

А. Я. ПОВЗНЕР (Харьков)

О МЕТОДЕ НАПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИОНАЛОВ М. Г. КРЕЙНА

Предметом настоящей статьи является изучение некоторых вопросов, связанных с методом направляющих функционалов М. Г. Крейна.

Мы получаем формулу (11), обобщающую теорему 1¹. Далее устанавливаются формулы обращения (24), (25), дающие в применении к теории самосопряженных дифференциальных операторов $L = p_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + \dots + p_n(x)$ формулы обращения, аналогичные формулам Планшереля, связанным с оператором $\frac{1}{i} \frac{d}{dx}$. В заключение доказывается теорема 5 о том, что самосопряженное расширение оператора A , обладающего системой p направляющих функционалов, не может иметь спектр (как непрерывный, так и дискретный) кратности больше p (частный случай этой теоремы — дискретный спектр дифференциального оператора второго порядка — см. 2).

На протяжении этой статьи мы будем придерживаться терминологии работы 3.

Пусть в гильбертовом пространстве H задан некоторый линейный оператор A с плотной в H областью определения.

Определение*). Пусть $\Phi_j(f, \lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) — аддитивные функционалы, определенные на линейном, плотном в H подпространстве L , зависящие от вещественного параметра λ ($-\infty < \lambda < \infty$). Система функционалов $\Phi_j(f, \lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, p$) называется направляющей системой для оператора A , если:

1) при любом фиксированном $f \in L$ $|\Phi_j(f, \lambda) - \Phi_j(f, \mu)| \leq M_\lambda |\lambda - \mu|$ ($j = 1, 2, \dots, p$), где M_λ — некоторая константа, зависящая от λ и f ;

2) для того, чтобы уравнение $Af - \lambda_0 f = f_0$ (λ_0 — любое действительное число, $f_0 \in L$) имело решение, достаточно, чтобы $\Phi_j(f_0, \lambda_0) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$);

3) для любого интервала $-a \leq \lambda \leq a$ можно найти p таких элементов из L : $l_1, l_2, \dots, l_p$, что $\det(a_{i,k})_1^p \neq 0$ для всех $-a \leq \lambda \leq a$, где $a_{i,k}(\lambda) = \Phi_j(l_k, \lambda)$ **).

В дальнейшем мы будем считать оператор A самосопряженным.

Нам понадобятся для дальнейшего некоторые понятия и теоремы из теории спектральных типов Hellinger'a, которые мы приводим ниже, следуя статье 3.

Теорема 1. (См. 3, стр. 163, теорему 2.) *Всякий самосопряженный оператор A с максимальным типом p кратности m можно разложить в ортогональную сумму операторов A_k с попарно независимыми, однородными, максимальными типами p_k , кратности m_k которых удовлетворяют условию $m_1 < m_2 < \dots$*

*) Наше определение несколько отличается от определения М. Г. Крейна.

**) Если $\Phi_j(f, \lambda)$ аналитически зависит от λ , то, как показал М. Г. Крейн в неопубликованной работе, 3) следует из требования линейной независимости $\Phi_j(f, \lambda)$ хотя бы при одном значении λ .

Теорема 2. (См. ³, стр. 161, теорему 1.) *Всякий самосопряжённый оператор с однородным максимальным типом ρ кратности m может быть разложен в ортогональную сумму m циклических операторов спектрального типа ρ [спектральный тип называется однородным относительно A (см. ², стр. 157), если все подчинённые ему ненулевые типы имеют ту же кратность].*

Обозначим через H_ρ гильбертово пространство функций $f(\lambda)$ с нормой $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 d\rho(\lambda)$, где $\rho(\lambda)$ — некоторая неубывающая функция ограниченной вариации на всей оси. Как известно, всякий циклический оператор типа ρ изоморфен оператору умножения K_ρ в H_ρ :

$$K_\rho f(\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

Обозначим через $H_{m,\rho}$ прямую сумму m пространств H_ρ . Тогда каждый элемент из $H_{m,\rho}$ можно трактовать как вектор-функцию $(f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_s(\lambda), \dots)$, причём вектор имеет бесчисленное множество компонент, если $m = \infty$, или только конечное число m , если m конечно.

