Рухи

Курінний Г.Ч, Невмержицька О.М, Шугайло О.О.

Травень 2015 року

Зміст

1 Рухи

Рухи в побутовому розуінні використані Зеноном Елейським для побудови своїх апорій, того, що на сьогодні називають софізмами. З тих пір міркування, що використовують рухи, надовго стали вважатися сумнівними з точки зору правовірної логіки. Візьмемо точку за межами кола, візьмемо лінійку і тримаючи її біля точки обертаємо до тих пір, поки вона не торкнеться кола. Далі з допомогою цієї лінійки будуємо пряму, це і є побудова дотичної до заданого кола, що проходить через задану точку. Така побудова "неправильна", оскільки використовує рух лінійки. Евклідова аксіоматична побудова площини не використовувала поняття руху, чи якогось іншого перетворення площини.

Ситуація докорінно змінилася проголошенням ерлангенської програми Клайна.[1] В цій програмі пропонувалося досліджувати ті властивості фігур на площині, які не змінюються (як кажуть, є інваріантами) при тих чи інших перетвореннях площини.

[1]Christian Felix Klein (25 квітень 1849 – 22 червень 1925) німецький математики, Німецька вимова Klein практично тотожна українському Клайн, але на пострадянському просторі стабільно вживається калька з російської вимови Клейн

На сьогодні існує і “екстремістський“ підхід, коли рухи стають первісними об’єктами, які дають змогу будувати точки, прямі і “рухи рухів“. Цей підхід досліджений групою німецьких математиків. Цілісний виклад цього підходу подано в Ф. Бахман “Построение геометрии на основе симметрии“ — М:Наука, 1969 (Переклад з Friedrich Bahmann “Aufbau der Geometrie aus dem Spigelungsbegriff“ — Berlin:Spigel-Verrlag, 1959)

Проявилося і практичне застосування групи рухів — в комп’ютерній графіці. Пакети символьних обчислень (наприклад, Maple), графічні пакети в редакторах оформлення текстових документів (наприклад, Tex. Latex), системи автоматичного проектування (наприклад, Автокад), графічні редактори (Фотошоп, CoralDraw, PostScript) — всі програми комп’ютерної графіки працюють з рухами.

Рухи також називають симетріями, а останні спостерігаються в творах мистецтва, в технічних виробах. Дослідження груп замощень, групп симетрій кристалів доволило знайти всі можливі кристалічні гратки, дозволила класифікувати типи замощень площини.

Звернемо увагу, що вивчаючи рухи ми не користуємося поняттям парельності "до останньої можливості". Паралельність використовється , коли ми роглядаємо гомотетії, тобто колінеції, що переводять кожну пряму в паралельну. Також нагадаємо (оскільки термінологія не загальноприйнята), що гомотетія з нерухомою точкою називається дилатацією, а гомотетія без нерухомої точки називається паралельним перенесенням. Поняття "довжини"не використовується.

1.1 Група рухів евклідової площини

1.1.1 Класифікація рухів евклідової площини

Щоб перевірити, чи буде певна нетотожна колінеація паралельним перенесенням, потрібно перевірити, чи будуть образи прямих паралельні прообразам, і перевірити відсутність нерухомих точок. Подібним чином перевірити, чи буде певна нетотожна колінеація рухом неможливо, оскільки одна й та ж колінеація може бути елементом однієї групи рухів (отже, бути рухом) і не бути елементом іншої групи рухів цієї ж площини. Тому не очевидно, що паралельні перенесення є рухами, яку б групу рухів ми не розглядали. Нижче вважаємо , що група рухів вибрана.

Теорема 1.1 *Паралельні перенесення є рухами.*

Доведення.

Лема 1.1 *Зовнішній кут трикутника (суміжний до одного з кутів трикутника) більше кожного з кутів трикутника, що не суміжні з ним.*

Доведення. Нехай маємо $\triangle ABC$ і його зовнішій кут $\angle BCE$ (див. рис. 1)

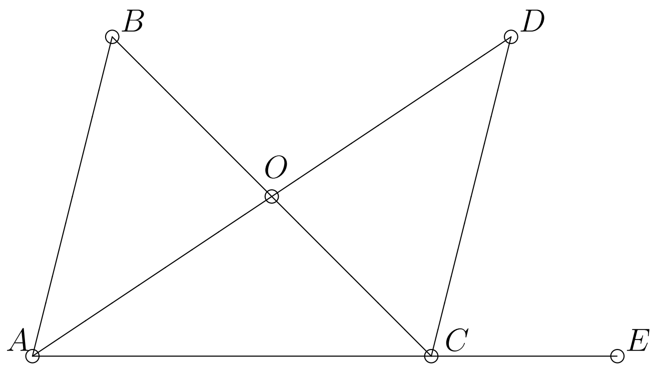

Рис. 1: Зовнішній кут $\angle BCE$ більше кута $\angle BCD$, який конгруентний куту B

Нехай $\triangle ABC$ деякий трикутик; кут $\angle BCE$ зовнішній кут цього трикутника - суміжний до кута $\angle C$; кут $\angle B$ менше кута $\angle BCE$ (звичайно, тут маються на увазі не буквально кути, а класи конгруентних кутів).

Позначимо буквою O середину відрізка $[B, C]$ (існування відрізка уже доведено). Позначимо буквою D таку точку, що точка O лежить між точками A і D і $[AO] \cong [OD]$

Оскільки $[AO] \cong [OD]$, $[BO] \cong [CO]$ і кути $\angle BOD$ та $\angle OD$ конгруентні, то трикутники $\triangle ABO, \triangle DCO$, конгруентні. Звідси одержуємо, що кут $\angle B$ конгруентний куту $\angle BCD$, який менше кута $\angle BCE$.

Далі нам знадобляться умови паралельності прямих за кутами, що утворені цими прямими із деякою січною. Дамо відомі із школи означення без використання креслення.

