

Учитывая (49), с помощью неравенств (50) и (52) заключаем, что A^{N_k} не пусто. Выберем точку $\omega_k \in A^{N_k}$ и рассмотрим соответствующие распределения частиц $Q_i^k = Q_i^{N_k}(i, 1, \dots, N)$, вектор-функцию $\vec{\Psi}^k(x) = \vec{\Psi}^{N_k}(x; \omega) = \vec{\Phi}^{N_k}(x; \omega) - v\vec{V}^{N_k}(x; \omega)$ и решение задачи (11) $\vec{v}^k(x) = \vec{v}^{N_k}(x; \omega)$. Согласно определению события A^{N_k} выполняются все условия теоремы 2 при $k \rightarrow \infty$,

а $\vec{v}^k(x)$ не сходится к решению $\vec{u}(x)$ задачи (8), (9) или, что то же, задачи (12), где $C(x) = Q(x)$, $\vec{\Psi}(x) = \vec{\Phi}(x) - v\vec{V}(x)$.

Таким образом, получено противоречие с теоремой 2, что и доказывает теорему 1.

Список литературы: 1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970. 288 с. 2. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике. М.; Л., 1946. 119 с. 3. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. К., 1974. 278 с. 4. *Львов В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей для линеаризованной системы уравнений Навье—Стокса//Вестн. Харьк. ун-та. 1975. Вып. 40. Прикладная математика и механика. С. 3—22. 5. *Быховский Э. Б., Смирнов Н. В.* Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа//Тр. Мат. ин-та АН СССР Т. 59. М., 1960. С. 5—36.

Поступила в редколлегию 03.03.89

УДК 517.946

А. А. БОСОВ

О ПОСТРОЕНИИ ОПЕРАТОРА СГЛАЖИВАНИЯ

При анализе временных рядов [1], выделении полезного сигнала [2], распознавании образов [3] возникает задача построения такого оператора A , чтобы он по знанию $z_t = y_t + \varepsilon_t$, как можно «лучше» выделял полезный сигнал y_t . Пусть y_t является элементом множества Y , а $\varepsilon_t \in \theta$, тогда основная задача заключается в определении такого оператора A , чтобы имело место соотношение

$$A(y_t + \varepsilon_t) = y_t. \quad (1)$$

Эта задача имеет смысл если множества Y и θ не имеют общих элементов. В достаточно общем виде ответ на вопрос существования оператора A дает теорема Хана—Банаха [4] об отделимости. В силу этой теоремы оператор A будем считать линейным. Тогда приходим к определению такого линейного оператора A , чтобы $Ay_t = y_t$, $A\varepsilon_t = 0$.

Рассмотрим более узкую задачу о построении линейного оператора, у которого каждый элемент $y_t \in Y$ был бы неподвижной

точкой. Относительно множества функций Y будем предполагать, что его элементы непрерывны функции на R_1 , а для любых двух функций $y_1(t), y_2(t) \in Y$ и конечного интервала $[-\tau, \tau]$

$$(i) \langle y_1, y_2 \rangle = \int_{-\tau}^{\tau} y_1(t) y_2(t) dt < \infty.$$

Множество функций Y содержит конечный базис, т. е. набор функций $\varphi_k(t)$, $k=1, n$ таких, что (ii) $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Функции $\varphi_k(t)$ таковы, что для любых t_1, t_2

$$(iii) \varphi_v(t_1 + t_2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i(t_1) c_{ij}^v \varphi_j(t_2),$$

где C_{ij}^v — постоянные величины.

Теорема. Если множество Y таково, что имеет место (i) — (iii), то для оператора

$$Ay_t = \sum_{i=1}^n \varphi_i(0) \int_{-\tau}^{\tau} y_{t+x} \varphi_i(x) dx \quad (2)$$

каждый элемент множества Y является неподвижной точкой.

Доказательство. Так как A линейный оператор, а набор $\varphi_k(t)$, $k=1, n$ — ортонормированный базис, достаточно показать, что $A\varphi_v(t) = \varphi_v(t)$.

В силу определения (2) имеем

$$A\varphi_v(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(0) \int_{-\tau}^{\tau} \varphi_v(t+x) \varphi_i(x) dx,$$

а с учетом (iii) получаем

$$A\varphi_v(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(0) \int_{-\tau}^{\tau} \left(\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_k(t) C_{kj}^v \varphi_j(x) \right) \varphi_i(x) dx.$$

После перемены мест интегрирования и суммирования с учетом (ii) имеем

$$A\varphi_v(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(0) \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) c_{ki}^v = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \varphi_k(t) c_{ki}^v \varphi_i(0) = \varphi_v(t),$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Пусть множество Y представляет собой множество полиномов степени не выше второй.

Взяв в качестве

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}}; \quad \varphi_2(t) = t \sqrt{\frac{3}{2\tau^3}};$$

$$\varphi_3(t) = -\sqrt{\frac{5}{8\tau}} + t^2 \sqrt{\frac{45}{8\tau^5}},$$

легко убедиться, что условия (ii) и (iii) выполняются.

Тогда оператор A будет иметь вид

$$Ay_t = \int_{-\tau}^{\tau} \left[\frac{9}{8\tau} - \frac{15}{8\tau^3} x^2 \right] y_{t+x} dx. \quad (3)$$

Заметим, что у этого оператора неподвижными точками являются полиномы до третьей степени включительно.

Пример 2. Пусть в качестве базиса взяты функции

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}}; \quad \varphi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cos \frac{k\pi t}{\tau};$$

$$\psi_k(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sin \frac{k\pi t}{\tau}; \quad k = \overline{1, n},$$

тогда функции вида

$$y_t = a_0 + \sum_{k=1}^n k_n(x) y_{t+x} dx, \quad (4)$$

$$y_t = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos \frac{k\pi t}{\tau} + b_k \sin \frac{k\pi t}{\tau}$$

являются неподвижными элементами для оператора

$$Ay_t = \int_{-\tau}^{\tau} k_n(x) y_{t+x} dx, \quad (4)$$

где

$$k_n(x) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(0) \varphi_k(x) + \sum_{k=1}^n \psi_k(0) \psi_k(x),$$

но так как

$$\psi_k(0) = 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad \text{то} \quad k_n(x) = \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi x}{\tau}.$$

С учетом того, что

$$\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^n \cos it = \frac{\sin t \left(n + \frac{1}{2} \right)}{2 \sin \frac{t}{2}},$$

имеем

$$k_n(x) = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{\tau}}{2 \sin \frac{\pi x}{2\tau}}.$$

Оператор (4) представляет собой обычный интеграл Дирихле [5].

Пример 3. Пусть $z_t = y_t + \varepsilon_t$, причем y_t неизвестный полином не выше третьей степени, а $\varepsilon_t = a \sin \omega t$ представляет собой помеху или ошибку измерения. Относительно помехи известно, что $\omega \gg \omega$. Положим $z_t = Az_t$, а оператор A определим по формуле (3). Функцию z_t будем, следуя [1], называть сглаженной и принимать ее в качестве оценки для неизвестного сигнала y_t . Так как $z_t = y_t + A\varepsilon_t$, требуя, чтобы

$$\frac{|A\varepsilon_t|}{|\varepsilon_t|} \leq \varepsilon < 1,$$

приходим к соотношению

$$\frac{6}{\tau\omega} + \frac{15}{2} \frac{1}{(\tau\omega)^2} = \varepsilon.$$

Из этого уравнения получим условие для выбора интервала сглаживания

$$\tau \geq \frac{1}{\omega} \cdot \frac{5}{-1 + \sqrt{1 + \frac{10\varepsilon}{3}}}.$$

Применяя оператор A несколько раз, можем помеху сделать как угодно малой.

Замечание 1. Если $\theta_i(t)$, $i = \overline{1, m}$ базис множества θ обладает свойствами (ii), (iii), то оператор (2) решает задачу чистого выделения полезного сигнала за одно сглаживание.

Замечание 2. Если априори о множестве θ ничего не известно, кроме условия $Y \cap \theta = \emptyset$, то оператор сглаживания, построенный по формуле (2), минимизирует сумму квадратов отклонений

$$S^2 = \int_{-\tau}^{\tau} [z_t - Az_t]^2 dt.$$

Замечание 3. Если z_t — замеры в равноотстоящих точках, то полагая

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \sum_{t=-\tau}^{\tau} y_1(t) y_2(t),$$

оператор сглаживания принимает вид

$$Az_t = \sum_{i=1}^n \sum_{x=-\tau}^{\tau} \varphi_i(0) \varphi_i(x) z_{t+x}.$$

Замечание 4. Если полезный сигнал есть функция не только времени t , но и пространственной переменной x , то определив скалярное произведение следующим образом:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_{-\tau}^{\tau} \int_{S(0,R)} y_1(t, x) y_2(t, x) dt dx,$$

где $S(0, R)$ — шар радиуса R с центром в начале координат, получаем для оператора сглаживания формулу

$$Az(t, x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(0, 0) \int_{-\tau}^{\tau} \int_{S(x, R)} z(t + \xi, x + \eta) \varphi_i(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Запись свойства функций $\varphi_i(t, x)$, аналогично условию (iii), очевидна.

Аналогичная задача с использованием операторов типа свертки рассмотрена ранее [6]. В качестве полезного сигнала, который необходимо выделить, принимаются квазиполиномы $e(t) = t^s e^{zt}$. Очевидно, что квазиполиномы являются элементами пространства с биномиальным базисом [7], т. е. выполняется условие (iii), тогда метод не «слабее» метода осреднения операторами типа свертки.

Таким образом, если априори известен базис множества полезного сигнала, который обладает свойствами (i) — (iii), то при аддитивной помехе оператор сглаживания (2) наиболее полно учитывает априорную информацию о полезном сигнале и минимизирует среднеквадратическую ошибку.

Список литературы: 1. Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М., 1976. С. 736. 2. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М., 1960. С. 655. 3. Вапник В. Н., Червоненкис А. Я. Теория распознавания образов. М., 1974. С. 415. 4. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М., 1974. С. 479. 5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М., 1960. Т. 3. С. 656. 6. Василенко В. А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. Новосибирск, 1983. С. 214. 7. Босов А. А. Биномиальные базисы // Тез. докл. на Всесоюз. науч. конф. «Метод функций А. М. Ляпунова в современной математике». Х., 1986. С. 173.

Поступила в редколлегию 23.03.89

УДК 517.518.83:519.654

В. Н. ЗЕФИРОВ, Н. Т. КУЦЕНКО, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ

АППРОКСИМАЦИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ФУНКЦИИ КВАЗИПОЛИНОМом СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

Пусть функция $x(t)$ измерена в $N+1$ точке $T - jh$ ($j=0, 1, \dots, N$) и хорошо аппроксимируется суммой полинома p -й степени и M экспонент (вообще говоря, комплексных):

$$x(t) \approx \sum_{j=0}^p C_j \frac{(t-T)(t-T+h) \dots (t-T+(j-1)h)}{j!h^j} + \sum_{j=1}^M C_{p+j} e^{\lambda_j(t-T)}. \quad (1)$$

Требуется по вектору измерений

$$X = \{\tilde{x}(T - jh)\}_{j=0}^N$$

найти неизвестные константы $C = \{C_j\}_{j=0}^{p+M}$ и $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^M$ выражения (1). Здесь $\tilde{x}(T - jh) = x(T - jh) + \varepsilon_j$, где ε_j — случайная ошибка измерения.

Для решения этой задачи естественно применить метод наименьших квадратов.

Введем обозначения:

$$z_j = e^{-\lambda_j h} \quad (j = 1, 2, \dots, M);$$

$$a^j = \begin{cases} \{C_{k1}^{0N}\}_{k=0} & j=0; \\ \{-C_k^1\}_{k=0}^N & j=1; \\ \{(-1)^p C_{k1}^{pN}\}_{k=0}^N & j=p; \\ \{z_1^k\}_{k=0}^N & j=p+1; \\ \{z_2^k\}_{k=0}^N & j=p+2; \\ \vdots & \vdots \\ \{z_M^k\}_{k=0}^N & j=p+M. \end{cases}$$

При этом для биномиальных коэффициентов C_k^l принято $C_k^l = 0$ при $j > k$.

Метод наименьших квадратов заключается в отыскании наилучшего приближения вектора X векторами вида

$$\sum_{j=0}^{p+M} C_j a^j = A(\lambda) C,$$

(матрица $A(\lambda)$ составлена из столбцов a^j , вектор C — из постоянных $C_j (j=0, 1, \dots, p+M)$), т. е. нахождении [1]:

$$\min_{\lambda} \min_C \|A(\lambda) C - X\|^2 = \min_{\lambda} \|A(\lambda) (A^*(\lambda) A(\lambda))^{-1} A^*(\lambda) X - X\|^2.$$

При малых λh векторы a^0, a^{p+1}, a^{p+M} почти коллинеарны, что означает плохую обусловленность матрицы A^*A . Один из возможных путей преодоления этой трудности описан в работе [2]. Приведенный в этой работе метод требует точных операций над полиномами с целыми коэффициентами, что приводит к большим затратам машинного времени.

Рассмотрим другой подход, который требует существенно меньшего числа операций и, обеспечивая достаточную точность, может быть реализован в реальном времени.

Проведем замену базиса $\{a^j\}$ на базис $\{b^j\}$ такой, что аналогичная матрица $B^*(\lambda)B(\lambda)$ хорошо обусловлена:

$$b^0 = a^0, \quad b^1 = -a^1, \dots, \quad b^p = (-1)^p a^p,$$

$$\begin{aligned}
b^{p+j} = & (-1)^p \left\{ \sum_{\substack{1 \leq k_i \leq p+1 \\ \sum_{i=1}^j k_i = p+j}} \frac{1}{(1-z_1)^{k_1} (1-z_2)^{k_2} \dots (1-z_j)^{k_j}} a^0 + \right. \\
& + \sum_{\substack{1 \leq k_i \leq p \\ \sum_{i=1}^j k_i = p+j-1}} \frac{1}{(1-z_1)^{k_1} (1-z_2)^{k_2} \dots (1-z_j)^{k_j}} a^1 + \\
& + \dots + \frac{1}{(1-z_1)(1-z_2) \dots (1-z_j)} a^p \Big\} + \\
& + \frac{1}{(z_1-1)^{p+1} (z_1-z_2) \dots (z_1-z_j)} a^{p+1} + \\
& + \frac{1}{(z_2-1)^{p+1} (z_2-z_1) \dots (z_2-z_j)} a^{p+2} + \\
& + \dots + \frac{1}{(z_j-1)^{p+1} (z_j-z_1) \dots (z_j-z_{j-1})} a^{p+j}, \quad (j=1, 2, \dots, M).
\end{aligned} \quad (2)$$

Фактически элементы векторов b^j вычисляются по рекуррентным формулам:

$$b_{j+1}^{m+1} = \xi_{m+1} b_j^{m+1} + b_f^m (b_0^{m+1} = 0);$$

$$m = 0, 1, \dots, p + M - 1,$$

где

$$\xi_m = \begin{cases} 1 & m = 0, 1, \dots, p-1; \\ z_{m-p+1} & m = p, p+1, \dots, p+M-1. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что при $\lambda h \rightarrow 0$, т. е. $z_l \rightarrow 1$ ($l=1, 2, \dots, M$), эти формулы переходят в рекуррентные формулы для биномиальных коэффициентов. Поэтому

$$b_{j+1}^m \xrightarrow{h \rightarrow 0} C_j^m,$$

что и обеспечивает хорошую обусловленность матрицы B^*B при малых λh .

Количество операций при вычислении матрицы $B(\lambda)$ практически не превосходит количества операций для вычисления матрицы $A(\lambda)$, что важно для расчетов в реальном времени.

Для определения λ необходимо минимизировать функционал

$$\begin{aligned}
& \|B(\lambda)(B^*(\lambda)B(\lambda))^{-1}B^*(\lambda)X - X\|^2 = \\
& = (X, X) - ((B^*(\lambda)B(\lambda))^{-1}B^*(\lambda)X, B^*(\lambda)X),
\end{aligned}$$

Точность определения λ зависит только от дисперсии случайной ошибки, так как ввиду хорошей обусловленности матрицы B^*B и устойчивости вычислений компонент матрицы B точность не теряется.

После определения λ остается найти постоянные C_j . При этом произойдет неизбежная потеря точности, так как используются формулы перехода к новому базису (2), содержащие малые знаменатели.

Вначале находится вектор постоянных $D = \{D_j\}_{j=0}^{p+M}$:

$$D = (B^*B)^{-1} B^*X,$$

затем, используя соотношение

$$\sum_{j=0}^{p+M} D_j b^j = \sum_{j=0}^{p+M} C_j a^j$$

и формулы (2), находим выражения для постоянных C_j :

$$\begin{aligned} C_0 = & D_0 + (-1)^p \left\{ D_{p+1} \frac{1}{(1-z_1)^{p+1}} + \right. \\ & + D_{p+2} \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq p+1 \\ k_1 + k_2 = p+2}} \frac{1}{(1-z_1)^{k_1} (1-z_2)^{k_2}} + \dots + \\ & \left. + D_{p+M} \sum_{\substack{1 \leq k_i \leq p+1 \\ \sum_{i=1}^M k_i = p+M}} \frac{1}{(1-z_1)^{k_1} (1-z_2)^{k_2} \dots (1-z_M)^{k_M}} \right\}; \\ C_1 = & -D_1 + (-1)^p \left\{ D_{p+1} \frac{1}{(1-z_1)^p} + \right. \\ & + D_{p+2} \sum_{\substack{1 \leq k_1, k_2 \leq p \\ k_1 + k_2 = p+1}} \frac{1}{(1-z_1)^{k_1} (1-z_2)^{k_2}} + \dots + \\ & \left. + D_{p+M} \sum_{\substack{1 \leq k_i \leq p \\ \sum_{i=1}^M k_i = p+M-1}} \frac{1}{(1-z_1)^{k_1} (1-z_2)^{k_2} \dots (1-z_M)^{k_M}} \right\}; \\ & \dots \dots \dots \\ C_p = & (-1)^p D_p + (-1)^p \left\{ D_{p+1} \frac{1}{1-z_1} + \right. \end{aligned}$$

[illegible]

Метод был апробирован на ЭВМ при $p=M=2$ и показал хорошие результаты.

Список литературы: 1. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. М., 1962. С. 51—137. 2. Куценко Н. Т., Подольский Е. Н. Оценка параметров решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и квазиполиномами в правой части. К., 1987. С. 1—10. Деп. в УкрНИИТИ, № 644-Ук87.

Поступила в редколлегия 13.03.89

УДК 517.977

В. Е. ЧУПРИНА

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ НА ПОДПРОСТРАНСТВО С УДЕРЖАНИЕМ

Рассмотрим систему

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где A и B — постоянные вещественные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times r$ соответственно, $x(k) \in E_n$, $u(k) \in \Omega$, $\Omega = E_r$. Наряду с системой (1) будем рассматривать неуправляемую систему

$$x(k+1) = Ax(k); \quad (2)$$

$$x(0) = x_0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Приведем некоторые определения.

Определение 1. Система (1) называется управляемой на множество $G \subset E_n$ за свободное число шагов, если для любой точки $x_0 \in E_n$ существуют целое число $N = N(x_0) \geq 0$ и управления $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ такие, что траектория системы (1), исходящая из точки x_0 , после N шагов попадает на множество G . Если точка $x_0 \in G$, то будет считать, что мы попали на множество G из точки x_0 за ноль шагов.