Введя множество $\mathfrak{M}_{m,\rho}$ как совокупность всех пар $M = (k, \lambda)$, $k = 1, 2, \dots, m$, $\lambda \in S_\rho$, где S_ρ — множество точек, дополнительное к интервалам постоянства функции ρ , мы можем рассматривать совокупность вектор-функций как множество функций $f(M)$, $M \in \mathfrak{M}_{m,\rho}$, полагая $f(M) = f_k(\lambda)$, если $M = (k, \lambda)$, и считать за $H_{m,\rho}$ пространство функций $f(M)$ с нормой $\int_{\mathfrak{M}_{m,\rho}} |f(M)|^2 d\omega_{m,\rho}(M) = \|f(M)\|^2$, где мера $\omega_{m,\rho}$

понятным образом строится по мере ρ .

Тогда теоремы 1 и 2 дают:

Теорема 3. *Пусть задан некоторый самосопряжённый оператор A в гильбертовом пространстве H . Тогда H изоморфно пространству $\tilde{H}$ функций $f(M)$ на некотором топологическом пространстве $\mathfrak{M}$ с вполне аддитивной на борелевских множествах мерой $\omega(M)$ с нормой*

$$\|f(M)\|^2 = \int_{\mathfrak{M}} |f(M)|^2 d\omega(M).$$

$\mathfrak{M}$ распадается в счётную, или конечную, сумму множеств типа $\mathfrak{M}_{m,\rho}$ и соответственно $\tilde{H} = H_{m_1,\rho_1} \oplus H_{m_2,\rho_2} \oplus \dots$. Спектральные типы ρ_i, ρ_k ($i \neq k$), независимы, что означает, что множества S_{ρ_i}, S_{ρ_k} ($i \neq k$) пересекаются по множеству меры нуль относительно обеих функций ρ_i, ρ_k , и можно считать, что мера всего пространства $\mathfrak{M}$ конечна. Оператор A изоморфен оператору $\tilde{A}$ в $\tilde{H}$, равному прямой сумме операторов K_{m_i,ρ_i} , определённых в H_{m_i,ρ_i} следующим образом: $K_{m_i,\rho_i} f(M) = \lambda f(M)$, если $M = (k, \lambda)$, откуда следует, что $\tilde{A}f(M) = \varphi(M) f(M)$ ($f \in \tilde{H}$), где $\varphi(M)$ непрерывна на множестве $\mathfrak{M}^*$.

Пусть теперь A — самосопряжённый оператор в H , допускающий систему направляющих функционалов $\Phi_j(f, \lambda)$ ($j = 1, 2, \dots, p$). Пусть $\tilde{H}$ — пространство, построенное в теореме 3. Если $f \in H$, то через $f(M)$ будет обозначаться функция из $\tilde{H}$, в которую переходит f при изоморфном отображении H на $\tilde{H}$.

*) Множество $\mathfrak{M}$, очевидно, помещается в евклидовой плоскости. Топология в $\mathfrak{M}$ индуцируется естественной топологией плоскости.

Обозначим через $\mathfrak{M}_a$ множество M из $\mathfrak{M}$, для которых $-a \leq \varphi(M) \leq a$. Пусть $M \subset \mathfrak{M}_a$, $g \in L$ и $e_1, \dots, e_p$ — элементы, удовлетворяющие условию 3). Для того чтобы уравнение $Af - \varphi(M)f = g_1$, где $g_1 = g - \sum_{k=1}^p t_k e_k$, имело решение, достаточно, чтобы

$$\Phi_j(g_1, \varphi(M)) = \Phi_j(g, \varphi(M)) - \sum_{k=1}^p t_k \Phi_j(e_k, \varphi(M)) = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p).$$

