2+6} dx$
32) $\int \left(\frac{1}{x^2+7} + 2 \right) dx$	74) $\int \left(\frac{1}{x^2+3} + 1 \right) dx$
33) $\int \left(\frac{1}{x^2+4} + 2 \right) dx$	75) $\int \left(\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{x} \right) dx$
34) $\int \left(\frac{1}{x^2+25} + e^x \right) dx$	76) $\int \left(\frac{1}{x^2+4} + \sin x \right) dx$
35) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$	77) $\int \frac{3}{\sqrt{x^2+1}} dx$
36) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx$	78) $\int \frac{4}{\sqrt{x^2-1}} dx$
37) $\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} dx$	79) $\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$
38) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} dx$	80) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-5}} dx$
39) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-5}} + e^x \right) dx$	81) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-7}} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$
40) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+9}} + x^3 \right) dx$	82) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} + e^x \right) dx$
41) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+8}} + \frac{1}{x^2-4} \right) dx$	83) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{1}{x^2-9} \right) dx$

42)* $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}(5x) dx$	
--	--

II Обчисліть інтеграли, використовуючи заміну змінних

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\int \sqrt{x+1} dx$	31) $\int \sqrt{x+3} dx$
2) $\int \sin(x+3) dx$	32) $\int \cos(x+3) dx$
3) $\int \sqrt{2x+3} dx$	33) $\int \sqrt{4x+1} dx$
4) $\int \cos(4x+1) dx$	34) $\int \sin(3x-2) dx$
5) $\int \frac{1}{2x+3} dx$	35) $\int \frac{1}{5x+6} dx$
6) $\int \frac{3}{5x-2} dx$	36) $\int \frac{5}{2x-1} dx$
7) $\int 3\cos(6x-4) dx$	37) $\int 5\sin(2x-4) dx$
8) $\int \left(\cos(2x-1) + \frac{1}{5x-2} \right) dx$	38) $\int \left(\sin(3x+2) + \frac{1}{4x-1} \right) dx$
9) $\int \frac{1}{(2x+3)^6} dx$	39) $\int \frac{1}{(5x-1)^3} dx$
10) $\int \frac{dx}{(x+1)^2 + 2}$	40) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2 + 4}}$
11) $\int \frac{dx}{(x-3)^2 - 4}$	41) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - 9}}$
12) $\int x \cos(x^2 + 1) dx$	42) $\int x \sin(x^2 + 1) dx$
13) $\int x e^{x^2+4} dx$	43) $\int x(x^2 - 3)^4 dx$
14) $\int x(x^2 + 4)^{100} dx$	44) $\int x e^{-x^2} dx$
15) $\int x \sqrt{x^2 - 1} dx$	45) $\int x \sqrt{x^2 + 3} dx$
16) $\int x \sin(3x^2 + 5) dx$	46) $\int x \cos(3x^2 - 4) dx$
17) $\int \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} dx$	47) $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$
18) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$	48) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$

19) $\int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx$	49) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$
20) $\int \operatorname{tg} x dx$	50) $\int \operatorname{cth} x dx$
21) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	51) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
22) $\int \frac{\arccos^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$	52) $\int \frac{\arcsin^5 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
23) $\int \sin x \sin(\cos x) dx$	53) $\int \cos x \cos(\sin x) dx$
24) $\int \frac{\sin \ln x}{x} dx$	54) $\int \frac{\cos \ln x}{x} dx$
25) $\int x^3 \cos(x^4 + 1) dx$	55) $\int x^4 \sin(x^5 + 1) dx$
26) $\int \cos x \sin^3 x dx$	56) $\int \sin x \cos^3 x dx$
27) $\int \sin x \cos^5 x dx$	57) $\int \cos x \sin^{13} x dx$
28) $\int \cos x \sin^6 x dx$	58) $\int \sin x \cos^5 x dx$
29) $\int \sin x \cos^{100} x dx$	59) $\int \cos x \sin^4 x dx$
30) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$	60) $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$

III Обчисліть інтеграли, використовуючи інтегрування частинами

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\int x e^x dx$	17) $\int x e^{-x} dx$
2) $\int x \sin x dx$	18) $\int x e^{2x} dx$
3) $\int x \cos x dx$	19) $\int (x+1) \cos x dx$
4) $\int \ln x dx$	20) $\int (x^2 + 1) \sin x dx$
5) $\int x \ln x dx$	21) $\int x \ln 2x dx$
6) $\int e^x \sin x dx$	22) $\int e^x \cos x dx$
7) $\int \sqrt{1-x^2} dx$	23) $\int \sqrt{1+x^2} dx$
8) $\int x^2 \sin x dx$	24) $\int x^2 \cos x dx$
9) $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}(5x) dx$	25) $\int \sin(2x) \cdot \cos(3x) dx$
10) $\int \operatorname{arctg} x dx$	26) $\int \operatorname{arcctg} x dx$
11) $\int \arcsin x dx$	27) $\int \arccos x dx$

12)* $\int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$	28)* $\int \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx$
13)* $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$	29)* $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2}$
14)* $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}$	30) $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^3}$
15)* $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^4}$	31)* $\int \frac{dx}{(x^2 + 9)^4}$
16)* $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^5}$	32)* $\int \frac{dx}{(x^2 + 4)^5}$

*Вказівки:

$$12) \int \frac{x^2}{(x^2 + 4)^2} dx = \int x \cdot \frac{x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$13) \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{4dx}{(x^2 + 4)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{x^2 + 4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} dx$$

14), 15), 31), 32) як 13)

$$28) \int \frac{x^2}{(x^2 + 9)^2} dx = \int x \cdot \frac{x}{(x^2 + 9)^2} dx$$

$$29) \int \frac{dx}{(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{9dx}{(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{x^2 + 9 - x^2}{(x^2 + 9)^2} dx$$

IV Обчисліть інтеграли

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\int x e^{-3x} dx$	17) $\int x e^{-2x} dx$
2) $\int \frac{dx}{1 - x^2}$	18) $\int \frac{dx}{2 - x^2}$
3) $\int \operatorname{ctg} x dx$	19) $\int \operatorname{th} x dx$
4) $\int x^2 f(x^3 + 1) dx$, якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$	20) $\int \sin x \cos^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$
5) $\int x^4 f(8x^5 + 2) dx$, якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$	21) $\int \sin^m x \cos x dx$, $m \in \mathbb{N}$

6) $\int x^{n-1} f(ax^n + b)dx, n \in N,$ якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$	22) $\int \frac{\sin x}{\cos^n x} dx, n \in N$
7) $\int \cos x \sin^5 x dx$	23) $\int \sin x \cos^7 x dx$
8) $\int \frac{\sin x}{\cos^8 x} dx$	24) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} dx$
9) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$	25) $\int \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$
10) $\int \frac{1}{\sin x} dx$	26) $\int \frac{1}{\cos x} dx$
11) $\int \cos x \sin 2x dx$	27) $\int \sin 2x \cos^3 x dx$
12) $\int \cos 2x dx$	28) $\int \sin 2x dx$
13) $\int \frac{x}{(x^2 + 7)^3} dx$	29) $\int \frac{x}{(x^2 + 3)^3} dx$
14) $\int \frac{x}{(x^2 + 25)^3} dx$	30) $\int \frac{x}{(x^2 + 100)^3} dx$
15) $\int \frac{x^2}{(x^2 + 25)^3} dx$	31) $\int \frac{x^2}{(x^2 + 100)^3} dx$
16) $\int \frac{1}{(x^2 + 25)^3} dx$	32) $\int \frac{1}{(x^2 + 100)^3} dx$

РОЗДІЛ 3. ІНТЕГРАЛИ ВІД РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Теоретичні відомості

При інтегруванні раціональних дробів використовується метод подання такого дробу як суми найпростіших, описаний в розділі 1.

Розглянемо правильну раціональну функцію – правильний раціональний дріб. Згідно розділу 1 теореми, її можна розкласти на суму найпростіших дробів. Згідно властивості лінійності, інтеграл буде дорівнювати сумі інтегралів від кожного доданку. Далі розглянемо окремо інтеграли від доданків.

$$\begin{aligned} 1) \int \frac{A}{(x-x_0)^n} dx &= \left| \begin{array}{l} t = x - x_0 \\ dt = d(x - x_0) = (x - x_0)' dx = dx \end{array} \right| = \\ &= A \int \frac{dt}{t^n} = \begin{cases} A \ln |t| + C = A \ln |x - x_0|, & n = 1 \\ -\frac{A}{(n-1)t^{n-1}} = -\frac{A}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}}, & n > 1 \end{cases} \\ 2) \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx &= \frac{B}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \int \frac{C - \frac{Bp}{2}}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \end{aligned}$$

Виділимо в чисельнику диференціал знаменника $(x^2 + px + q)' = 2x + p$,

виділимо повний квадрат $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$,

$$= \left| \begin{array}{l} 1) y = x^2 + px + q, dy = (2x + p)dx \\ 2) t = x + \frac{p}{2}, dt = dx \end{array} \right| = \frac{B}{2} \int \frac{dy}{y} + \int \frac{C - \frac{Bp}{2}}{t^2 + q - \frac{p^2}{4}} dt =$$

зауважимо, що $0 < q - \frac{p^2}{4} = \sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right)^2}$

$$= \frac{B}{2} \ln |y| + \frac{C - \frac{Bp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right) + C =$$

$$= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{C - \frac{Bp}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \operatorname{arctg} \left(\frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \right) + C$$

3) $n \geq 2$,

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{1}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} 1) \ y = x^2 + px + q, \ dy = (2x + p)dx \\ 2) \ t = x + \frac{p}{2}, \ dt = dx \end{array} \right| = \frac{B}{2} \int \frac{dy}{y^n} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^n} =$$

$$= -\frac{B}{2} \frac{1}{(n-1)y^{n-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dt}{\left(t^2 + \underbrace{q - \frac{p^2}{4}}_{a^2}\right)^n} =$$

$$= -\frac{B}{2(n-1)(x^2 + px + q)^{n-1}} + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) I_n.$$

Наведемо ітераційну процедуру обчислення інтеграла I_n .

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 + a^2 - t^2}{(t^2 + a^2)^n} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 + a^2}{(t^2 + a^2)^n} dt - \frac{1}{a^2} \int \frac{t \cdot t}{(t^2 + a^2)^n} dt = \frac{1}{a^2} \underbrace{\int \frac{1}{(t^2 + a^2)^{n-1}} dt}_{I_{n-1}} - \frac{1}{a^2} \int t \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} dt. \end{aligned}$$

Другий інтеграл обчислимо методом інтегрування частинами:

$$u = t, \quad du = dt, \quad dv = \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^n}, \quad v = ?$$

$$v = \int dv = \int \frac{t dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{2t dt}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^n} = \frac{1}{2} \int (t^2 + a^2)^{-n} d(t^2 + a^2) =$$

$$d(t^2 + a^2) = (t^2 + a^2)' dt = 2t dt$$

$$= \frac{(t^2 + a^2)^{-n+1}}{2(-n+1)} = \frac{1}{2(-n+1)(t^2 + a^2)^{n-1}}$$

$$\int t \cdot \frac{t}{(t^2 + a^2)^n} dt = \frac{t}{2(-n+1)(t^2 + a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(-n+1)} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{-t}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1}.$$

Підставляємо в вираз для I_n :

$$I_n = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{-t}{2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right) =$$

$$= \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{1}{2(n-1)} \right) I_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{2n-3}{2a^2(n-1)} I_{n-1} + \frac{t}{2a^2(n-1)(t^2 + a^2)^{n-1}},$$

причому $I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$

Загальний алгоритм обчислення складається з таких кроків:

1) Перевірка правильності дробу. Якщо степінь чисельника більший або дорівнює степеню знаменника (дріб неправильний), необхідно поділити чисельник на знаменник «кутом». У результаті отримаємо суму многочлена (цілої частини) та правильного раціонального дробу.

2) Розкладення знаменника. Знаменник правильного дробу розкладають на лінійні та незвідні квадратичні множники.

3) Розкладення на найпростіші дроби. Правильний дріб подають як суму найпростіших дроби методом невизначених коефіцієнтів (див. Розділ 1).

