АВТОМОДЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА МНОГОМЕРНЫХ ВОЛНОВЫХ КОЛЛАПСОВ

ЭРВИН ШРЁДИНГЕР

Эрвин Рудольф Йозеф Александр Шрёдингер (нем. *Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger*, 12 августа 1887, Вена — 4 января 1961, там же) австрийский физик-теоретик; лауреат Нобелевской премии по физике (1933); профессор Берлинского, Оксфордского, Грацского и Гентского университетов. С 1939 — директор основанного им *Institute for advanced studies* в Дублине; один из создателей квантовой механики и волновой теории материи.

Нобелевская премия по физике 1933

Уравнение Шрёдингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi(\vec{r},t)+E_p(\vec{r})\Psi(\vec{r},t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t),$$

$$\Delta\equiv\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

h — постоянная Планка;

m — масса частицы,

$E_p(\vec{r})$ — внешняя по отношению к частице потенциальная энергия

$$\hbar=\frac{h}{2\pi}$$

Волновой коллапс (ВК)

– катастрофическое (взрывообразное) увеличение во времени плотности энергии в уменьшающемся объеме, является одним из фундаментальных процессов в теории распространения волн в средах с дисперсией.

Примеры реализации ВК:

- коллапс ленгмюровских волн; (В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов ЖТЭФ. 1986)
- самофокусировка света в нелинейных средах; (Г. А. Аскарьян. ЖЭТФ, 1962; Н.Ф. Пилипецкий и А. Ф. Рустамов. Письма в ЖЭТФ, 1965)
- процессы связанные с самофокусировкой слабонелинейных гидродинамических возмущений на статическом космическом фоне; (R.E. Kates, D.J. Kaup. Astronomy and Astrophysics, 1988)

В многомерной модели НУШ равновесие нарушено, система становится нестационарной, и нелинейные процессы определяют динамику ВК. Изучение ВК (условия возникновения, временная динамика “взрывного” увеличения амплитуды поля) важно потому, что от решения этих вопросов зависит оценка эффективности коллапса, как нелинейного механизма трансформации волновой энергии.

НУШ И ЕГО ИНТЕГРАЛЫ

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2 \psi = 0 \qquad (1)$$

Несложно получить первый интеграл движения – волновое действие или «число частиц»;

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 d\vec{r} = const \qquad (2)$$

Этот интеграл пропорционален энергии волнового пакета.

2-й интеграл движения может быть получен из уравнения (1) в 2-D и 3-D случае и является гамильтонианом системы:

$$\boldsymbol{H} = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla\psi|^2 d\vec{r} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 d\vec{r} \equiv \boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y} \qquad (3)$$

$$\langle r^2 \rangle = N^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} r^2 \cdot |\psi|^2 d\vec{r} \qquad (4)$$

Из уравнения (1) можно получить функционал, который определяет среднее значение квадрата ширины волнового пакета.

ДВУМЕРНЫЙ ВОЛНОВОЙ КОЛЛАПС

Для 2-D НУШ был найден критерий волнового коллапса Власова-Петрищева-Таланова, который является основополагающим результатом в теории волновых коллапсов. Это строгий результат для нелинейных волновых систем с дисперсией.

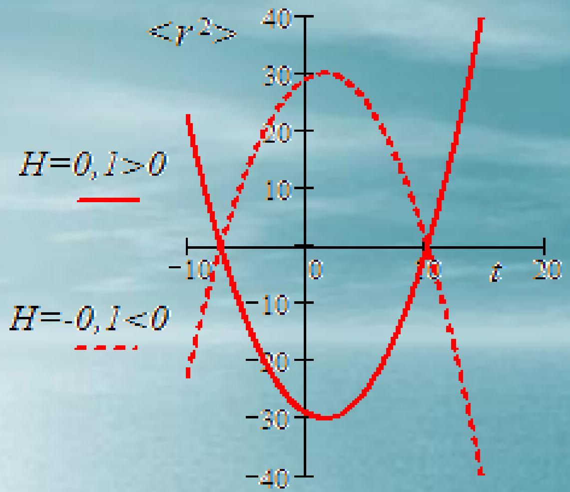
Критерий волнового коллапса следует из соотношения для второй производной по времени от среднего квадрата ширины волнового пакета:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{-\infty}^{\infty} r^2|\psi|^2\, d\vec{r} = 8\cdot H$$