Обозначим через $\Psi_{j,k}^{(e)}(M)$ ($M \subset \mathfrak{M}_a$) функции, удовлетворяющие соотношениям $\sum_{j=1}^p \Phi_j(e_k, \varphi(M)) \Psi_{j,s}(M) = \delta_{k,s}$, где $\delta_{k,s}$ есть символ Кронекера. Тогда для t_k получим

$$t_k(M) = \sum_{j=1}^p \Psi_{j,k}^{(e)}(M) \Phi_j(g, \varphi(M)). \quad (1)$$

Поэтому, если t_k определить формулами (1), то найдётся такой элемент f_M , что

$$Af_M - \varphi(M)f_M = g_1 \quad \left(g_1 = g - \sum_{k=1}^p t_k(M)e_k\right). \quad (2)$$

Переходя в (2) к изоморфному отображению на пространство $\tilde{H}$, получим (N — переменный элемент пространства $\mathfrak{M}$)

$$\varphi(N)f_M(N) - \varphi(M)f_M(N) = g_1(N) = g(N) - \sum_{k=1}^p t_k(M)e_k(N). \quad (3)$$

Покажем, что почти всюду по мере $\omega(M)$

$$g(N) = \sum_{k=1}^p t_k(M)e_k(M), \quad M \subset \mathfrak{M}_a. \quad (4)$$

Рассмотрим фиксированное множество $\mathfrak{M}_{m_i, \rho_i}$ и покажем, что (4) верно, когда N содержится в пересечении $\mathfrak{M}_{m_i, \rho_i}^a$ множеств $\mathfrak{M}_{m_i, \rho_i}$ и $\mathfrak{M}_a$. Если $N, M \subset \mathfrak{M}_{m_i, \rho_i}^a$ и $N = (k, \mu)$, $M = (k, \lambda)$, то соотношение (3) перейдёт в

$$\mu \tilde{f}_M^k(\mu) - \lambda \tilde{f}_M^k(\mu) = \tilde{g}^k(\mu) - \sum_{l=1}^p \tilde{t}_l(\lambda) \tilde{e}_l^k(\mu), \quad (3a)$$

где положено $\tilde{f}^k(s) = f(V)$, если $V \subset \mathfrak{M}_{m_i, \rho_i}^a$ и $V = (k, s)$.

Из (3a) получим

$$\begin{aligned} r^k(\mu) &= \tilde{g}^k(\mu) - \sum_{l=1}^p \tilde{t}_l^k(\mu) \tilde{e}_l^k(\mu) = \\ &= (\mu - \lambda) \tilde{f}_M^k(\mu) + \sum_{l=1}^p (\tilde{t}_l^k(\lambda) - \tilde{t}_l^k(\mu)) \tilde{e}_l^k(\mu). \end{aligned} \quad (5)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\lambda+h} |r^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu) &\leq \int_{\lambda}^{\lambda+h} (\mu - \lambda)^2 |\tilde{f}_M^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu) + \\ &+ \sum_{l=1}^p \int_{\lambda}^{\lambda+h} |\mu - \lambda| |\tilde{f}_M^k(\mu)| |\tilde{t}_l(\lambda) - \tilde{t}_l(\mu)| |\tilde{e}_i^k(\mu)| d\rho_i(\mu) + \\ &+ \sum_{\alpha, \beta=1}^p \int_{\lambda}^{\lambda+h} |\tilde{t}_\alpha^k(\lambda) - \tilde{t}_\alpha^k(\mu)| |\tilde{t}_\beta^k(\lambda) - \tilde{t}_\beta^k(\mu)| |\tilde{e}_\alpha^k(\mu)| |\tilde{e}_\beta^k(\mu)| d\rho_i(\mu). \end{aligned} \quad (6)$$

Но

$$\int_{\lambda}^{\lambda+h} (\mu - \lambda)^2 |\tilde{f}_M^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu) \leq h^3 C'_\lambda \quad \left(C'_\lambda = \int_{-a}^a |f_M^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu) \right).$$