Определение 2. Система (1) называется управляемой на множество $G \subset E_n$ за r шагов, если для любого $x_0 \in E_n$ существуют управления $u(0), \dots, u(r-1)$ такие, что траектория системы (1), исходящая из точки x_0 , после r шагов попадает на множество G .

Определение 3. Множество $G \subset E_n$ называется достижимым за свободное число шагов из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы (2), если существует целое число $N = N(x_0) \geq 0$ такое, что траектория системы (2), исходящая из точки x_0 , после N шагов достигнет множества G . Если точка $x_0 \in G$, то будем считать, что мы достигли множества G за ноль шагов.

Определение 4. Множество $G \subset E_n$ называется достижимым за r шагов из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы (2), если траектория системы (2), исходящая из точки x_0 , после r шагов достигнет множества G .

Определение 5. Систему (1) назовем управляемой на множество $G \subset E_n$ за свободное число шагов с последующим удержанием траектории системы (1) на множестве G , если для любого $x_0 \in E_n$ существуют $N = N(x_0) \geq 0$ и управления $u(0), \dots, u(N-1)$, ...такие, что траектория системы (1), исходящая из точки x_0 , удовлетворяет условию $x(k) \in G$ при всех $k \geq N$.

Следуя работе [3], подпространство $G \subset E_n$ будем называть (A, B) -инвариантным, если $AG \subset (G + \text{Lin}(B))$. Здесь и далее $\text{Lin}(C)$ — линейная оболочка, натянутая на столбцы матрицы C .

Пусть $\varphi(\lambda) = \lambda^n \varphi_1(\lambda)$ — характеристический полином матрицы A , $m(\lambda) = \lambda^{n_1} m_1(\lambda)$ — минимальный полином матрицы A , $\deg m(\lambda) = p$, $n_1 \geq n_0$, $\varphi_1(\lambda)$, $m_1(\lambda)$ отвечают ненулевым собственным значениям матрицы A . Обозначим через

$$K_0^- = \{x : A^{n_0}x = 0\}, \quad K_0^+ = \{x : m_1(A)x = 0\},$$

тогда

$$E_n = K_0^- + K_0^+, \quad \dim K_0^- = n_1, \quad \dim K_0^+ = n - n_1.$$

$K_0^-, K_0^+ - A$ — инвариантные подпространства. Через L обозначим линейную оболочку, натянутую на вектор-столбцы матрицы управляемости $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$.

Данная работа является распространением результатов [1] на линейные дискретные стационарные системы. В этой работе дает-

ся критерий управляемости системы (1) за свободное число шагов на подпространство G с дальнейшим удержанием траектории на этом подпространстве, критерий управляемости системы (1) на подпространство G как за свободное число шагов, так и за p шагов, а также критерий достижимости подпространства G из всех точек E_n за свободное (фиксированное) число шагов в силу системы (2).

Теорема 1. Для того чтобы система (1) была управляемой на множество $G \subset E_n$ за свободное число шагов (за p шагов), необходимо и достаточно, чтобы множество $(L+G)$ было достижимо за свободное число шагов (за p шагов) из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы (2).

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1) управляема на множество G за свободное число шагов из произвольной точки $x_0 \in E_n$, т. е. существуют $N = N(x_0) \geq 0$ и управления $u(0), u(1), \dots, u(N-1)$ такие, что

$$x(N) = (A^N x_0 + \sum_{j=0}^{N-1} A^{N-1-j} B u(j)) = g \in G.$$

Так как $L = BE_r + ABE_r + \dots + A^{p-1}BE_r = \left\{ z : z = \sum_{j=0}^k A^j B u(j), \right.$

$u(j) \in E_r, k=0, 1, \dots \left. \right\}$, то $\sum_{j=0}^{N-1} A^{N-1-j} B u(j) = -l \in L$. Следовательно, $A^N x_0 = (l + g) \in (L + G)$, т. е. множество $(L + G)$ достижимо из точки x_0 за N шагов в силу системы (2).

Достаточность. Пусть множество $(L + G)$ достижимо из любой точки $x_0 \in E_n$ за свободное число шагов в силу системы (2), т. е. существует $N = N(x_0) \geq 0$ такое, что $x(N) = A^N x_0 \in (L + G)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $N \geq p$, где здесь и дальше p — степень минимального полинома матрицы A . Действительно, пусть $k < p$ и $x(k) = A^k x_0 \in (L + G)$. Рассмотрим точку $x(k+s) = A^{k+s} x_0 = x_1$, где $k+s \geq p$. В силу достижимости множества $(L + G)$ из произвольной точки, в данном случае из точки x_1 , существует s_1 такое, что $x(s_1) = A^{s_1} x_1 = A^{+s_1} x_0 \in (L + G)$, т. е. из точки x_0 можно достичь множества $(L + G)$ за $(k+s+s_1)$ шагов в силу системы (2).

Итак, $x(N+1) = A^{N+1} x_0 = l + g$, где $N \geq p-1$. Так как $l \in L$, то $(-l) \in L$ и можно выбрать управления $u(0), \dots, u(N)$ так, что $-l = \sum_{j=0}^N A^{N-j} B u(j)$. Следовательно,

$$x(N+1) = (A^{N+1} x_0 + \sum_{j=0}^N A^{N-j} B u(j)) = g \in G,$$

т. е. система (1) из точки x_0 управляема за $(N+1)$ шаг.

Аналогично доказывается теорема 1 и при p шагах.

В следующей теореме дается критерий достижимости произвольного подпространства из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы (2).

Теорема 2. Для того чтобы подпространство $F \subset E_n$ было достижимым за свободное число шагов из любой точки $x_0 \in E_n$ в силу системы (2), необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы A , «содержалось» в подпространстве F , т. е. $K_0^+ \subset F$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть подпространство F достижимо из любой точки $x_0 \in E_n$ за свободное число шагов, но $K_0^+ \not\subset F$. Покажем, что существуют точки, из которых нельзя достичь подпространства F за конечное число шагов в силу системы (2). Так как $K_0^+ \not\subset F$, то существует корневой вектор v_j высоты $j \geq 1$, отвечающий $\lambda \neq 0$, такой, что корневые векторы $v_k = (A - \lambda I)^{j-k} v_j$ высоты $k=1, \dots, j-1$ принадлежат F , а v_j не принадлежит F .

Если корневой вектор v_k — комплексный, т. е. $v_k = v_{1k} + i v_{2k}$, $k=1, 2, \dots, j$, то он «принадлежит» F , если $v_{1k} \in F$ и $v_{2k} \in F$, и v_k «не принадлежит» F , если нарушено хотя бы одно из включений.

Из структуры цепочки корневых векторов следует, что

$$A v_k = \lambda v_k + v_{k-1}, \quad k=1, \dots, j, \quad v_0=0.$$

$$A^N v_j = \sum_{k=0}^N C_N^k \lambda^{N-k} v_{j-k} \quad \text{для } N=1, \dots, j \text{ и}$$

$$A^N v_j = \sum_{k=0}^N \alpha_k \lambda^{N-k} v_{j-k} \quad \text{для } N > j, \text{ где } \alpha_k \text{ — константы.}$$

Пусть λ — вещественное. Рассмотрим решение системы (2) с $x_0 = v_j$: $x(N) = \lambda^N v_j + a_0(\lambda, N, v_1, \dots, v_{j-1})$, где $a_0(\lambda, N, v_1, \dots, v_{j-1}) \in F$, так как $v_1, \dots, v_{j-1}$ принадлежат F . Так как $\lambda \neq 0$, то при любом конечном N вектор $\lambda^N v_j \notin F$, а следовательно, $x(N) \notin F$ при любом конечном $N \geq 0$.

Пусть теперь $\lambda = \alpha + i\beta = e^{\gamma}(\cos \delta + i \sin \delta)$, $\delta \neq 0$. Тогда

$$A^N v_j = e^{\gamma N} (\cos \delta N + i \sin \delta N) (v_{1j} + i v_{2j}) +$$

$$+ a_1(\gamma, \delta, N, v_{11}, \dots, v_{2j-1}) + i a_2(\gamma, \delta, N, v_{11}, \dots, v_{2j-1}),$$

где a_1, a_2 — линейные комбинации реальных и мнимых частей корневых векторов v_k , $k=1, \dots, j-1$. Поэтому $a_1 \in F$, $a_2 \in F$. Тогда

$$A^N v_{1j} = e^{\gamma N} (v_{1j} \cos \delta N - v_{2j} \sin \delta N) + a_1(\gamma, \delta, N, v_{11}, \dots, v_{2j-1});$$

$$A^N v_{2j} = e^{\gamma N} (v_{1j} \sin \delta N + v_{2j} \cos \delta N) + a_2(\gamma, \delta, N, v_{11}, \dots, v_{2j-1}).$$

Так как v_j «не принадлежит» F , возможны два случая:

$$1) \dim \text{Lin}(v_{1j}, v_{2j}) \cap F = 0;$$

$$2) \dim \text{Lin}(v_{1j}, v_{2j}) \cap F = 1.$$

В первом случае, положив $x_0 = v_{1j}$, получим решение системы (2):

$$x(N) = e^{iN} (v_{1j} \cos \delta N - v_{2j} \sin \delta N) + a_1(\gamma, \delta, N, v_{11}, \dots, v_{2j-1}).$$

При любом конечном $N \geq 0$ $x(N) \notin F$, так как в силу линейной независимости векторов v_{1j}, v_{2j} вектор $(v_{1j} \cos \delta N - v_{2j} \sin \delta N) \notin F$ при любом $N \geq 0$.

Во втором случае $\dim \text{Lin}(v_{1j}, v_{2j}) \cap F = 1$. Поэтому существуют числа $c_1, c_2, |c_1| + |c_2| \neq 0$ такие, что $f_2 = (c_2 v_{1j} - c_1 v_{2j}) \in F$, и существуют числа ξ_1, ξ_2 такие, что $|\xi_1| + |\xi_2| \neq 0, f_1 = (\xi_1 v_{1j} + \xi_2 v_{2j}) \in F$.

Рассмотрим решение системы (2) при $x_0 = f_1$:

$$x(N) = A^N f_1 = e^{iN} ((\xi_1 \cos \delta N + \xi_2 \sin \delta N) v_{1j} +$$

$$+ (\xi_2 \cos \delta N - \xi_1 \sin \delta N) v_{2j}) + a_3(\gamma, \delta, N, \xi_1, \xi_2, v_{11}, \dots, v_{2j-1}),$$

где $a_3 \in F$.

Предположим, что при некотором конечном $N > 0$ $x(N) \in F$. Тогда вектор

$$w = e^{iN} ((\xi_1 \cos \delta N + \xi_2 \sin \delta N) v_{1j} + (\xi_2 \cos \delta N - \xi_1 \sin \delta N) v_{2j}) \in F.$$

Так как $\dim \text{Lin}(v_{1j}, v_{2j}) \cap F = 1$, то $w \in \text{Lin}(f_2)$, т. е. векторы w и f_2 — линейно зависимы, поэтому $(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) \cos \delta N + (c_1 \xi_2 - c_2 \xi_1) \sin \delta N = 0$. Так как $(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2)^2 + (c_1 \xi_2 - c_2 \xi_1)^2 = (c_1^2 + c_2^2) \times (\xi_1^2 + \xi_2^2) > 0$, то $\delta N - \varphi = (2k \pm 1/2)\pi$, где k — целое число,

$$\varphi = \arccos((c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) / \sqrt{(c_1^2 + c_2^2)(\xi_1^2 + \xi_2^2)}).$$

Если δ соизмеримо с π , т. е. $\delta = p_0 \pi / q_0$, то выбрав ξ_1 и ξ_2 так, что $\varphi = p_1 / q_1, 0 < \varphi < \pi$, получим противоречие, если δ несоизмеримо с π , т. е. $\delta = \pi \alpha$, где α — иррациональное число, то, выбрав ξ_1, ξ_2 так, что $\varphi = p_2 \pi / q_2, 0 < \varphi < \pi$, получим, что $\alpha = (p_2 + q_2 + (2k \pm 1/2)) / N$. Противоречие. Итак, $x(N) \notin F$ при всех $N \geq 0$, следовательно, нет достижимости подпространства F из всех точек E_n за свободное число шагов в силу системы (2).

Достаточность. Пусть $K_0^+ \subset F$. Для любой точки $x_0 \in E_n$ имеем $x_0 = x_{10} + x_{20}$, где $x_{10} \in K_0^-, x_{20} \in K_0^+$. Тогда решение системы (2) $x(N) = (A^N x_{10} + A^N x_{20}) \in F$ при всех $N \geq n_0$, так как $A^{n_0} x_{10} = 0$, а $A^N x_{20} \in K_0^+$ при всех $N \geq 0$.

Теорема доказана полностью. Из доказательства теоремы 2 следует достижимость подпространства F за p шагов. Имеет место

Теорема 3. Для того чтобы подпространство F было достижимо из любой точки $x_0 \in E_n$ за r шагов в силу системы (2), необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы A , «содержалось» в подпространстве F , т. е. $K_0^+ \subset F$.

Следствие 1. Для того чтобы ноль был достижим из любой точки $x_0 \in E_n$ за свободное число шагов (за r шагов) в силу системы (2), необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее нулевым собственным значениям матрицы A , совпадало со всем пространством, т. е. $K_0^- = E_n$, что равносильно тому, что $K_0^+ = 0$ или $\sigma(A) = \{\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0\}$.

Из теорем 1, 2, 3 следует следующий критерий управляемости системы (1) на подпространстве G .

Теорема 4. Для того чтобы система (1) была управляемой на подпространство $G \subset E_n$ за свободное число шагов (за r шагов), необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы A , «содержалось» в подпространстве $(L+G)$, т. е. $K_0^+ \subset (L+G)$.

Следствие 2. Для того чтобы система (1) была управляема в ноль за свободное число шагов (за r шагов), необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы A , содержалось в L , т. е. $K_0^+ \subset L$.

Рассмотрим задачу управляемости системы (1) на подпространство $G \subset E_n$ из любой точки $x_0 \in E_n$ за свободное число шагов с дальнейшим удержанием траектории на этом подпространстве G .

Пусть $\tilde{G}$ — максимальное (A, B) -инвариантное подпространство [3], содержащееся в подпространстве G .

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма. Для того чтобы траектория системы (1), исходящая из точки $x_0 \in E_n$ в момент $k=0$, начиная с некоторого момента $N = N(x_0) \geq 0$, была удержана на подпространстве G , необходимо и достаточно, чтобы $x(N) \in \tilde{G}$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть для $x_0 \in E_n$ существуют $N = N(x_0) \geq 0$, и $u(0)$, и $u(1)$, ..., и $u(N-1)$, ... такие, что $x(k) \in G$ при всех $k \geq N$, но $x(N) \notin \tilde{G}$. Из того, что $x(N) \notin \tilde{G}$, следует, что $x(k) \notin \tilde{G}$ при всех $k \geq N+1$. Действительно, если $x(N) \notin \tilde{G}$, то $Ax(N) = \tilde{g} + b + z_1$, где $\tilde{g} \in \tilde{G}$,

$b \in \text{Lim}(B)$, $z_1 \in (\tilde{G} + \text{Lin}(B))^\perp$, $z_1 \neq 0$. По условию $x(N+1) = Ax(N) + Bu(N) = g_1 \in G$.

Если предположить, что $g_1 \in \tilde{G}$, тогда $z_1 = (g_1 - \tilde{g} - Bu(N) - b)$,

$\in (\tilde{G} + \text{Lin}(B))$. Но тогда $z_1 = 0$. *Противоречие.*

Рассуждая аналогично, получим, что $x(N+m) = g_m$, $g_m \in G$ и $g_m \in \tilde{G}$ при всех $m \geq 0$. Тогда $G_m = \text{Lin}(g_m)$, $G_m \subset G$, $G_m \subset \tilde{G}$ при всех $m \geq 0$ и $\sum_{m \geq 0} G_m \subset G$, а $\sum_{m \geq 0} G_m \subset \tilde{G}$. Так как подпространство G имеет конечную размерность, найдется $l \geq 0$, такое, что вектора $g_0, \dots, g_l$ — линейно независимы, а вектора $g_0, \dots, g_{l+1}$ — линейно зависимы. Пусть $Q = \text{Lin}(g_0, \dots, g_l)$. Тогда $Q \subset G$ и $Q \subset \tilde{G}$. Для любой точки $z_0 \in Q$ имеем: $z_0 = \sum_{j=0}^l c_j g_j$, $Az_0 = \sum_{j=0}^{l+1} c_{j-1} g_j - \sum_{j=0}^l c_j B u(N+j)$. Следовательно, $Az_0 \in (Q + \text{Lin}(B))$. Таким образом, $Q - (A, B)$ — инвариантное подпространство из G , не лежащее в $\tilde{G}$. Противоречие.

Достаточность. Пусть $x(N) \in \tilde{G}$. Тогда $x(N+1) = Ax(N) + Bu(N) = \tilde{g} + b + Bu(N)$. Выбрав $u(N)$ так, что $Bu(N) = -b$, получим, что $x(N+1) = \tilde{g} \in \tilde{G} \subset G$.

Итак, путем выбора управлений $u(N)$, $u(N+1)$, ... мы сможем удерживать попавшую на подпространство $\tilde{G}$ траекторию $x(k)$ при всех $k \geq N+1$. Лемма доказана.

Имеет место следующая

Теорема 5. Для того чтобы система (1) была управляемой на подпространстве G за свободное число шагов с последующим удержанием траектории системы (1) на этом подпространстве G , необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы A , «содержалось» в подпространстве $(L + \tilde{G})$, т. е. $K_0^+ \subset (L + \tilde{G})$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть система (1) управляема на подпространстве G с последующим удержанием траектории на G за свободное число шагов, но $K_0^+ \not\subset (L + \tilde{G})$. Тогда для любого $x_0 \in E_n$ существуют $N = N(x_0) \geq 0$ и управления $u(0), \dots, u(N-1)$, ... такие, что решение системы (1) удовлетворяет условию $x(k) \in G$ при всех $k \geq N$. Тогда, в силу леммы, $x(N) \in \tilde{G}$. Но это означает, что система (1) управляема на подпространстве $\tilde{G}$ за свободное число шагов. Тогда, в силу теоремы 4, должно выполняться условие $K_0^+ \subset (L + \tilde{G})$.

Достаточность. Пусть $K_0^+ \subset (L + \tilde{G})$. Тогда, в силу теоремы 4, система (1) управляема на подпространстве $\tilde{G}$ за свободное чис-

лю шагов, т. е. для любого $x_0 \in E_n$ существуют $N = N(x_0) \geq 0$ и управления $u(0), \dots, u(N-1)$ такие, что решение системы (1) удовлетворяет условию $x(N) \in \tilde{G}$. Так как подпространство $\tilde{G} = (A, B)$ инвариантно, можно удерживать траекторию $x(k)$ на подпространстве $\tilde{G} \subset G$ при всех $k \geq N$. Теорема доказана полностью.

Выделим следующее

Следствие 3. Для того чтобы система (1) была управляемой за свободное число шагов из любой точки $x_0 \in E_n$ в нуль с дальнейшим удержанием в нуле, необходимо и достаточно, чтобы корневое подпространство, отвечающее ненулевым собственным значениям матрицы A «содержалось» в подпространстве L , т. е. $K_0^+ \subset L$.