4) Інтегрування. Інтеграл від раціональної функції дорівнює сумі інтегралів від цілої частини та від отриманих найпростіших дроби.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1 Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{dx}{x-1} = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = (x-1)' dx = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |x-1| + C$$

Приклад 2 Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \left| \begin{array}{l} t = x-1 \\ dt = (x-1)' dx = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^3} = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

Приклад 3 Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{x+4}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+8}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)+7}{x^2+x+1} dx =$$

(виділимо в чисельнику диференціал знаменника $(x^2+x+1)' = 2x+1$)

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{(2x+1)}{x^2+x+1}}_{\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} = \ln|x^2+x+1|} dx + \frac{1}{2} \int \frac{7}{x^2+x+1} dx = \left| \begin{array}{l} 1) y = x^2+x+1, dy = (x^2+x+1)' dx = \\ = (2x+1) dx; \end{array} \right| =$$

(виділимо повний квадрат $x^2+x+1 = x^2 + 2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$)

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \left| \begin{array}{l} 2) t = x + \frac{1}{2}, dt = dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \ln |y| + \frac{7}{2} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln |y| + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t}{\sqrt{3}} \right) + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{7}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{7\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3} \right) + C$$

Задачі для самостійного розв'язання

І Обчисліть інтеграли від раціональних дробів

Класне завдання	Домашнє завдання
1) $\int \frac{dx}{(x+5)^2}$	29) $\int \frac{dx}{(x-3)^3}$
2) $\int \frac{dx}{(x-3)^6}$	30) $\int \frac{dx}{(x+8)^2}$
3) $\int \frac{dx}{(x+4)^8}$	31) $\int \frac{dx}{(x-7)^{22}}$
4) $\int \frac{dx}{x-2}$	32) $\int \frac{dx}{x-7}$
5) $\int \frac{dx}{x+4}$	33) $\int \frac{dx}{2x-3}$
6) $\int \frac{dx}{x^2+2}$	34) $\int \frac{dx}{x^2+9}$
7) $\int \frac{dx}{x^2+4}$	35) $\int \frac{dx}{x^2+25}$
8) $\int \frac{dx}{x^2+11}$	36) $\int \frac{dx}{x^2+12}$
9) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$	37) $\int \frac{dx}{x^2+x+2}$
10) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$	38) $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$
11) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$	39) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$
12) $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$	40) $\int \frac{dx}{x^2+5x+3}$
13) $\int \frac{xdx}{x^2+4}$	41) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$
14) $\int \frac{xdx}{x^2+9}$	42) $\int \frac{xdx}{x^2+25}$
15) $\int \frac{2x+1}{x^2+4} dx$	43) $\int \frac{4x+1}{x^2+1} dx$
16) $\int \frac{3x+2}{x^2+4} dx$	44) $\int \frac{5x+2}{x^2+9} dx$

17) $\int \frac{5x+4}{2x^2+3} dx$	45) $\int \frac{4x+3}{3x^2+4} dx$
18) $\int \frac{4x+1}{x^2+2x+4} dx$	46) $\int \frac{2x+1}{x^2-2x+3} dx$
19) $\int \frac{6x+7}{x^2-3x+3} dx$	47) $\int \frac{2x+3}{x^2+x+4} dx$
20) $\int \frac{2x+3}{x^2+x+4} dx$	48) $\int \frac{3x+2}{x^2+3x+4} dx$
21) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx$	49) $\int \frac{5x+2}{x^2-3x+3} dx$
22) $\int \frac{3x+2}{x^2+4x+2} dx$	50) $\int \frac{4x+3}{x^2+3x+3} dx$
23) $\int \frac{1}{(x^2+3)^2} dx$	51) $\int \frac{1}{(x^2+2)^2} dx$
24) $\int \frac{1}{(x^2+3)^3} dx$	52) $\int \frac{1}{(x^2+2)^3} dx$
25) $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^2} dx$	53) $\int \frac{1}{(x^2+x+2)^2} dx$
26) $\int \frac{1}{(x^2+x+1)^3} dx$	54) $\int \frac{1}{(x^2+x+2)^3} dx$
27) $\int \frac{4x+4}{(x^2+x+1)^2} dx$	55) $\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+3)^2} dx$
28) $\int \frac{4x+4}{(x^2+x+1)^3} dx$	56) $\int \frac{3x+4}{(x^2+2x+1)^3} dx$

II Обчисліть інтеграли від раціональних дробів (“дійсний випадок”)

1) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$	4) $\int \frac{4x^2+11x+9}{(x+1)^3} dx$
2) $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6} dx$	
3) $\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} dx$	

III Обчисліть інтеграли від раціональних дробів (“комплексний випадок”)

1) $\int \frac{dx}{x^3+1}$	5) $\int \frac{dx}{x^3-1}$
2) $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$	6) $\int \frac{dx}{x^5+x^3}$
3) $\int \frac{dx}{x^6+x^4}$	7) $\int \frac{dx}{x^7+x^5}$
4) $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} dx$	8) $\int \frac{2x^3+3x^2+6x+3}{(x^2+x+1)^2} dx$

РОЗДІЛ 4. ІНТЕГРАЛИ ВІД ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Теоретичні відомості

$$1) \int F\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{a_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{a_s}\right) dx, \text{ де } a_1, \dots, a_s \in \mathbb{Q}, \quad F(\cdot, \cdot, \dots, \cdot) -$$

раціональна функція своїх аргументів. Нехай $a_i = \frac{p_i}{m}$, де $m \in \mathbb{N}$, $p_i \in \mathbb{Z}$ (m – спільний знаменник). Тоді

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}} \Leftrightarrow t^m(cx+e) = ax+b \Leftrightarrow x = \frac{et^m - b}{a - ct^m},$$

$$dx = \frac{met^{m-1}(a - ct^m) + mct^{m-1}(et^m - b)}{(a - ct^m)^2} dt - \text{раціональна функція змінної } t.$$

$$2) \text{ Підстановки Ейлера, } \int F(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

$$a) a > 0, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{a}x \pm t \Rightarrow x = \frac{t^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a} \cdot t}$$

$$б) ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$$\text{Якщо } x_1 = x_2, \text{ то } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm a(x - x_1)$$

$$\text{Якщо } x_1 \neq x_2, \text{ то } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm(x - x_1)t$$

$$в) c > 0, \sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm tx$$

3) Диференціальний біном, $\int x^m(ax^n + b)^p dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$. Можна привести до інтеграла від раціональної функції, якщо

$$a) p \in \mathbb{Z}, x = t^q, \text{ де } q - \text{спільний знаменник } m \text{ і } n;$$

$$б) \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, ax^n + b = t^s, \text{ де } s - \text{знаменник числа } p;$$

$$в) \frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}, a + bx^{-n} = t^s, \text{ де } s - \text{знаменник числа } p.$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграл $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$

$$u = \sqrt{x^2 + 1}, \quad du = (\sqrt{x^2 + 1})' dx = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx,$$

$$dv = dx, \quad v = \int dx = x (+C).$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + 1} dx &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int x \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \\ &= x\sqrt{x^2 + 1} - \int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx - \int \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = x\sqrt{x^2 + 1} - \int \sqrt{x^2 + 1} dx + \arcsin x + C, \end{aligned}$$

$$2 \int \sqrt{x^2 + 1} dx = x\sqrt{x^2 + 1} + \arcsin x + C,$$

$$\int \sqrt{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \arcsin x + C.$$

Приклад 2. Обчисліть інтеграл

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x^2 + 1} dx &= \left| \begin{array}{l} y = x^2 + 1 \\ dy = 2x dx \\ dx = \frac{dy}{2x} \end{array} \right| = \int x\sqrt{y} \frac{dy}{2x} = \int \sqrt{y} dy = \int y^{\frac{1}{2}} dy = -\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C \end{aligned}$$

Приклад 3. Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{3x + 2}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}} dx =$$

в чисельнику виділимо диференціал знаменника, $(x^2 + 6x + 4)' = 2x + 6$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 6}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}} dx + \int \frac{2 - 9}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}} dx =$$

виділимо повний квадрат в знаменнику, $x^2 + 6x + 4 = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 + 4 - 3^2 =$

$$= (x + 3)^2 - 5$$

$$= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 6}{\sqrt{x^2 + 6x + 4}} dx + \int \frac{2 - 9}{\sqrt{(x + 3)^2 - 5}} dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} 1) y = x^2 + 6x + 4, dy = (2x + 6)dx \\ 2) t = x + 3, dt = dx \end{array} \right| = \frac{3}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} - 7 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}} =$$

$$\frac{3}{2} \int y^{-1/2} dy - 7 \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 5}} = \frac{3}{2} \cdot 2y^{1/2} - 7 \ln |t + \sqrt{t^2 - 5}| + C =$$

$$= 3\sqrt{x^2 + 6x + 4} - 7 \ln(x + 3 + \sqrt{x^2 + 6x + 4}) + C$$

Приклад 4. Обчисліть інтеграл $\int \frac{1 + 3\sqrt{x} + x^2}{5 - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}} dx$

Присутні $\sqrt{x} = x^{1/2}$, x^2 , $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$, $\sqrt[6]{x^5} = x^{5/6}$. Тоді $m = 6$, $t = \sqrt[6]{x}$, $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$,

$$\int \frac{1 + 3\sqrt{x} + x^2}{5 - \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[6]{x^5}} dx = \int \frac{1 + 3\sqrt[6]{t^6} + (t^6)^2}{5 - \sqrt[3]{(t^6)^2} + \sqrt[6]{(t^6)^5}} 6t^5 dt = \int \frac{1 + 3t^3 + t^{12}}{5 - t^4 + t^5} 6t^5 dt =$$

$$= 6 \int \frac{t^5 + 3t^8 + t^{17}}{5 - t^4 + t^5} dt = \dots \text{далі виконується розкладення на найпростіші.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1) $\int \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx$	15) $\int \sqrt{x^2 + 3x - 1} dx$
2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$	16) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}} dx$
3) $\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$	17) $\int \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$
4) $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 - 10x + 9}} dx$	18) $\int \frac{4x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} dx$
5) $\int \frac{x + 1}{\sqrt{27 - 6x - x^2}} dx$	19) $\int \frac{x + 3}{\sqrt{4 - 3x - x^2}} dx$
6) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$	20) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$
7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$	
8) $\int \frac{1}{x + 6\sqrt{x} - 3} dx$	21) $\int \frac{1}{x + 3\sqrt{x} - 2} dx$
9) $\int \frac{\sqrt[3]{x + 2}}{x + \sqrt[3]{x + 2}} dx$, $t^3 + t - 2 = (t - 1)(t^2 + t + 2)$	

10) $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x+2} + \sqrt{x+2} - 1},$ $\frac{t^5}{t^3 + 2t^2 - 1} = t^2 - 2t + 4 + \frac{1}{t+1} + \frac{-8t+5}{t^2+t-1}$	
11) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \frac{1}{(x-2)^2} dx$	
12) $\int \frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$	
13) $\int x^2 \sqrt[3]{(x+1)^2} dx$	
14) $\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}}$	

РОЗДІЛ 5. ІНТЕГРАЛИ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Теоретичні відомості

Нехай є інтеграл $\int F(\sin x, \cos x) dx$, де $F(\cdot, \cdot)$ – раціональна функція своїх аргументів.

1) Універсальна тригонометрична підстановка.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi, \pi). \quad \text{Тоді} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

2) $F(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\sin x$ (першого аргументу):
 $F(-\sin x, \cos x) = -F(\sin x, \cos x)$. Тоді

$$t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$$

3) $F(\sin x, \cos x)$ – непарна відносно $\cos x$ (другого аргументу):
 $F(\sin x, -\cos x) = -F(\sin x, \cos x)$. Тоді

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x dx, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$$

4) $F(\sin x, \cos x)$ – парна відносно $\sin x$ та $\cos x$ (обох аргументів):
 $F(-\sin x, -\cos x) = F(\sin x, \cos x)$. Тоді $t = \operatorname{tg} x$.

5) $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$.