Означення 1.1 *Нехай a, b дві різні прямі і пряма c, що перетинає пряму a в точці A а пряму b в точці B. Позначимо C таку точку прямої c, для якої можна стверджувати, що A лежить між B і C, а α — одна із півплощин, на які ділить площину пряма c. Позначимо h_1 промінь, що лежить на прямій a, виходить із точки A і лежить в півплощині α; h_2 промінь, що лежить на прямій b, виходить із точки B і лежить в півплощині α. Позначимо k_1 промінь, що лежить на прямій c, виходить із точки A і $C \in k_1$; k_2 промінь, що лежить на прямій c, виходить із точки B і $C \in k_2$, Пряму c в такому разі називаємо січною прямих a, b, а кути $(h_1, k_1), (h_2, k_2)$ називаємо відповідними кутами відносно січної c.*

Лема 1.2 *Якщо дві різні прямі утворюють конгруентні вдповідні кути відносно деякої січної, то ці дві прямі паралельні.*

Доведення. Лему доводимо методом від протилежного. Припустмо, що прямі не паралельні, перетинаються, Тоді дві прямі і січна задають три точки перетину, трикутник, в якому один із відповідних кутів буде внутрішнім, а другий — зовнішній, і за лемою 1.1 ці кути не можуть бути конгруентними.

$\blacksquare$

Лема 1.3 *Нехай A_1, A_2, A_3 три різні колінеарні точки і A_3 знаходиться між A_1 та A_2; промінь h_1 виходить із A_1 і $A_3 \in h_1$; промінь h_2 виходить із A_2 і $A_3 \in h_1$; π — півплощина відносно прямої $A_1 + A_2$. В цих позначеннях рух f, для якого*

$$f(A_1) = A_2, \quad f(h_1) = h_2, \quad f(\pi) = \pi, \tag{1}$$

є паралельним перенесенням.

Доведення. Нехай виконуються умови леми для точок A_1, A_2, A_3, для променів h_1, h_2 і для півплощини α, а а для руху f виконуються умови (1). Потрібно довести, що $f \neq id$ і $f(a) \parallel a$ для будь-якої прямої a.

Те, що $f \neq id$, випливає з того, що $f(A_1) = A_2 \neq A_1$.

Переходимо до перевірки другої визначальної властивості паралельного перенесення — образ кожної прямої паралельний прообразу.

Нехай a деяка пряма, $a \neq A_1 + A_2$. У випадку, коли $a \parallel A_1 + A_2$, ситуація $f(a) \cap (A_1 + A_2) = f(a) \cap (f(A_1) + f(A_2)) \neq \emptyset$, неможлива, оскільки вона суперечить бієктивності відображення f. Отже $f(a) \parallel (A_1 + A_2)$ і $f(a) \parallel a$.

Нехай пряма a перетинає пряму $A_1 + A_2$ в деякій точці B. У випадку, коли $f(a) = a$, точка B буде нерухомою і рух є тотожним, що суперечить припущенню. Отже $f(a) = b \neq a$. Розглядаємо пряму $A_1 + A_2$ як січну до прямих a, b. Оскільки відповідні кути переводяться один в другий рухом f, то вони конгурентні і за лемою 1.2 прямі a та b паралельні.

$\blacksquare$

Переходимо до доведення теореми.

Відомо, що паралельне перенесення однозначно визначається образом однієї точки. Лема 1.3 вказує рух, який є паралельним перенесенням і переводить задану точку в задану точку. Отже кожне паралельне перенесення є рухом.

$\blacksquare$

Означення 1.2 *Рух, який має єдину нерухому точку, називається обертанням.*

Рух, всі нерухомі точки якого утворюють пряму, називається осьовою або дзеркальною симетрією. Та пряма, всі точки якої є нерухомими (образ збігається з прообразом), називається віссю осьової сиетрії.

Паралельним перенесенням називаємо рух, для якого образ кожної прямої паралельний прообразу і не існує нерухомої точки. Якщо A точка і f рух, то пряма $A + f(A)$ називається слідом точки A для руху f.

Якщо f є паралельним перенесенням а g осьовою симетрією, то добуток $f \cdot g$ називають ковзною симетрією.

Тотожне відображення id вважаємо і обертанням і паралельним перенесенням. Відповідно, кожна осьова симетрія є ковзною симетрією.

Теорема 1.2 *Для заданої ковзної симметрії f можна підібрати осьову симетрію g і паралельне перенесення h так, щоб*

$$f = gh = hg.$$

При цьому слід кожної точки для паралельного перенесення h паралельний осі осьової симетрії g.

Якщо слід $A + g(A)$ деякої точки Aдля паралельного перенесення g не паралельний осі осьової симетрії h, то $gh \neq hg$.

Доведення. Нехай f — ковзна симетрія, отже $f = g \cdot h$, де g є паралельним перенесенням, а h — осьова симетрія, вісь якої позначимо u. Тотожне відображення комутує з будь-яким, тому далі вважаємо, що $g \neq id$.

Знайдемо точки A, B так, щоб $g(A) = B$ і точкою перетину прямої $A + B$ з прямою a була середина O відрізка $[A, B]$. Будуємо пряму a, що проходить через точку A паралельно осі u. і пряму b, що проходить через точку B паралельно осі u (див. рис. 2)

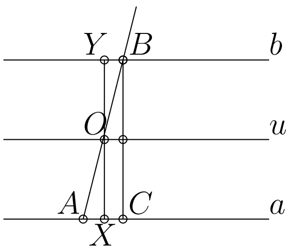

Рис. 2: Існування представлення ковзної симетрії як комутуючого добутку паралельного перенесення на осьову симетрію.