Далее, в силу 3)

$$|\tilde{t}_l(\lambda) - \tilde{t}_l(\mu)| \leq C_\lambda^2 |\lambda - \mu|,$$

где C_λ^2 — некоторая константа, откуда

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\lambda+h} (\mu - \lambda)^2 |\tilde{f}_M^k(\mu)| |\tilde{t}_l(\lambda) - \tilde{t}_l(\mu)| |\tilde{e}_i^k(\mu)| d\rho_i(\mu) &\leq \\ &\leq h^3 C_\lambda^2 \int_{\lambda}^{\lambda+h} |\tilde{f}_M^k(\mu)| |\tilde{e}_i^k(\mu)| d\rho_i(\mu) \leq \\ &\leq h^3 C_\lambda^2 \sqrt{\int_{-a}^a |\tilde{f}_M^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu)} \sqrt{\int_{-a}^a |\tilde{e}_i^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu)}. \end{aligned}$$

Точно так же оценивается отдельное слагаемое третьей суммы в (6). Окончательно получаем

$$\int_{\lambda}^{\lambda+h} |r^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu) \leq hC(\lambda, h), \quad (7)$$

где $C(\lambda, h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$.

Из (7) немедленно следует, что

$$\Psi(\lambda) = \int_{-a}^a |r^k(\mu)|^2 d\rho_i(\mu) = 0,$$

так как $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Psi(\lambda+h) - \Psi(\lambda)}{h} = 0$ и $\Psi(-a) = 0$. А это доказывает в силу произвольности i и k и полной аддитивности меры справедливость (4). Заменим в (4) $t_k(M)$ их выражениями из (1).

Тогда

$$\begin{aligned} g(M) &= \sum_{j,k=1}^p \Psi_{j,k}^{(e)}(M) \Phi_j(g, \varphi(M)) e_k(M) = \\ &= \sum_{j=1}^p \tau_j^{(e)}(M) \Phi_j(g, \varphi(M)) \quad (M \subset \mathfrak{M}_a), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\tau_j^{(e)} = \sum_{k=1}^p \tau_j^{(e)} e_k(M).$$

Заметим, что

$$\int_{\mathfrak{M}_a} |\tau_j^{(e)}(M)|^2 d\omega(M) < \infty.$$

Покажем, что $\tau_j^{(e)}(M)$ не зависит от выбора элементов e_i . Действительно, пусть, $v_1, v_2, \dots, v_p$ — другая последовательность элементов, удовлетворяющих условию 3). Тогда (8) для элементов v , даёт

$$v_s(M) = \sum_{j=1}^p \tau_j^{(e)}(M) \Phi_j(v_s, \varphi(M)). \quad (9)$$

Умножая обе части (9) на $\Psi_{k,s}^{(v)}(M)$ и суммируя по s , получим

$$\sum_{s=1}^p v_s(M) \Psi_{k,s}^{(v)}(M) = \tau_k^{(e)}(M). \quad (10)$$

Но левая часть (10) есть $\tau_k^{(v)}(M)$, что доказывает наше утверждение.

Таким образом в силу произвольности a и независимости $\tau_k^{(e)}(M)$ от выбора e получаем из (8):

Теорема 4. Существуют такие функции $\tau_1(M), \dots, \tau_p(M)$ ($\int_{\mathfrak{M}_a} |\tau_j(M)|^2 d\omega(M) < \infty$ при любом $a < \infty$), что при $g \in L$

$$g(M) = \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \Phi_j(g, \varphi(M)). \quad (11)$$

В дальнейшем мы возьмём за H пространство $L_{(\alpha, \beta)}^2$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx$. Если интервал (α, β) бесконечной длины, то мы будем требовать, чтобы каждая $f \in L_{(\alpha, \beta)}^2$, равная нулю вне некоторого конечного интервала Δ , могла быть в $L_{(\alpha, \beta)}^2$ аппроксимирована функциями из L , равными нулю вне того же интервала Δ , и чтобы каждая функция из L обращалась в нуль вне некоторого конечного интервала.