Використовувати формули зниження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \quad \text{і основну тригонометричну тотожність} \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$n + m$ – парне, тоді $t = \operatorname{tg} x$ або $t = \cos 2x$

$n + m$ – непарне, тоді $t = \sin x$ або $t = \cos x$

6) $\int \cos \alpha x \cdot \cos(\beta x) dx,$

$$\int \cos \alpha x \cdot \sin(\beta x) dx,$$

$$\int \sin \alpha x \cdot \sin(\beta x) dx.$$

Використовувати формули перетворення добутку у суму:

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta),$$

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{(1+t^2)2dt}{2(1+t^2)t} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

Приклад 2. Обчисліть інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 + 5 \sin x + 3 \cos x} &= \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 + 5 \frac{2t}{1+t^2} + 3 \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4(1+t^2) + 10t + 3(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{4 + 4t^2 + 10t + 3 - 3t^2} = \\ &= \int \frac{2dt}{t^2 + 10t + 7} = 2 \int \frac{dt}{(t+5)^2 - 18} = \left| \begin{array}{l} y = t+5 \\ dy = dt \end{array} \right| = 2 \int \frac{dy}{y^2 - \sqrt{18}^2} = \frac{2}{2\sqrt{18}} \ln \left| \frac{y - \sqrt{18}}{y + \sqrt{18}} \right| + C = \end{aligned}$$

$$t^2 + 10t + 7 = t^2 + 2 \cdot 5t + 5^2 + 7 - 25 = (t+5)^2 - 18$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}} \ln \left| \frac{t+5-\sqrt{18}}{t+5+\sqrt{18}} \right| + C = \frac{1}{3\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 5 - \sqrt{18}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 5 + \sqrt{18}} \right| + C$$

Приклад 3. Обчисліть інтеграл

$$\int \sin x \cdot \cos^2 x dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

$F(\sin x, \cos x) = \sin x \cdot \cos^2 x$ – непарна відносно $\sin x$,

$$F(-\sin x, \cos x) = -\sin x \cdot \cos^2 x = -(\sin x \cdot \cos^2 x) = -F(\sin x, \cos x)$$

Приклад 4. Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{\sin x(1 + \sin^2 x)}{2\cos^2 x - 1} dx$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - 1, \quad F(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1} \text{ – непарна відносно } \sin x,$$

$$F(-\sin x, \cos x) = \frac{-\sin x - \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1} = -\frac{\sin x + \sin^3 x}{2\cos^2 x - 1} = -F(\sin x, \cos x)$$

$$\left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| = -\int \frac{1 + 1 - t^2}{2t^2 - 1} dt = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 1 - 3}{2t^2 - 1} dt =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{2t^2 - 1}{2t^2 - 1} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2\left(t^2 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \int dt - \frac{3}{4} \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{\sqrt{2}^2}} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} \ln \left| \frac{t - \frac{1}{\sqrt{2}}}{t + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right| + C = \frac{\cos x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{8} \ln \left| \frac{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right| + C$$

Приклад 5. Обчисліть інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \int \sin^{-1} x \cos^{-3} x dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \\ dt = (\operatorname{tg} x)' dx = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ dx = \cos^2 x dt \end{array} \right| =$$

$$-1 - 3 = -4 \text{ – парне, } 1 = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos^3 x} dx = \int \frac{1}{\sin x \cos x} dx +$$

$$+ \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin x \cos x} dt + \int \frac{\sin x \cos^2 x}{\cos^3 x} dt = \int \frac{\cos x}{\sin x} dt + \int \frac{\sin x}{\cos x} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{\operatorname{tg} x} + \int \operatorname{tg} x dt = \int \frac{dt}{t} + \int t dt = \ln |t| + \frac{t^2}{2} + C = \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C$$

Або

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} = \left. \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = (\cos x)' dx = -\sin x dx \\ dx = -\frac{dy}{\sin x} \end{array} \right| = -\int \frac{dy}{\sin x \cos^3 x \sin x} =$$

$$= -\int \frac{dy}{\sin^2 x \cdot y^3} = -\int \frac{dy}{(1 - \cos^2 x) y^3} = -\int \frac{dy}{(1 - y^2) y^3} = \int \frac{dy}{y^5 - y^3} = \int \frac{dy}{y^3(y^2 - 1)} =$$

$$= \int \frac{dy}{y^3(y-1)(y+1)} = \dots \text{ далі виконується розкладення на найпростіші.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1) $\int \sin(x) \cos^2(x) dx$	21) $\int \sin^2(x) \cos(x) dx$
2) $\int \sin(x) \cos^3(x) dx$	22) $\int \sin^5(x) \cos(x) dx$
3) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^5 x}} dx$	23) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^7 x}} dx$
4) $\int \sin x \cdot e^{\cos x} \cdot dx$	24) $\int \cos x \cdot \ln \sin x \cdot dx$
5) $\int \sin^3(x) \cos^3(x) dx$	25) $\int \sin^3(x) \cos^5(x) dx$
6) $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$	
7) $\int \cos^3 x dx$	26) $\int \sin^3 x dx$
8) $\int \sin^5 x dx$	27) $\int \cos^5 x dx$
9) $\int \frac{\sin 2x + 3 \cos x}{\cos^2 x - \sin x + 1} dx$	28) $\int \frac{4 \cos x + 2 \sin 2x}{\sin x - \cos^2 x + 1} dx$
10) $\int \cos^2 x dx$	29) $\int \sin^2 x dx$
11) $\int \sin^4 x dx$	30) $\int \cos^4 x dx$
12) $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$	31) $\int \sin(x) \cos(x) dx$
13) $\int \sin^4(x) \cos^4(x) dx$	32) $\int \sin^6(x) \cos^6(x) dx$
14) $\int \sin^2(x) \cos^4(x) dx$	33) $\int \sin^6(x) \cos^4(x) dx$

15) $\int \frac{1}{\sin^2(x)\cos^2(x)} dx$	
16) $\int \sin(4x)\cos(5x)dx$	34) $\int \sin(3x)\cos(4x)dx$
17) $\int \cos(2x)\sin(4x)dx$	35) $\int \cos(6x)\sin(2x)dx$
18) $\int \frac{2\sin^2 x - 5\cos^2 x}{\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 6\cos^2 x} dx$	
19) $\int \frac{dx}{\cos 2x - \sin 2x}$	
20) $\int \frac{dx}{4\cos x - 3\sin x - 5}$	

РОЗДІЛ 6. ІНТЕГРАЛ РІМАНА

Теоретичні відомості

Визначення

Визначення. Нехай $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Інтегральна сума функцій $f(x)$, яка відповідає розбиттю Π і точкам T – це число $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$.

Визначення. Число I називається визначеним інтегралом або інтегралом Рімана функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо $I = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, або $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \Pi: 0 < d < \delta$ і $\forall T$ вірно $\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$.

Позначення. $I = \int_a^b f(x) dx$.

Теорема. Необхідна умова інтегрованості

$f(x)$ інтегрована на $[a, b]$ за Ріманом $\Rightarrow f(x)$ обмежена на $[a, b]$.

Властивості

Теорема 1. Лінійність

Нехай $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

а) $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$,

б) $g(x)$ інтегрована на $[a, b]$

$\Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x)$ – інтегрована на $[a, b]$, причому $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx =$

$$= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

Теорема 2

Якщо $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$, то $f(x)$ інтегрована на будь-якому підвідрізку відрізка $[a, b]$.

$$\exists \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \forall [c, d] \subset [a, b], \exists \int_c^d f(x) dx$$

Визначення. $\int_a^a f(x) dx \equiv 0$

Теорема 3. Про адитивність за шляхом

Нехай ϵ відрізок $[a, b]$ і $c \in [a, b]$. Функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$
 $\Leftrightarrow f(x)$ інтегрована на $[a, c]$ і $[c, b]$. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Теорема 4. Про зміну напрямку

Функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Теорема 5. Про інтегрування невід'ємної функції

$f(x) \geq 0$ і інтегрована на $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

Теорема 6. Про інтегрування нерівності

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a, b]$ і $\forall x \in [a, b] \quad f(x) \geq g(x) \Rightarrow$
 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Теорема 7.

Якщо інтегрована функція $m \leq f(x) \leq M$, де $m, M \in R \Rightarrow$
 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

Теорема 8. Про інтеграл модуля

Функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b] \Rightarrow |f(x)|$ інтегрована на $[a, b]$ і
 $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Теорема 9

Функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b] \Rightarrow \exists K \in R: \left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq K$

Теорема 10. Про інтегрованість добутку

а) $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$,

б) $g(x)$ інтегрована на $[a, b]$

$\Rightarrow f(x) \cdot g(x)$ інтегрована на $[a, b]$

Теорема 11. Інтегральна теорема про середнє

$f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a, b]$,

$\exists m, M, \forall x \in [a, b], m \leq f(x) \leq M$,

$\forall x \in [a, b] \quad g(x) \geq 0$ або $\forall x \in [a, b] \quad g(x) \leq 0$ – функція $g(x)$ не змінює знак

$$\Rightarrow \exists \mu \in [m, M]: \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$$

Теорема. Формула Ньютона-Лейбніца

$$f(x) \in C_{[a, b]}, \quad F(x) \text{ – первісна для } f(x) \text{ на } [a, b] \quad (F'(x) = f(x)) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\text{Наслідок. } \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

Теорема про заміну змінних у визначеному інтегралі

$$f(x) \in C\{(a_0, b_0)\}, \quad \varphi(t) \in C^1\{(\alpha_0, \beta_0)\} \quad \text{і} \quad \varphi: (\alpha_0, \beta_0) \mapsto (a_0, b_0) \quad (\text{тобто} \\ \varphi(t) \in (a_0, b_0) \quad \text{при} \quad t \in (\alpha_0, \beta_0)) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad \text{де} \\ \alpha, \beta \in (\alpha_0, \beta_0), \quad a = \varphi(\alpha), \quad b = \varphi(\beta)$$

Позначення. Будемо позначати $F(b) - F(a) = F(x)|_a^b$ і називати підстановкою від a до b .

Теорема про інтегрування частинами у визначеному інтегралі

$$\text{Нехай } u(x), v(x) \in C^1_{[a, b]} \Rightarrow \int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du$$

Елементарні функції інтегровані на відрізках своєї неперервності.

$C, x, x^n (n > 0), \sin x, \cos x, a^x, e^x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ – інтегровані на R ;

$\frac{1}{x}$ інтегрована на $[a, b]: 0 \notin [a, b]$ – на будь-якому відрізку, який не містить 0;

$\ln x$ – інтегрована на $[a, b]$, де $a > 0$;

$\operatorname{tg} x$ – інтегрована на $[a, b]: \pi k \notin [a, b], k \in Z$;

$\operatorname{ctg} x$ – інтегрована на $[a, b]$: $\frac{\pi}{2} + \pi k \notin [a, b], k \in \mathbb{Z}$;

$\arcsin x, \arccos x$ – інтегровані на $[-1, 1]$.

Площа плоскої фігури

Визначення. Множина $A \subset \mathbb{R}^2$ обмежена $\Leftrightarrow \exists M_x > 0, M_y > 0$:
 $\forall (x, y) \in A \mid x| \leq M_x, |y| \leq M_y$.

Визначення. Плоска фігура – довільна обмежена множина точок на площині.

Визначення. Якщо плоску фігуру можна подати як об'єднання прямокутників, що не перетинаються (окрім границь), то така фігура називається клітковою.

Визначення. Прямокутник – це множина

$$\Pi = \{(x, y) : a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$$

Визначення. Площа прямокутника Π – це число, яке дорівнює $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$

Визначення. Площею кліткової фігури називається сума площ прямокутників, із яких вона складається, причому не залежно від того, чи належать межі множині чи ні.

Позначення. Для стислості, площу будемо позначати літерою S . Площа фігури A : $S(A)$.