Если H является сохраняющейся величиной, то соотношение может быть дважды проинтегрировано:

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2|\psi|^2\, d\vec{r} = 4\cdot Ht^2 + C_1 t + C_2$$

Константы являются дополнительными интегралами движения ;



Из уравнения (6) следует критерий Власова – Петрищева – Таланова, который утверждает, что в системах с отрицательным гамильтонианом , при произвольных и , средний квадрат размера распределения обращается в нуль за некоторое конечное время . Это свидетельствует о формировании особенности поля .

Укажем метод выбора автомодельной подстановки, которая позволяет исследовать свойства волновой функции $\psi(\vec{r},t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2 |\psi|^2 d\vec{r} = 4 \cdot H \cdot \left(t^2 - t_0^2\right)$$

Левая часть уравнения принимает положительные значения при $t < t_0$ только для отрицательного гамильтониана $H < 0$. Неустойчивость развивается для отрицательного гамильтониана.

Выберем такую радиальную автомодельную переменную, которая удовлетворяет условию сохранения интегралов системы и обеспечивает постоянство среднего квадрата радиуса.

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{t_0^2 - t^2}}$$

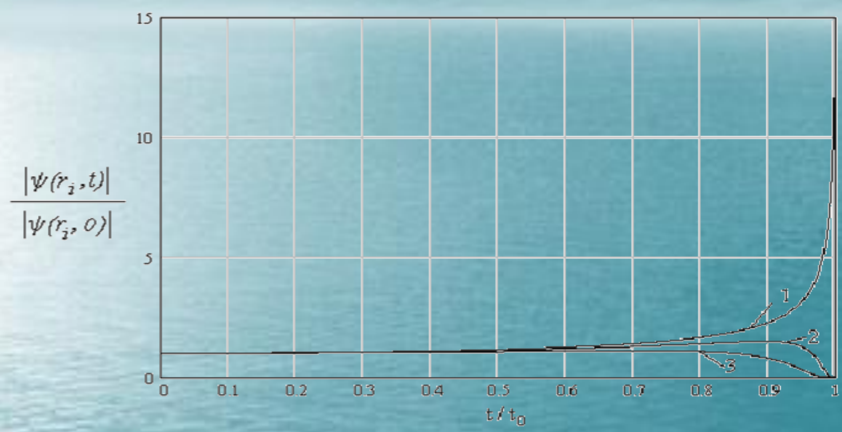
$$\psi(\xi) = \psi(r)\sqrt{t_0^2 - t^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\psi|^2 d\vec{\xi} = 4 \cdot |H|$$

Полагаем, что волновая функция $\psi(\xi)$ задана в

$$\psi(\xi) = a(\xi)\exp(i\varphi(\xi))$$

$$a(\xi) = A \cdot \exp(-B \cdot \xi^2) \qquad \varphi(\xi) = C\xi$$



Зависимость относительной амплитуды автомодельного решения двумерного НУШ от времени в различных точках пространства:

1 – $r1$ = R1/R0 <<1;

2 – $r2$ = 10 R1/R0;

3 – $r3$ = 50 R1/R0, R0 – характерный размер волнового пакета.

Вблизи особой точки (кривая 1) первоначальная амплитуда волновой функции с течением времени нарастает взрывным образом, т.е. развивается ВК. С удалением в пространстве от особой точки, амплитуда волновой функции с течением времени нарастает медленнее (кривая 2), а затем убывает до нуля. При достаточном удалении от особенности (кривая 3) волновая функция является монотонно убывающей функцией времени.

В выбранных автомодельных переменных наряду с требованиями сохранения числа частиц и гамильтониана системы появляеться требование сохранения среднего квадрата радиуса волнового пакета. Последнее требование означает переход к таким автомодельным переменным, которые сохраняют средний поперечный размер волнового пакета, т.е. ВК в таких автомодельных переменных отсутствует.