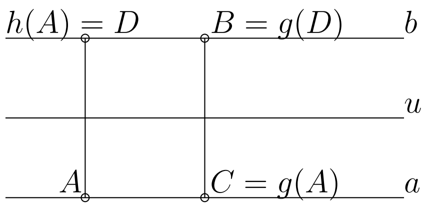

Рис. 3: Комутування паралельного перенесення із осовою симетрією: $hg(A) = h(C) = B = g(D) = gh(A)$.

Проводимо перпендикуляр до прямих a, b через точку O позначаємо точки перетину з цими прямими через $X \in a$ $Y \in b$. Далі проводими перпендикуляр до прямих a, b через точку B позначаємо точку перетину з прямою a через C. Трикутники $\triangle OXB$ та $\triangle OYA$ конгруентні, оскільки в них конгруентні гіпотенуза і прилеглі кути. Звідси одержуємо, що $[X, O] \cong [Y, O]$. $h(a) = b, h(b) = a, h(B) = C$. Прослідкувавши за відображенням півплощин, на які ділять площину прямі a та b, переконуємося в тому, що

$$f = h_1 g_1,$$

де g_1 паралельне перенесення, для якого $g(A) = C$, а h_1 осьова симетрія, для якої прямою нерухомих точок є $A + C$.

Покажемо, що добуток паралельного перенесення на осьову симетрію у випадку, коли вісь осьової симетрії паралельна сліду певної точки для паралельного перенеснення, не залежить від порядку множників. Дійсно, нехай g — паралельне перенесення, h — ковзна симетрія, A — довільна точка, слід якої $a = A + g(A)$ паралельний осі u осьової симетрії h.

Позначимо

$$D = h(A), C = g(A), b = h(a), c = g(A + D)$$

(див. рис. 3). Потрібно довести

$$gh(A) = hg(A). \tag{2}$$

Справді, $g(A) \in a, hg(A) \in h(A) = b$ і

$$C \in C + h(C) = c \perp A \Rightarrow C + h(C) = g(A + D) \Rightarrow hg(A) = h(C) \in g(A + D) = c.$$

Оскільки $hg(A) \in= c$ і $hg(A) \in= b$, то

$$hg(A) = c \cap b = B. \tag{3}$$

Також $gh(A) = g(D) \in g(A + D) = c$,

$$b \parallel u, D + g(D) \parallel u \Rightarrow D + g(D) = b = D + gh(A),$$

і

$$gh(A) = c \cap b = B. \tag{4}$$

Із (3) і (4) випливає (2)

Припустимо, що слід $A + g(A)$ деякої точки A не паралельний осі u осьової симетрії h. Виберемо точку A на осі u і позначимо α ту півплощину, в якій лежить $g(A)$. Тоді

$$hg(A) \notin \alpha, \quad gh(A) = g(A) \in \alpha$$

і $hg(A) \neq gh(A)$.

Теорема доведена.

■

Теорема 1.3 *Якщо для заданої ковзної симметрії f, для осьових симетрій g_1, g_2, та паралельних перенесень h_1, h_2*

$$g_1 h_1 = h_1 g_1 = f = g_2 h_2 = h_2 g_2, \tag{5}$$

то

$$g_1 = g_2 = g, \qquad h_1 = h_2 = h.$$

Нехай для заданої ковзної симметрії f, для осьових симетрій g_1, g_2, та паралельних перенесень h_1, h_2 виконується рівність (5). Позначимо вісь симетрії h_1 через a і через b вісь осьової симетрії h_2. Згідно з попередньою теоремою. сліди паралельних перенесень g_1, g_2 паралельні осям a, b відповідно.

Якщо $a \nparallel b$ і точка A є точкою перетину прямих a і b , то

$$g_1h_1(A) = g_1(A) \in a, \quad g_2h_2(A) \in b,$$

і $g_1(A) = g_2(A) = A, g_1 = g_2 = id$, тобто теорема в цьому випадку правильна.

Припустимо, що $a \parallel b$ і $A \in a$. Тоді $g_1(A) \in a, g_2(A) \in a$ і $h_1g_1(a) = h_1(a) = a = h_2g_2(a) = h_2(a)$. Якщо $a \neq b$, $a \parallel b$.то a лежить в одній півплощині відносно b і $h_2(a) \neq a$. Одержана суперечність обгрунтовує висновок $a = b$, $h_1 = h_2$. Як наслідок, одержуємо рівність $g_1 = g_2$

■

Доведена теорема дозволяє ввести наступне означення.

Означення 1.3 *Нехай f ковзна симетрія і для паралельного перенесення g та осьової симетрії h виконуються рівності $hg = gh = f$. Тоді віссю ковзної симетрії f називаємо вісь осьової симетрії h.*

1.1.2 Добутки рухів

Теорема 1.4 *Добуток обертання на паралельне перенесення є обертанням.*

Доведення. Нехай f обертання з центром (нерухомою точкою) O, а g паралельне перенесення. Розглядаємо лише випадок, коли $g \neq id$. Доведемо існування нерухомих точок у добутків gf та fg.

Виберемо точки A, B так, щоб $g(A) = B$ і точка O була серединою відрізка $[A, B]$. Будуємо три паралельні лінії l, l_1, l_2 перпендикулярно прямій $A + B$ так, що $A \in l_1, O \in l, B \in l_2$. На прямій l виділяєм один із променів, який виходить із точки O — позначимо цей промінь k, Далі будуємо два промені h_1, h_2, що виходять із точки O, так, що виконувались умови: $f(h_2) = h_1$; $(h_1, m) \cong (h_2, m)$; промінь h_2 лежав в тій же півплощині відносно l, що і l_1 (див. рис. 1.1.2)

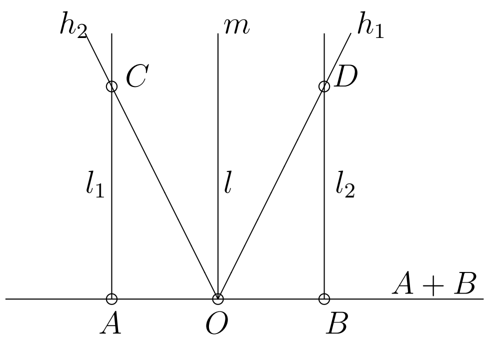

Рис. 4: Побудова нерухомої точки добутку обертання на паралельне перенесення

Позначмо буквою C точку перетину променя h_2 з прямою l_1 а буквою D точку перетину променя h_1 з прямою l_2. Для так побудованих точок C, D буде

$$fg(C) = f(D) = C, \qquad gf(D) = g(C) = D.$$

Існування нерухомих точок для композиції паралельного перенесення і обертання доведене.