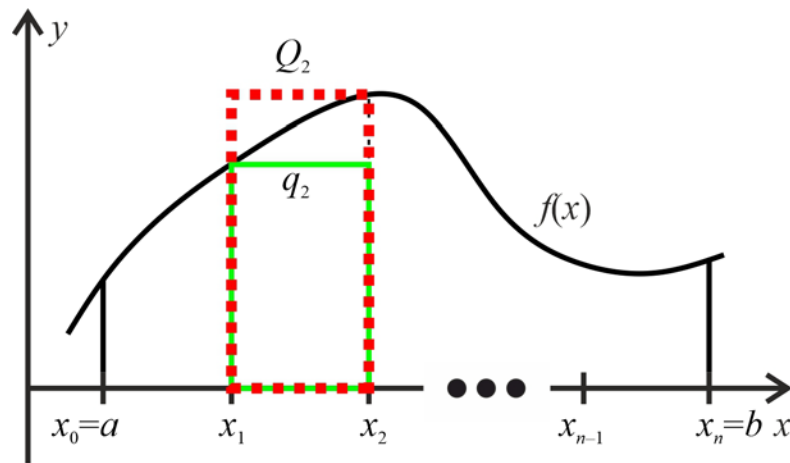
Властивості:

1) Адитивність. Площа об'єднання двох неперетинаючихся клітинних фігур дорівнює сумі площ цих фігур: $A \cap B = \emptyset \Rightarrow S(A \cup B) = S(A) + S(B)$.

2) Інваріантність. Перенос, поворот не впливає на площу.

3) Монотонність. $S(A) \leq S(A \cup B)$.

Визначення. Плоска фігура G називається квадрованою (від латинського "quadratum" – квадрат) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists$ кліткові фігури q та Q : $q \subset G \subset Q$ та $0 \leq S(Q) - S(q) < \varepsilon$.



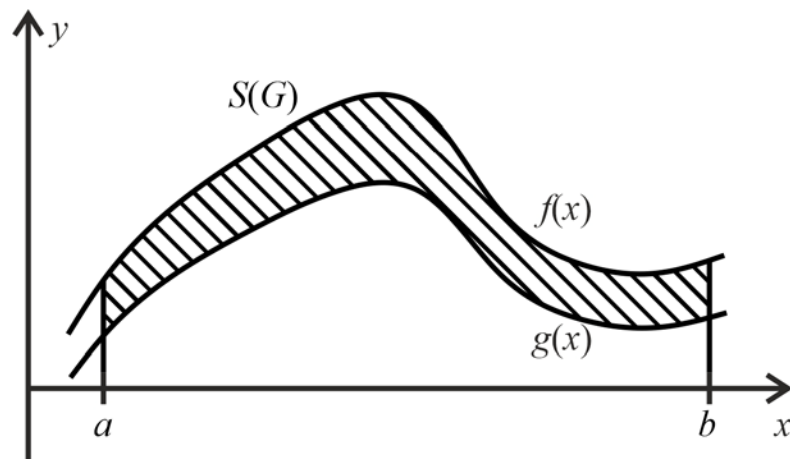
Визначення. Площа квадрованої фігури G – це таке число $S(G)$, що $\forall q, Q$ кліткових фігур, у яких $q \subset G \subset Q$ виконується нерівність $S(q) \leq S(G) \leq S(Q)$.

Зауваження. Площа квадрованої фігури адитивна, інваріативна, монотонна.

Теорема про площу криволінійної трапеції

Криволінійна трапеція $G = \{(x, y) : x \in [a, b], y = f(x)\}$, де $f(x) \in C_{[a, b]}$ і $f(x) \geq 0$, при $x \in [a, b]$, – квадрована і $S(G) = \int_a^b f(x) dx$.

Наслідок. Нехай $f(x), g(x) \in C_{[a, b]}$, $g(x) \geq 0$, $f(x) \geq g(x)$, при $x \in [a, b]$ і $G = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [g(x), f(x)]\} \Rightarrow G$ – квадрована і $S(G) = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.



Числові методи обчислення інтегралів

Необхідно обчислити визначений інтеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ с заданою точністю ε .

В основі методів числового інтегрування лежить заміна інтеграла скінченною сумою $I_n = \sum_{k=0}^n c_k f(x_k)$, де $x_k \in [a; b]$ – вузли квадратурної формули, c_k – коефіцієнти квадратурної формули, $k = 0, 1, \dots, n$.

Визначення. Інтерполяційний поліномом $L_n(x)$ степені n функції $f(x)$ на відрізьку $[a, b]$, побудованому по системі вузлів $\Pi = \{x_k\}_{k=0}^n$ називається поліном, для якого виконуються наступна умова: $L_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$. Значення інтерполяційного полінома в вузлах співпадають зі значеннями функції у вузлах.

Під інтерполяційним поліномом Лагранжа будемо розуміти поліном

$$\text{вигляду } L_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}.$$

Нехай $n = 0$. Тоді $L_0(x) = f(x_0)$.

Нехай $n = 1$. Тоді $L_1(x) = f(x_0) \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$.

При застосуванні квадратурних формул інтерполяційного типу підінтегральна функція заміняється інтерполяційним поліномом, як правило,

$$\text{у формі Лагранжа } f(x) \approx \sum_{k=0}^n f(x_k) \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)}. \text{ Тоді}$$

$$I \approx I_n = \sum_{k=0}^n f(x_k) \int_a^b \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)} dx.$$

Коефіцієнти квадратурної формули $c_k = \int_a^b \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x_k - x_j)} dx$ обчислюються

аналітично як інтеграли від багаточленів.

Формула прямокутників впливає при $n=0$, тобто якщо функцію $f(x)$ замінити сталою: $I_n = f(x_k)(b-a)$.

Зауважимо, що це еквівалентно тому, що інтеграл покладається рівним площі прямокутника зі сторонами $(b-a)$ і $f(x_k)$. Яким вибрати x_k —?

Формула трапеції впливає при $n=1$, тобто якщо функцію $f(x)$ замінити лінійною функцією. У цьому випадку отримана фігура є трапецією, а наближене значення інтеграла дорівнює $I_n = \frac{1}{2}(f(a) + f(b))(b-a)$.

Формула Сімпсона (парабол). Функцію $f(x)$ замінюємо параболою ($n=2$). У випадку рівномірного розбиття відрізка $[a, b]$: $x_0 = a$, $x_2 = b$, $x_1 = \frac{b-a}{2}$ отримаємо $I_n = \frac{1}{3}(f(a) + 4f(x_1) + f(b))\frac{(b-a)}{2}$.

При застосуванні **складеної** квадратурної формули відрізок $[a, b]$ розбивається на частини, а інтеграл подається як сума інтегралів по частковим відрізкам.

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx.$$

Після чого на кожному частковому відрізку інтеграл $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ обчислюється за допомогою квадратурної формули. Будемо припускати, що розбиття відрізка $[a, b]$ рівномірне, $\Delta x = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, а також $x_0 = a$, $x_N = b$.

Складена квадратурна формула прямокутників має вигляд $I_N = \sum_{i=1}^N f(x_{i-1/2})\Delta x$, де $x_{i-1/2}$ — довільна точка відрізка $[x_{i-1}, x_i]$.

У випадку, якщо в якості $x_{i-1/2}$ вибирається середина відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $x_{i-1/2} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$, то формула має назву *середніх прямокутників*.

Якщо в якості $x_{i-1/2}$ вибирається лівий кінець відрізка $[x_{i-1}, x_i]$, $x_{i-1/2} = x_{i-1}$, то формула називається *лівих прямокутників*.

Якщо в якості $x_{i-1/2}$ вибирається правий кінець відрізка $[x_{i-1}, x_i]$, $x_{i-1/2} = x_i$, то формула називається *правих прямокутників*.

Складена квадратурна формула трапеції має вигляд

$$I_N = \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_{i=1}^{N-1} f(x_i) \right) \Delta x.$$

Метод **подвійного перерахування з оцінкою по Рунге** можна сформулювати так. Нехай обчислені величини I_N і I_{2N} . Тоді для заданої похибки ε , якщо $\frac{|I_N - I_{2N}|}{3} < \varepsilon$, то $|I - I_{2N}| < \varepsilon$.

На практиці це означає, що необхідно збільшувати кількість вузлів доти, поки величина $|I_N - I_{2N}|/3$ не стане менше бажаної похибки ε .

Складена квадратурна формула Сімпсона має вигляд

$$I_N = \frac{1}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i}) \right) \Delta x.$$

Зауваження. Величина N повинна бути парної.

Оцінка по **Рунге** має вигляд:

$$\text{якщо } \frac{|I_N - I_{2N}|}{15} < \varepsilon, \text{ то } |I - I_{2N}| < \varepsilon.$$

Зауваження. При збільшенні кількості вузлів у два рази (подвійне перерахування) немає необхідності обчислювати всі суми в складеній формулі Сімпсона цілком. Досить обчислити тільки «нові» суми. Для ілюстрації цього факту введемо наступні позначення.

Нехай $N = m$ (m – парне). Позначимо

$$S_0 = f(a) + f(b),$$

$$S_1^m = \sum_{i=1}^{m/2} f(x_{2i-1}),$$

$$S_2^m = \sum_{i=1}^{m/2-1} f(x_{2i}),$$

$$\Delta x^m = \frac{b-a}{m}.$$

Тоді вираз для складеної квадратурної формули Сімпсона можна переписати як $I_N = \frac{1}{3}(S_0 + 4S_1^m + 2S_2^m)\Delta x^m$.

Позначення Δx^m означає не степінь, а верхній індекс.

Тепер нехай $N = 2m$, тоді $I_{2N} = \frac{1}{3}(S_0 + 4S_1^{2m} + 2(S_1^m + S_2^m))\Delta x^{2m}$.

Останні доданки вже обчислені на попередньому кроці при $N = m$. Обчислювати потрібно лише суму S_1^{2m} .

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграл $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ (порівняйте з прикладом 1 розділу 2).

Використаємо таблицю невизначених інтегралів та формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln |x| \Big|_1^2 = \ln |2| - \ln |1| = \ln 2.$$

Приклад 2. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 (2x + 3) dx$ (порівняйте з прикладом 2 розділу 2).

Застосуємо властивість лінійності інтеграла

$$\int_0^1 (2x + 3) dx = \int_0^1 2x dx + \int_0^1 3 dx = 2 \int_0^1 x dx + 3 \int_0^1 dx =$$

далі використаємо таблицю невизначених інтегралів і формулу Ньютона-Лейбніца

$$= 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} \Big|_0^1 + 3x \Big|_0^1 = x^2 \Big|_0^1 + 3x \Big|_0^1 = (1^2 - 0^2) + 3(1 - 0) = 1 + 3 = 4.$$

Приклад 3. Обчисліть інтеграл $\int \sin(5x + 3) dt$ (порівняйте з прикладом 5 розділу 2).

Застосуємо метод заміни змінної u (визначеному) інтегралі Рімана

$$\int_0^1 \sin(5x+3)dx = \left. \begin{array}{l} y = 5x+3 \\ dy = d(5x+3) = (5x+3)'dx = \\ = 5 \cdot dx \Rightarrow \\ dx = \frac{1}{5} dy \\ \text{Границі інтегрування:} \\ 0: y(0) = 5 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow 0 \rightarrow 3 \\ 1: y(1) = 5 \cdot 1 + 3 = 8 \Rightarrow 1 \rightarrow 8 \end{array} \right| = \int_3^8 \sin(y) \frac{dy}{5} = \frac{1}{5} \int_3^8 \sin(y) dy =$$

$$= -\frac{1}{5} \cos(y) \Big|_3^8 = -\frac{1}{5} (\cos 8 - \cos 3)$$

Зауважимо, що обернену заміну виконувати не потрібно.