Изложенные результаты анонсированы в работе [4].

Список литературы: 1. Коробов В. И., Луценко А. В. Управляемость линейной стационарной системы на подпространство за нефиксированное время // Укр. мат. журн. 1977. 29, № 4. С. 531—534. 2. Коробов В. И. Критерий управляемости линейной системы на подпространство // Вестн. Харьк. ун-та. 1981. № 221: Прикл. математика и механика. Вып. 46. С. 3—11. 3. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. М., 1980, 375 с. 4. Чуприна В. Е. Управляемость линейной стационарной дискретной системы на подпространство с удержанием // Тез. докл. IV Уральск. регион. конф. «Функцион.-дифференц. уравнения и их приложения». Уфа, 7—9 февраля 1989 г. 121 с.

Поступила в редколлегию 27.02.89

УДК 517.977

В. М. ГАВРИЛЯКО

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Ранее [1] была аналитически решена задача оптимального быстрогодействия для управляемой системы вида

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad |u| \leq \text{const}$$

со спектром

$$\sigma(A) = \{\pm ik\lambda, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad \lambda > 0\}.$$

Эта колебательная система с помощью линейного невырожденного преобразования может быть приведена к виду

$$\dot{x}_0 = u, \quad \dot{x}_m = m\lambda x_{-m} + u, \quad \dot{x}_{-m} = -m\lambda x_m, \quad m = 1, p, \quad \lambda > 0 \quad (1)$$

с ограничением на управление $|u| \leq 1$.

Изучим численную реализацию предложенных в [1, 2] для системы (1) методов определения: времени быстрогодействия θ^* , моментов переключения t_j оптимального управления $u = u(t)$, рода управления в задаче быстрогодействия из точки $x^0 \in E^{2p+1}$

в начало координат. В таблице приведены результаты численных экспериментов на ЭВМ ЕС 1052.

Начальные условия во всех вариантах имеют вид

$$x_i(0) = 0.12; i = \overline{p, p}.$$

NDim	θ^*	R	S	t_i	$\ \cdot\ _\infty$	T, c	ε
3	1.216932	2	2	0.30; 0.92	$0.1 \cdot 10^{-13}$	3.18	$0.1 \cdot 10^{-13}$
5	2.802422	2	4	0.29; 1.08; 1.83; 2.50	$0.5 \cdot 10^{-14}$	4.32	$0.1 \cdot 10^{-13}$
19	5.565679	2	18	0.08; 0.45; 0.73; 1.05; 1.36; 1.68; 1.99; 2.31; 2.63; 2.94; 3.26; 3.58; 3.89; 4.21; 4.52; 4.83; 5.13; 5.40 0.01; 0.24; 0.36; 0.52; 0.65; 0.81; 0.95; 1.09; 1.24; 1.39; 1.53; 1.68; 1.82; 1.97; 2.11; 2.26; 2.40; 2.55; 2.69; 2.84; 2.98; 3.13; 3.28; 3.42; 3.57; 3.71; 3.86; 4.00; 4.15; 4.29; 4.44; 4.58; 4.73; 4.88; 5.02; 5.16; 5.31; 5.45; 5.60; 5.74; 5.89; 6.02	$0.8 \cdot 10^{-5}$	42.75	$0.1 \cdot 10^{-11}$
43	6.128271	2	42	1.24; 1.39; 1.53; 1.68; 1.82; 1.97; 2.11; 2.26; 2.40; 2.55; 2.69; 2.84; 2.98; 3.13; 3.28; 3.42; 3.57; 3.71; 3.86; 4.00; 4.15; 4.29; 4.44; 4.58; 4.73; 4.88; 5.02; 5.16; 5.31; 5.45; 5.60; 5.74; 5.89; 6.02	$0.1 \cdot 10^{-4}$	391.46	$0.1 \cdot 10^{-4}$

Параметр λ имеет значение $\lambda = 0.98$, значения моментов переключения t_i округлены в таблице до двух знаков после запятой. В таблице приняты следующие обозначения: R — род управления; S — количество переключений, T — время вычислений на ЭВМ (шаг $G0$), $NDIM$ — размерность системы, $\|\cdot\|_\infty$ — $\|x(\theta^*)\|_\infty$, ε — точность вычислений,

В работах [1, 2] введены две рекуррентно определенные системы функций (канонические переменные)

$$\alpha(x^0, \theta); \alpha_m(x^0, \theta); \beta(x^0, \theta); \beta_m(x^0, \theta), m = 0, 1, \dots, p.$$

Из элементов α_m, β_m образованы матрицы A_m и B_m , $\tilde{A}_n = A_m + A_m^*$ и $\tilde{B}_m = B_m + B_m^*$. Время быстрого действия $\theta^*(x^0)$ определяется как максимальный корень уравнения

$$\det \tilde{A}_p(x^0, \theta) \cdot \det \tilde{B}_p(x^0, \theta) = 0. \quad (2)$$

Доказано [2], в случае разрешимости задачи быстрого действия на интервале $[0, 2\pi/\lambda]$, справедливы неравенства

$$\det \tilde{A}_p(x^0, 2\pi/\lambda) > 0; \det \tilde{B}_p(x^0, 2\pi/\lambda) > 0.$$

Таким образом, алгоритм нахождения θ^* может быть сведен к нахождению ближайшей к $2\pi/\lambda$ точки c ($c \leq 2\pi/\lambda$), в которой нарушается по крайней мере одно из условий:

$$\det \tilde{A}_p(x^0, c) > 0; \det \tilde{B}_p(x^0, c) > 0. \quad (3)$$

Локализация точки θ^* облегчается тем, что из положительной определенности матрицы $\tilde{A}_p(x^0, c)$ следует положительная определенность матриц $\tilde{A}_p(x^0, c')$ при $c' \geq c$. Аналогичное высказывание справедливо и для матрицы $\tilde{B}_p(x^0, c)$ [2].

Для уточнения θ^* может быть применен метод бисекции.

Согласно пункту 3 теоремы [1] при определении точек переключения t_j оптимального управления необходимо найти решение системы уравнений

$$\tilde{A}_g(x^0, \theta^*) \varphi = 0. \quad (4)$$

Особенность решения этой системы состоит в том, что матрица $\tilde{A}_g(x^0, \theta^*)$ вырождена. Следовательно, возможны большие возмущения в решении системы (4) даже при малых возмущениях элементов самой матрицы. Для определения вектора φ нами был применен метод уточнения отдельного собственного значения и принадлежащего ему собственного вектора, предложенный в работе [3].

Список литературы: 1. Коробов В. И., Скляр Г. М. Решение задачи быстрогодействия для колебательной системы//Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-мат. науки. 1987. № 10. 12 с. 2. Коробов В. И., Скляр Г. М. Оптимальное быстроедействие и тригонометрическая проблема моментов//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1989. 45, № 4. С. 868—885. 3. Фаддеев А. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., 1968. 570 с.

Поступила в редколлегию 13.06.89

УДК 512.547.214

Э. М. ЖМУДЬ

О НУЛЯХ НЕПРИВОДИМЫХ КОМПЛЕКСНЫХ ХАРАКТЕРОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

Введем предварительно ряд обозначений: G — конечная неабелева группа; $\text{Char}(G)$ — множество всех комплексных характеров группы G ; $\text{Irr}(G) = \{\chi \in \text{Char}(G) | \chi \text{ не приводим}\}$; $\text{Irr}^+(G) = \{\chi \in \text{Irr}(G) | \chi(1) > 1\}$; если $\chi \in \text{Irr}^+(G)$, то $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$; $n_\chi = |T_\chi|$, $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$; $\text{Irr}_1(G) = \{\chi \in \text{Irr}^+(G) | N_\chi = G\}$ — множество всех неприводимых характеров 1-го рода группы G^* ; $\text{Irr}_2(G) =$

* В [2] доказано, что $\text{Irr}_1(G) \neq \emptyset$.

$= \text{Irr}(G) \setminus \text{Irr}_1(G)$ — множество всех неприводимых характеров 2-го рода группы G^* ; $\text{Ker } \chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$ — ядро характера χ ; $Z(\chi) = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$; $H_G = \bigcap_{\chi \in G} H'$ — сердцевина подгруппы $H \leq G$; χ_n — ограничение характера $\chi \in \text{Char}(G)$ на подгруппу $H \leq G$; $C(n)$ — циклическая группа n -го порядка; $F(X)$ — подгруппа Фиттинга группы X .

Если G — группа Фробениуса с ядром F , то $|G:F| \mid |F|-1$. Если $|G:F| = |F|-1$, будем говорить, что G — группа Фробениуса максимального типа. В этом случае G монолит, т. е. группа с единственным минимальным нормальным делителем (им является F); F — элементарная абелева группа порядка $q = p^a$ (p — простое число), так что $|G| = q(q-1)$. Отметим еще, что группы Фробениуса максимального типа можно рассматривать как 2-транзитивные подстановочные группы Фробениуса.

Исходным пунктом настоящей работы является следующее утверждение, доказанное в [1]: если $H \leq G$, $\chi \in \text{Irr}^*(G)$ и $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$, то $|H| \leq n_\chi$. Назовем подгруппу H χ -максимальной, если $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$ и $|H| = n_\chi$. Если подгруппа H χ -максимальна, то (см. ниже) $Z(\chi) \leq H_G$. Основным результатом работы является следующая теорема (в тексте — теорема 2.9):

Теорема. Пусть $\chi \in \text{Irr}^*(G)$ и H — χ -максимальная подгруппа неабелевой группы G . Тогда

а) $G/H_G \cong C(2)$, если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$. (В этом случае $H_G = H$ и, следовательно, $|G:H| = 2$). Подгруппа H вполне определяется характером $\chi: H = G \setminus T^{**}$.

б) G/H_G — группа Фробениуса максимального типа, если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ и $F(G/H_G) \neq \{1\}$. Подгруппа H_G отлична от $\{1\}$ и однозначно определяется характером $\chi: H_G = N_\chi \setminus T_\chi$.

в) $G/H_G \cong S_3$, если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ и $F(G/H_G) = \{1\}$. Подгруппа H_G однозначно определяется характером $\chi: H_G = Z(\chi)$.

Как следствие, из этой теоремы вытекает, что χ -максимальные подгруппы группы G сопряжены между собой (Следствие 2.11).

Все три случая а) — в) реализуются на конкретных группах: случаю а) соответствуют диэдральные группы D_m (m — нечетно), здесь χ — любой точный неприводимый характер группы D_m , подгруппа H порядка m χ -максимальна *** случаю б) соответствует группа $G \cong S_4$ ($\chi(1) = 3$, $n_\chi = 8$, подгруппы $H \in \text{Syl}_2(G)$ χ -максимальны) и группа $G \cong SL(2, 3)$ ($\chi(1) = 2$, $n_\chi = 6$, подгруппы порядка 6, содержащие $Z(G)$, χ -максимальны), $Z(\chi) < H_G$ для $G \cong S_4$ и $Z(\chi) = H_G$ для $G \cong SF(2, 3)$; группа S_5 соответствует случаю в) ($\chi(1) = 5$, $n_\chi = 24$, подгруппы порядка 24 χ -максимальны).

* $\text{Irr}_2(G)$, очевидно, содержит все линейные характеры группы G .

** Утверждение а) впервые было доказано автором в [4, 6].

*** Можно показать [5, 6], что группами $D_m(2tm)$ исчерпываются разрешимые группы без центра, содержащие χ -максимальную подгруппу, где χ -точный неприводимый характер 1-го рода.

Доказательству основной теоремы посвящен §2 работы. В §1 изложены необходимые сведения о нулях групповых характеров, о группах подстановок и линейных группах.

Дополним приведенный выше список обозначений.

$\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbf{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел; $\mathbf{Q}$ — поле рациональных чисел; $\mathbf{G}$ — поле комплексных чисел; $o(g)$ — порядок элемента g группы G ; $g^t = t^{-1}gt$ ($t, g \in G$); $M^t = t^{-1}Mt$ ($\emptyset \neq M \subseteq G, t \in G$); $M^G = \bigcup_{t \in G} M^t$; под-

множество $M \subseteq G$ нормально в G , если $M^G = M$; $\hat{M} = M \cup \{1\}$, $M^\# = M \setminus \{1\}$, $\overline{Cl}(M) = \{M^t | t \in G\}$ — класс подмножеств G -сопряженных с $M \subseteq G$; $g^H = \{g^h | h \in H\}$ — H -класс элемента $g \in G/H \leq G$; если $N \triangleleft G$, $\psi \in \text{Char}(N)$, $t \in G$, то ψ^t — характер подгруппы NG -сопряженный с ψ : $\psi^t(x) = \psi(txt^{-1})$ ($x \in N$); $I_G(\psi) = \{t \in G | \psi^t = \psi\}$ — группа инерции характера $\psi \in \text{Irr}(N)/N \triangleleft G$; ψ^G — характер группы G , индуцированный характером ψ подгруппы $H \leq G$; $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$ — множество нулей характера $\chi \in \text{Char}(G)$; $U_\chi = \{g \in G | |\chi(g)| = 1\}$ — множество унитарных элементов характера $\chi \in \text{Char}(G)$; $\langle \theta_1, \theta_2 \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \theta_1(g) \overline{\theta_2(g)}$ — скалярное произведение функций $\theta_i: G \rightarrow \mathbf{C}$ ($i = 1, 2$); (a, b) — наибольший общий делитель чисел $a, b \in \mathbf{N}$; $a|b$ — a делит b ($a, b \in \mathbf{N}$).

§ 1. Некоторые леммы. 1. В этом пункте G — конечная неабелева группа, $\chi \in \text{Irr}^\#(G)$.

1.1. Лемма [6] $T_\chi \neq \emptyset$.

1.2. Лемма $T_\chi Z(\chi) = T_\chi, U_\chi Z(\chi) = U_\chi$.

Доказательство. Оба утверждения вытекают из следующего очевидного факта: если $z \in Z(\chi)$, $g \in G$, то $\chi(gz) = \epsilon \chi(g)$, где ϵ — корень из 1.

1.3. Следствие. $Z(\chi) < N_\chi$.

1.4. Лемма [1]*. Если $H \leq G$, то

$$\langle \chi_H, \chi_H \rangle \leq 1 + \frac{|T_\chi \setminus H|}{|H|}. \quad (1)$$

Знак равенства в (1) достигается тогда и только тогда, когда $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.

1.5. Следствие. Если $H \leq G$ и $|T_\chi \setminus H|$, то $\chi_H \in \text{Irr}(H)$. В частности, $\chi_H \in \text{Irr}(H)$, если $|H| > n_\chi$.

1.6. Следствие [9] а) $\chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$; б) $G \setminus N_\chi \subseteq U_\chi$.

* Доказательство см. также в [4].

Доказательство. Так как $N_\chi \supset T_\chi$, то $|N_\chi| > n_\chi$, откуда в силу 1.5 $\chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$. Так как $T_\chi \setminus N_\chi = \emptyset$, то в (1) при $H = N_\chi$ имеет место знак равенства, откуда следует в силу 1.4 и $T_\chi \subset N_\chi$, что $G \setminus N_\chi \subseteq U_\chi$.

1.7. Лемма. Если $g \in U_\chi$, то $\chi(g)$ — корень из 1.

Доказательство. По условию $|\chi(g)|^2 = \chi(g)\overline{\chi(g)} = 1$. Так как $\chi(g) \in Q(\epsilon)$, где ϵ — первообразный корень $|G|$ -й степени из 1 и $Q(\epsilon)$ — порожденное им круговое поле, то ввиду абелевости группы Галуа расширения $Q(\epsilon)/Q$ модули всех чисел алгебраически сопряженных с $\chi(g)$ равны 1. Так как $\chi(g)$ — целое алгебраическое число, в силу известной леммы Кронекера $\chi(g)$ — корень из 1.

1.8. Лемма. Если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ и p — простой делитель числа $|G/N_\chi|$, то $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

Доказательство. Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$. Так как $p \nmid |G/N_\chi|$ то $P \subset N_\chi$. Поэтому найдется элемент $u \in P \setminus N_\chi$. В силу 1.6 и 1.7 $\chi(u)$ — корень из 1. Пусть $o(u) = p^k$, ϵ — первообразный корень p^k -й степени из 1, $\lambda = 1 - \epsilon$. Если T — неприводимое представление группы G , порождающее характер χ и $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{\chi(1)}\}$ — спектр матрицы $T(u)$, то $\epsilon_j^l = \epsilon_j^{lj}$, где $\nu_j \in \mathbb{Z}$ ($j = 1, \dots, \chi(1)$). Следовательно, $\epsilon_j \equiv 1 \pmod{\lambda}$ в кольце $\mathbf{R}$ целых алгебраических чисел поля $\mathbb{Q}(\epsilon)$. Поэтому $\chi(u) = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{\chi(1)} \equiv \chi(1) \pmod{\lambda}$. Так как $\chi(u)$ — корень из 1 и $\chi(u) \in Q(\epsilon)$, то $\chi(u) = \pm \epsilon^l$, где $l \in \mathbb{Z}$ (см., напр. [13], стр. 536). Поэтому $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{\lambda}$. Так как λ/p в $\mathbf{R}$ и λ необратим в $\mathbf{R}$, то $\chi(1) \equiv \pm 1 \pmod{p}$.

1. 9. Следствие. $(\chi(1), |G/N_\chi|) = 1$.

1. 10. Лемма [2]. Пусть $\chi \in \text{Irr}_2(G)$, $H < G$, $\Delta_\chi = G \setminus N_\chi$, $\Omega_\chi = H \cap \Delta_\chi$. Допустим, что $\chi = \psi^G$, где $\psi \in \text{Irr}(H)$. Тогда

а) $N_\chi H = G$;

б) имеет место разбиение $\Delta_\chi = \bigcup_{i=1}^m \Omega_\chi^i$, где $m = |G:H|$ и $\{t_i\}$ — полная система представителей правых смежных классов группы G по H .

в) $N_G(H) = N_G(\Omega_\chi) = H$ и $\Omega_\chi^t \cap \Omega_\chi = \emptyset$, если $t \in G \setminus H$ (таким образом, Ω_χ — (T1)-подмножество).

г) Если $g \in \Delta_\chi$, $g \in \Omega_\chi^i$, то $\chi(g) = \psi(t_i g t_i^{-1})$.

д) $\psi \in \text{Irr}_2(H)$.

Доказательство. а) Так как $\chi(1) = |\hat{G} : H| \psi(1)$, в силу 1.7. имеет $(|G : H|, |G : N_x|) = 1$. Так как $|G : N_x H| |G : H| = |G : N_x|$, то $N_x H = G$.