Для перевірки єдиності нерухомої точки D дбутку fg зауважуємо, що $\triangle Of(D)D$ рівнобедрений, бісектриса кута при вершині O перпендикулярна основі і ділить основу $[f(D), D]$ пополам. Сказане приводить до пропонованої вище конструкції для знаходження нерухомої точки добутку.

■

Теорема 1.5 *Нехай g — паралельне перенесення, O нерухома точка обертання f і $h, f(h)$ — два промені, що виходять із точки O. Для обертання $f' = gfg^{-1}$ нерухомою точкою є $g(O)$, а для променів $k_1 = f(h_1), k_2 = f(h_2)$ буде $f'(k_1) = k_2$.*

Доведення. Дійсно,

$$f'(g(O)) = gfg^{-1}g(O) = gf(O) = g(O),$$

і

$$f'(k_1) = gfg^{-1}g(h_1) = gf(h_1) = g(h_2) = k_2.$$

Теорема доведена.

■

Теорема 1.6 *Добуток двох ковзних симетрій з паралельними осями є паралельне перенесення.*

Добуток двох ковзних симетрій з непаралельними осями є обертання..

Теорема 1.7 *Нехай f_1, f_2 два обертання з центрами O_1, O_2 відповідно і g — паралельне перенесення, для якого $g(O_1) = O_2$.*

Якщо $f_2 = gf_1^{-1}g^{-1}$, то і $f_1 f_2$ і $f_2 f_1$ є паралельними перенесеннями.

Якщо $f_2 \neq gf_1^{-1}g^{-1}$, то і $f_1 f_2$ і $f_2 f_1$ є обертаннями.

Доведення. Нехай f_1, f_2, O_1, O_2, g як в умові теореми. будемо розглядати лише випадок, коли $f_1, f_2, g \neq id, O_1 \neq O_2$. на прямій $O_1 + O_2$ вибираємо промінь l_1, що виходить із O_1 і промінь l_2, що виходить із O_2. Будуємо чотири промені h_1, h_2, що виходятья із O_1 і m_1, m_2, що виходятья із O_2 та, щоб виконувались умови: $(l_1, h_1) \cong (l_1 h_2)$; $f_1(h_1) = h_2$; $(l_2, m_1) \cong (l_2 m_2)$; $f_2(m_1) = m_2$; промені h_1, m_2 лежать в одній півплощині відносно прямої $O_1 + O_2$.

Виникають дві можливості — промені h_1, m_2 лежать на паралельних прямих або на не паралельних.

Розглядаємо випадок, коли прямі не паралельні. Переходячи за необхідності до доповнювальних променів, досягаємо того, що промені h_1, m_2 перетинаються. Позначаємо буквою A точку перетину променів h_1, m_2, і буквою B точку перетину променів h_2, m_1 (див. рис. 5)

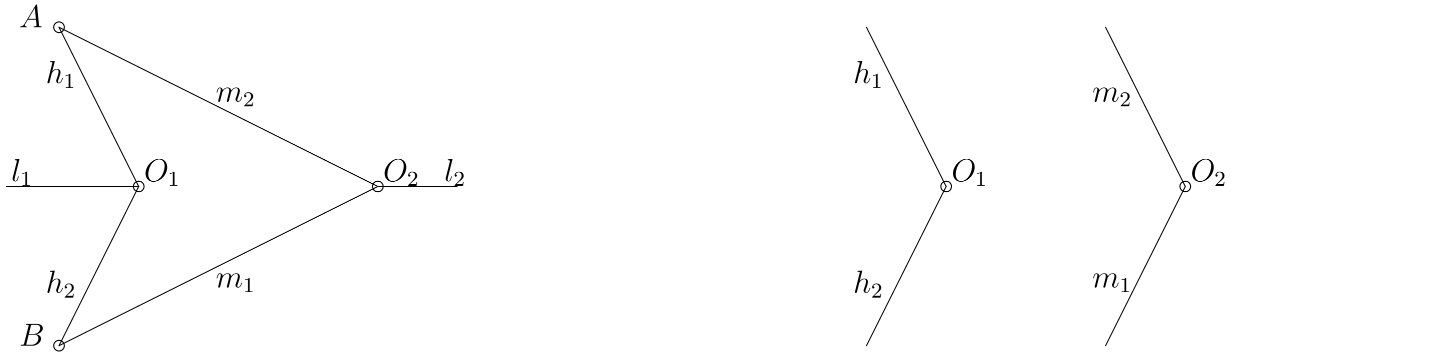

Рис. 5: Знаходження нерухомої точки композиції двох обертань з різними центрами.

Для так побудованих точок A, B маємо

$$f_1(A) = B, \qquad f_2(B) = A,$$

і

$$f_1 f_2(B) = B, \qquad f_2 f_1(A) = A. \tag{6}$$

Навпаки, якщо деяка точка A є нерухомою точкою добутку $f_2 f_1$, то точка $b = f_1(A)$ є нерухомою точкою добутку $f_1 f_2$ і точки A, B лежать на променях h_1, h_2, m_1, m_2 як в попередніх побудовах. Наведені міркування доводять дві речі:

- Якщо нерухома точка добутку $f_1 f_2$ обертань існує, то вона єдина, і існує єдина нерухома точка композиції $f_2 f_1$;
- Якщо промені h_1, m_2 лежать на паралельних прямих, то нерухомої точки композиції $f_2 f_1$ не існує.