Мы предположим далее, что каждый функционал $\Phi_j(f, \lambda)$ определяется формулой $\Phi_j(f, \lambda) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \varphi_j(x, \lambda) dx$, где $\varphi_j(x, \lambda)$ непрерывна по x и λ .

Мы будем для определённости считать, что $\alpha = -\infty, \beta = \infty$.

Лемма 1. Пусть $f \in H$ и $f(x) = 0$, если $|x| > n$. Тогда

$$f(M) = \int_{-n}^n \left[\sum_{j=1}^p \tau_j(M) \varphi_j(x, \varphi(M)) \right] f(x) dx. \quad (11a)$$

Доказательство. Пусть $f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)$, где $f_m \subset L$ и $f_m(x) = 0$ при $|x| > n$. Тогда по (11)

$$f_m(M) = \int_{-n}^n \left[\sum_{j=1}^p \tau_j(M) \varphi_j(x, \varphi(M)) \right] f_m(x) dx.$$

Но $f_m(M) \rightarrow f(M)$. Поэтому при любом a

$$\int_{\mathfrak{M}_a} |f_m(M) - f(M)|^2 d\omega(M) \rightarrow 0 \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (12)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_{\mathfrak{M}_a} \left| \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) [f(x) - f_m(x)] dx \right|^2 d\omega(M)} \leq \\ & \leq \sum_{j=1}^p \sqrt{\int_{\mathfrak{M}_a} |\tau_j(M)|^2 \left| \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) [f(x) - f_m(x)] dx \right|^2 d\omega(M)}. \quad (13) \end{aligned}$$

Но

$$\left| \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) [f(x) - f_m(x)] dx \right|^2 \leq \int_{-n}^n |\varphi_j(x, \varphi(M))|^2 dx \int_{-n}^n |f(x) - f_m(x)|^2 dx.$$

а последнее выражение равномерно для всех $M \subset \mathfrak{M}_a$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Поэтому из (13) следует (так как $\int_{\mathfrak{M}_a} |\tau_j(M)|^2 d\omega(M) < \infty$)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{M}_a} \left| \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) f(x) dx - f_m(M) \right|^2 d\omega(M) = 0.$$

Соединение последнего с (12) даёт

$$\int_{\mathfrak{M}_a} \left| \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) f(x) dx - f(M) \right|^2 d\omega(M) = 0, \quad (14)$$

откуда в силу произвольности a следует (11 а).

Лемма 2. Если f — произвольная функция из H , то

$$f(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) f(x) dx. \quad (15)$$

Доказательство получается, если аппроксимировать $f(x)$ функциями $f_n(x)$, равными $f(x)$ при $|x| \leq n$ и равными нулю при $|x| > n$, и воспользоваться для функций $f_n(x)$ леммой 1.

Положим

$$E(f)(M) = f(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) f(x) dx. \quad (15a)$$

Пусть $f_n(x)$ — любая функция из H , равная нулю вне интервала $(-n, n)$.

Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \bar{g}(x) dx = \int_{\mathfrak{M}_a} f_n(M) \bar{g}(M) d\omega(M) + \int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_a} f_n(M) \bar{g}(M) d\omega(M). \quad (16)$$

Так как

$$\left| \int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_a} f_n(M) \bar{g}(M) d\omega(M) \right| \leq \sqrt{\int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_a} |f_n(M)|^2 d\omega(M)} \sqrt{\int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_a} |g(M)|^2 d\omega(M)} \quad (17)$$

и

$$\sqrt{\int_{\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_a} |g(M)|^2 d\omega(M)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad a \rightarrow \infty,$$