б) Полагая $H_0 = H \cap N_x$, в силу а) получим $G/N_x \cong H/H_0$, откуда $m|H_0| = |N_x|$. (2)

Пусть $g \in \Delta_\chi$. Так как $\chi(g) \neq 0$ и $\chi(g) = |H|^{-1} \sum_{t \in G}^{\circ} (tg t^{-1}) (\psi - \text{функция на } G \text{ исчезающая вне } H \text{ и совпадающая с } \psi \text{ на } H)$, то найдется такой элемент $t \in G$, что $tgt^{-1} \in H$, т. е. $g \in H^t$. Поэтому $\Delta_\chi \subseteq H^G = \bigcup_{i=1}^m H^{t_i}$, где $\{t_i\}$ — полная система представителей правых смежных классов группы G по H . Так как Δ_χ нормально, $\Delta_\chi = \Delta_\chi \cap (\bigcup H^{t_i}) = \bigcup (\Delta_\chi \cap H^{t_i}) = \bigcup \Omega_\chi^{t_i}$. Отсюда следует, ввиду (2), что $|\Delta_\chi| \leq \sum |\Omega_\chi^{t_i}| = m|\Omega_\chi| = m(|H|^\chi - |H_0|) = |G| - m|H_0| = |G| - |N_x| = |\Delta_\chi|$. Поэтому $|\bigcup \Omega_\chi^{t_i}| = \sum |\Omega_\chi^{t_i}|$, откуда вытекает, что $\Omega_\chi^{t_i} \cap \Omega_\chi^{t_j} = \emptyset$ при $i \neq j$. Таким образом, подмножества $\Omega_\chi^{t_i}$ ($i = 1, \dots, m$) образуют разбиение множества Δ_χ .

в) Так как $\Omega_\chi = \Delta_\chi \cap H$, то $N_G(\Omega_\chi) \geq H$. Пусть $t \in N_G(\Omega_\chi)$, $t \in H t_i$. Считая, что $t_1 = 1$ и замечая, что $\Omega_\chi^{t_1} = \Omega_\chi$, получаем $i = 1$ и, следовательно, $t \in H$. Таким образом, $N_G(\Omega_\chi) = H$. Так как $H \leq N_G(H) \leq N_G(\Omega_\chi)$, то $N_G(H) = H$. Если $t \in G \setminus H$, то в силу б) $\Omega_\chi^t \cap \Omega_\chi = \emptyset$. Таким образом, $\Omega_\chi - (T_1)$ — подмножество.

г) Пусть $g \in \Delta_\chi$. Тогда в силу б) $g \in \Omega_\chi^{t_i}$ для некоторого i . Поэтому $t_i g t_i^{-1} \in H$. Если $t_j g t_j^{-1} \in H$, то $g \in \Omega_\chi^{t_j}$, т. е. $g \in \Omega \cap \Omega_\chi^{t_j}$, откуда в силу

б) $i = j$. Поэтому $\chi(g) = \sum_{j=1}^m \psi(t_j g t_j^{-1}) = \psi(t_i g t_i^{-1})$.

д) Ввиду б) $H \setminus H_0 = H \setminus N_x = \Omega_\chi \neq \emptyset$. Если $g \in H \setminus H_0$, то в силу г) $\chi(g) = \psi(g)$, откуда следует, что $|\psi(g)| = |\chi(g)| = 1$. Таким образом, $T_\psi \subseteq H_0 \neq H$, т. е. $\psi \in \text{Irr}_2(H)$.

Примечание. Лемма 1.10 показывает, что (G, N_x, H) — так называемая тройка Виланда.

1.11. Лемма. Если $D \triangleleft G$, $D < N_x$, то $\chi_D \in \text{Irr}(D)$.

Доказательство. По теореме Клиффорда $\chi_D = e(\Phi_1 + \dots + \Phi_l)$, где $e \in N$ и $\{\Phi_1, \dots, \Phi_l\}$ — класс неприводимых характеров подгруппы D G -сопряженных с $\Phi = \Phi_1$. Так как $D < N_x$, то $D = N_x$ либо $D \setminus N_x \neq \emptyset$. Если $D = N_x$, то $\chi_D \in \text{Irr}(D)$ в силу 1.6. Если $D \setminus N_x \neq \emptyset$ и $u \in D \setminus N_x$, то в силу 1.6 б) $e(\Phi_1(u) + \dots + \Phi_l(u)) = \chi(u)$ — корень из 1, откуда следует, что $e = 1$. Допустим, что $l > 1$. Полагая $H = I_\phi(\Phi)$, ввиду $|G:H| = l$, будем иметь

$D \leq H < G$. Так как χ индуцируется из H , то в обозначениях леммы 1.10 $D \leq H_G = \bigcap_{t \in G} (H_0 \cup \Omega_\chi)^t \leq \bigcap (N_\chi \cup \Omega_\chi)^t = N_\chi \cup (\bigcap \Omega_\chi^t) = N_\chi$, ибо в силу 1.10 б) $\bigcap_{t \in G} \Omega_\chi^t = \emptyset$. Так как это противоречит условию $D \setminus N_\chi \neq \emptyset$, то $l = 1$ и, следовательно, $\chi_D = \Phi \in \text{Irr}(D)$.

1.12. Следствие. Если $D < G$, $T_\chi \cap D = \emptyset$, то $D < N_\chi$.

Доказательство. Утверждение следует из 1.11 и 1.1.

1.13. Лемма. Если $K < G$, $\psi \notin \text{Char}(K)$, $\chi = \psi^G$, то $G \setminus K^G \subseteq T_\chi$.

Доказательство. Утверждение вытекает из формулы Фробениуса $\psi^G(g) = \|H\|^{-1} \sum_{t \in G} \psi(tgt^{-1})(g \in G)$.

2. Пусть $k \in N$ и γ — действие конечной группы G на n -элементном множестве «точек» Ω . Действие γ называется строго k -транзитивным, если (I) γ k -транзитивно; (II) пересечение γ -стабилизаторов любых k различных точек тривиально.

Пусть $\text{Sta} \alpha$ — стабилизатор точки $\alpha \in \Omega$, γ_α — действие группы $\text{Sta} \alpha$ на $\Omega_\alpha = \Omega \setminus \{\alpha\}$, порожденное действием γ .

1.14. Лемма. Действие γ k -транзитивно (строго k -транзитивно) тогда, когда а) γ транзитивно; б) γ_α $(k-1)$ -транзитивно (строго $(k-1)$ -транзитивно).

Назовем γ Φ -действием, если (I) γ транзитивно, но не регулярно; (II) $\text{Sta} \alpha \cap \text{Sta} \beta = \emptyset$, если $\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \neq \beta$.

1.15. Лемма. Если γ — Φ -действие группы G на n -элементном множестве Ω , то а) γ точно (т. е. $\bigcap_{\alpha \in \Omega} \text{Sta} \alpha = \{1\}$); б) G — группа Фробениуса с ядром порядка n .

Доказательство. а) вытекает из определения Φ -действия; б) следует из теоремы Фробениуса о транзитивных группах подстановок.

1.16. Лемма. Пусть G — группа Фробениуса с ядром F n -го порядка, γ — транзитивное действие группы G на n -элементном множестве Ω . Тогда γ — Φ -действие. Если, в частности, G — группа Фробениуса максимального типа, то γ строго 2-транзитивно.

Доказательство. Утверждение вытекает из элементарных свойств групп Фробениуса (см. также [6]).

В дальнейшем будут использованы результаты Цассенхауза [10], классифицирующие строго 3-транзитивные группы подстановок. Пусть p -простое число и $q = p^a$, где $a \in N$. Пусть $\hat{F}_q$ — пополненное символом ∞ поле Галуа $F_q = GF(q)$ (F_q можно отождествить с проективной прямой над полем F_q^*). Через F_q^{*2} обозначим мультипликативную группу поля F_q , а через F_q^{*2} — подгруппу квад-

ратов группы F_q^* . Дробно линейные подстановки $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ ($x \in \hat{F}_q$), где $a, b, c, d \in F_q$, $ad - bc \in F_q^*$, образуют (относительно их суперпозиции) группу $L(q)$, изоморфную полной проективной ли-

нейной группе $\text{PGL}(2, q)$. Легко видеть, что группа $L(q)$ строго 3-транзитивна. Если a четно и $p \neq 2$, можно кроме группы $L(q)$ образовать еще одну строго 3-транзитивную группу $M(q)$ подстановок множества $\hat{F}_q$. В этом случае поле F_q обладает автоморфизмом σ 2-го порядка: $\sigma(x) = x^{p^{a/2}}$ ($x \in F_q$). Продолжим σ на $\hat{F}_q$, полагая $\sigma(\infty) = \infty$. Группа $M(q)$ определяется следующим образом:

$$M(q) = L_0(q) \cup L_1(q), \quad (3)$$

где
$$L_0(q) = \left\{ x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in F_q, ad - bc \in F_q^{*2} \right\};$$

$$L_1(q) = \left\{ x \rightarrow \frac{a\sigma(x)+b}{c\sigma(x)+d} \mid a, b, c, d \in F_q, ad - bc \in F_q^* \setminus F_q^{*2} \right\}.$$

Легко видеть, что $L_0(q) \cong \text{PSL}(2, q)$, $L_0(q) \triangleleft M(q)$ и (3) — разложение группы $M(q)$ на два смежных класса по $L_0(q)$. Заметим, что при $p = 2$, $F_q^* = F$ и, следовательно, $L(q) = L_0(q) \cong \text{PSL}(2, q)$. Если, кроме того, a четно, то (3) не приводит к новой группе, так как в этом случае $L_1(q) = \emptyset$.

Теперь мы можем сформулировать нужные нам результаты Цассенхауза.

1.17. Лемма [10]. Пусть G — строго 3-транзитивная группа подстановок степени $q+1$ ($q \in N$). Тогда $q = p$, где p — простое число. Если a нечетно или $p = 2$, то $G \cong L(q)$; если a четно и $p \neq 2$, то $G \cong L(q)$ или $G \cong M(q)$.

1.18. Следствие. Пусть G — простая строго 3-транзитивная группа подстановок степени $q+1$. Тогда $q = 2$, где $a \geq 2$ и $G \cong \text{PSL}(2, q)$.

Приведем в заключение еще несколько необходимых для дальнейшего результатов.

1.19. Лемма ([11], теорема 8.28). Пусть $q = p^a$ (p — простое число), $H < \text{PSL}(2, q)$, $m = |\text{PSL}(2, q) : H|$. Тогда $m \geq q+1$, за исключением следующих случаев: 1) $q=2$, $m=2$; 2) $q=3$, $m=3$; 3) $q=5$, $m=5$; 4) $q=7$, $m=7$; 5) $q=9$, $m=6$; 6) $q=11$, $m=11$.

1.20. Лемма ([12], теорема C). Если централизаторы нетривиальных p -элементов группы G являются ее силовскими p -подгруппами, то последние являются элементарными абелевыми CC -подгруппами*.

Напомним некоторые понятия введенные в [7]. Разбиением группы G называется пара $\{A, B\}$ подмножеств $A, B \subseteq G$ таких, что $A \neq \emptyset \neq B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = G$. Разбиение $\{A, B\}$ называется S -разбиением, если подмножество A замкнуто, т. е. из $x \in A$ следу-

* Подгруппа $H < G$ называется CC -подгруппой, если из $x \in H$ вытекает $C_G(x) \leq H$.

ет $C_G(x) \subseteq \hat{A}$ (замкнутость A , очевидно, равносильна замкнутости B). Если подмножества A и B нормальны, C -разбиение $\{A, B\}$ называется *нормальным*.

1.21 Лемма ([7], лемма 1.16). *Разбиение $\{A, B\}$ группы G является нормальным C -разбиением тогда и только тогда, когда группа G обладает обобщенным характером, равным 0 на A и 1 на B .*

Пусть π — некоторое множество простых чисел, π' — дополнительное множество простых чисел. Разбиение $\{A, B\}$ группы G называется (π, π') -разбиением, если элементы из A являются π -элементами, элементы из B — π' -элементами.

1.22. Лемма ([7], следствие 1.11). *Разбиение $\{A, B\}$ группы G является нормальным C -разбиением тогда и только тогда, когда оно является (π, π') -разбиением для некоторого множества π простых чисел.*

§ 2. О группах, содержащих χ -максимальную подгруппу. В дальнейшем предполагается, что G — конечная группа и $\chi \in \text{Irr}^*(G)$.

2.1. Лемма. *Подгруппа H χ -максимальна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия: а) $H \cap T_\chi = \emptyset$; б) $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 2$; в) $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$.*

Доказательство. 1° Если H χ -максимальна и $H \cap T_\chi \neq \emptyset$, то $|T_\chi \setminus H| < n_\chi = |H|$, откуда в силу 1.4 $\chi_H \in \text{Irr}(H)$ — противоречие. Таким образом, $H \cap T_\chi = \emptyset$. Поэтому правая часть (1) равна 2. Так как $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$, то $\langle \chi_H, \chi_H \rangle > 1$, откуда, ввиду (1) $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 2$. Так как $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 2 = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}$, в силу 1.3 $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$. Таким образом, все три условия а) — в) выполнены.

2. Допустим, что условия а) — в) выполнены. Тогда, ввиду б) $\chi_H \notin \text{Irr}(H)$. Из в) вытекает, ввиду 1.3, что $2 = \langle \chi_H, \chi_H \rangle = 1 + |T_\chi \setminus H| \cdot |H|^{-1}$, т. е. $|T_\chi \setminus H| = |H|$. Так как, ввиду а) $T_\chi \setminus H = T_\chi$, то $|H| = n_\chi$. Поэтому подгруппа H χ -максимальна.

2.2. Лемма. Если подгруппа H χ -максимальна и $H \triangleleft G$, то $|G:H| = 2$ и $G \setminus H = T_\chi$, $\chi \in \text{Irr}_1(G)$.

Доказательство. Пусть $\chi_H = e(\psi_1 + \dots + \psi_l)$ — Клиффордово разложение характера χ_H ; $e \in \mathbb{N}$ и $\{\psi_1, \dots, \psi_l\}$ — класс G -сопряженных неприводимых характеров подгруппы H . Так как ввиду 2.1 $\langle \chi_H, \chi_H \rangle = 2$, то $e = 1$, $l = 2$. Поэтому $\chi_H = \psi_1 + \psi_2$ и

$$|G:I_G(\psi_1)| = 2, \quad (4)$$

откуда $I_G(\psi_1) \triangleleft G$. Так как χ индуцируется из $I_G(\psi_1)$, в силу 1.12 $G \setminus I_G(\psi_1) \subseteq T_\chi$ и $|G \setminus I_G(\psi_1)| \leq |T_\chi| = n_\chi$. С другой стороны, в силу (4) $|G \setminus I_G(\psi_1)| = |I_G(\psi_1)| \geq |H| = n_\chi$. Поэтому $|I_G(\psi_1)| = n_\chi$, откуда $H = I_G(\psi_1)$ и, ввиду (4) $|G:H| = 2$. Так как $G \setminus H = G \setminus I_G(\psi_1) \subseteq T_\chi$ и в силу 2.1 $H \cap T_\chi = \emptyset$, то $G \setminus H = T_\chi$. Отсюда следует, что $N_\chi = \langle G \setminus H \rangle = G$, т. е. $\chi \in \text{Irr}_1(G)$.

2.3. Лемма. Если H — χ -максимальная подгруппа группы G и $H < K \leq G$, то $K \setminus H \supseteq T_\chi$ и, следовательно, $K \geq N_\chi H$.

Доказательство. Так как $|K| > |H| = n_\chi$, в силу 1.3 $\chi_K \in \text{Irr}(K)$, т. е. $\langle \chi_K, \chi_K \rangle = 1$. Так как $G \setminus K \subseteq G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$, в силу 1.3 $\langle \chi_K, \chi_K \rangle = 1 + |T_\chi \setminus K| \cdot |K|^{-1}$, откуда $|T_\chi \setminus K| = 0$, т. е. $K \supseteq T_\chi$. Так как $H \cap T_\chi = \emptyset$, то $K \setminus H \supseteq T_\chi$. Из $K \supseteq T_\chi$ следует $K \geq \langle T_\chi \rangle = N_\chi$. Поэтому $K \geq N_\chi H$.

2.4. Следствие. Если H — χ -максимальная подгруппа группы G , то H — максимальная подгруппа группы $G_1 = N_\chi H$. В частности, если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$, то H — максимальная подгруппа группы G .

2.5. Лемма. Если H — χ -максимальная подгруппа группы G и $|G : H| > 2$, то $N_G(H) = H$.

Доказательство. Если $N_G(H) > H$, то в силу 2.3 $N_G(H) \geq G_1$, откуда $H < G_1$. Заметим, что $H < G_1$: в противном случае $H = G_1$, откуда $N_\chi \leq H$, что невозможно, так как $H \cap T_\chi = \emptyset$. Поэтому $|G_1| > |H|$ и в силу 1.3 $\chi_1 = \chi_{G_1} \in \text{Irr}(G_1)$. Так как $(\chi_1)_H = \chi_H \notin \text{Irr}(H)$, то H — χ_1 -максимальная подгруппа группы G_1 . Ввиду $H < G_1$ и 2.2 $|G_1 : H| = 2$ и $G_1 \setminus H = T_{\chi_1} = T_\chi$. Поэтому $N_\chi = \langle T_\chi \rangle = \langle G_1 \setminus H \rangle = G_1$. Следовательно, $N_\chi \setminus H = T_\chi$, откуда вытекает, ввиду нормальности N_χ и T_χ , что $H < G$. Но тогда в силу 2.2 $|G : H| = 2$ — противоречие. Таким образом, $N_G(H) = H$.

2.6 Лемма Если подгруппа $H < G$ χ -максимальна и $D = H_G$, то а) $G \setminus D \subseteq T_\chi \cup U_\chi$; б) $D \cap T_\chi = \emptyset$; в) $Z(\chi) \leq D < N_\chi$; г) $H \setminus D \subseteq U_\chi$.

Доказательство. В силу 2.1 $G \setminus H \subseteq T_\chi \cup U_\chi$, откуда следует, ввиду нормальности множеств T_χ и U_χ , что $G \setminus H^t = (G \setminus H)^t \subseteq T_\chi \cup U_\chi$ при любом $t \in G$. Поэтому $G \setminus D = G \setminus (\bigcap_{t \in G} H^t) = \bigcup_{t \in G} (G \setminus H^t) \subseteq T_\chi \cup U_\chi$. Так как $D \leq H$ и $H \cap T_\chi = \emptyset$, то $D \cap T_\chi = \emptyset$, откуда, ввиду 1.12 $D < N_\chi$. Если $g \in Z(\chi)$, то $|\chi(g)| = \chi(1) > 1$ и ввиду а) $g \in D$. Таким образом, $Z(\chi) \leq D$. Наконец, так как $H \cap T_\chi = \emptyset$ и $G \setminus D \subseteq T_\chi \cup U_\chi$, то $H \setminus D \subseteq U_\chi$.

2.7 Лемма. Пусть H — χ -максимальная подгруппа группы G , причем $|G : H| > 2$ и $Z(\chi) < D = H_G$. Тогда а) $\chi \in \text{Irr}_2(G)$; б) $D < N_\chi$, $N_\chi \setminus D = T_\chi$; в) $G = G/D$ группа Фробениуса максимального типа с ядром $F = N_\chi/D$ и дополнительным множителем $H = H/D$; г) H — максимальная подгруппа группы G , причем $|G : H| = q$ — степень простого числа.