Приклад 4. $\int_{-1}^1 x e^{5x} dx$ (порівняйте з прикладом 7 розділу 2)

Застосуємо метод інтегрування частинами: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. У якості u візьмемо $u = x$. Тоді $dv = e^{5x} dx$. Проінтегруємо ліву і праву частину

$$\int dv = \int e^{5x} dx \Rightarrow \int dv = v - \text{тут невизначений інтеграл.}$$

$$\text{Знайдемо } \int e^{5x} dx = \left. \begin{array}{l} y = 5x \\ dy = d(5x) = 5dx \\ dx = \frac{dy}{5} \end{array} \right| = \int e^y \frac{dy}{5} = \frac{1}{5} \int e^y dy = \frac{1}{5} e^y = \frac{1}{5} e^{5x}.$$

Отримали, що $v = \frac{1}{5} e^{5x}$. Тоді

$$\int_{-1}^1 x \underbrace{e^{5x}}_{dv} dx = x \frac{1}{5} e^{5x} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{5} e^{5x} dx = \frac{1}{5} x e^{5x} \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{5} \int_{-1}^1 e^{5x} dx = \text{інтеграл від } e^{5x} \text{ вже}$$

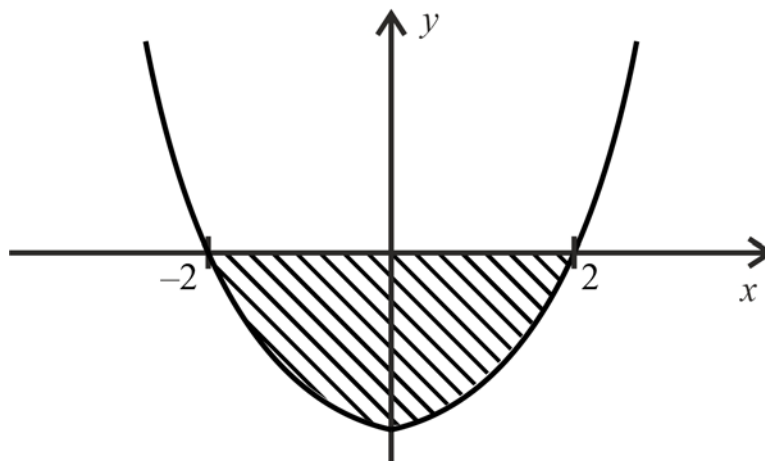
обчислено при пошуках v ,

$$= \left(\frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} \cdot 1 \cdot e^{5 \cdot 1} - \frac{1}{25} e^{5 \cdot 1} \right) - \left(\frac{1}{5} \cdot (-1) \cdot e^{5 \cdot (-1)} - \frac{1}{25} e^{5 \cdot (-1)} \right) =$$

$$= \frac{e^5}{5} \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \frac{e^{-5}}{5} \left(1 + \frac{1}{5}\right) = \frac{4}{25} e^5 + \frac{6}{25} e^{-5}.$$

Приклад 5. Знайдіть площу плоскої фігури, обмеженої графіком функції $y = x^2 - 4$ та віссю Ox .

$y = x^2 - 4$ – це парабола з гілками вгору, зсунута вздовж осі Oy вниз на 4. Тоді обмежена частина знаходиться між точками перетину графіка з віссю Ox

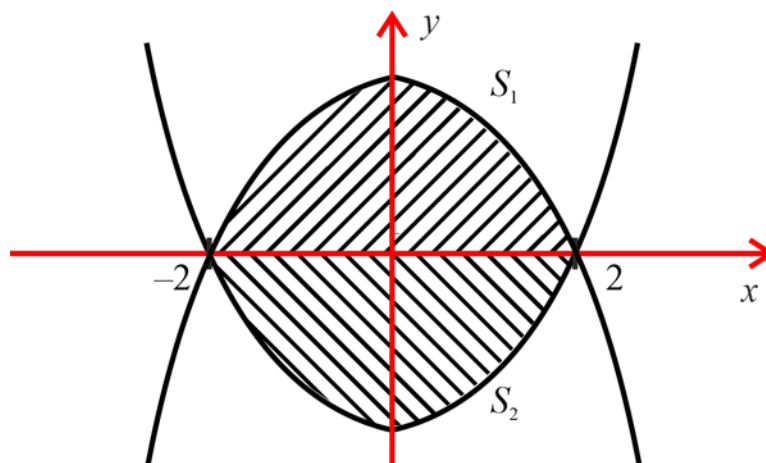


Знайдемо точки перетину з віссю Ox . $y = x^2 - 4 = 0$ – рівняння відносно x . $x^2 - 2^2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді площа } S &= \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx = -\int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = -\int_{-2}^2 x^2 dx - \int_{-2}^2 -4 dx = \\ &= -\frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 + 4x \Big|_{-2}^2 = -\frac{1}{3}((2)^3 - (-2)^3) + 4(2 - (-2)) = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Приклад 6. Знайдіть площу плоскої фігури, обмеженої графіком функцій $y = x^2 - 4$ та $y = -x^2 + 4$.

$y_1 = x^2 - 4$ та $y_2 = -x^2 + 4$ – параболи. У першої гілки вгору і вона зсунута вниз на 2 вздовж осі Oy . У другої – гілки вниз і вона зсунута на 2 вгору вздовж осі Oy . Зауважимо, що частина фігури лежить над віссю Ox , а частина – під нею.



Знайдемо точки перетину кривих, а також точки перетину з віссю Ox . Для того, щоб знайти точки перетину кривих, потрібно прирівняти $y_1 = y_2$, тоді

$$x^2 - 4 = -x^2 + 4 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2.$$

Знайдемо точки перетину з віссю Ox для того, щоб визначити, яка частина фігури лежить під нею, а яка над нею.

$$y_1 = x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2.$$

$$y_2 = -x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_{5,6} = \pm 2.$$

Маємо, що точки перетину кривих і точки їх перетину з віссю Ox співпадають. Тоді

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (y_1(x) - |y_2(x)|) dx = \int_{-2}^2 ((x^2 - 4) - |-x^2 + 4|) dx = \\ &= \int_{-2}^2 ((x^2 - 4) - (x^2 - 4)) dx = \int_{-2}^2 (2x^2 - 8) dx = 2 \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \end{aligned} \quad (\text{дивись попередній приклад 5}).$$

До розв'язання можна підійти по іншому. $S = S_1 + S_2$, де S_1 – площа фігури, яка лежить над віссю Ox , S_2 – площа фігури, яка лежить під віссю Ox . Маємо $S_1 = S_2$. Тоді $S = 2S_1 = 2 \int_{-2}^2 (x^2 - 4) dx = \frac{64}{3}$.

Задачі для самостійного розв'язання

І Обчисліть інтеграли

1) $\int_1^2 (3x^2 + 4x^3) dx$	18) $\int_0^2 (4x^3 - 2x) dx$
2) $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx$	19) $\int_0^1 (6x^5 + 3x^2 - 4) dx$
3) $\int_1^3 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$	20) $\int_1^3 \left(e^x + \frac{1}{x^5} \right) dx$
4) $\int_2^5 \frac{1}{x^2 - 1} dx$	21) $\int_2^3 \frac{3}{x^2 - 1} dx$
5) $\int_0^3 \sqrt{x+1} dx$	22) $\int_1^6 \sqrt{x+3} dx$
6) $\int_1^3 x \cos(2x^2 + 1) dx$	23) $\int_0^1 x \sin(3x^2 + 1) dx$
7) $\int_2^3 x e^{x^2+2} dx$	24) $\int_1^2 x(x^2 - 3)^4 dx$
8) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 2)^3} dx$	25) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 3)^3} dx$
9) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx$	26) $\int_0^1 \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$
10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin(\cos x) dx$	27) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos(\sin x) dx$
11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$	28) $\int_0^{\pi} \sin x \cos^3 x dx$
12) $\int_0^{\ln 2} x e^x dx$	29) $\int_0^2 x e^{-x} dx$
13) $\int_0^{\pi} x \cos x dx$	30) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$
14) $\int_1^e \ln x dx$	31) $\int_1^e x \ln x dx$
15) $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \sqrt{1 - \sin^2 x} dx$	32) $\int_0^{2\pi} \cos^2 x \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$

	Відповідь $\frac{4}{3}$
16)* $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$	33) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2 + 3)^3} dx$
17)* $\int_a^b x, a > b, dx$ немає	

Обчисліть інтеграли з використанням складених квадратурних формул. Порівняйте результати з аналітичними обчисленнями.

II Знайдіть площу плоскої фігури, обмеженої кривими

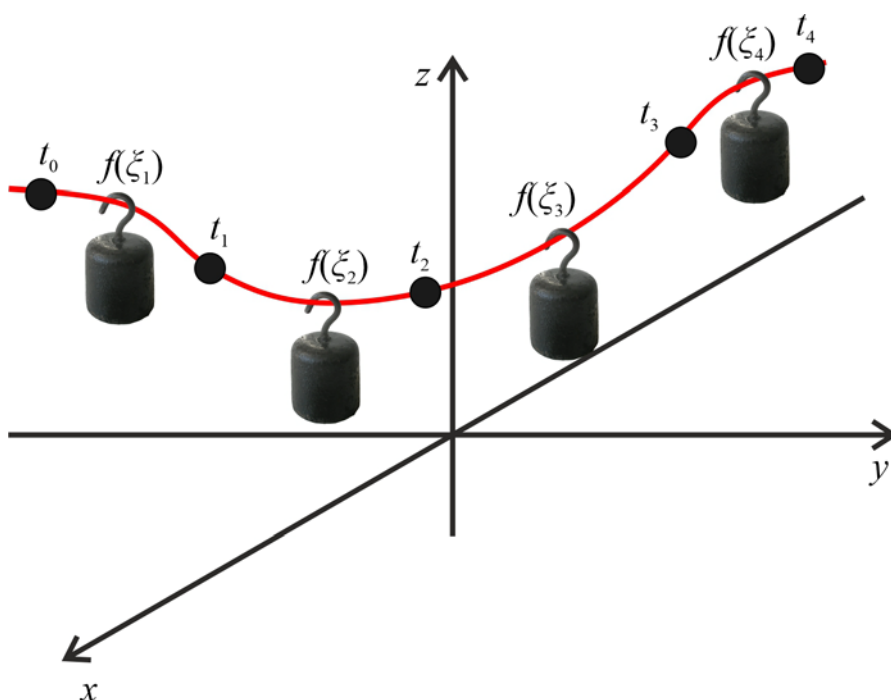
1) $y = x^2, x = 0, x = 1$, вісь Ox	8) $y = x^3, x \in [0, 1]$, вісь Ox
2) $y = x, x = -1, x = 1$, вісь Ox	9) $y = x^2 - 1, x = -2, x = 1$, вісь Ox
3) $y = x^2, y = \sqrt{x}$	10) $y = \frac{2}{1 + x^2}, y = x^2$
4) $y = 2x^2 - x + 1, y = (x - 7)^2, x = 1,5, y = 0$	11) $y = \arctg x, y = 0, x = 0, x = 1$
5) $y = \arctg x, y = 0, x = 0, x = 1$	
6) $y = \ln x, y = 0, x = e$	
7) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, x = \sqrt{2}a$	

РОЗДІЛ 7. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ 1-ГО РОДУ

Теоретичні відомості

Визначення

Визначення. Нехай $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$ – проста кусково гладка крива. Нехай на кривій визначена густина $f = f(x, y, z)$. Нехай ϵ розбиття $\Pi = \{t_i\}_{i=0}^n$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Якщо $\exists \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta l_i$, який не залежить від розбиття кривої в точках ξ_i , то вона називається криволінійним інтегралом першого роду по кривій Γ і позначається як $\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl$.



Криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_{\Gamma} \rho(x, y, z)$ по кривій Γ можна обчислити за формулою

$$\int_{\Gamma} \rho(x, y, z) dl = \int_a^b \rho(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

Довжина дуги кривої

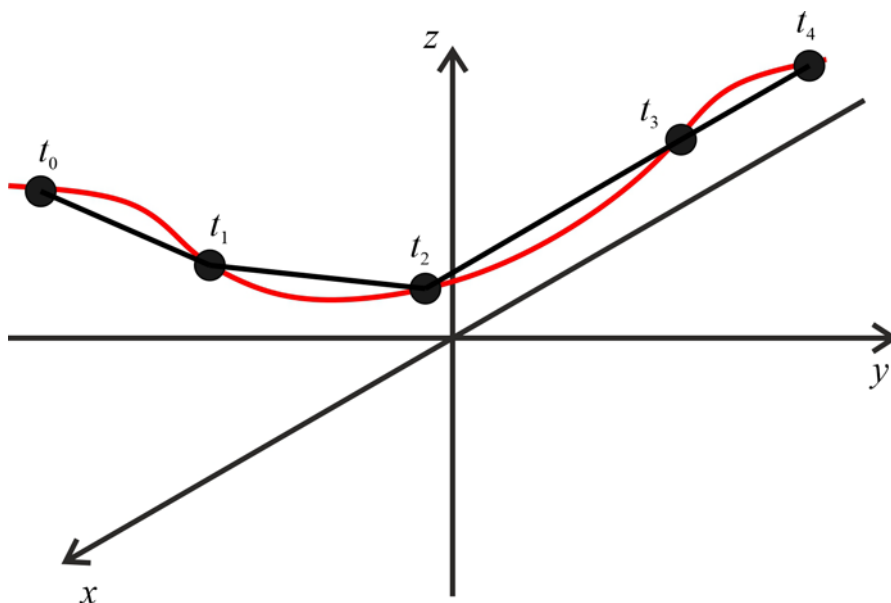
Нехай ϵ крива $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a, b]\}$, ϵ розбиття $\Pi = \{t_i\}_{i=0}^n$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Як і раніше припускаємо, що $a = t_0$, $b = t_n$, хоча, взагалі кажучи, це не є завжди обов'язковим.