то из (16) и (17) получим, что при заданном ε и фиксированном g можно найти такое $N > 0$, что когда $a > N$, то

$$\left| \int_{-n}^n f_n(x) \bar{g}(x) dx - \int_{\mathfrak{M}_a} f_n(M) \bar{g}(M) d\omega(M) \right| \leq \varepsilon \|f_n\|. \quad (18)$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}_a} f_n(M) \bar{g}(M) d\omega(M) &= \\ &= \int_{\mathfrak{M}_a} \overline{E(g)}(M) \left[\int_{-n}^n f_n(x) \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \varphi_j(x, \varphi(M)) dx \right] d\omega(M). \end{aligned} \quad (19)$$

Так как $\tau_j(M)$ абсолютно интегрируемы в $\mathfrak{M}_a$, то по теореме Фубини в правой части (19) можно переставить пределы интегрирования, и (19) даст

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{M}_a} f_n(M) \bar{g}(M) d\omega(M) &= \\ &= \int_{-n}^n \left[\int_{\mathfrak{M}_a} \overline{E(g)}(M) \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \varphi_j(x, \varphi(M)) d\omega(M) \right] f_n(x) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Полагая

$$\Psi_a(x) = \int_{\mathfrak{M}_a} \overline{E(g)}(M) \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \varphi_j(x, \varphi(M)) d\omega(M),$$

получим из (18), (19) и (20)

$$\left| \int_{-n}^n f_n(x) [\bar{g}(x) - \Psi_a(x)] dx \right| \leq \varepsilon \|f_n\|. \quad (21)$$

Так как $\Psi_a(x)$, очевидно, имеет интегрируемый квадрат в каждом конечном интервале, то, полагая $f_n(x) = g(x) - \Psi_a(x)$ при $|x| \leq n$,

получим из (21)

$$\sqrt{\int_{-n}^n |g(x) - \Psi_a(x)|^2 dx} \leq \varepsilon \quad (22)$$

при $a > n$, или в силу произвольности n

$$\|g - \Psi_a(x)\| \leq \varepsilon. \quad (23)$$

Таким образом получаем следующую формулу обращения:

Если $g \subset H$,

$$E(g)(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) g(x) dx,$$

то

$$g(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{M}_a} E(g)(M) \sum_{j=1}^p \bar{\tau}_j(M) \bar{\varphi}_j(x, \varphi(M)) d\omega(M). \quad (24)$$

Пусть теперь $\Phi(M)$ — произвольная функция из $\tilde{H}$. Тогда в силу изоморфизма ей отвечает в H функция $f(x)$.

Так как

$$f(M) = \Phi(M) = E(f)(M),$$

то

$$\Phi(M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^p \tau_j(M) \int_{-n}^n \varphi_j(x, \varphi(M)) f(x) dx, \quad (25)$$

а (24) даёт

$$f(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\mathfrak{M}_a} \Phi(M) \sum_{j=1}^p \bar{\tau}_j(M) \bar{\varphi}_j(x, \varphi(M)) d\omega(M). \quad (26)$$

Таким образом получается двойственная формула обращения (25), где $\Phi(M)$ — произвольная функция из $\tilde{H}$, а $f(x)$ задаётся (26).

Теорема 5. Если самосопряжённый оператор A обладает системой p направляющих функционалов, то кратность его спектра (как непрерывной части, так и дискретной) не больше p .

Доказательство. Если спектр оператора имеет кратность, большую p , то среди пространств H_{m_i, ρ_i} теоремы 3 найдётся одно, например H_{m_1, ρ_1} с $m_1 > p$. Положим для определённости $m_1 = p + 1$, что не повлияет на общность рассуждений. Всякая функция $f(M) \subset H_{m_1, \rho_1}^*$ может быть интерпретирована как вектор-функция $(f_1(\lambda), \dots, f_{m_1}(\lambda))$, где $\lambda \subset S_{\rho_1}$ и $f_k(\lambda) = f(M)$ при $M = (k, \lambda)$. Норма f тогда равна

$$\|f\|^2 = \int_{S_{\rho_1}} \sum_{i=1}^{m_1} |f_i(\lambda)|^2 d\rho_1(\lambda).$$

Выберем так $a > 0$, что часть множества S_{ρ_1} , попадающая в интервал $(-a, a)$, даёт ненулевую меру.