Переходимо до випадку, коли промені h_1, m_2 паралельні і, відповідно, для паралельного перенесення $g, g(O_1) = O_2$ виконуються рівності

$$g(h_1) = m_2, \quad g(h_2) = m_1.$$

Лема 1.4 *Нехай O — деяка точка, h — промінь, що виходить з цієї точки, f_1, f_2 — два обертання, для яких $f_1(h) = f_2(h)$. Тоді $f_1 = f_2$.*

Доведення. Коли $f_1(h) = f_2(h) = h$ тоді обертання мають більше однієї нерухомої точки, що можливо лише у випадку, коли $f_1 = f_2 = id$. Розглядаємо випадок, коли $h_1 = f_1(h) = f_2(h) \neq h$. Будуємо промінь m так, щоб $(h, m) \cong (h_1, m)$. Оскільки рух повністю визначається образом однієї точки, образом одного променя, який виходить з цієї точки, та образом однієї півплощини, що визначається вибраним променем, то існує рівно два рухи, які переводить h в h_1. Один із них — осьова симетрія відносно прямої, на якій лежить m, не є обертаннням (має багато нерухомих точок), отже обертання, яке переводить h в h_1, єдине.

Лема доведена.

■

Лема 1.5 *Нехай O_1, O_2 — центри обертань f_1, f_2, g — паралельне перенесення, для якого $g(O_1) = O_2$, m_1, m_2 — два промені, для яких $f(m_1) = m_2$. Тоді*

$$f_2 = gf_1g^{-1} \Leftrightarrow f_2(g(m_1)) = g(m_2).$$

Справді, рух gfg^{-1} як добуток обертання на паралельні перенесення є обертанням. Якщо $f_2 = gfg^{-1}$, то

$$f_2(g(m_1)) = gfg^{-1}g(m_1) = gf(m_1) = g(m_2).$$

Якщо $f_2(g(m_1)) = g(m_2)$, то $f_2 = gf_1g^{-1}$ за попередньою лемою, оскільки ці два обертання однаково діють на один промінь h.

■

Повертємося до доведення теореми. Припускаємо, що композиція f_1f_2 не має нерухомої точки, і відповідно, $f_2 = gf_1^{-1}g^{-1)}$, де $g(O_1) = O_2$. Потрібно довести, що ця композиція є паралельним перенесенням, тобто кожну пряму переводть у паралельну пряму.

Вибираємо будь-яку пряму a, будуємо промінь h_1, що виходить із O_1 паралельно a, позначаємо $h_2 = f_1(h)$,

$$m_1 = g(h_1), \qquad m_2 = g(h(2)), \qquad f_2(m_2) = m_1.$$

Маємо, $a \parallel h_1 \cup \{O_1 \cup \overline{h_1}$ за побудовою; $f_1(a) \parallel h_2 \cup \{O_1 \cup \overline{h_2}$, тому що рух паралельні прямі переводить у паралельні; $f_1(a) \parallel m_2 \cup \{O_1\} \cup \overline{m_2}$ за транзитивністю паралельності; і далі $f_2f_1(a) \parallel m_1 \cup \{O_1\} \cup \overline{m_1} \parallel h_1 \cup \{O_1\} \cup \overline{h_1} \parallel a$. Теорема доведена.

■

Означення 1.4 *Елемент групи називаєься інволюцією, якщо він не є одиницею, але його квадрат є одиницею.*

Теорема 1.8 *Нехай задана точка O. Відображення f площини в себе, для якого O є серединою відрізка $[A, f(A)]$ для будь-якої точки A, є обертанням з центром в точці O,*

Доведення. Нехай задана точка O і h — промінь, що виходить із точки O, α, β — дві півплощини, на які ділить площну пряма Існує і єдиний рух f, який переводить h в $\overline{h}$ і α в β. Вибираємо довільну точку C променя h і довільну точку A півплощини α. Позначаємо (див. рис. 6)

$$B = f(A), \qquad D = f(C).$$

За побудовою

$$\angle DOB \cong \angle AOC.$$

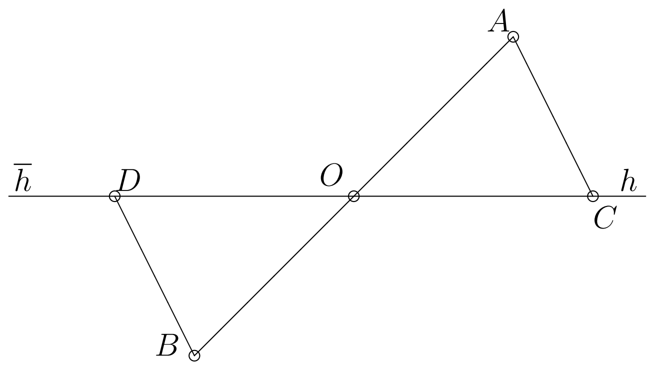

Рис. 6: Існуваня центральної симетрії

Отже ці кути вертикальні і точка O є серединою відрізка $[A, B]$.

Нерухомих точок (окрім O) немає, тому що півплощина α переходить в півплощину β а півплощина β переходить в півплощину α.

■

Означення 1.5 *Обертання f з центром в точці O, для якого виконуєтьcя умова "O є серединою відрізка $[A, f(A)]$ для будь-якої точки A", називаєтьcя центральною симетрією*

Теорема 1.9 *Обертання є інволюцією тоді і тільки тоді, коли воно є центральною симетрією.*

Доведення. Із означення видно, що центральна симерія є інволюція. Якщо ж є інволютивне обертання, то із того, що середина відрізка, який з'єднує образ і прообраз, є нерухомою точкою, випливає, що це обертанння є центральною симетрією.