Доказательство. Из 2.6 и 1.3 вытекает $\langle \chi_D, \chi_D \rangle = 1 + 1 + |T_\chi \setminus D| \cdot |D|^{-1} = 1 + n_\chi |D|^{-1} = 1 + |H : D|$. Таким образом,

$$\langle \chi_D, \chi_D \rangle = 1 + |H : D|. \quad (5)$$

Пусть

$$\chi_D = e(\Phi_1 + \dots + \Phi_l) \quad (6)$$

— клиффордово разложение характера $\chi_D: e \in N$, Φ_i — неприводимые характеры подгруппы D G -сопряженные с $\Phi = \Phi_1$; $l = |G: I_G(\Phi)|$. Если $l=1$, то $\chi_D = e\Phi$; так как $D < H$ и $H \cap T_\chi = \emptyset$, то $T_\Phi = D \cap T_\chi = \emptyset$, откуда в силу 1.1 $\Phi(1)=1$. Поэтому $D < Z(\chi)$ — противоречие. Таким образом, $l > 1$ и, следовательно, $K = I_G(\Phi) \neq G$. Так как χ индуцируется из K , то $\chi_K \in \text{Irr}(K)$ и в силу 1.4 $|K| \leq n_\chi$, т. е. $|K| \leq |H|$. Далее, ввиду (5) и (6) $e^2 l = 1 + |H:D|$. Ввиду $l \parallel |G:K|$ следует, что $(|G:K|, |H:D|) = 1$. Так как $|G:H| \cdot |H:D| = |G:K| \cdot |G:D|$, то $|G:K| \parallel |G:H|$ и, следовательно, $|H| \parallel |K|$, т. е. $|H| \leq |K|$. Таким образом, $|K| = |H|$, т. е. $|K| = n_\chi$. Так как $\chi_K \in \text{Irr}(K)$, то K — χ -максимальная подгруппа группы G . Докажем, что $e=1$. Для этого заметим, что e -степени некоторого неприводимого проективного представления группы K/D . Поэтому $e \parallel |K:D|$. Так как $|K:D| = |H:D|$ и $e^2 l = 1 + |H:D|$, то $e=1$. Поэтому $l = 1 + |H:D| = 1 + |K:D|$, т. е.

$$|G:K| = 1 + |K:D|. \quad (7)$$

Ввиду $|G:K| = |G:H| > 2$ из (7) следует, что $K \neq D$. Таким образом, $D < K < G$. Так как характер χ индуцируется из K , в силу 1.13 $G/K_\chi^G \subset T_\chi$. С другой стороны, так как K χ -максимальна, то $K \cap T_\chi = \emptyset$ и, следовательно, $K^G \cap T_\chi = \emptyset$. Поэтому

$$G \setminus K^G = T_\chi, \quad (8)$$

откуда следует, ввиду $|K| = |T_\chi|$, что

$$|K^G| = |G| - |K|. \quad (9)$$

Вычислим $|K^G|$ другим способом. Так как K χ -максимальна и $|G:K| > 2$, в силу 2.5 $N_G(K) = K$. Поэтому $|\text{Cl}(K)| = |G:K|$. Пусть $K = K_1$ и $\text{Cl}(K) = \{K_1, \dots, K_{|G:K|}\}$. Так как $K > D$ и $D < G$, то $K_i > D$ ($i = 1, \dots, |G:K|$). В силу (7) и (9) $|K^G| = |\bigcup K_i| = |D \cup \{\bigcup (K_i \setminus D)\}| \leq |D| + \sum |K_i \setminus D| = |D| + |G:K| \cdot |K \setminus D| = |D| + |G:K|(|K| - |D|) = |G| - |D|(|G:K| - 1) = |G| - |D| \times |K:D| = |G| - |K| = |K^G|$. Поэтому $|D \cup \{\bigcup (K_i \setminus D)\}| = |D| + \sum |K_i \setminus D|$, откуда следует, что подмножества $\Delta_i = K_i \setminus D$ попарно не пересекаются. Рассмотрим транзитивное действие γ группы $G = G \setminus D$ на множестве $\Omega = \text{Cl}(K)$, порожденное действием группы G на Ω сопряжениями: если $\bar{g}$ — канонический образ элемента $g \in G$ в группе G , то $K_i^{\bar{g}} = K_i^g$ ($i = 1, \dots, |G:K|$). Ввиду $K_i > D$ действие γ определено корректно. Так как γ -стабилизатор $\text{St}(K_i)$ „точки“ K_i совпадает с $\overline{N_G(K_i)} = \overline{K_i} = K_i/D$ и $K_i \neq D$, действие γ не регулярно. Если $i \neq j$, то $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$ и, следовательно, $K_i \cap K_j = D$. Поэтому $\text{St}(K_i) \cap \text{St}(K_j) = K_i \cap K_j = \{1\}$. Таким образом, γ — Φ -действие. В силу 1.15 G — группа Фробениуса с ядром F порядка $|\Omega| =$

$= |G:K|$. Положим $K = \bar{K} = K/D$. Так как $|G:K| = |G:K| = |F|$, то K — дополнительный множитель группы G . Ввиду $|H| = |K|$, подгруппа H также является дополнительным множителем. Так как в силу (7) $|K| = |F| - 1$, то G — группа Фробениуса максимального типа. Поскольку $D < K'$ при любом $t \in G$, то в силу (8) $\bar{T}_\chi = \bar{G} \setminus \bar{K}^G = G \setminus K^G$, откуда вытекает на основании известных свойств группы Фробениуса, что $\bar{T}_\chi = F^\#$. Поэтому $\bar{N}_\chi = \langle \bar{T}_\chi \rangle = \langle \bar{T}_\chi \rangle = F$, т. е. $F = N_\chi/D$. Ввиду $F \neq G$ следует, что $N_\chi \neq G$. Поэтому $\chi \in \text{Irr}_2(G)$. Докажем, что $N_\chi \setminus D = T_\chi$. Так как $D \cap T_\chi = \emptyset$, то имеет место включение $T_\chi \subset N_\chi \setminus D$. Далее, если $g \in N_\chi \setminus D$, то $\bar{g} \in \bar{N}_\chi^\# = F^\# = G \setminus K^G$. Пусть $t \in G$. Так как $\bar{g} \in G \setminus K^G$, то $\bar{g} \notin K^t$ и, следовательно, $g \notin K^t$. Поэтому $g \in G \setminus K^G = T_\chi$. Таким образом, $N_\chi \setminus D \subseteq T_\chi$. Итак, $N_\chi \setminus D = T_\chi$. Наконец из того, что G — группа Фробениуса максимального типа вытекает, что дополнительный множитель H является ее максимальной подгруппой. Так как $H = H/D$, то H — максимальная подгруппа группы G . Так как F — элементарная абелева группа, то $|G:H| = |G:H| = |F| = q$ — степень простого числа. Тем самым, все утверждения леммы доказаны.

2.8. Лемма. Пусть H — χ -максимальная подгруппа группы G , причем $|G:H| > 2$ и $Z(\chi) = D = H_G$. Тогда а) $\chi \in \text{Irr}_2(G)$; б) $D < N_\chi$; в) $G = G/D$ — монолит с минимальным нормальным делителем $F = N_\chi/D$; г) если подгруппа Фиттинга $F(G)$ группы G нетривиальна, то G — группа Фробениуса максимального типа с ядром F и дополнительным множителем $H = H/D$. При этом $D \neq \{1\}$, $T_\chi = N_\chi/D$, $\chi(1) = \sqrt{q}$, где $q = |F| = p^2$ (p — простое число); д) если $F(G) = \{1\}$, то $G \cong S_5$, $F \cong A_5$, $H = H/D \cong S_4$, $\chi(1) = 5$.

Доказательство. Так как $D \cap (T_\chi \cup U_\chi) = \emptyset$, ввиду 2.6 $G \setminus D = T_\chi \cup U_\chi$. Ввиду $H \cap T_\chi = \emptyset$ отсюда следует, что $H \setminus D \subseteq U_\chi$. Так как $|G:H| > 2$, в силу 2.2 $H \neq D$. Поэтому $U_\chi \neq \emptyset$. Пусть $G = G/D$ и $g \rightarrow g$ — естественный гомоморфизм G на G . Полагая $\theta_0 = \chi \bar{\chi}$ и $\theta(g) = \theta_0(\bar{g}) = |\chi(g)|^2$, мы корректно определим характер θ группы G . Положим $A = T_\chi$, $B = \bar{U}_\chi$. Так как $T_\chi \neq \emptyset \neq U_\chi$, то $A \neq \emptyset \neq B$. При помощи леммы 1.2 получаем $A = \{g \in G \mid \theta(g) = 0\}$, $B = \{g \in G \mid \theta(g) = 1\}$. Из предыдущего видно, что $G^\# = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$. Все это показывает, ввиду леммы 1.21, что $\{A, B\}$ — нормальное C -разбиение группы G . Положим $H = H/D$. Так как по лемме 1.2 $T_\chi D = T_\chi Z(\chi) = T_\chi$, то T_χ разбивается на $|T_\chi| \cdot |D|^{-1} = |H| \cdot |D|^{-1} = |H/D| = |H|$

смежных классов по D , откуда следует, что $|\bar{T}_\chi| = |\mathbf{H}|$. Так как $\bar{T}_\chi = A$, то

$$|A| = |\mathbf{H}|. \quad (10)$$

Далее из $H \setminus D \subseteq U_\chi$ следует, что $\bar{H}^\# \subseteq \bar{U}_\chi$, т. е. $\mathbf{H}^\# \subseteq B$. Рассмотрим действие подгруппы $\mathbf{H}$ на A сопряжениями. Так как $\mathbf{H}^\# \subseteq B$ и $\{A, B\}$ — нормальное C -разбиение группы $\mathbf{G}$, это действие полурегулярно, т. е. длины всех $\mathbf{H}$ -орбит равны $|\mathbf{H}|$. Иначе говоря, если $\bar{g} \in A$, то $|\bar{g}^{\mathbf{H}}| = |\mathbf{H}|$, откуда следует в силу (10), что $\bar{g}^{\mathbf{H}} = A$, т. е. A является $\mathbf{G}$ -классом. Следовательно, элементы из A имеют один и тот же порядок, являющийся, ввиду замкнутости A , некоторым простым числом p . Ввиду 1.22, $\hat{A}$ — множество всех p -элементов, $\hat{B}$ — множество всех p' -элементов группы G . Поскольку $\mathbf{H} \subseteq B$, отсюда следует, что $\mathbf{H}$ — p' -подгруппа. Если $\bar{g} \in A$, то, ввиду замкнутости A , $C_G(\bar{g}) \subseteq \hat{A}$, откуда следует, что $C_G(g)$ — p -подгруппа. С другой стороны, $|\mathbf{G} : C_G(\bar{g})| = |\bar{g}^{\mathbf{G}}| = A = |\mathbf{H}|$ не делится на p . Поэтому $C_G(\bar{g}) \in \text{Syl}_p(\mathbf{G})$. Таким образом, централизаторы нетривиальных p -элементов группы $\mathbf{G}$ являются ее силовскими подгруппами. На основании 1.19 следует, что силовские p -подгруппы группы $\mathbf{G}$ являются элементарными абелевыми СС-подгруппами. Таким образом, если $\mathbf{P} \in \text{Syl}_p(\mathbf{G})$ и $\bar{g} \in \mathbf{P}^\#$, то $C_G(\bar{g}) = \mathbf{P}$. Поэтому $|\mathbf{G} : \mathbf{P}| = |\mathbf{G} : C_G(\bar{g})| = |\bar{g}^{\mathbf{G}}| = |A| = |\mathbf{H}|$. Следовательно, имеет место разложение

$$\mathbf{G} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}. \quad (11)$$

Пусть $q = |\mathbf{P}|$ — p -часть числа $|\mathbf{G}|$. Тогда

$$|\mathbf{G}| = q \cdot |\mathbf{H}|. \quad (12)$$

Положим $\text{Syl}_p(\mathbf{G}) = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_{r-1}\}$, где $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$. Так как A — множество всех нетривиальных p -элементов группы $\mathbf{G}$ и $\mathbf{P}$ ($i = 0, 1, \dots, r-1$) — абелевы СС-подгруппы, имеет место разбиение $A = \mathbf{P}_0^\# \cup \mathbf{P}_1^\# \cup \dots \cup \mathbf{P}_{r-1}^\#$. Поэтому

$$|A| = r(q-1). \quad (13)$$

Так как $r = |\mathbf{G} : N_G(\mathbf{P}_i)|$, в силу (10), (12) и (13) $|\mathbf{G} : \mathbf{P}| = |\mathbf{H}| = |A| = r(q-1) = |\mathbf{G} : N_G(\mathbf{P})|(q-1)$, откуда

$$|N_G(\mathbf{P}) : \mathbf{P}| = q-1. \quad (14)$$

Так как $q = |\mathbf{G} : \mathbf{H}| = |\mathbf{G} : H| > 2$, то $N_G(\mathbf{P}) \neq \mathbf{P}$. Отсюда следует (так как $\mathbf{P}$ — СС-подгруппа), что $N_G(\mathbf{P})$ — группа Фро-

бениуса с ядром $\mathbf{P}$. Из (14) вытекает, что $N_{\bar{G}}(\mathbf{P})$ — группа Фробениуса максимального типа.

Так как $\hat{A} = \{\bar{x} \in \mathbf{G} \mid \bar{x}^q = \bar{1}\}$, по теореме Фробениуса об уравнениях в группах $|\hat{A}| \equiv 0 \pmod{q}$, откуда $|A| \equiv -1 \pmod{q}$. Ввиду (13) отсюда следует, что $r \equiv 1 \pmod{q}$, т. е. $r = qk + 1$, где k — целое ≥ 0 . Таким образом,

$$|A| = r(q-1) = (qk+1)(q-1) = ql-1, \text{ где } l \in N. \quad (15)$$

Далее, замечая, что $G = D \cup T_\chi \cup U_\chi$, $D = Z(\chi)$, получаем $|G| = \sum_{g \in G} |\chi(g)|^2 = \sum_{g \in D} |\chi(g)|^2 + \sum_{g \in T_\chi} |\chi(g)|^2 + \sum_{g \in U_\chi} |\chi(g)|^2 = \chi(1)^2 |D| + |U_\chi|$. Поэтому $|T_\chi| + |U_\chi| = |T_\chi \cup U_\chi| = |G \setminus D| = (\chi(1)^2 - 1) \times |D| + |U_\chi|$, откуда $|T_\chi| = (\chi(1)^2 - 1) |D|$. Так как $|T_\chi| = |H|$ и $|H:D| = |\mathbf{H}|$, то

$$|\mathbf{H}| = \chi(1)^2 - 1. \quad (16)$$

Из (16), в частности, следует, что $(\chi(1), |\mathbf{H}|) = 1$. С другой стороны, так как $D = Z(\chi)$, то $\chi(1) \mid |G/D|$, т. е. $\chi(1) \mid |\mathbf{G}|$. Так как $|\mathbf{G}| = q|\mathbf{H}|$ и $(\chi(1), |\mathbf{H}|) = 1$, то $\chi(1) \mid q$. Полагая $q = p^a$, $\chi(1) = p^\lambda$, будем иметь $\lambda \leq a$. Ввиду $|A| = |\mathbf{H}|$ равенство (16) принимает вид

$$|A| = p^{2\lambda} - 1. \quad (17)$$

Из (17), (15) вытекает $(qk+1)(q-1) = p^{2\lambda} - 1 \leq q^2 - 1$. Поэтому $k \leq 1$. Если $k=0$, то $|A| = q-1$, т. е. $A = \mathbf{P}^\#$. Так как A нормально, то $\mathbf{P} \triangleleft \mathbf{G}$, т. е. $\mathbf{G} = N_{\bar{G}}(\mathbf{P})$ — группа Фробениуса максимального типа с ядром $\mathbf{P}$. В силу (11) $\mathbf{H} = H/D$ ее дополнительный множитель. Положим $\mathbf{P} = N/D$, где $D < N \triangleleft G$. Так как $T_\chi = A \subset \mathbf{P}$ и $D \cap T_\chi = \emptyset$, то $T_\chi \subset N \setminus D$. Замечая, что $|T_\chi| = |H| = |D| \cdot |\mathbf{H}| = |D| \cdot |A| = |D|(q-1)$, $|N \setminus D| = |N| - |D| = |D|(|N/D| - 1) = |D|(|\mathbf{P}| - 1) = |D|(q-1)$, получаем $T_\chi = N \setminus D$. В частности, $N = N_\chi$, $\mathbf{P} = N_\chi/D$. Так как $\mathbf{P} \neq \mathbf{G}$, то $N_\chi \neq G$, т. е. $\chi \in \text{Irr}_2(G)$. Далее, в рассматриваемом случае $2\lambda = a$ и, следовательно, $\chi(1) = p^\lambda = p^{a/2} = \sqrt{q}$. Наконец, $D \neq 1$; в противном случае G — группа Фробениуса с ядром N_χ порядка $q = p^a$; так как χ индуцируется из N_χ и N_χ абелева, $\chi(1) = |G:N_\chi| = q-1$ — противоречие.

Допустим теперь, что $k=1$. Тогда $|\text{Syl}_p(\mathbf{G})| = r = q+1$ и в силу (15) $|H| = |A| = q^2 - 1$. Ввиду (17) $\lambda = a$ и, следовательно, $\chi(1) = p^a = q$. Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0$ и $\text{Syl}_p(\mathbf{G}) = \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_l\}$. Рассмотрим действие γ группы $\mathbf{G}$ сопряжениями на множестве