Визначення. Ламана $\Lambda = \Lambda(\Gamma, \Pi)$, що наближає криву Γ – це об'єднання відрізків, які сполучають точки $\vec{r}(t_{i-1})$ і $\vec{r}(t_i)$

Визначення. Довжина ламаної кривої – це число

$$l(\Lambda) = \sum_{i=1}^n |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$$

Визначення. Довжина кривої Γ – це число $l(\Gamma) = \sup_{\Pi} l(\Lambda(f, \Pi))$.



Нехай ϵ крива, задана параметрично

$$\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [a, b]. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Її довжину можна обчислити як $L = \int_{\Gamma} dl = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

Якщо крива задана явно, $y = y(x)$, то її довжина дорівнює

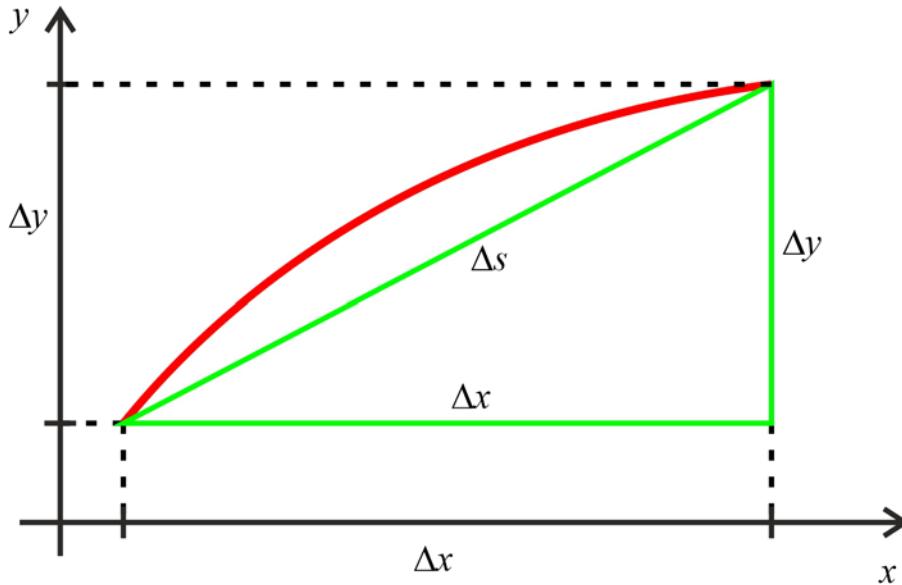
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Зауваження. Довжина кривої обчислюється як криволінійний інтеграл першого роду при густині $f \equiv 1$.

Геометричне пояснення. Розглянемо плоский випадок, $z(t) \equiv 0$. З теореми Піфагора маємо, що $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} : \Delta t \Rightarrow$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \quad \text{перейшовши до границі } \Delta t \rightarrow 0, \quad \text{отримаємо}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$



Координати центру мас кривої

Координати **центру мас** (X, Y, Z) кривої Γ з густиною $\rho(x, y, z)$ обчислюються як $X = \frac{M_x}{m}$, $Y = \frac{M_y}{m}$, $Z = \frac{M_z}{m}$, де

$m = \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) dl = \int_a^b \rho(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$ — маса кривої,

$$M_x = \int_{\Gamma} x \rho(x, y, z) dl = \int_a^b x \rho(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

$$M_y = \int_{\Gamma} y \rho(x, y, z) dl = \int_a^b y \rho(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt,$$

$$M_z = \int_{\Gamma} z \rho(x, y, z) dl = \int_a^b z \rho(x, y, z) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$
 —

моменти.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Знайдіть довжину дуги кривої $\Gamma: \begin{cases} x = t, \\ y = 3t, \end{cases} t \in [0, 1]$.

Зауважимо, що тут $z(t) \equiv 0$.

$$x' = t' = 1,$$

$$y' = 3t' = 3.$$

$$L = \int_{\Gamma} dl = \int_0^1 \sqrt{(1)^2 + (3)^2} dt = \sqrt{10} \int_0^1 dt = \sqrt{10}(1-0) = \sqrt{10}$$

Приклад 2. Знайдіть довжину дуги кривої $y = x$, $x \in [0, 1]$.

$$y' = x' = 1.$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 1} dx = \sqrt{2} \int_0^1 dx = \sqrt{2}(1-0) = \sqrt{2}$$

Задачі для самостійного розв'язання

I Знайдіть довжину дуги кривої

$$1) \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$2) \text{ Астроїда: } \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$3) x^2 + y^2 = 4$$

$$4) y = e^x, \quad x \in [0; \ln 7]$$

Вказівка. Зробити заміни $t = e^x$, $s = \sqrt{1+t^2}$

$$5) y = x^2, \quad x \in [1, 2]$$

$$6) \begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t \end{cases}, \quad t \in \left[\arcsin A, \frac{\pi}{2} \right], \quad A \in (0, 1). \text{ Відповідь: } -a \ln A$$

$$7) \begin{cases} x = t \cos t^2, \\ y = t \sin t^2, \\ z = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, 2]$$

II Криволінійний інтеграл 1-го роду. Задачі

1) Знайдіть інтеграл $\int_{\Gamma} xy dl$ вздовж відрізка прямої $y = x$ від початку координат до точки $(3, 3)$.

2) Обчисліть інтеграл $\int_{\Gamma} x^2 dl$, де Γ – дуга кола радіусу a , $0 \leq \varphi \leq \pi$.

3) Знайдіть масу кривої $\Gamma: \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ з густиною

$$\rho = \frac{z^2}{x^2 + y^2}.$$

4) Знайдіть центр мас однорідної кривої $\Gamma: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$

($\rho = \text{const}$).

5) Знайдіть заряд кривої $\Gamma: \begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \\ z = t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ з густиною заряду

$$\rho = z.$$

6) Знайдіть інтеграл $\int_{\Gamma} x^2 dl$ вздовж відрізка прямої $y = 4x$ від початку координат до точки $(2, 8)$.

7) Знайдіть масу кривої $\Gamma: \begin{cases} x = \text{ch } t, \\ y = \text{sh } t, \\ z = t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ з густиною

$$\rho = \frac{z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}. \text{ Вказівка: } \text{ch}^2 t + \text{sh}^2 t = 2\text{ch}^2 t - 1.$$

РОЗДІЛ 8. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ 2-ГО РОДУ

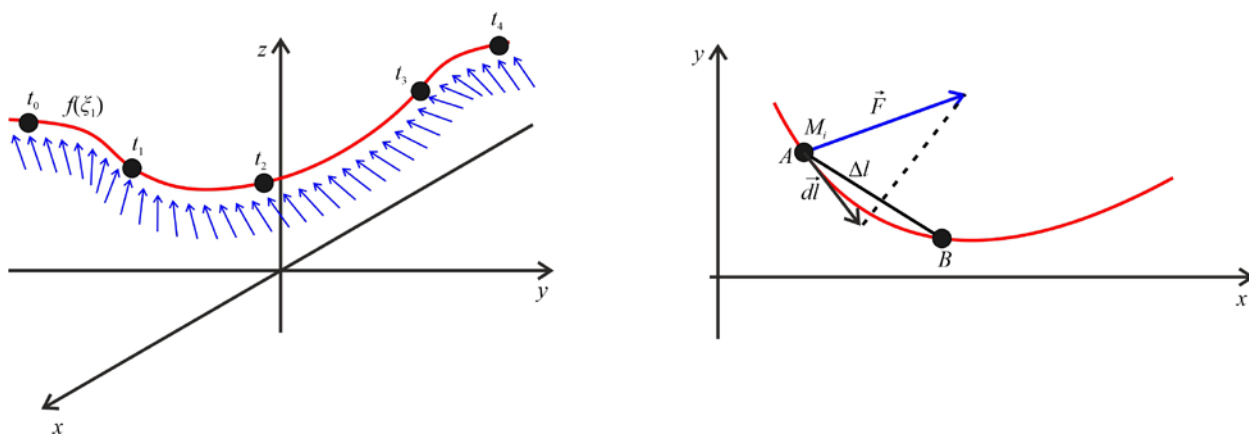
Теоретичні відомості

Визначення та властивості

Нехай $\vec{F}$ є векторне поле $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$, де функції $P(x, y, z)$,

$Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ – неперервні. Нехай $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$ – проста кусково гладка крива, де точка A – початок кривої, точка B – кінець кривої. Нехай $\Pi = \{t_i\}_{i=0}^n$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Розглянемо довільну точку $M_i = (x(\xi_i), y(\xi_i), z(\xi_i))$ на цій кривій, $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Робота по переміщенню матеріальної точки з точки A в точку B на цій кривій, які визначаються параметрами t_{i-1} і t_i , дорівнює $P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i$. Робота, по переміщенню n точок буде дорівнювати сумі робіт по переміщенню кожної точки $\sum_{i=1}^n P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i$. Згадаємо з лінійної алгебри, що згідно визначенню скалярного добутку, $P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i = (\vec{F}(M_i), \Delta \vec{l}_i)$.

Тоді $\sum_{i=1}^n P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(M_i)\Delta z_i = \sum_{i=1}^n (\vec{F}(M_i), \Delta \vec{l}_i)$. Переходячи до границі, коли $d \rightarrow 0$, отримаємо інтеграл (якщо границя має сенс), який буде називатись криволінійним інтегралом другого роду.



Визначення. Нехай $\vec{F}$ є векторне поле $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$, проста

кусово гладка крива $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(t) : t \in [a, b]\}$ і розбиття $\Pi = \{t_i\}_{i=0}^n$. Тоді криволінійний інтеграл другого роду від вектор-функції $\vec{F}(x, y, z)$ по

орієнтовний кривій Γ_{AB} називається інтеграл вигляду

$$\int_{\Gamma_{AB}} (\vec{F}(x, y, z), \vec{dl}) = \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

Нехай є параметризація кривої $\Gamma: \vec{r} = \vec{r}(t)$, тоді криволінійний інтеграл другого роду дорівнює $\int_{\Gamma_{AB}} (\vec{F}(x, y, z), \vec{dl}) =$

$$= \int_{\Gamma_{AB}} P(x, y, z)x'_t dt + Q(x, y, z)y'_t dt + R(x, y, z)z'_t dt =$$

$$= \int_{\Gamma_{AB}} (P(x, y, z)x'_t + Q(x, y, z)y'_t + R(x, y, z)z'_t) dt.$$

Властивості:

1) Не залежить від способу параметризації кривої.