*) Сказать, что $f(M)$ из $\tilde{H}$ содержится в H_{m_1, ρ_1} , значит сказать, что $f(M) = 0$, если M не содержится в $\mathfrak{M}_{m_1, \rho_1}$.

Пусть $\Phi(M)$ — некоторая функция из $\tilde{H}$, $\tau_j(M)$ — функция из (11). Обозначим через $\Phi_s(\lambda)$ и $\tau_{j,s}(\lambda)$ значения $\Phi(M)$ и $\tau_j(M)$ при $M \subset \mathfrak{M}_{m_1, \rho_1} \cap \mathfrak{M}_a$, $M = (s, \lambda)$ ($s = 1, 2, \dots, m$). Тогда из (11) получим

$$g_s(\lambda) = \sum_{j=1}^p \tau_{j,s}(\lambda) \Phi_j(g, \lambda) \quad (g \subset L). \quad (27)$$

Из (27) следует немедленно в силу плотности L , что все $\tau_{j,s}(\lambda)$ не могут одновременно обращаться в нуль на множестве ненулевой меры. Но тогда найдутся такие почти всюду конечные функции $r_1(\lambda), \dots, r_{p+1}(\lambda)$, которые не все обращаются тождественно в нуль и удовлетворяют следующему равенству:

$$\sum_{s=1}^{p+1} \tau_{j,s}(\lambda) r_s(\lambda) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p). \quad (28)$$

Но тогда

$$\sum_{s=1}^{p+1} g_s(\lambda) r_s(\lambda) = 0 \quad (29)$$

для любой функции $g \subset L$.

Пусть теперь S'_{ρ_1} — такое множество точек λ , ($-a \leq \lambda \leq a$), содержащихся в S_{ρ_1} , что

$$0 < \int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} |r_s(\lambda)|^2 d\rho_1(\lambda) < \infty. \quad (30)$$

Положим $\Phi(M) = \bar{r}_s(\lambda)$ при $M \subset \mathfrak{M}_{m_1, \rho_1}$, $M = (s, \lambda)$, ($s = 1, 2, \dots, p+1$), $\lambda \subset S'_{\rho_1}$ и $\Phi(M) = 0$ для всех остальных M .

Тогда

$$\int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} \Phi_s(\lambda) r_s(\lambda) d\rho_1(\lambda) = \int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} |r_s(\lambda)|^2 d\rho_1(\lambda) > 0. \quad (31)$$

Но из плотности L следует, что при заданном ε найдётся такое $g \subset L$, что $\|\Phi - g\| < \varepsilon$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \left| \int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} \Phi_s(\lambda) r_s(\lambda) d\rho_1(\lambda) \right| &= \left| \int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} [\Phi_s(\lambda) - g_s(\lambda)] r_s(\lambda) d\rho_1(\lambda) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} |\Phi_s(\lambda) - g_s(\lambda)|^2 d\rho_1(\lambda)} \cdot \sqrt{\int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} |r_s(\lambda)|^2 d\rho_1(\lambda)} \leq \\ &\leq \varepsilon \sqrt{\int_{S'_{\rho_1}} \sum_{s=1}^{p+1} |r_s(\lambda)|^2 d\rho_1(\lambda)}, \end{aligned}$$

что противоречит (31). Таким образом теорема доказана.

Приложения предыдущих результатов в теории дифференциальных операторов получаются непосредственно (указания по этому вопросу см.¹).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, ДАН, 1946, LIII, № 1.
2. Stone Linear transf. in Hilb. Space, New. Jork, 1932.
3. А. И. Плеснер и В. А. Рохлин, Спектральная теория линейных операторов, «Успехи матем. наук», 1946, т. I, вып. I (11).