ве $\Omega = \text{Syl}_p(\mathbf{G})$. Очевидно, γ -стабилизатором „точки“ $\mathbf{P}_i$ является подгруппа $\mathbf{N}_i = N_G(\mathbf{P}_i)$. Пусть γ_0 — действие подгруппы $\mathbf{N} = \mathbf{N}_0$ на $\Omega_0 = \{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_q\}$, порожденное действием γ . Так как γ_0 -стабилизатор „точки“ $\mathbf{P}_1$ совпадает с $\mathbf{N} \cap \mathbf{N}_1$, длина s γ_0 -орбиты точки $\mathbf{P}_1$ равна $|\mathbf{N} : \mathbf{N} \cap \mathbf{N}_1|$, откуда в силу (14) $s|\mathbf{N} \cap \mathbf{N}_1| = |\mathbf{N}| = q(q-1)$. Так как $\text{Syl}_p(\mathbf{N}) = \{\mathbf{P}\}$, $\text{Syl}_p(\mathbf{N}_1) = \{\mathbf{P}_1\}$ и $\mathbf{P} \cap \mathbf{P}_1 = \{1\}$, то $\mathbf{N} \cap \mathbf{N}_1$ — p' -подгруппа. Поэтому $|\mathbf{N} \cap \mathbf{N}_1| \mid q-1$. Полагая $q-1 = |\mathbf{N} \cap \mathbf{N}_1|t$, $t \in \mathbb{Z}$, получим $s = qt \geq q = |\Omega_0|$. Поэтому γ_0 -орбита точки $\mathbf{P}_1$ совпадает с Ω_0 , т. е. действие γ_0 транзитивно. Так как $\mathbf{N}$ — группа Фробениуса максимального типа с ядром $\mathbf{P}$ порядка $q = |\Omega_0|$, по лемме 1.16 действие γ_0 строго 2-транзитивно. ($\mathbf{G}$ и $\mathbf{N}$ в формулировке леммы заменяются соответственно на $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$ причем $n=q$). Ввиду транзитивности действия γ , отсюда следует, что γ строго 3-транзитивно и, в частности, точно. Можно поэтому считать, что $\mathbf{G}$ — строго 3-транзитивная группа подстановок степени $q+1$. Докажем, что $\mathbf{G}$ — монолит с минимальным нормальным делителем $\mathbf{F} = \mathbf{N}_x/D$. Допустим, что $D < \mathbf{N} < \mathbf{G}$. Тогда $\mathbf{N} \leq \mathbf{H}$: в противном случае $\mathbf{N} \leq \mathbf{H}_G = \mathbf{G}$. Из $\mathbf{N} < \mathbf{H}$ следует, что $\mathbf{K} = \mathbf{NH} > \mathbf{H}$, откуда ввиду 2.3 $\mathbf{K} \supset \supset \mathbf{T}_x$. Поэтому $\overline{\mathbf{K}} \supset \supset \mathbf{T}_x = \mathbf{A} \supset \supset \mathbf{P}_\#$. Так как $\overline{\mathbf{K}} \geq \overline{\mathbf{H}} = \mathbf{H}$, то $\mathbf{K} \geq \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}$, откуда, ввиду (11), $\overline{\mathbf{K}} = \mathbf{G}$ и, следовательно, $\mathbf{K} = \mathbf{G}$. Таким образом, $\mathbf{G} = \mathbf{NH}$, откуда следует, что $\mathbf{G}/\mathbf{N} \cong \mathbf{H}/\mathbf{N} \cap \mathbf{H}$ — p' -группа. Если $g \in \mathbf{T}_x$, то $g \in \overline{\mathbf{T}}_x = \mathbf{A}$, т. е. $g^p = g^p = 1$, откуда $g^p \in \mathbf{D} \subset \mathbf{N}$. Так как $(|\mathbf{G}/\mathbf{N}|, p) = 1$, то $g \in \mathbf{N}$. Поэтому $\mathbf{T}_x \subset \mathbf{N}$, откуда вытекает, что $\mathbf{N}_x \leq \mathbf{N}$. Это показывает (если учесть, что в силу 1.3 $\mathbf{N}_x > \mathbf{D}$), что $\mathbf{G}$ — монолит с минимальным нормальным делителем $\mathbf{F} = \mathbf{N}_x/D$. Допустим, что $\mathbf{F}(\mathbf{G}) \neq \{1\}$. Тогда в силу только что доказанного $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{G})$, откуда вытекает нильпотентность $\mathbf{F}$. Поэтому $\mathbf{F}$ — элементарная абелева группа. Так как $\mathbf{F} = \overline{\mathbf{N}}_x \supset \supset \overline{\mathbf{T}}_x = \mathbf{A} \supset \supset \mathbf{P}$, то $\mathbf{F} \geq \mathbf{P}$. Поэтому $\mathbf{F}$ — p -группа и, следовательно, $\mathbf{P} = \mathbf{F} < \mathbf{G}$ — противоречие. Итак, $\mathbf{F}(\mathbf{G}) = \{1\}$. В силу леммы 2.3 статьи [7] отсюда вытекает, что $\mathbf{F}$ — нециклическая простая группа. Группа $\mathbf{G}$ не является простой. В противном случае в силу 1.18 $q = 2_\alpha$ ($\alpha \geq 2$) и $\mathbf{G} \cong \text{PSL}(2, q)$. Так как $|\mathbf{G} : \mathbf{H}| = q$, по лемме 1.19 $q = 2$, что противоречит неравенству $q = |\mathbf{G} : \mathbf{H}| > 2$. Из непростоты группы $\mathbf{G}$ вытекает, что $\mathbf{F} \neq \mathbf{G}$. Поэтому $\mathbf{N}_x \neq \mathbf{G}$, т. е. $\chi \in \text{Irr}_2(\mathbf{G})$.

Ввиду 1.17 $\mathbf{G} \cong L(q)$ или $\mathbf{G} \cong M(q)$. Заметим, что каждая из групп $L(q)$, $M(q)$ содержит нормальный делитель $L_0(q) = \left\{ x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} \mid a, b, c, d \in F_q, ad - bc \in F_q^{*2} \right\} \cong \text{PSL}(2, q)$, причем

$|\bar{L}(q) : \bar{L}_0(q)| = 1$, если $p = 2$, $|\bar{L}(q) : \bar{L}_0(q)| = 2$ при $p \neq 2$, $|\bar{M}(q) : \bar{L}_0(q)| = 2$. Поэтому группа G содержит нормальный делитель $G_0 \cong \text{PSL}(2, q)$ индекса ≤ 2 . Так как $G_0 \neq \{1\}$ и G — монолит

с минимальным нормальным делителем F , то $F \leq G_0$. Если $q \in \{2, 3\}$, то G разрешима и, следовательно, $F(G) \neq 1$. Таким образом, $q \notin \{2, 3\}$, откуда вытекает, что G_0 — нециклическая простая группа. Ввиду $F \triangleleft G_0$ отсюда следует, что $F = G_0$, т. е. $F \cong \text{PSL}(2, q)$. Так как $F > P$, в силу (11) $G = P \cdot H$ и, следовательно, $G/F \cong H/F \cap H$. Поэтому $|F : F \cap H| = |G : H| = q$. Так как $F \cong \text{PSL}(2, q)$ и F содержит подгруппу индекса q , ввиду 1.19 и условия $q \notin \{2, 3\}$, возможны лишь следующие случаи: 1) $q = 5$; 2) $q = 7$; 3) $q = 11$. Во всех случаях группа $M(q)$ не существует и, следовательно, $G \cong L(q)$. Как известно, группа $\text{PGL}(2, q)$ при $q \in \{7, 11\}$ не содержит подгрупп индекса q . Так как группа G содержит подгруппу H индекса q , остается случай $q = 5$. Таким образом, $G \cong L(5) \cong S_5$, $F \cong \text{PSL}(2, 5) \cong A_5$. Так как $|H| = 5^2 - 1 = 24$, то $H \cong S_4$. Наконец, $\chi(1) = 5$. Тем самым все утверждения леммы доказаны.

2.9. Теорема. Пусть $\chi \in \text{Irr}^*(G)$ и H — χ -максимальная подгруппа группы G . Тогда а) $G/H_G \cong C(2)$, если $\chi \in \text{Irr}_1(G)$ (в этом случае $H_G = H$ и, следовательно, $|G : H| = 2$). Подгруппа H вполне определяется характером $\chi : H = G \setminus T_x$; б) G/H_G — группа Фробениуса максимального типа, если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ и $F(G/H_G) \neq \{1\}$. Подгруппа H_G отлична от $\{1\}$ и однозначно определяется характером $\chi : H_G = N_x \setminus T_x$; в) $G/H_G \cong S_5$, если $\chi \in \text{Irr}_2(G)$ и $F(G/H_G) = \{1\}$. Подгруппа H_G однозначно определяется характером $\chi : H_G = Z(\chi)$. Степень $\chi(1)$ характера χ равна 5.

Доказательство. Все утверждения легко вытекают из лемм 2.7, 2.8 и 2.2.

2.10. Следствие. Если группа G содержит такую χ -максимальную подгруппу H , что $H_G = \{1\}$, то $G \cong S_5$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы 2.9, если учесть, что в случаях а) и б) $H_G \neq 1$.

2.11. Следствие. χ -максимальные подгруппы группы G (в случае, если они существуют) сопряжены между собой.

Доказательство. Подгруппы, сопряженные с χ -максимальной подгруппой группы G , очевидно, χ -максимальны. Пусть H и K — χ -максимальные подгруппы группы G . Тогда в силу 2.9 $H_G = K_G = D$. В случае а) из 2.9 следует $H = K$. В случае б) H/D и K/D сопряжены как дополнительные множители группы Фробениуса G/D , откуда вытекает сопряженность подгрупп H и K . В случае в) подгруппы H/D и K/D группы C/D сопряжены, так как $G/D \cong S_5$ и $|H/D| = |K/D| = 24$ в силу 2.8 д). Следовательно, и в этом случае подгруппы H и K сопряжены.

Список литературы: 1. Вейцблит А. И. О нулях неприводимых характеров конечных групп. М., 1978. С. 1—15. Деп. в ВИНТИ 12.12.78. № 3767—78. 2. Жмудь Э. М. О нулях групповых характеров//Успехи мат. наук. 1977. 32, Вып. 6. С. 223—224. 3. Жмудь Э. М. Об ограничении групповых характеров на субнормальные подгруппы//Вопр. теории групп и гомол. алгебры. 1983. С. 33—42. 4. Жмудь Э. М. О числе нулей групповых характеров//Вопр. теории групп и гомол. алгебры. 1987. С. 38—47. 5. Жмудь Э. М., Островская С. И. О числе нулей групповых характеров П//Вопр. теории групп и гомол. алгебры. 1989. С. 38—52. 6. Жмудь Э. М. Об оценках числа нулей неприводимых характеров конечной группы//Publ. Math. (Debrecen). 1986. 33. С. 125—146. 7. Жмудь Э. М. О понятии «связности» конечной группы//Мат. публикации. 1982. 29, Вып. 1, 2. С. 177—189. 8. Burnside W. On arithmetical theorem connected with roots of unity and its application to group characteristics//Proc. Lond. Math. Soc. 2.1.1904. P. 112—116. 9. Gallagher P. X. Zeros of characters of finite groups//J. Algebra. 1966. 4. P. 42—45. 10. Zassenhaus H. Kennzeichnung endlicher linearer Gruppen als Permutationsgruppen//Hamb. Abh. 1936. 11. S. 17—40. 11. Huppert B. Endliche Gruppen I//Berlin Heidelberg New York. 1979. S. 11—27. 12. Arad Z., Chillag D. On finite groups with conditions on the centralizers of p -elements//J. Algebra. 1978. 51, N 1. P. 164—172. 13. Hasse H. Zahlentheorie. Berlin. 1963. S. 1—180.

Поступила в редколлегию 03.09.87

УДК 510.62

В. В. ШЛЯХОВ, С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДИКАТЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ МНОЖЕСТВЕ С НЕПУСТОЙ ВНУТРЕННОСТЬЮ

Рассмотрим произвольную двухзначную функцию $T(x, y)$, принимающую значения 0 или 1, заданную на декартовом квадрате $V \times V$ произвольного множества V и принадлежащую некоторому линейному пространству H . Назовем эти функции предикатами.

Будем считать, что внутренность V не пуста. Это означает, что найдется элемент $x_0 \in V$ и число $\varepsilon > 0$, для которых $u_{x_0}(\varepsilon) = \{x \in H : \|x - x_0\| \leq \varepsilon\}$, ε — окрестность элемента x_0 радиуса ε , принадлежит множеству $V : u_\varepsilon(x_0) \subset V$. Зафиксируем произвольный элемент $x \in H$ и число $\lambda \geq \|x\|$. Тогда, если

рассмотреть $x' = x_0 + \frac{\varepsilon x}{\lambda}$, то элемент $x' \in u_\varepsilon(x_0)$. Действитель-

но, $\frac{\|x\|}{\lambda} \leq 1$ и $\|x' - x_0\| = \frac{\varepsilon \|x\|}{\lambda} \leq \varepsilon$. Таким образом, преоб-

разование $L^\lambda x = x_0 + \frac{\varepsilon x}{\lambda} = x'$ „загоняет“ произвольный элемент пространства H при фиксированных x_0 и ε в $u_\varepsilon(x_0)$. Для пары элементов $x, y \in H$ можно однозначно найти $x', y' \in u_\varepsilon \times (x_0)$ по следующему правилу:

$$x' = L^\lambda x, y' = L^\lambda y, \text{ где } \lambda = \max \{\|x\|, \|y\|\}.$$

Теперь мы имеем возможность определить продолжение (однозначное) произвольного предиката $T(x, y)$ с множества V на все пространство H .

О п р е д е л е н и е. (x_0, ε) -продолжением предиката $T(x, y)$, заданного на декартовом квадрате множества V с непустой внутренностью, будем называть предикат $\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y)$, определенный на декартовом квадрате всего пространства H следующим равенством

$$T_{(x_0, \varepsilon)}(x, y) = \begin{cases} T(x, y), & \text{если } x, y \in V; \\ T(L^\lambda x, L^\lambda y), & \text{если } x \in V \text{ или } y \notin V. \end{cases} \quad (1)$$

Установим одно интересующее нас свойство (x_0, ε) -продолжения предиката $T(x, y)$.

Пусть предикат $T(x, y)$ является линейным, т. е. он определен на $V \times V$ равенством

$$T(x, y) = D(Fx, Fy), \quad (2)$$

где $F: H \rightarrow M$ — линейный оператор, проектирующий пространство H , в какое-то его подпространство M , а D — предикат равенства.

Справедливо следующее

Свойство 1. Если $T(x, y)$ линейен, то $\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y)$, определенный на $H \times H$ соотношением (1), не зависит от выбора элемента $x_0 \in V$ и числа ε , для которого $u_{x_0}(\varepsilon) \subset V$, и является однозначным продолжением, которое мы будем обозначать $\hat{T}(x, y)$.

Доказательство. Пусть произвольная пара элементов $x, y \in H$ принадлежит $V \times V$. Тогда из равенства (1) вытекает, что $\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y) = T(x, y)$, т. е. не зависит от x_0 и ε .

Допустим теперь, что $(x, y) \notin V \times V$. Тогда, если $\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y) = 1$, то из (1), (2) следует цепочка равенств

$$T(L^\lambda x, L^\lambda y) = 1; D(FL^\lambda x, FL^\lambda y) = 1; FL^\lambda x = FL^\lambda y.$$

Учитывая линейность оператора F и вид оператора L^λ , получим

$$Fx_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} Fx = Fx_0 + \frac{\varepsilon}{\lambda} Fy,$$

т. е. $Fx = Fy$. Цепочка выписанных равенств сохранится, если ее проводить в обратном порядке. Таким образом, будем справедливо

$$\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y) = D(Fx, Fy), \quad (3)$$

т. е. наше продолжение не зависит от x_0 и ε . Свойство доказано.

Замечание 1. Равенство (3) выявляет структуру продолжения $\hat{T}(x, y)$ в случае если $T(x, y)$ линейен. Однозначное продолжение

$\hat{T}(x, y)$ тоже будет линейным предикатом, только заданным на декартовом квадрате всего пространства H .

Замечание 2. Если предикат $T(x, y) \neq D(Fx, Fy)$, то продолжение $\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y)$ может существенно зависеть от выбора (x_0, ε) и не будет являться линейным предикатом на всем пространстве для любых $x_0 \in V$ и $\varepsilon > 0$.

Поясним последнее замечание на простом примере. Пусть V можно разбить на объединение двух множеств V_1 и V_2 с непустыми внутренностями и на $V_1 \times V_1$ предикат $T(x, y)$ линейен, а на $V_2 \times V_2$ тождественно равен 0. Тогда, если $x_0 \in V_2$ и $u_1(x_0) \subset V_2$, то $\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y) \equiv 0$, если же $x_0 \in V_1$ и $u_1(x_0) \subset V_1$, то на дополнении V_2 до всего пространства $\hat{T}_{(x_0, \varepsilon)}(x, y)$ будет линейен, а на V_2 — тождественно равным 0. В итоге два эти продолжения будут отличаться друг от друга, но оба они на $H \times H$ не будут являться линейными предикатами.

Все эти результаты позволяют сформулировать и доказать следующую теорему о линейных предикатах, заданных на произвольном множестве V с непустой внутренностью, или, как еще их принято называть, предикатах n -мерной линейности, если $\dim M = n$.

Теорема. Произвольный предикат $(T(x, y))$, заданный на декартовом квадрате $V \times V$, является линейным тогда и только тогда, когда его (x_0, ε) -продолжение на все пространство H не зависит от выбора $x_0 \in V$ и $\varepsilon > 0$, т. е. имеет вид $\hat{T}(x, y)$ и обладает следующими характеристическими свойствами:

1. $\hat{T}(x, x) = 1$ — рефлексивность;
2. $\hat{T}(x, y) = 1 \Rightarrow \hat{T}(y, x) = 1$ — симметричность;
3. $\hat{T}(x, y) = 1, \hat{T}(y, z) = 1 \Rightarrow \hat{T}(x, z) = 1$ — транзитивность;
4. $\hat{T}(x_1, y_1) = 1, \hat{T}(x_2, y_2) = 1 \Rightarrow \hat{T}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 1$ — аддитивность;
5. $\exists \{e_i\}_{i=1}^n \in H: \forall x \in H \exists!$ набор чисел $\{a_i(x)\}_{i=1}^n: T(x, \sum_{i=1}^n a_i \times (x) e_i) = 1$ — n -мерность;
6. Функционалы $a_i(x)$ — непрерывны в метрике H -непрерывность.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(T(x, y))$ — линейен. Тогда, используя свойство (x_0, ε) — продолжения, получим, что оно не зависит от x_0, ε и, как следует из замечания 1, $\hat{T}(x, y)$ имеет вид (3) на $H \times H$. В этом случае, очевидно, что $\hat{T}(x, y)$ рефлексивен, симметричен, транзитивен. Докажем аддитивность предиката $\hat{T}(x, y)$. Пусть $x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$ таковы, что $\hat{T}(x_1, y_1) =$

$\hat{T}(x_2, y_2) = 1$. Это означает, что при любом $i = 1, n$, $x_1 \circ a_i = y_1 \circ a_i$, $x_2 \circ a_i = y_2 \circ a_i$. Складывая левые и правые части этих равенств, получаем $(x_1 + x_2) \circ a_i = (y_1 + y_2) \circ a_i$, что означает $\hat{T}(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 1$. Докажем n -мерность $\hat{T}(x, y)$. Примем в качестве векторов $l_1, l_2, \dots, l_n$, фигурирующих в условиях n -мерности, соответственно векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$, образующие ортонормированный базис линейной оболочки векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Требование n -мерности предиката $\hat{T}(x, y)$ теперь заключается в том, чтобы уравнение было однозначно разрешимо относительно набора чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ при каждом фиксированном $x \in V$. Данное уравнение эквивалентно системе

$$x \circ a_k = \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \circ a_k \quad (k = \overline{1, n}).$$

Но $a_k = \sum_{i=1}^n \beta_{ki} e_i$, где β_{ki} — координаты вектора a_k в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$. Значит,

$$x \circ a_k = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \right) \circ \left(\sum_{i=1}^n \beta_{k_i} e_i \right) = \sum_{i=1}^n \beta_{k_i} \alpha_i \quad (k = \overline{1, n}),$$

или

$$\begin{aligned} \beta_{11}\alpha_1 + \beta_{12}\alpha_2 + \dots + \beta_{1n}\alpha_n &= x \circ a_1; \\ \beta_{21}\alpha_1 + \beta_{22}\alpha_2 + \dots + \beta_{2n}\alpha_n &= x \circ a_2; \\ \vdots &\quad \vdots \\ \beta_{n1}\alpha_1 + \beta_{n2}\alpha_2 + \dots + \beta_{nn}\alpha_n &= x \circ a_n. \end{aligned} \tag{4}$$

Так как строки матрицы системы (4) линейно независимы, система имеет при каждом $x \in V$ единственное решение, что доказывает n -мерность $T(x, y)$.

В соответствии с (4) числа a_i представляют собой линейные комбинации чисел $x \circ a_1 x \circ a_2, \dots, x \circ a_n$, непрерывно зависящих от x . Значит, функционалы $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$ непрерывны. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть предикат $\hat{T}(x, y)$ обладает свойствами 1—6. Докажем, что функционалы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ линейны. Это следует из n -мерности и аддитивности предиката $\hat{T}(x, y)$. Теперь покажем, что векторы a_1 , a_2 , ..., a_n линейно независимы. С этой целью установим, что функционалы $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, ..., $\alpha_n(x)$ линейно независимы. Это свойство вытекает из рефлексивности

и n -мерности предиката $\hat{T}(x, y)$. Докажем, наконец, что векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейно независимы. Рассмотрим уравнение

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right) = 0.$$

Из него следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \right) \circ x = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \circ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i(x) = 0.$$

Теперь можно утверждать, что предикат $\hat{T}(x, y)$ может быть представлен в виде (2), то есть является предикатом n -мерной линейности. Если бы $T(x, y)$ был не линейен, то как следует из замечания 2, его продолжение зависело бы от выбора x_0 , ε и, главное, не являлось бы линейным предикатом на всем пространстве H . Противоречие. Следовательно, $T(x, y)$ имеет вид (1). Достаточность доказана. Это завершает доказательство всей теоремы.