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫ ВК

Вторая производная по времени от среднего квадрата ширины симметричного волнового пакета принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{-\infty}^{\infty} r^2|\psi|^2 d\vec{r} = 4(2H - Y)$$

$$N\cdot\left\langle r^2\right\rangle < 4Ht^2 + C_1 t + C_2$$

Для временной оценки развития сфер.-сим. ВК

Недостатком критерия является представление его в виде неравенства.

Введем масштабное преобразование (растяжение) пространства $r \longrightarrow \alpha\cdot r$, где α – коэффициент подобия. Закон преобразование волновой функции в этом случае определим из условия сохранения интеграла

$$\psi(\alpha\cdot\vec{r},t) = \alpha^{-\frac{3}{2}}\psi(\vec{r},t)$$

$$N\cdot\left\langle r^2\right\rangle = \frac{12}{7}Ht^2 + C_1^{'}t + C_2^{'}$$

позволяет исследовать трехмерный ВК по аналогии с 2-D.

Требованиям сохранения энергии, гамильтониана системы, а также среднего квадрата волнового пакета удовлетворяет следующие автомодельные переменная и амплитуда:

$$\xi = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1/2}\frac{r}{\sqrt{t_0^2 - t^2}}$$

$$\psi(\xi) = \left(\frac{3}{7}\right)^{3/4}\psi(r)\left(t_0^2 - t^2\right)^{3/4}$$

Для 3-D коллапс развивается быстрее, чем для 2-D .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\psi|^2 d\vec{\xi} = 4|H|$$

Уравнение принимает вид и полностью совпадает с уравнением для двумерного волнового коллапса.

Автомодельная подстановка позволяет представить средний квадрат ширины волнового пакета в универсальном виде, как для двумерного, так и для трехмерного (сферически симметричного) случая.

Они имеют одинаковые решения и обладают одинаковыми свойствами. ВК реализуется для отрицательного гамильтониана и динамика амплитуды волновой функции совпадает с динамикой амплитуды, представленной на Рис. 1., с разницей, что для 3-D ВК темп взрывного нарастания амплитуды волновой функции выше, чем для 2-D (см. Рис. 2.).

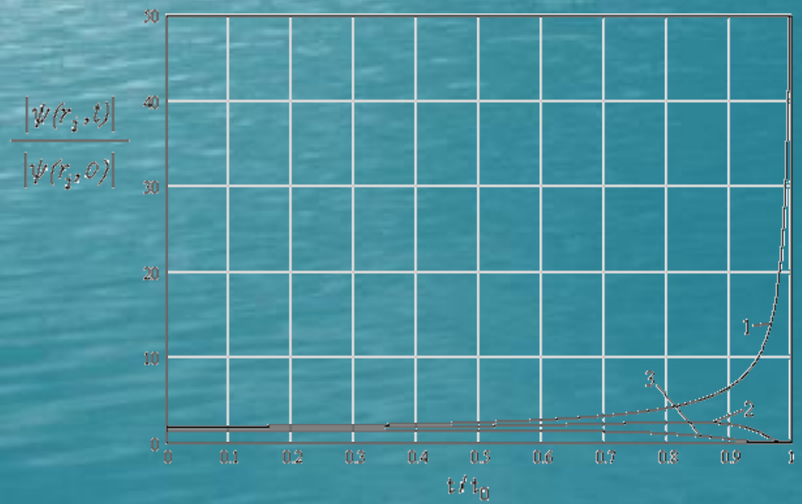


Рис. 2. Зависимость относительной амплитуды автомодельного решения сферически-симметричного НУШ от времени в различных точках пространства: 1 – $r1$ = R1/R0 <<1; 2 – $r2$ = 10 R1/R0; 3 – $r3$ = 50 R1/R0.