■

Теорема 1.10 *Пералельне перенесення не може бути інволюцією. Ковзна симетрія є інволюцією тоді і тільки тоді, коли вона є осьовою симетрією.*

Доведення. Інволюція міняє місцями образ із прообразом і лишає не місці середину відрізка, який з'єднує образ із прообразом. Оскільки у нетотожного паралельного перенесеня немає нерухомих точок, то паралельне перенесення не може бути інволюцією.

Оскільки квадрат осьової симетрії лишає на місці промінь на осі симетрії і лишає на місці півплощини, на які ділить площину вісь симетрії, а такий рух єдиний, тотожний, то квадрат осьової симетрії є тотожним рухом і осьова симетрія є інволюцією.

Нехай маємо ковзну симетрію f яка є добутком осьової симетрії f_1 на паралельне перенесення f_2 із слідом, що паралельний осі симетрії. Рівність

$$id = f^2 = (f_1 f_2)(f_1 f_2) = f_2(f_1 f_1) f_2 = f_2^2$$

можлива лише за умови $f_2 = id$.

Теорема доведена.

■

Теорема 1.11 *Композиція двох осьових симетрій з непаралельними осями є обертанням. Кожне обертання є добутком двох осьових симетрій.*

Доведення. Нехай f_1 осьова симетрія з віссю a, а f_2 — осьова симетрія з віссю b і A точка перетину осей a і b, Тоді

$$f_1 f_2(A) = f_1(A) = A.$$

Існування нерухомої точки композиції симетрій доведене.

Нехай B деяка нерухома точка композиції $f_1 f_2$, тобто

$$f_1 f_2(B) = B$$

Тоді

$$f_1 f_1 f_2(B) = f_1(B), \quad f_2(B) = f_1(B).$$

Точка $f_2(B)$ лежить на перпендикулярі, що проведений через точку B перпендикулярно осі b, а точка $f_1(B)$ лежить на перпендикулярі, що проведений через точку B перпендикулярно осі a, Це можливо лише за умови, коли

$$f_1(B) = f_2(B) = B.$$

тобто коли $B = A$. Оскільки рух $f_1 f_2$ має єдину нерухому точку, то він є обертанням.

Нехай маємо нетотожне обертання g і $g(h) = k$ для променів h, k, що виходять і центра обертання O. Позначимо a, b дві прямі — $h \subset a, b$ містять бісектрису кута (h, k) f_1 — осьова симетрія з віссю a, f_2 — осьова симетрія з віссю b. Оскільки $f_2 f_1(h) = k$ і обертання визначється образом одного променя, то

$$g = f_2 f_1.$$

Терема доведена.

■

Теорема 1.12 *Композиція двох ковзних симетрій з непаралельними осями є обертанням.*

Доведення.

Нехай f_1, f_2 — дві ковзні симетрії, $f_1 = g_1 h_1, f_2 = g_2 h_2$, де g_1 — осьова симетрія з віссю a, g_2 — осьова симетрія з віссю b, h_1 — паралельне перенесення з паралельним осі a слідом, а h_2 паралельне перенесення з паралельним осі слідом, Тоді

$$f_1 f_2 = (g_1 h_1)(g_2 h_2) = (g_1 g_2)(h_1 h_2) = gh,$$

де g є обертанням, а h — паралельне перенесення. Оскільки добуток обертання на паралельне перенесення є обертанням, то добуток $f_1 f_2$ є обертанням.

Теорема доведена.

■

Теорема 1.13 *Композиція двох осьових симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням. Кожне пералельне перенеснння є добутком двох осьових симетрій.*

Доведення.

Нехай f_a, f_b - дві різні осьові симетрії, віссю симетрії f_a є пряма a, а віссю симетрії f_b є b. $a \parallel b$. Перевіряємо, що образ $d = f_a f_b(c)$ кожної прямої c паралельний прообразу — $d \parallel c$.

Якщо $a \perp c$, то $d = f_a f_b(c) = f_a(c) = c$ і $d \parallel c$.

Якщо $a \parallel c$, то $d = f_a f_b(c) \parallel f_a(c) \parallel c$ і $d \parallel c$.

Нехай прямі a і c не паралельні і не перпендикулярні. Позначимо B точку перетину прямих c і b, а через A точку перетину прямих $f_b(c)$ і a. Таким чином $f_b(c) = A + B$. Розглядаємо пряму $A + B$ як січну для прямих c і $f_a f_b(c)$. Перевірка показує, що відповідні кути, утворені цією січною з прямими c і $f_a f_b(c)$, конгруентні. Отже прямі c і $f_a f_b(c)$ паралельні.

Через будь-яку точку D площини можна провести пряму c що не паралельна прямим a, b, пряма $f_a f_b(c)$ проходить через точку A на прямій a, що не належить прямій c, отже $c \neq f_a f_b(c)$ і $f_a f_b(D) \neq D$. Таким чином перевірено, що добуток $f_a f_b$ є паралельним перенесенням.