На примере свойства аддитивности поясним схематично экспериментальную проверку свойства 1—6 в данной ситуации.

Пусть мы имеем предикат $T(x, y)$ на $V \times V$. Допустим $x_1, y_1, x_2, y_2 \in V$. Рассчитаем для всех этих элементов $L^\lambda x_1, L^\lambda x_2, L^\lambda y_1$ и $L^\lambda y_2$. Допустим $T(L^\lambda x_1, L^\lambda y) = (L^\lambda x_2, L^\lambda y_2) = 1$. Тогда рассчитаем $x_1 + x_2, y_1 + y_2$ и в случае необходимости $L^\lambda(x_1 + x_2), L^\lambda(y_1 + y_2)$ (все зависит от принадлежности элементов $x_1 + x_2$ и $y_1 + y_2$ множеству V). Тогда, если $T(L^\lambda(x_1 + x_2), L^\lambda(y_1 + y_2)) = 1$, то аддитивность имеет место, в противном случае — нет.

В заключение коротко остановимся на содержательной стороне тех вопросов, которые рассматриваются в данной работе. При решении задачи идентификации методом сравнения, когда на вход «черного ящика» подается пара сигналов x, y , а на выходе фиксируется сравнительная реакция («на равенство»), возникает необходимость в изучении свойств предикатов [1—3]. Однако эти свойства существенным образом зависят от области определения предиката. В данной работе выбрана область определения в виде подмножества линейного пространства с непустой внутренностью. Такой случай рассматривается впервые и наиболее адекватно отражает реальную ситуацию.

Список литературы: 1. Сарнавский Н. Г., Шабанов-Кушнаренко Ю. П. Вопросы математической теории цветового зрения//АСУ и приборы автоматки. 1981. Вып. 58. С. 101—107. 2. Шляхов В. В., Герасин С. Н. Об условиях существования n -мерно сдвинутых предикатов//Пробл. бионики. 1988. Вып. 40. С. 53—58. 3. Ицков Ф. Э., Ситников Д. Э., Шабанов-Кушнаренко С. Ю. Предикаты n -мерной линейности и их характеристические свойства//Пробл. бионики. 1985. Вып. 35. С. 65—73.

Поступила в редакцию 21.03.89

О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ КРИВЫХ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ранее [1—3] изучались линейные преобразования (ЛП) случайных процессов, рассматриваемых как кривые в соответствующих гильбертовых пространствах. Линейные преобразования позволяют из данного случайного процесса получать широкие классы случайных процессов. В работе [1, 2] было введено понятие стационарной дилатации стационарного случайного процесса, а в [3] это понятие было обобщено на нестационарные дилатации стационарных случайных процессов.

Случайный процесс $y(t)$ называется дилатацией r -го порядка случайного процесса $x(t)$, если существует линейный ограниченный оператор B такой, что $y(t) = Bx(t)$ и $\dim (I - B^*B)H_x = r < \infty$.

Вопрос о том, каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять корреляционная функция (к. ф.) случайного процесса, чтобы он был дилатацией первого порядка стационарного случайного процесса, изучен [3].

Исследуем дилатации некоторых нестационарных случайных процессов, введенных в [4]. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема. Для того чтобы $K(t, s)$ была корреляционной функцией дилатации 1-го порядка полного диссипативного нестационарного линейно представимого случайного процесса 1-го ранга $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы $K(t, s)$ имела вид

$$K(t, s) = K_{xx}(t, s) - \Phi(t) \overline{\Phi(s)},$$

где

$$K_{xx}(t, s) = \int_0^\infty \varphi(t + \tau) \overline{\varphi(s + \tau)} d\tau,$$

причем в случае чисто дискретного спектра y процесса

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} t_{0k} \Lambda_k(t);$$

$$\Lambda_k(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\bar{\lambda}_j - \lambda}{\lambda_j - \lambda} d\lambda$$

$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{0k} R_k(t), \quad \text{где}$$

$$R_k(t) = h_k e^{i\lambda_k t} + \sum_{j=1}^{k-1} h_j \beta_k \beta_j e^{i\lambda_j t} \frac{\prod_{s=1}^{k-1} (\lambda_s - \lambda_j)}{\prod_{s=1, s \neq j}^k (\lambda_s - \lambda_j)};$$

$$\lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2}, \quad |\lambda_k| < c, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$$

в случае спектра в нуле

$$2. \quad \varphi(t) = \int_0^t f_0(x) J_0(2\sqrt{x t}) dx \text{ и}$$

$$\Phi(t) = \int_0^t P(t, x) dx, \text{ где } P(x, t) = \int_0^x h'(\xi) J_0(2\sqrt{t(x-\xi)}) d\xi,$$

$J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка.

Необходимость. Пусть $x(t)$ — линейно представимый полный диссипативный случайный процесс первого ранга [4] и $B \in [H_x, H_x]$,

$$\dim(I - B^*B)_{H_x} = 1 \text{ и } y(t) = Bx(t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_{yy}(t, s) &= (y(t), y(s))_{H_x} = Bx(t), Bx(s))_{H_x} = \\ &= (B^*Bx(t), x(s))_{H_x}. \end{aligned}$$

Представим $I - B^*B$ в таком виде [5]:

$$I - B^*B = DD^*, \text{ где } D \in [E, H_x], (\dim E = 1).$$

(таких представлений бесчисленное множество, возьмем одно из них).

Отсюда

$$K_{yy}(t, s) = (x(t), x(s))_{H_x} - (D^*x(t), D^*x(s))_E.$$

Пусть $\{a\}$ — орт в E , тогда $D^*p = (p, h)a$ и

$$K_{yy}(t, s) = K_{xx}(t, s) - (x(t), h)_{H_x} \overline{(x(s), h)_{H_x}}.$$

Обозначим $(x(t), h)_{H_x} = \Phi(t)$, в этом случае

$$K_{yy}(t, s) = K_{xx}(t, s) - \Phi(t) \overline{\Phi(s)},$$

где

$$K_{xx}(t, s) = \int_0^\infty \varphi(t+\tau) \overline{\varphi(s+\tau)} d\tau \quad (1)$$

и $w(t, s) = \varphi(t) \varphi(s)$ является и. к. ф. случайного процесса $x(t)$ и [4]:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{0k} \Lambda_k(t), \quad (2)$$

где

$$\Lambda_k(t) = \sqrt{2 \operatorname{Im} \lambda_k} \sum_{l=1}^k e^{i\lambda_l t} \frac{\prod_{j=1}^{k-1} (\bar{\lambda}_j - \lambda_l)}{\prod_{j=1(l \neq j)}^k (\lambda_j - \lambda_l)}; \quad (3)$$

$$K_{xx}(t, s) = \sum_{m, l=1}^{\infty} f_{0m} \bar{f}_{0l} \Lambda_{ml}(t, s),$$

а

$$\Lambda_{ml}(t, s) = \int_0^{\infty} \Lambda_m(t + \tau) \overline{\Lambda_l(s + \tau)} d\tau$$

и

$$\Phi(t) = (x(t), h)_{H_x} = (e^{tA} x_0, h)_{H_x}.$$

Воспользуемся для вычисления $\Phi(t)$ представлением [4]:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} ((A - \lambda I)^{-1} x_0, h) d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} (x_0, (A^* - \bar{\lambda} I)^{-1} h) d\bar{\lambda}, \end{aligned} \quad (4)$$

где A — диссипативный оператор и контур интегрирования содержит внутри себя весь спектр оператора A .

Для A можно построить унитарно эквивалентную треугольную модель $\dot{A}$ [4] и воспользоваться ею для вычисления интеграла (4). Тогда $\Phi(t)$ можно представить в виде

$$\Phi(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} \sum_{l=1}^{\infty} f_{0l} f_l(\lambda) d\lambda,$$

где

$$f_l(\lambda) = \frac{h_l}{\bar{\lambda} - \lambda} + i \frac{\beta_l}{\bar{\lambda}_l - \lambda} \sum_{j=1}^{l-1} \frac{h_j \beta_j}{\bar{\lambda}_j - \lambda} \sum_{s=l+1}^{l-1} \frac{\lambda - \lambda_s}{\lambda - \bar{\lambda}_s};$$

$$\Phi(t) = \sum_{l=1}^{\infty} f_{0l} R_l(t),$$

где

$$R_e(t) = h_e e^{i\lambda_e t} + \sum_{j=1}^l \beta_l \beta_j \cdot e^{(i\lambda_j t)} h_j \frac{\prod_{s=1}^{l-1} (\bar{\lambda}_s - \lambda_j)}{\prod_{s=1}^l (\lambda_s - \lambda_j)},$$

$$(h_1, h_2, \dots) \in l_2;$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{0k}|^2 < \infty.$$

Достаточность. $K_{yy}(t, s) = K_{xx}(t, s) - \Phi(t) \overline{\Phi(s)}$, где $K_{xx}(t, s)$ имеет вид (1) и $\omega(t, s) = \varphi(t) \overline{\varphi(s)}$, а $\varphi(t)$ и $\Phi(t)$ вычисляются по (2), (5). $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots\}$ образуют λ -множество и $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$, где $c_k = f_{0k}$ и $(f_0, e_k) = f_{0k}$, $\{e_k\}$ базис в l_2 [4].

Тогда по теореме 7.2 из [4] существует линейно представимый полный диссипативный гауссовский процесс первого ранга $x(t)$, и. к. ф. которого $\omega(t, s) = \varphi(t) \overline{\varphi(s)}$, где $\varphi(t)$ имеет вид (2), а корреляционная функция определяется выражением (1).

С другой стороны, $\Phi(t) = (x(t), h)$. По λ -множеству [4] строим треугольную модель $\dot{A}$ и кривую $\dot{x}(t) = e^{it\dot{A}} x_0$. Далее, $\Phi(t) = \alpha(x(t), h_1)$,

где

$$h = \alpha h_1, \quad \alpha = \frac{\|h\|}{\|e\|}, \quad h_1 = \|e\| \tilde{h}, \quad \tilde{h} = \frac{\tilde{h}}{\|\tilde{h}\|}.$$

Очевидно, что всегда существует унитарный оператор U такой, что $h_1 = Ue$ и e является канальным элементом оператора $\dot{A}$. Тогда

$$\Phi(t) = \alpha(x(t), Ue) = \alpha(U^* x(t), e) = \alpha(x, (t), e),$$

где

$$x_1(t) = Ux(t) = e^{tU^*AU} U^* x_0 = e^{\tilde{A}t} \tilde{x}_0,$$

$\tilde{x}_0 = U^* x_0$, $\tilde{A} = U^* A U$, тогда $\Phi(t) = \alpha \varphi_1(t)$, где $\varphi_1(t) = (x_1(t), e)$, а $x_1(t)$ — полный диссипативный случайный процесс.

Переходя к построению $B \in [H_x, H_x]$, заметим, что единственное условие, которому удовлетворяет B , имеет вид

$$(I - B^* B)g = (g, h)h.$$

Очевидно, существует бесконечное множество ограниченных операторов, удовлетворяющих этому условию.

Пусть $\{a\}$ — орт в E , тогда $\forall p \in H_x$, $D^*p \in E$ и $D^*p = (D^*p, a)_E a = (p, h)_{H_x} a$, где $h = Da$, $DD^*p = (I - B^*B)p = (p, h)h$, а $K_{yy}(t, s) = K_{xx}(t, s) - \Phi(t)\overline{\Phi(s)}$ по определению и $K_{xx}(t, s) = (x(t), x(s))_{H_x}$.

$\Phi(t) = (x(t), h)_{H_x}$, где h фиксированный элемент в H_x . Тогда

$$\begin{aligned}(y(t), y(s))_{H_x} &= (x(t), x(s))_{H_x} - (x(t), h)_{H_x} \overline{(x(s), h)_{H_x}} = \\ &= (Bx(t), Bx(s))_{H_x}, \quad y(t) = UBx(t),\end{aligned}$$

где

U — унитарный оператор, $UB = \tilde{B}$, $y(t) = \tilde{B}x(t)$, $I - \tilde{B}^*\tilde{B} = I - B^*U^{-1}UB = I - B^*B = DD^*$, $y(t)$ является искомой дилатацией.

В случае, когда $yx(t)$ спектр в нуле, рассуждения аналогичны.

Если h совпадает с канальным элементом, представление для $K_{yy}(t, s)$ упрощается:

$$\begin{aligned}K_{yy}(t, s) &= K_{xx}(t, s) - (x(t), g)_{H_x} \overline{(x(s), g)_{H_x}} = \\ &= K_{xx}(t, s) - \varphi(t) \overline{\varphi(s)}.\end{aligned}$$

Оператор B в этом случае может быть построен при помощи преобразования Кэли оператора A :

$$B = (\tilde{A} - \omega I)(\tilde{A} - \omega I)^{-2}, \quad A - A^* = i(\cdot, g)g,$$

$$\text{и } I - B^*B = (\cdot, \psi)\psi, \quad \text{где } \tilde{A} = A_{\text{Re}} + \frac{i}{2\beta}(\cdot, \psi)\psi,$$

$$\psi = (\tilde{A} - \omega I)g, \quad \beta = -2\text{Im } \omega.$$

Результаты данной работы допускают обобщение на случай нестационарных линейно представимых кривых конечного ранга и их дилатаций конечных порядков.

Список литературы: 1. *Niemi N.* On the linear prediction problem of contain non-stationary stochastic processes//Math. Scand. 1976. 39. P. 146—160. 2. *Niemi N.* On stationary dilations and stochastic processes//Commen. P.-M. 1975. 45. P. 111—130. 3. *Пишель Р., Яцевич А.* Дилатации случайных процессов//Теория функций, функцион. анализ и их приложения. 1986. Вып. 46. С. 86—90. 4. *Livsic M. S., Janczewich A. A.* Theory of operator colligations in Hilbert space//J. Wiley. N.—Y. 1979. 220 p. 5. *Бродский М. С.* Унитарные операторные узлы и их характеристические функции//Успехи мат. наук. 1978. 33. Вып. 4. С. 141—168.

Поступила в редколлегию 08.06.89

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРИВЫХ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим векторный случайный процесс (в. с. п.) $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ второго порядка ($M|x_i(t)|^2 < \infty$) с нулевым средним значением ($Mx_i(t) = 0$).

Случайный процесс $x(t)$ с непрерывной корреляционной функцией можно рассматривать как кривую в гильбертовом пространстве $H = \overline{V}c_h x(t_k)$. Векторный случайный процесс $\vec{x}(t)$ с непрерывной корреляционной матрицей $K_{ij}(t, s) = Mx_i(t)x_j(s)$, $i, j = 1, \dots, n$ также можно рассматривать как «пространственную» кривую в гильбертовом пространстве H , натянутом на случайный вектор $\vec{x}(t)$, т. е. $H = \overline{V}c'x_j(t_k)$.

Инфинитезимальной корреляционной матрицей ИКМ назовем матрицу $\check{W}(t, s) = (W_{ij}(t, s))_{i,j=1}^n$, где $W_{ij}(t, s) =$

$$-\frac{\partial}{\partial \tau} K_{ij}(t + \tau, s + \tau)|_{\tau=0}.$$

Процесс $x(t)$ является стационарным в широком смысле, если его корреляционная матрица зависит от разности аргументов, в этом случае $W_{ij}(t, s) \equiv 0$. Следовательно, $W_{ij}(t, s)$ может служить мерой отклонения $x_k(t)$ от стационарных и стационарно связанных процессов.

1. В. с. п. $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ называется линейно представимым, если процессы $x_k(t)$, $k = 1, 2$, линейно представимы, т. е. имеют вид $x_k(t) = e^{itA_k}x_{0k}$, где x_{0k} — некоторый фиксированный элемент пространства H , а A_k — линейный, ограниченный оператор, действующий в этом пространстве.

Очевидно, если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ стационарны и стационарно связаны, то $x_k(t) = e^{itA_k}x_{0k}$, $A = A^*$, $k = 1, 2$.

Следовательно, для того чтобы линейно представимый векторный случайный процесс $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ был стационарен в широком смысле, необходимо и достаточно, чтобы $A_k = A_k^*$ и $A_k = A_l$, $\forall k \neq l$, $k, l = 1, 2$.

Теорема 1 (критерий линейной представимости).

Для того чтобы комплекснозначная матрица—функция $\check{K}(t, s)$ — была корреляционной матрицей линейно представимого процесса

$\vec{x}(t) = (e^{itA_1}x_{01}, e^{itA_2}x_{02})$, где $x_{0k} \in H$, $A_k \in [H]$, необходимо и достаточно, чтобы а) матрица $\check{K}(t, s)$ была эрмитово неотрицательной;
 б) $\check{K}(t, s)$ — дважды непрерывно дифференцируемой;
 в) существовала константа $0 < \mu < \infty$ такая, что

$$\left| \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \langle \vec{a}_k \check{M}(t_k, t_j), \vec{b}_j \rangle \right|^2 \leq \mu \sum_{k,j=1}^{N_1} \langle \vec{a}_k \check{K}(t_k, t_j), \vec{a}_j \rangle \sum_{k,j=1}^{N_2} \langle \vec{b}_k \check{K}(t_k, t_j), \vec{b}_j \rangle,$$

где

$$\vec{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}), \quad \vec{b}_k = (b_k^{(1)}, b_k^{(2)}), \quad a_k^{(i)}, b_k^{(i)} \in \underline{C},$$

$$\check{M}(t_k, t_j) = \frac{\partial}{\partial t} \check{K}(t, s)|_{t=t_k, s=t_j}.$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующей теоремы для случайных полей (см [6]).

2. В. с. п. $\vec{x}(t)$ называется квазистационарным, если

$$\max \text{rang} \sum_{k,j=1}^m \langle \vec{a}_k \check{W}(t_k, t_j), \vec{a}_j \rangle < \infty,$$

где

$$\vec{a}_k = (a_k^{(1)}, a_k^{(2)}), \quad a_k^{(i)} \in \underline{C}, \quad i = 1, 2, m \in \underline{N}.$$

Теорема 2. Для того чтобы случайный процесс

$$\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (e^{itA_1}x_{01}, e^{itA_2}x_{02})$$

был квазистационарным, необходимо и достаточно, чтобы все подпространства $G_{\alpha\beta} = (A_\alpha - A_\beta^*)$ были конечномерными.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 6.2 в [2].

Следствие. Для того чтобы в. с. п. $\vec{x}(t) = (e^{itA_1}x_{01}, e^{itA_2}x_{02})$ был квазистационарным, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $G_A = (2 \operatorname{Im} A)H$ было конечномерным.

В этом случае ИКМ имеет вид $\check{W}(t, s) = \sum_{k=1}^r \check{\Phi}_k(t) \check{\Phi}_k^*(s)$,

где $\check{\Phi}_k(t) = \begin{pmatrix} \varphi_k(t) \\ \psi_k(t) \end{pmatrix}$, $\varphi_k(t) = \langle x_1(t), e_k \rangle$, $\psi_k(t) = \langle x_2(t), e_k \rangle$,

$\{e_k\}$ — ортонормированный базис подпространства G_A , $r = \dim G_A$.