ТРЕХМЕРНЫЙ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЙ ВК

Выберем элемент объема в виде $d\vec{r} = rdrdzd\varphi$

$$\xi = \frac{r}{\sqrt{t_0^2 - t^2}}$$

(волновая функция зависит также от координаты). В этом случае радиальная автомодельная переменная и автомодельная амплитуда, удовлетворяющие требованиям постоянства энергии , гамильтониана и среднего квадрата радиуса волнового пакета определяются:

$$\psi(\xi, z) = \psi(r, z)\sqrt{t_0^2 - t^2}$$

Полагая $\partial\psi/\partial\xi = 0, \quad t = t_0$ исходное НУШ $it(t_0^2 - t^2)((\xi\frac{\partial\psi'}{\partial\xi} + 2\eta\frac{\partial\psi'}{\partial\eta})(t_0^2 - t^2) + 2\psi') + + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\xi\frac{\partial\psi'}{\partial\xi}(t_0^2 - t^2) + \frac{\partial^2\psi'}{\partial\eta^2} + \psi'|\psi'|^2 = 0$ преобразуется в одномерное стационарное НУШ:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \Phi\cdot|\Phi|^2 = 0$$

Решение выражается через функцию Вейерштрасса с мнимым аргументом. Для анализа развития ВК в аксиальном направлении достаточно найти решение в классе вещественных функций, выражается через симметричную эллиптическую функцию Якоби:

$$\psi(r,z) = A_0(r)\cdot(t_0^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot cn(A_0\cdot z\cdot(t_0^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$$

Выберем требование равенства нулю амплитуды волновой функции при значении аргумента, равном первому периоду эллиптической функции Якоби:

$$\psi(r,z) = A_0(r)\cdot(t_0^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot cn(z_i\cdot\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$z_{1,2} = \pm K(\frac{1}{\sqrt{2}})A_0^{-1}\cdot\sqrt{t_0^2 - t^2} = \pm 1{,}8541A_0^{-1}\cdot\sqrt{t_0^2 - t^2}$$

где: $K(x)$ – эллиптический интеграл 1-го рода

Границы волнового пакета на оси (нули функции Якоби) с течением времени будут смещаться к началу координат , а амплитуда взрывным образом нарастать, т.е. будет развиваться аксиальный ВК. А радиальный размер ВК в предложенной автомодельной подстановке остается неизменным.

Возможны два сценария развития ВК:

1) реализуется, когда характерный продольный размер волнового пакета превышает радиальный. Тогда динамика развития аксиального ВК продлится до тех пор, пока осевая полуширина ВК не совпадет с его радиусом. В этом случае ВК переходит в стадию сферически - симметричного и темп развития коллапса увеличивается.

2) может развиться, если характерный продольный размер волнового пакета меньше радиального. В этом случае волновой пакет, имеющий первоначально овальную форму, будет трансформироваться в «presolar disk».

(Morfill G.E., Völk H.J. The Astrophysical Journal, 1984. Vol. 287, p. 371-395.)