Нехай маємо нетотожне паралельне перенесення g і $g(A) = B$ для точок A, B. Позначимо a, b дві прямі, що перпендикулярні прямій $A + B$, $A \in a$, b проходить через середину відрізка $[A, B]$, f_a — осьова симетрія з віссю a, f_b — осьова симетрія з віссю b. Оскільки $f_2 f_1(A) = B$ і паралельне перенеснння визначється образом однієї точки, то

$$g = f_2 f_1.$$

Теорема 1.14 *Композиція двох ковзних симетрій з паралельними осями є паралельним перенесенням.*

Доведення.Твердження теореми є наслідком теореми про добуток двох осьових симетрій і теореми про однозначне представлення ковзної сметрії у вигляді добутку осьової симетрії та паралельного перенесення, чий слід паралельний осі осьової симтрії.. Дійсно, нехай f_1, f_2 дві ковзні симетрії з осями a, b, g_a, g_b - дві осьові симтрії з осями a, b, $h_1 . h_2$ — паралельні перенесення, чий сліди паралельні осям a, b відповідно, і

$$f_1 = g_a h_1 = h_1 g_a, \qquad f_2 = g_b h_2 = h_2 g_b.$$

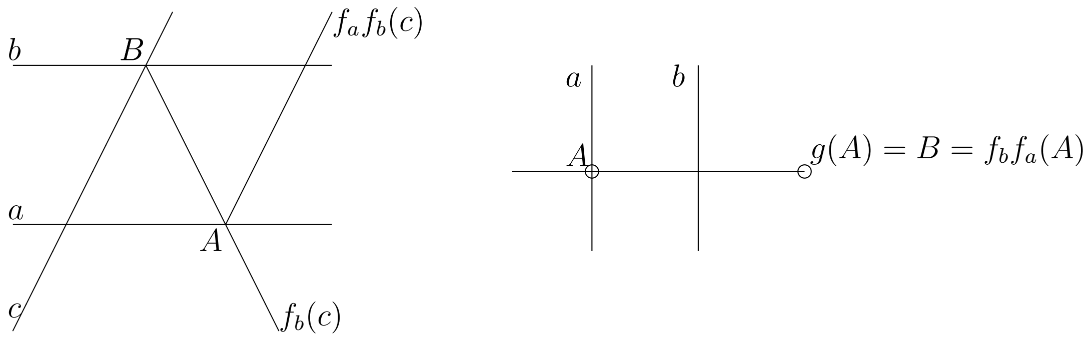

Рис. 7: Добуток двох осьових симетрій є паралельним перенесенням і кожне паралельне перенесення є довбутком двох осьових симетрій

Тоді

$$f_1f_2 = (g_ah_1)(g_bh_2) = (g_ag_b)(h_1h_2) = gh,$$

де g — паралельне пренесення і h паралеьне перенесення. Оскільки добуток двох паралельних перенесень є паралельним перенесенням, то gh і f_1f_2 є паралельним перенесенням.

■

1.2 Орієнтація площини

Нехай маєво два промені h, m, дві прямі $a \supset h, b \supset m$, α — одна із півплощин, на які ділить площину пряма a, а $\beta_1.\beta_2$ — дві півплощини, на які ділить площину пряма b. Вибираємо два рухи — f і і g так, що

$$f(h) = m, \quad f(\alpha) = \beta_1, \qquad f(h) = m, \quad g(\alpha) = \beta_2.$$

Оскільки fg^{-1} є осьовою симетрією, то один із рухів f, g належить підгрупі обертань та паралельних перенесень, а другий належить суміжному класу ковзних симетрій.

Означення 1.6 *Будемо розглядати пари (h, α), де h — промінь на прямій a, а α одна із півплощин, на які ділить площину пряма a. На множині цих пар введемо відношення еківалентності $\sim$ правилом:*

$$(h, \alpha) \sim (m, \beta)$$

тоді і тільки тоді, коли існує паралельне перенесення або обертання f таке, що

$$f(h) = m, \qquad f(\alpha) = \beta.$$

Можна перевірити, що $\sim$ є еквівалентністю з двома класами еквівалентності. Ці класси називаються орієнтаціями площини.

Отже, існують дві орієнтації площини. Задати орієнтацію означає задати промінь і одну із півплощин, що визначаються цим променем. Звичайно орієнтацію задають впорядкованою послідовністю трьох неколінеарних точок — перша точка задає початок променя, друга точка задає напрям променя, третя точка задє півплощину, що задається вибраним променем.

Можна перевірити, що послідовність точок ABC задає ту ж орієнтацію, що і BCA або CAB. Послідовності ABC та ACB задають протилежні орієнтації.

Площина, в якій вибрано промінь і півплощина відносно цього променя, називається орієнтованою. Вибрана орієнтація площини звичайно називається додатною або правою, а протилежна — від'ємною чи лівою.

Вважається, що формально (без застосувань уявлень про навколишнє середовище — гвинти, долоні, годинники та подібне) відрізнити праву орієнтацію від лівої неможливо.

1.3 Підсумок

Паралельне перенесення повністю визначається обазом однієї точки, тому точку та її образ будемо називати параметрами паралельного перенесення.

Обертання повністю визначається центром обертання та образом одного променя, який виходить із центру. Тому точку, промінь, що виходить із цієї точки та його образ називаємо параметрам обертання.

Центральна симетрія задається точкою — ця точка і є параметр центральної симетрії.

Параметром осьової симетрії називаємо її вісь.

Параметрами ковзної симетрії f називаємо параметри осьової симетрії g і паралельного перенесення h таких, що $f = gh = hg$. Отже параметрами ковзної симетрії є пряма (вісь) і дві точки на ній — точка та її образ.

Знайти рух означає вказати його тип (паралельне перенесення, обертання чи ковзна сметрія) і параметри цього руху. Відповідно, вказати рух означає вказати його тип і параметри.

Одержані знання об'єднаємо в одному переліку.

- Кожен рух є або паралельним перенесенням, або обертанням, або ковзною симетрією. Ковзна симетрія не може бути ні паралельним перенесенням ні обертанням. Паралельне перенесення є обертанням тоді і тільки тоді, коли воно є тотожним відображенням.

- паралельні перенесення утворюють комутативну (переставну, абелеву) групу. Ця група є інваріантною підгрупою (нормальним дільником) як в групі гомотетій так і в групі рухів. Інвоюцій в групі паралельних перенесень немає.