3. Пусть $\vec{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ — векторный линейно представимый случайный процесс, заданный в гильбертовом простран-

стве H . Будем называть спектром этого процесса, объединение спектров операторов A_1 и A_2 . Очевидно, спектр нестационарного процесса лежит в комплексной области, в отличие от стационарного, или является бесконечнократным, если представляет собой вещественное число.

При анализе нестационарных случайных процессов существенную роль играет спектральная теория систем коммутирующих не-самосопряженных операторов. При нахождении КМ и ИКМ можно использовать унитарные преобразования для исследования их структуры. При этом возникает вопрос о существовании одного унитарного преобразования, приводящего пару операторов A_1 и A_2 к треугольному виду.

Существование таких унитарных преобразований изучено в работах [4, 5]. Если A_1 и A_2 являются коммутирующими операторами, их модельные представления следующие:

$$\dot{A}_1 f(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t) a(t) J dt;$$

$$A_2 f(x) = f(x) J (\alpha(x) \sigma_2 + \gamma(x)) + i \int_x^l f(t) a(t) \sigma_2 dt,$$

когда их спектры непрерывны; в случае, когда операторы A_1 и A_2 имеют дискретные спектры, то их модельные представления имеют

$$(\dot{A}_1 f)_k = \lambda_k f_k + i \sum_{s=k+1}^N f_s a_s J;$$

$$(\dot{A}_2 f)_k = f_k J (\sigma_2 \zeta_k + \gamma_k) + i \sum_{s=k+1}^N f_s a_s \sigma_2,$$

где $\alpha(x)$ — неубывающая, ограниченная и непрерывная на $[0, l]$; $a(t)$ — неотрицательная матрица порядка $r \times r$, $r = \dim E$, $\text{spa}(t) \equiv 1$; J — инволюция, $a_k J = 2 \operatorname{Im} \lambda_k$; γ и σ_2 или γ_n и σ_2 удовлетворяют некоторым дополнительным условиям (подробно см [4]).

Одновременное приведение пары операторов A_1 и A_2 к треугольному виду позволяет ввести некоторые классы нестационарных векторных случайных процессов и дать классификацию их спектров.

Предположим, что $\dim(2 \operatorname{Im} A_k) H = 1$. В случае, когда у A_1 и A_2 — непрерывный спектр, тогда

$$\dot{A}_1 f(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t) dt;$$

$$\dot{A}_2 f(x) = (\sigma_2 \lambda(x) + \tilde{\gamma}) f(x) + i \int_x^l f(t) dt;$$

$$(\dot{A}_1 - \dot{A}^*) f(x) = 2 \operatorname{Im} \dot{A}_1 f(x) + [(1 - \sigma_2) \alpha(x) - \tilde{\gamma}] f(x) +$$

$$+ i \int_0^x (1 - \sigma_2) f(t) dt;$$

$$(\dot{A}_2 - \dot{A}_1^*) f(x) = 2 \operatorname{Im} \dot{A}_2 f(x) + [(\sigma_2 - 1) \alpha(x) + \tilde{\gamma}] f(x) + \\ + i \int_0^x (\sigma_2 - 1) f(t) dt;$$

$$\tilde{W}(t, s) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \overline{\varphi_{11}(s)} & \varphi_{11}(t) \overline{\varphi_{21}(s)} \\ \varphi_{22}(t) \overline{\varphi_{12}(s)} & \varphi_{22}(t) \overline{\varphi_{22}(s)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$B = \langle [(1 - \sigma_2) \alpha(t) - \tilde{\gamma}] \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(s) \rangle + i \int_0^x (1 - \sigma_2) \dot{x}_1(t) dt, \dot{x}_2(s);$$

$$C = \langle [(\sigma_2 - 1) \alpha(t) + \tilde{\gamma}] \dot{x}_2(t), \dot{x}_1(s) \rangle + i \int_0^x (\sigma_2 - 1) \dot{x}_2(t) dt, \dot{x}_1(s).$$

В случае, когда у A_1 и A_2 — дискретный спектр (ограничимся случаем, когда они диссипативные), имеем

$$(\dot{A}_1 f)_k = (\alpha_k + \frac{i}{2} \beta_k^2) f_k + i \sum_{j=k+1}^N f_j \beta_j \beta_k;$$

$$(\dot{A}_2 f)_k = \left(\alpha_k + \frac{i}{2} \beta_k^2 + \tilde{\gamma} \right) f_k + i \sum_{j=k+1}^N f_j \beta_j \beta_k;$$

$$(\dot{A}_1 - \dot{A}_2^*) f_k = (2 \operatorname{Im} \dot{A}_1) f_k + (i \beta_k^2 - \tilde{\gamma}) f_k;$$

$$(\dot{A}_2 - \dot{A}_1^*) f = (2 \operatorname{Im} \dot{A}_2) f_k + (\tilde{\gamma} - i \beta_k^2) f_k;$$

и

$$\tilde{W}(t, s) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t) \overline{\varphi_{11}(s)} & \varphi_{11}(t) \overline{\varphi_{21}(s)} \\ \varphi_{22}(t) \overline{\varphi_{12}(s)} & \varphi_{22}(t) \overline{\varphi_{22}(s)} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ (\tilde{\gamma} - i \beta_k^2) \langle \dot{x}_2(t), \dot{x}_1(s) \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(s) \rangle (i \beta_k^2 - \tilde{\gamma}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\varphi_{kj}(t) = \langle \dot{x}_k(t), e_j \rangle$, $\{e_k\}$ — орт подпространства $(2 \operatorname{Im} A_k) H$,

$$\dot{x}_k(t) = e^{it \dot{A}_k} x_{0k}, \quad \dot{A}_k = U A_k U^{-1}, \quad x_{0k} = U x_{0k}.$$

Из вида $\tilde{W}(t, s)$ и из теоремы 2 получаем следующее

Утверждение. Для того, чтобы линейно представимый случайный векторный процесс $\vec{x}(t) = (e^{itA_1}x_{01}, e^{itA_2}x_{02})$ был квазистационарным, необходимо и достаточно, чтобы оператор A_2 был конечномерным возмущением оператора A_1 , т. е. $A_2 = A_1 + \sum_{k=1}^n \langle j \cdot e \rangle_k$

Если один из операторов A_k имеет дискретный спектр, а другой чисто непрерывный, то их можно одним унитарным преобразованием привести к треугольному виду, если они дважды перестановочны, т. е. $[A_k, A_j] = 0$, $[A_k^*, A_j] = 0$, $k \neq j$, $k, j = 1, 2$. Кроме того, должно выполняться условие $\dim \cap (\text{Im} A_k) H = r < \infty$ (см [5]). Их треугольные представления следующие:

$$\dot{A}_1 f(x_1, x_2) = \lambda_k f(k, x_2) + i \sum_{j=1}^{k-1} f(j, x_2) a_1(t_j) J_1 [\mu_1(t_{j+1}) - \mu_1(t_j)];$$

$$\dot{A}_2 f(x_1, x_2) = \alpha(x_2) f(k, x_2) + i \int_0^{x_2} f(k, t) a_2(t) d\mu_2(t).$$

Итак, если $\vec{x}(t) = (e^{itA_1}x_{01}, e^{itA_2}x_{02})$, где A_1 имеет дискретный спектр, а A_2 чисто непрерывный спектр, причем A_k ($k=1, 2$) дважды перестановочны с $\dim \cap (\text{Im} A_k) H = r < \infty$, то существует модельное пространство $L_2(l_2)$, операторы $\dot{A}_k$ и изометрический оператор U такой, что $UA_k = \dot{A}_k U$. ИКМ для данного процесса $\vec{x}(t)$ имеет вид

$$\check{W}(t, s) = \begin{pmatrix} \langle 2 \text{Im} \dot{A}_1 \dot{x}_1(t), \dot{x}_1(s) \rangle \frac{1}{i} \langle (\dot{A}_1 - \dot{A}_2^*) \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(s) \rangle \\ \frac{1}{i} \langle (\dot{A}_2 - \dot{A}_1^*) \dot{x}_2(t), \dot{x}_1(s) \rangle \langle 2 \text{Im} \dot{A}_2 \dot{x}_2(t), \dot{x}_2(s) \rangle \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k,j=1}^{\infty} \langle 2 \text{Im} \dot{A}_1 \dot{x}_1(t), \varphi_{kj} \rangle \langle \varphi_{kj}, \dot{x}_1(s) \rangle \frac{1}{i} \sum_{k,j=1}^{\infty} \langle (\dot{A}_1 - \dot{A}_2^*) \dot{x}_1(t), \varphi_{kj} \rangle \times \\ \times \langle \varphi_{kj}, \dot{x}_2(s) \rangle \\ \frac{1}{i} \sum_{k,j=1}^{\infty} \langle (\dot{A}_2 - \dot{A}_1^*) \dot{x}_2(t), \varphi_{kj} \rangle \langle \varphi_{kj}, \dot{x}_1(s) \rangle \sum_{k,j=1}^{\infty} \langle 2 \text{Im} \dot{A}_2 \dot{x}_2(t), \varphi_{kj} \rangle \times \\ \times \langle \varphi_{kj}, \dot{x}_2(s) \rangle \end{pmatrix},$$

где $\varphi_{kj} = \varphi_{kj}(t, s) = \varphi_k(t) \varphi_j(s)$ — ортонормированная система в пространстве $L_2(l_2)$ со скалярным произведением

$$\langle f(k, x), g(k, x) \rangle = \int_0^{b_2} \sum_{k=1}^{\infty} f(k, x) \overline{g(k, x)} [\mu_1(t_{k+1}) - \mu_1(t_k)] d\mu_2(x).$$

Здесь $\varphi_k(t)$ — ортонормированная система в l_2 , например, последовательность векторов $l_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $k=1, 2, 3, \dots$, а $\varphi_j(s)$ — ортонормированная система в $L_2([0, l_2], \mu_2)$, например, функции Лагерра $L_n(x)e^{-x}$ получены ортогонализацией системы функций $x^n e^{-x}$, $n=0, 1, 2, \dots, d$, $\mu_2(x) = e^{-x} dx$.

Список литературы: 1. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1954. 499 с. 2. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Х., 1971. 160 с. 3. Бродский М. С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., 1969. 287 с. 4. Золотарев В. А. Треугольные модели и задачи Коши для характеристических функций коммутирующих систем операторов. Х., 1980. 65 с. Деп. в ВНИИТИ № 3978—80. 5. Золотарев В. А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов // Докл. АН Арм. СССР. 1976. № 3. С. 136—140. 6. Янцевич А. А., Аббуи Лиазид. Некоторые классы неоднородных случайных полей. Х., 1984. 54 с. Деп. в УкрНИИТИ № 2206 УК-84.

Поступила в редколлегию 26.01.89

УДК 519.24

ДЖОН НЬЮГОРЕ МАРИУКИ

О КРИВЫХ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕСТАЦИОНАРНЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ

Ранее рассматривался [1—3] стационарный случайный процесс $x(t)$ как кривая в гильбертовом пространстве H . Это позволило применить спектральную теорию самосопряженных операторов для исследования случайных процессов. Установлено [4—6], что результаты, полученные А. Н. Колмогоровым, обобщаются на кривые в H со стационарными n -ми приращениями. Основным аппаратом изучения таких кривых является спектральный анализ самосопряженных и унитарных операторов. В работе [7] был введен широкий класс нестационарных случайных процессов, имеющих после вложения в соответствующее гильбертово пространство H вид $x(t) = e^{itA}x_0$, где A — линейный ограниченный несамосопряженный оператор $A \in [H, H]$, $x_0 \in H$.

Для построения корреляционной теории таких кривых можно применить спектральную теорию несамосопряженных операторов и треугольные модели операторов. В настоящей работе строится корреляционная теория случайных процессов с линейно представимыми приращениями.

Пусть $x(t)$ — случайный процесс

$$Mx(t) = 0, M|x(t)|^2 < \infty, 0 \leq t \leq \infty.$$

Вложим $x(t)$ в гильбертово пространство H и рассмотрим приращение первого порядка кривой $x(t)$:

$$x(t+u) - x(t) = x_u(t).$$

Замечание. Будем рассматривать только тот случай, когда $x(t)$ — непрерывная в среднем квадратичном случайная функция, т. е. $\lim M|x(t+u)-x(t)|^2=0$, причем существуют производные корреляционной функции до второго порядка включительно. Структурная функция (СФ) случайного процесса $x(t)$ определяется равенством $D(t, s; u, u) = (x_u(t), x_u(s))$, где $x_u(t) = x(t+u) - x(t)$.

Определение. Пусть $x(t)$ ($0 \leq t < \infty$) случайный процесс, структурная функция $D(t, s; u, u) = Mx_u(t)x_u(s)$ которого дифференцируема. Функцию $d(t, s; u, u) = -\frac{\partial D(t+\tau, s+\tau; u, u)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}$

будем называть инфинитезимальной структурной функцией (ИСФ) процесса $x(t)$. Из определения ИСФ имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}\right)D(t, s; u, u) = d(t, s; u, u).$$

Определение. Будем говорить, что случайный процесс $x(t)$ допускает линейно представимое приращение, если $x_u(t) = x(t+u) - x(t) = e^{itA}x_u(0)$, где A — линейный ограниченный оператор, действующий в H , $u \in R_1^+$.

Теорема. Для того чтобы функция $D(t, s; u, u)$ ($0 \leq t, s < \infty$) могла быть представима в виде $D(t, s; u, u) = (x_u(t), x_u(s))_H$, где $x_u(t) = e^{itA}x_u(0)$, необходимо и достаточно, чтобы:

1. $\sum_{k,j=1}^N D(t_k, t_j; u, u) a_k a_j \geq 0$ при всех $a_k \in C$, $t_k \in R_1^+$.
2. Функция $D(t, s; u, u)$ имела непрерывные частные производные до второго порядка включительно.
3. Существовала такая константа $0 < M < \infty$, чтобы для любых $a_k, b_k \in C$, $t_k \in R_1^+$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \sum_{p=1}^M a_k b_p \left| \frac{\partial}{\partial t} D(t_k, s_p; u, u) \right|^2 \leq \\ & \leq M \sum_{k,j=1}^N D(t_k, t_j; u, u) a_k a_j \sum_{p,q=1}^M b_p b_q D(s_p, s_q; u, u), \end{aligned}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству в работе [8].

Если $D(t, s; u, u) = D(t-s; u, u)$, то кривая имеет однородное приращение. ИСФ однородного приращения очевидно равна нулю, следовательно, ИСФ можно выбрать в качестве характеристики отклонения от однородности приращения.

Определение. Рангом неоднородности приращения будем называть максимальный ранг квадратичных форм вида

$$\left\{ \sum_{k,m=1}^N d(t_k, t_m; u, u) a_k \bar{a}_m \right\}$$

Теорема о ранге для процессов с линейно представимыми приращениями. Для того чтобы линейно представимое приращение случайного процесса было конечного ранга, необходимо и достаточно, чтобы неэрмитово подпространство $G_A = \dim 2\text{Im} A H$ было конечномерным ($\dim G_A < \infty$), при этом G_A совпадает с максимальным рангом квадратичных форм

$$\left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^N d(t_\alpha, t_\beta; u, u) \xi_\alpha \xi_\beta \right\}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству о ранге в работе [7].

Определение. Случайный процесс $x(t)$ ($0 \leq t < \infty$) называется процессом с диссипативным приращением, если неотрицательны все квадратичные формы $\sum_{k, j=1}^N d(t_k, t_j; u, u) \xi_k \bar{\xi}_j \geq 0$, где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — комплексные числа. Это соответствует диссипативности в случае линейно представимого приращения. Для линейно представимого диссипативного приращения случайного процесса $x(t)$ всегда существует

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} D(t + \tau, s + \tau; u, u). \quad [7]$$

Из определения получаем, что для диссипативного приращения ИСФ и СФ связаны следующим образом:

$$D(t, s; u, u) = D_\infty(t - s; u, u) + \int_0^\infty d(t + \tau, s + \tau; u, u) d\tau.$$

Введем такие классы линейно представимых нестационарных диссипативных приращений: $N_{II}^{(z)}$ если спектр оператора A сосредоточен в нуле и $N_{II}^{(r)}$, если спектр оператора A чисто дискретный.

Пусть вначале $x_u(t) = e^{itA} x_u(0) \in N_{II}^{(1)}$, $x_u(0) \in H$. A — линейный ограниченный диссипативный оператор с одномерным неэрмитовым подпространством, тогда ИСФ имеет вид

$$d(t, s; u, u) = \Phi(t, u) \overline{\Phi(s, u)}, \quad (1)$$

где

$$\Phi(t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_u(0)) \Lambda_k(t),$$

$$\Lambda_k(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} e^{i\lambda t} \overline{g(\lambda)} d\lambda, \quad g(\lambda) = \frac{\sqrt{2 \text{Im} \lambda_k} \prod_{j=1}^{k-1} \bar{\lambda}_j - \lambda}{\lambda_k - \lambda}.$$

Пусть теперь $x_u(t) \in N_{II}^{(1)}$, тогда ИСФ в этом случае

$$d(t, s; u, u) = \Phi(t, u) \overline{\Phi(s, u)}, \quad (2)$$

где

$$\Phi(t, u) = \int_0^l x_u(0, \xi) J_0(2\sqrt{t\xi}) d\xi,$$

$x_u(0) = f_u(0, \xi) \in L^2[0, l]$ при каждом u , $J_0(2\sqrt{t\xi})$ — функция Бесселя нулевого порядка. Так как приращения асимптотически затухающие [7], то

$$\begin{aligned} D(t, s; u, u) &= \int_0^\infty d(t + \tau, s + \tau; u, u) d\tau = \\ &= \int_0^\infty \Phi(t + \tau, u) \Phi(s + \tau, u) d\tau, \end{aligned}$$

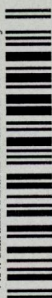
где $\Phi(t, u)$ имеет соответственно вид (1), (2).

Список литературы: 1. Колмогоров А. Н. Интерполирование и экстраполирование стационарных случайных последовательностей//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1941. 5. С. 3—14. 2. Колмогоров А. Н. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве//Докл. АН СССР. 1940. 26. С. 115—118. 3. Колмогоров А. Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений//Докл. АН СССР. 1940. 26, № 1. С. 6—9. 4. Яглом А. М., Пискер М. С. Случайные процессы со стационарными приращениями n -го порядка//Докл. АН СССР. 1953. 90. С. 731—734. 5. Яглом А. М. Корреляционная теория процессов со случайными стационарными приращениями//Мат. сб. 1955. 37(79), Вып. 1. С. 141—196. 6. Пинскер М. С. Теория кривых в гильбертовом пространстве со стационарными n -ми приращениями//Изв. АН СССР. Сер. мат. 1955. 19. С. 319—344. 7. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Х., 1971. 160 с. 8. Янцевич А. А., Аббади Лиазид. Некоторые классы неоднородных случайных полей, Х., 1984. С. 53, Деп. в Укр. НИИНТИ, 08.10.84, № 2206—УК 84.

1 р. 60 к.

„ОСНОВА“

V.N. Karazin Kharkiv National University



00290250

6

ISSN 0453-8048, Вестн. Харьк. ун-та. 1991. № 361. Прикл. математика и механика. 1—113.