2) Змінює знак при зміні орієнтації кривої, $\int_{\Gamma_{AB}} (\vec{F}(x, y, z), \vec{dl}) =$
 $= - \int_{\Gamma_{BA}} (\vec{F}(x, y, z), \vec{dl}).$

3) Адитивен відносно кривої: $\Gamma_{AB} = \Gamma_{AC} \cup \Gamma_{CB} \Rightarrow \int_{\Gamma_{AB}} (\vec{F}(x, y, z), \vec{dl}) =$
 $= \int_{\Gamma_{AC}} (\vec{F}(x, y, z), \vec{dl}) + \int_{\Gamma_{CB}} (\vec{F}(x, y, z), \vec{dl})$

Теорема. Умови незалежності криволінійного інтеграла другого роду від шляху інтегрування

Наступні твердження є еквівалентними (плоский випадок):

1) Область без “дір”, $\forall$ замкнутого контуру в області $\oint_C Pdx + Qdy = 0$
 $\Leftrightarrow$

2) Криволінійний інтеграл другого роду $\int_{\Gamma_{AB}} Pdx + Qdy$ не залежить від кривої, яка з'єднує точки A і $B \Leftrightarrow$

3) Поле $\vec{F} = (P, Q)$ потенційне, тобто $\exists \varphi(x, y): P = \varphi'_x, Q = \varphi'_y.$

Робота векторного поля по переміщенню матеріальної точки

Робота поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$ по переміщенню матеріальної точки

вздовж дуги кривої Γ дорівнює криволінійному інтегралу 2-го роду:

$$A = \int_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = \text{або} = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Якщо крива задано параметрично, $\Gamma: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} t \in [a, b]$, то $\begin{cases} dx = x'_t dt, \\ dy = y'_t dt, \\ dz = z'_t dt, \end{cases}$ і

$$A = \int_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_a^b (P(x, y, z)x'_t + Q(x, y, z)y'_t + R(x, y, z)z'_t)dt.$$

Якщо крива задано явно, $y = y(x)$, то $x' = 1$, $dy = y'dx$ і $A = \int_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_a^b (P(x, y, z) + Q(x, y, z)y')dx.$

Приклад розв'язання задачі

Приклад.

Знайдіть роботу силового поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ y + 1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ по переміщенню

матеріальної точки вздовж відрізка прямої від точки $A(2, 0, 4)$ до точки $B(2, 2, -3)$.

Запишемо параметричне рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B

$$\begin{cases} x = 2 + (2 - 2)t, \\ y = 0 + (2 - 0)t, \\ z = 4 + (-3 - 4)t, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 2t, \\ z = 4 - 7t. \end{cases} \quad \text{Знайдемо інтервал зміни } t.$$

Підставимо замість (x, y, z) спочатку координати точки A , потім координати точки B :

$$\text{Для } A: \begin{cases} 2 = 2, \\ 0 = 2t, \\ 4 = 4 - 7t. \end{cases} \Rightarrow a = t_0 = 0. \text{ Для } B: \begin{cases} 2 = 2, \\ 2 = 2t, \\ -3 = 4 - 7t. \end{cases} \Rightarrow b = t_1 = 1.$$

Запишемо вирази для P , Q , R , підставивши x , y і z з параметричного рівняння прямої. З умови маємо $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ y + 1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P(x, y, z) = 2x + z = 2 \cdot 2 + 4 - 7t = 8 - 7t,$$

$$Q(x, y, z) = y + 1 = 2t + 1,$$

$$R(x, y, z) = x^2 = 2^2 = 4.$$

Знайдемо

$$x'_t = (2)' = 0,$$

$$y'_t = (2t)' = 2,$$

$$z'_t = (4 - 7t)' = -7.$$

Тоді робота дорівнює криволінійному інтегралу другого роду

$$\begin{aligned} A &= \int_{\Gamma} (\vec{F}, d\vec{r}) = \int_a^b (P(x, y, z)x'_t + Q(x, y, z)y'_t + R(x, y, z)z'_t) dt = \\ &= \int_0^1 ((8 - 7t) \cdot 0 + (2t + 1) \cdot 2 + 4 \cdot (-7)) dt = \\ &= \int_0^1 (0 + 4t + 2 - 28) dt = \int_0^1 (4t - 26) dt = (2t^2 - 26t) \Big|_0^1 = -24 \end{aligned}$$

Задачі для самостійного розв'язання

1) Знайдіть роботу силового поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ по переміщенню

матеріальної точки вздовж дуги кривої Γ , заданої рівнянням $y = x^3$, від точки $A(0, 0)$ до точки $B(2, 8)$. Відповідь 8.

2) Знайдіть роботу силового поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ -xy \end{pmatrix}$ по переміщенню

матеріальної точки вздовж дуги кола з центром в початку координат радіуса c , що лежить у першому квадранті і обхід якої здійснюється проти

годинникової стрілки. Відповідь $-\frac{2c^3}{3}$. Вказівка: записати рівняння кола у параметричній формі.

3) Знайдіть роботу силового поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ y-x \end{pmatrix}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж дуги параболи $y=1-x^2$ в напрямку від точки $A(-1, 0)$ до точки $B(0, 1)$. Відповідь: $\frac{11}{6}$.

4) Знайдіть роботу силового поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} y \\ -2\sin 2z \\ x \end{pmatrix}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж дуги кривої $\Gamma: \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos t, \\ z = t, \end{cases} t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Відповідь: 3.

5) Знайдіть роботу силового поля $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x-3z \\ 2z+1 \\ y^2 \end{pmatrix}$ по переміщенню матеріальної точки вздовж відрізка прямої від точки $A(1, 1, 1)$ до точки $B(2, 3, 4)$. Відповідь $\frac{41}{2}$.

РОЗДІЛ 9. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

Теоретичні відомості

Визначення. Нехай $f:[a, b] \rightarrow R$, $f(x)$ інтегрована на $[a, \xi] \quad \forall \xi \geq a$. Невласним інтегралом функції $f(x)$ на $[a, +\infty)$ називається число

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x)dx.$$

Визначення. Нехай $f:[a, b] \rightarrow R$, $f(x)$ інтегрована на $[\zeta, b] \quad \forall \zeta \leq b$. Невласним інтегралом функції $f(x)$ на $(-\infty, b]$ називається число

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^b f(x)dx.$$

Якщо границя існує, то інтеграл збігається. У протилежному випадку – розбігається.

Аналогічно
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x)dx$$

Визначення. Нехай $f:[a, b) \rightarrow R$, $f(x)$ необмежена на $[a, b]$, $f(x)$ інтегрована на $[a, \xi] \quad \forall \xi \in [a, b)$. Невласним інтегралом функції $f(x)$ на $[a, b]$ називається число
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{B \rightarrow b} \int_a^B f(x)dx.$$

Визначення. Якщо $\exists \lim_{B \rightarrow b-0} \int_a^B f(x)dx \in R \Rightarrow$ інтеграл збігається. У протилежному випадку інтеграл розбігається.

Аналогічно
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A \rightarrow a+0} \int_A^b f(x)dx.$$

Якщо $f(x)$ є необмеженою у внутрішній точці c відрізка $c \in [a, b]$, тоді
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{A \rightarrow c-0} \int_a^A f(x)dx + \lim_{B \rightarrow c+0} \int_B^b f(x)dx.$$

Невласний інтеграл розуміється як границя, коли змінна наближається до сингулярної точки. Якщо границя існує і скінченна, то інтеграл збігається. У протилежному випадку – розбігається.

Для невластних інтегралів виконуються ті самі властивості, що і для інтегралів Рімана:

Нехай $f, g:[a, b) \rightarrow R$, де $f(x), g(x)$ інтегровані на $[a, B]$, $B \in [a, b)$. Будемо розглядати $b \in R$ або $b = +\infty$.

1) Лінійність

$$\int_a^b f(x)dx \text{ і } \int_a^b g(x)dx \text{ збігаються, } \alpha, \beta \in R \Rightarrow \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \\ = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \text{ збігається.}$$

2) Формула Ньютона-Лейбніца

Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на $[a, b]$ (де $f(x) \in C_{[a, b)}$). $\int_a^b f(x)dx$ збігається $\Rightarrow \exists \lim_{B \rightarrow b-0} F(B) \in R$ і $\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a)$.

3) Інтегрування частинами

Нехай $u, v: [a, b) \rightarrow R$, $u(x), v(x) \in C_{[a, b]}^1 \quad \forall B \in [a, b)$. $\exists \lim_{B \rightarrow b-0} u(B)v(B)$ і $\int_a^b v(x)u'(x)dx$ збігається $\Rightarrow \int_a^b u(x)v'(x)dx$ також збігається та $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$, де під підстановкою мається на увазі граничне значення.

Зауваження. Якщо $\exists \lim_{B \rightarrow b-0} u(B)v(B)$, тоді $\int_a^b v du$ і $\int_a^b u dv$ збігаються чи розбігаються одночасно.

4) Заміна змінних

$$\begin{cases} f(x) \in C_{[a, b)} \\ x = \varphi(t) \in C_{[\alpha, \beta)}^1 \\ \varphi(t) \uparrow t \in [\alpha, \beta) \\ \varphi(\alpha) = a, \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt, \text{ причому інтеграли}$$

зліва та справа збігаються та розбігаються одночасно.

5) Інтегрування нерівностей

$$\int_a^b f(x)dx \text{ і } \int_a^b g(x)dx \text{ збігаються і } f(x) \leq g(x), \text{ при } x \in [a, b) \Rightarrow \\ \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Теорема. Ознака Діріхле збіжності інтегралів

$$1) f \in C_{[a, +\infty)}$$

$$2) g \in C_{[a, +\infty)}$$

$$3) F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ обмежений на } [a, +\infty)$$

$$4) g'(x) \leq 0 \text{ або } g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, +\infty)$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \text{ збігається.}$$

Невласні інтеграли від невід'ємних функцій

Теорема. Критерій збіжності невластного інтеграла від невід'ємної функції

$$\text{Нехай } f(x) \geq 0, \text{ при } x \in [a, b). \quad \int_a^b f(x)dx - \text{збігається} \Leftrightarrow \int_a^B f(x)dx$$

обмежена згори функція змінної B . Тобто $\exists C, \forall B \in [a, b), \int_a^B f(x)dx \leq C$

Теорема порівняння

Якщо $0 \leq f(x) \leq g(x)$, при $x \in [a, b)$, то

$$1) \text{ зі збіжності } \int_a^b g(x)dx \text{ випливає збіжність } \int_a^b f(x)dx,$$

$$2) \text{ з розбіжності } \int_a^b f(x)dx \text{ випливає розбіжність } \int_a^b g(x)dx.$$

Теорема про збіжність інтегралів від еквівалентних функцій

Нехай

$$1) f(x) \geq 0 \text{ і } g(x) \geq 0, \text{ при } x \in [a, b),$$

$$2) f(x) \sim g(x), \text{ при } x \rightarrow b - 0.$$

Тоді інтеграли $\int_a^b g(x)dx$ і $\int_a^b f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Визначення. Невласний інтеграл від функції $f(x)$ називається абсолютно збіжним, якщо $\int_a^b |f(x)| dx$ збігається.

Визначення. Невласний інтеграл від функції $f(x)$ називається умовно збіжним, якщо $\int_a^b f(x) dx$ збігається, а $\int_a^b |f(x)| dx$ розбігається.

Теорема про умовну збіжність абсолютно збіжного інтеграла

$$\int_a^b f(x) dx \text{ абсолютно збігається} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ умовно збігається.}$$

Таким чином, якщо вдасться довести збіжність інтегралу від $\int_a^b |f(x)| dx$, то і інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ буде збігатись. Зважаючи на те, що $|f(x)| \geq 0$ є невід'ємною функцією, для дослідження збіжності можна використовувати теореми з підпункту “Невласні інтеграли від невід'ємних функцій”.

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Обчисліть інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ і зробіть висновок щодо його збіжності.

Одна сингулярна точка $x = +\infty$,

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\infty} = -\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{1}\right) = 1 - \text{збігається.}$$

Приклад 2. Обчисліть інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$.

Дві сингулярні точки $x = 0$ і $x = +\infty$. Необхідно дослідити збіжність у кожній з цих точок окремо, $x \rightarrow 0$ і $x \rightarrow +\infty$.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_0^A \frac{1}{x^2} dx + \int_A^{\infty} \frac{1}{x^2} dx, \text{ де } A > 0.$$

$$\int_0^A \frac{1}{x^2} dx = \int_0^A x^{-2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_0^A = -\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{0}\right) = +\infty - \text{розбігається} \Rightarrow \text{і весь інтеграл}$$

$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ розбігається (не залежно від збіжності другого інтеграла).

Приклад 3. Еталонний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{B \rightarrow +\infty} x^{1-\alpha} \Big|_1^B = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{B \rightarrow +\infty} (B^{1-\alpha} - 1).$$

1) Нехай $\alpha > 1$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) = -\frac{1}{1-\alpha}$ – збігається.