- Обертання та паралельні перенесення утворюють інваріантну підгрупу в групі всіх рухів. Інволюціями в цій групі є центральні симетрії і тільки вони.
- Якщо f, g два рухи, то рухи f і gfg^{-1} мають однин і той же тип. Параметрами руху gfg^{-1} будуть параметри руху f, до яких застосовано рух g.
- Ковзні симетрії утворють суміжний клас по підгрупі паралельних пренесень та обертань.
- Ковзна симетрія є інволюцією тоді і тільки тоді, коли вона є осьовою симетрією.
- Кожне паралельне перенесення і кожне обертання є добутком двох осьових сметрій.
- Кожна ковзна симетія є або осьовою симетрією або добутком трьох осьових симетрій.
- Центральна симетрія переставна з осьовою тоді і тільки тоді, коли центр центральної симетрії лежать на осі осьової.
- Дві осьові симетрії переставні тоді і тільки тоді, коли їх осі перпендикулярні одна до другої.
- Осьові симетрії утворюють інваріантну множину твірних групи всіх рухів.
- Прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли добуток відповідних осьових симетрій є паралельним перенесенням.

2 Вправи

2.1 Підбірка рухів та гомотетій на декартовій площині

Вважаємо, що на площині введена прямокутна система координат.

Дилатація (колінеація площини в себе, яка кожну пряму переводить в паралельну і має нерухому точку) k задається нерухомою точкою O і образом $k(A) \in O + A$ точки A

$$O_1(0,0), A_1(1,1), B_1(2,2); \qquad O_2(0,0), A_2(1,1), B_2(-2,-2); \qquad O_3 = (1,2), A_3(2,3), B_3(5,7$$

$$O_4(-2,1), A_4(1,0), B_4(-5,2); \qquad O_5(-1,0), A_5(2,0), B_5(5,0).$$

Паралельне перенесення g задаємо вектором p:

$$p_1 = (1,0), \qquad p_2 = (1,3); \qquad p_3 = (-7,8); \qquad p_4 = (-1,1); \qquad p_5 = (3,9).$$

Обертання f з центром в точці O задаємо двома векторами u і v, маючи на увазі, що кожен вектор u задає промінь , який виходить із точки O в напрямку вектора u, і образ цього променя під дією обертання f має напрям вектора v.

$$O_1(0,0), u_1 = (0,1), v_1 = (1,0); \quad O_2(0,0), u_2 = (1,1), v_2 = (1,0);$$
$$O_3(-3,-4), u_3 = (-7,5), v_3 = (2,1);$$
$$O_4(1,0), u_4 = (-2,3), v_4 = (2,-3); \quad O_5(1,1), u_5 = (-2,3), v_5 = (2,3).$$

Осьова симетрія s і ковзна симетрія t задаються двома точками A і B. Для осьової симетрії потрібна лише пряма $A+B$, а для ковзної симетрії крім осі потрібне також паралельне перенесення — вважаємо, що воно визначається вектором $\vec{AB}$

$$A_1(0,0), B_1(2,3); \quad A_2(-1,2), B_2(2,3); \quad A_3(-1,2), B_3(3,2);$$
$$A_4(0,2), B_4(2,0); \quad A_5(4,-1), B_5(5,-1).$$

Осьову симетрію r задаємо також рівнянням осі l

$$l_1 : \quad 2x - 3y - 7 = 0; \qquad l_2 : \quad x = 6; \qquad l_3 : \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y-7}{5};$$
$$l_4 : \quad \frac{x}{7} + \frac{y}{-4} = 1; \qquad l_5 : \quad x = -t + 7, y = 2t.$$

Ковзну симетрію r задаємо також рівнянням осі m і вектором $\vec{a}$ паралельного перенесення.

$$m_1 : 2x + 3y + 7 = 0, \vec{a}_1 = (6,-4); \qquad m_2 : x = 6; \vec{a}_2 = (0,1);$$
$$m_3 : \frac{x-2}{2} = \frac{y+7}{5}, \vec{a}_3 = (-2,-5);$$
$$m_4 : \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1, \quad \vec{a}_4 = (3,4); \qquad m_5 : \quad x = -t + 7, y = 2t, \quad \vec{a}_5 = (1,-2).$$

2.2 Рухи комплексної площини

Точками комплексної площини є комплексні числа. Радіус-вектором точки також є те ж саме комплексне число. Рівняння прямої

$$z = z_1 + z_2 t, \quad z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad z_2 \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Паралельне перенесення площини задається правилом

$$z \mapsto z + z_0,$$

обертання на кут α навколо нуля задається правилом

$$z \mapsto z \cdot z_0, z_0 = \cos\alpha + i \sin\alpha;$$

а осьова симетрія відносно дійсної осі задається правилом

$$z \mapsto \overline{z},$$

Щоб побудувати обертання чи ковзні симетрії з іншими параметрами, можна скористатися правилом "Параметрами руху gfg^{-1} будуть параметри руху f, до яких застосовано рух g." Наприклад, щоб задати обертання $z \mapsto z'$ навколо точки $z_1 = 1 + 2i$ на кут $\frac{\pi}{7}$ записуємо комплексне число $z_0 = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ і записуємо відповідь:

$$z \mapsto z' = (z - z_1)z_0 + z_1.$$

Література

[1] Марсель Берже "Геометрия. т. 1." М:Мир, 1984

[2] Герман Вейль "Симметрия" М:Наука, 1968

[3] Ф. Бахман "Построение геометрии на основе симметрии" — М:Наука, 1969 (Переклад з Friedrich Bahmann "Aufbau der Geometrie aus dem Spigelungsbegriff" — Berlin:Spigel-Verrlag, 1959)

[4] М.М.Мурач "Геометричні перетворення і симетрія". Київ:Радянська школа, 1987.

Покажчик