Рис. 3. Образование звездной системы NGC 1333-IRAS 4B

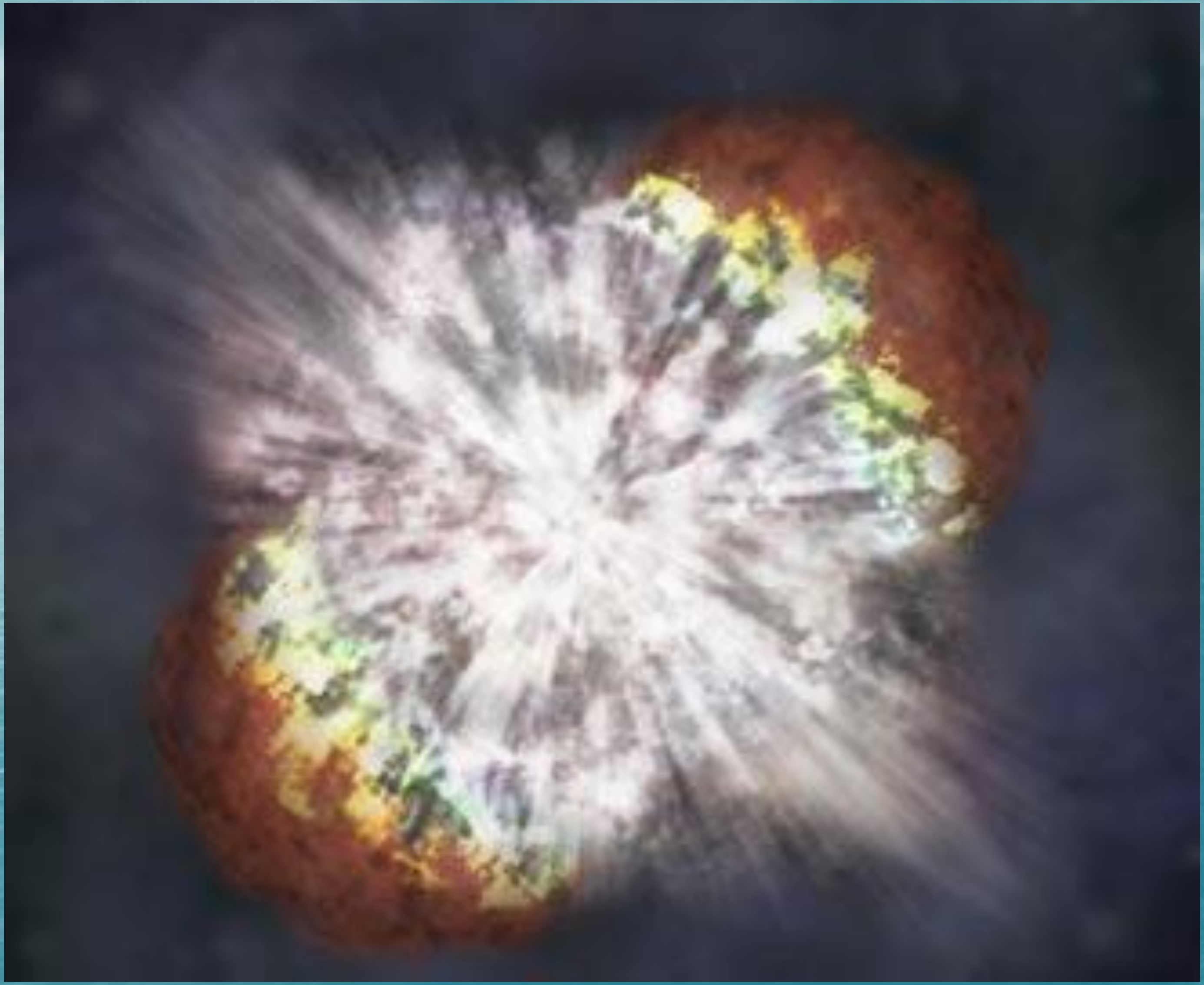


Рис. 4. Образование сверхновой звезды SN 2006gy

1. Впервые предложен метод выбора автомодельных переменных для описания развития многомерного ВК. В выбранных автомодельных переменных наряду с требованиями сохранения числа частиц и гамильтониана системы появляется дополнительное требование сохранения среднего квадрата радиуса волнового пакета. Последнее означает переход к таким автомодельным переменным, использование которых сохраняет средний поперечный размер волнового пакета, т.е. ВК в такой системе отсутствует.

2. Предложенные автомодельные подстановки в 2-D и 3-D случаях позволяют записать средний квадрат ширины волнового пакета в универсальном виде: величина квадрата ширины волнового пакета в новых переменных зависит только от гамильтониана системы, который при развитии ВК должен быть отрицательным по величине.

3. В физических переменных (радиус, время) темп развития сферически-симметричного ВК выше двумерного.

4. При развитии аксиально - симметричного трехмерного ВК взрывное увеличение амплитуды волновой функции наступает, прежде всего, вдоль оси системы. В радиальном направлении ВК отсутствует. При подходе к сферически-симметричному ВК динамика всей коллапсирующей системы должна быть исследована с учетом новых данных. Не исключено, что дальнейшее исследование образовавшейся в результате развития ВК системы послужит ключом к пониманию образования звездных систем и галактик.