2) Нехай $\alpha = 1$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_1^B \frac{dx}{x} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^{+\infty} = \ln(+\infty) - 0 = +\infty$ – розбігається.

3) Нехай $\alpha < 1$. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$ – розбігається.

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\frac{1}{1-\alpha}, & \alpha > 1 - \text{збігається,} \\ +\infty, & \alpha = 1 - \text{розбігається,} \\ \infty, & \alpha < 1 - \text{розбігається.} \end{cases}$$

Приклад 4. Еталонний інтеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \rightarrow +0} \int_A^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \rightarrow +0} x^{1-\alpha} \Big|_A^1 = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{A \rightarrow +0} (1 - A^{1-\alpha}), \text{ якщо } \alpha \neq 1.$$

Розглянемо окремо випадок $\alpha = 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +0} \ln x \Big|_A^1 = \ln 1 - \ln 0 = +\infty$ – розбігається $\Rightarrow$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} = \infty, & \alpha > 1 - \text{розбігається,} \\ 1 - \ln(0) = +\infty, & \alpha = 1 - \text{розбігається,} \\ \frac{1}{1-\alpha}, & \alpha < 1 - \text{збігається.} \end{cases}$$

Приклад 5. Дослідить збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$.

У якості $f(x)$ візьмемо $f(x) = \cos x$, а у якості $g(x)$ візьмемо $g(x) = \frac{1}{x}$.
Перевіримо умови теореми. 1), 2) виконуються, косинус неперервний на всій осі, а $\frac{1}{x}$ неперервна функція, при $x > 0$.

3) $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \cos t dt = \sin t \Big|_1^x = \sin x - \sin 1$. Так як $|\sin x| \leq 1$, то $|\sin x - \sin 1| \leq 2$.

$$4) \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0$$

$$5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\Rightarrow$ за ознакою Діріхле $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ – збігається.

Приклад 6. Дослідить збіжність $\int_1^2 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x-1}} dx$.

Особлива точка (сингулярна) $x=1$. $0 \leq \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx = \left| \begin{array}{l} y = x-1 \\ dx = dy \\ 1 \rightarrow 1-1=0 \\ 2 \rightarrow 2-1=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^1 \frac{dy}{y^{\frac{1}{2}}} - \text{еталонний, } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{збігається.}$$

Приклад 7. Дослідить збіжність $\int_0^3 \frac{1}{\sin x} dx$.

Визначемо сингулярні точки. $\sin x = 0$ при $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. На відрізку $[0, 3]$ маємо одну сингулярну точку $x=0$. Застосуємо властивості для інтегралів від невід’ємних функцій. Так як $\sin x$ змінює знак на інтервалі $(0, 3)$, подамо інтеграл як суму двох інтегралів, наприклад,

$$\int_0^3 \frac{1}{\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sin x} dx + \int_1^3 \frac{1}{\sin x} dx.$$

Другий інтеграл не є невластим і тому збігається. Підінтегральна функція у першому інтегралі є невід’ємною.

Застосуємо еквівалентність $\sin x \sim x$. Так як $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ розбігається, як еталонний, $\alpha = 1$ у прикладі 4, то і вихідний інтеграл розбігається.

Приклад 8. Дослідити збіжність $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$. Тут дві сингулярні точки $x=0$ і $x=\infty$.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx.$$

Для того, щоб довести збіжність початкового інтеграла необхідно довести збіжність обох цих інтегралів. Для того, щоб довести розбіжність достатньо довести розбіжність хоча б одного з інтегралів. Зауважимо, що підінтегральна функція є додатньою, $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} > 0$.

Нехай $x \rightarrow 0$, $x^2 + x = x(x+1) \sim x$, $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ збігається.

Нехай $x \rightarrow \infty$, $x^2 + x \sim x^2$, $\frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$, $\alpha = 1 \Rightarrow$ розбігається
 $\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} dx$ розбігається.

Приклад 9. Дослідити збіжність $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} + 1}{x+1} dx$.

Одна сингулярна точка $x = +\infty$. $\frac{e^{-x}}{x+1} > 0$. $x+1 \sim x$ і $e^{-x} + 1 \sim 1$, $x \rightarrow +\infty$.
 Інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ розбігається ($\alpha = 1$) $\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} + 1}{x+1} dx$ розбігається.

Приклад 10. Дослідити збіжність $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$.

Дві сингулярні точки $x=0$ і $x=+\infty$. $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx = \int_0^A \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx + \int_A^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$, $A > 0$.

Для $\int_0^A \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ маємо, що $\frac{e^x}{\sqrt{x}} > 0$ і $\frac{e^x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$, $x \rightarrow 0$. $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{1/2}} dx$ збігається
 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$) $\Rightarrow \int_0^A \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ збігається.

Для $\int_A^\infty \frac{e^x}{x^{1/2}} dx$ також маємо, що $\frac{e^x}{x^{1/2}} > 0$. Доведемо розбіжність. Для цього обмежимо підінтегральну функцію знизу такою функцією, інтеграл від якої розбігається.

$$\frac{e^x}{x^{1/2}} = \frac{e^x}{x^{1/4}} \cdot \frac{1}{x^{1/4}} > \frac{1}{x^{1/4}} \text{ і } \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/4}} dx \text{ розбігається} \Rightarrow \int_A^\infty \frac{e^x}{x^{1/2}} dx \text{ розбігається} \Rightarrow \int_0^\infty \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx \text{ розбігається.}$$

Задачі для самостійного розв'язання

Обчислення невластних інтегралів

I Знайдіть невластні інтеграли

1) $\int_0^\infty e^{-x} dx$	16) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$
2) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx$	17) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx$
3) $\int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 1} dx$	18) $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$
4) $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x} dx$	19) $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln^3 x} dx$
5) $\int_0^\infty x \cos x^2 dx$	20) $\int_0^\infty \sin x dx$
6) $\int_0^\infty x e^{-x} dx$	21) $\int_0^\infty x \cos x dx$
7) $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$	
8) $\int_2^\infty \frac{1}{x \ln^\beta x} dx$	
9) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x} dx$	22) $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^3 x} dx$
10) $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$	23) $\int_{-1}^1 \frac{\cos x}{\sin x} dx$
11) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^\beta x} dx$	24) $\int_0^1 \frac{1}{(1 - e^{-\operatorname{tg} x}) \cos^2 x} dx$
12) $\int_1^\infty \frac{1}{x \ln x} dx$	25) $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^\beta x} dx$

13) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$	
14) $\int_{-1}^1 \ln x dx$	
15) $\int_0^{\infty} \sin x dx$	26) $\int_0^{\infty} \cos x dx$

27) Вздовж нескінченної дороги розсипано хмару пилу, $x \in [0, +\infty)$.

Густина пилу в точці x дорівнює $\rho(x) = \frac{1}{x \ln^{\beta} x}$, $x > 1$ і $\rho(x) = 1$, $x < 1$. Пил збирається пилососом. Для яких значень β кількість зібраного пилу буде скінченною?

Дослідження збіжності невластних інтегралів

II Дослідить збіжність інтегралів, використовуючи ознаки порівняння

1) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$, 2) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$, 3) $\int_2^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^3} dx$, 4) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$, 5) $\int_2^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$, 6) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3 \ln x} dx$,

7) $\int_2^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$, 8) $\int_2^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$;

9) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$, 10) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, 11) $\int_2^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^4} dx$, 12) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^4} dx$

13) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$, 14) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$, 15) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$, 16) $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^3} dx$, 17) $\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$, 18) $\int_0^1 \frac{1}{x^3 \ln x} dx$,

19) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$;

20) $\int_0^1 \frac{1}{x^3} dx$, 21) $\int_2^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$, 22) $\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{x^4} dx$, 23) $\int_0^1 \frac{1}{x^4 \ln x} dx$

III Дослідить збіжність інтегралів

1) $\int_1^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+2x^2+1} dx$	21) $\int_1^{\infty} \frac{3x^2-1}{x^3+4x+2} dx$
2) $\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^3+10x+2} dx$	22) $\int_1^{\infty} \frac{8x+5}{x^6+2x+3} dx$

3) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+4}}{\sqrt[4]{x^7+5}} dx$	23) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^4+1}} dx$
4) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x^6+1}} dx$	24) $\int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arcctg} x}{x} dx$
5) $\int_1^{\infty} \frac{1 + \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x\sqrt{x}} dx$	25) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx$
6) $\int_2^{\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^4}} dx$	26) $\int_2^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$
7) $\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$	27) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$
8) $\int_2^{\infty} \frac{\ln^2 x}{\sqrt[3]{x^5}} dx$	28) $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx$
9) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} \ln^2 x} dx$	29) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} dx$
10) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$	
11) $\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^5} \ln^2 x} dx$	
12) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{e^x} dx$	30) $\int_1^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3+1}} dx$
13) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^2} dx$	31) $\int_0^1 \frac{e^x}{x^2} dx$
14) $\int_{-1}^2 \frac{\sin x}{x} dx$	32) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x^2} dx$
15) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$	33) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(1+x)} dx$
16) $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{x^3 - x} dx$	34) $\int_0^1 \frac{1}{(e^{\sin x} - 1)^2} dx$
17) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$	
18) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} \ln x}$	

19) $\int_0^{\infty} \frac{2x+1}{x^4+2x^2} dx$	35) $\int_0^{\infty} \frac{x+2}{x^2} dx$
20) $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{\sqrt[4]{x^5}} dx$	36) $\int_{-1}^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x^3+1}} dx$

ТАБЛИЦЯ НЕВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

1) $\int 0 \cdot dx = C$	10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2) $\int 1 \cdot dx = x + C, \quad \int dx = x + C$	11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$
3) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	12) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$
4) $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	13) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad x < a$
5) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$
6) $\int e^x dx = e^x + C$	15) “високий логарифм”: $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$	16) “довгий логарифм”: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$
8) $\int \cos x dx = \sin x + C$	17) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$
9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$	18) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$

ВЛАСТИВОСТІ І МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

1. Константа виноситься

$$\int c \cdot f(x) dx = c \int f(x) dx$$

2. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

1.+2.=лінійність

3. Похідна від інтеграла дорівнює підінтегральній функції

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

4. Інтеграл від похідної

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

5. Інтегрування частинами

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

6. Заміна змінної

$$6.1. \int \underbrace{f(\varphi(t))}_x dt = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \\ dt = \frac{dx}{\varphi'(t)} \end{array} \right| = \int \frac{f(x)}{\varphi'(t)} dx = \int f(x) \psi(x) dx, \text{ де } \psi(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$6.2. \int f(x) dx = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t) dt \end{array} \right| = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

ОСНОВНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФОРМУЛИ

Основна тригонометрична тотожність і наслідки.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha \equiv \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \equiv \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

Подвійні кути	Синус/косинус суми/різниці
$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ або	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ або	$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$
Сума/різниця синусів/косинусів	Перетворення добутку у суму
$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$	$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$	$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$	
Формули зниження степеня	Універсальна тригонометрична підстановка
$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$

Значення тригонометричних функцій при деяких кутах

градуси	0	30 ⁰	45 ⁰	60 ⁰	90 ⁰	120 ⁰	135 ⁰	150 ⁰	180 ⁰
радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

градуси	210 ⁰	225 ⁰	240 ⁰	270 ⁰	300 ⁰	315 ⁰	330 ⁰	360 ⁰
радіани	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–

Електронне навчальне видання комбінованого використання
Можна використовувати в локальному та мережному режимі

Каліберда Мстислав Євгенович
Погарський Сергій Олександрович

**ПРИКЛАДНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ
ТА ЕЛЕМЕНТИ КОМП'ЮТЕРНОЇ МАТЕМАТИКИ**

Методичні вказівки до практичних занять
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

У 2 частинах

Частина 2

В авторській редакції

Підписано до розміщення 27.03.2026. Гарнітура Times New Roman.
Ум. друк. арк. 3,58. Обсяг 1,067 Зам. № 126/26.

Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна,
61022, м. Харків, майдан Свободи, 4.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3367 від 13.01.2009
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна