

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра теоретичної фізики імені академіка І. М. Ліфшиця

«Допущено до захисту»
Зав. кафедри теоретичної фізики
імені академіка І. М. Ліфшиця
доц. Рашба Г. І. _____
_____ 2024 р.

Оцінка «_____»
Голова ЕК
проф. С.І. Шевченко

_____ 2024 р.

Гундарева Людмила Анатоліївна
Математичне та графічне моделювання для розв'язку задач
теоретичної механіки

Кваліфікаційна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр» за спеціальністю 104 – «Фізика та астрономія»
Освітньо-професійна програма «фізика та астрономія в закладах освіти»

Науковий керівник - доцент кафедри теоретичної фізики імені академіка І. М. Ліфшиця, кандидат фізико-математичних наук
Наталія АКСЬОНОВА

Харків 2024

Анотація

Гундарева Л. А. Математичне та графічне моделювання для розв'язку задач теоретичної механіки. – Рукопис.

Дипломна робота на здобуття освітнього ступеня “Магістр” за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія». - Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2024.- 43 с. - Табл. 1. Іл. 11.

Робота присвячена актуальній проблемі застосування обчислювальних та графічних методів для дослідження руху та рівноваги механічних систем. До класичних підходів розв'язання задач різних розділів (статика, кінематика, динаміка) теоретичної механіки пристосовуються універсальні методи складання математичних моделей з метою уніфікації побудов схем, проведення розрахунків та аналізу отриманих результатів. Запропоновані методики можуть дозволити оптимізувати процес розгляду проблем пов'язаних зі складанням та дослідженням рівнянь рівноваги і руху матеріальної точки, а також механічної системи. На етапі проектування та дослідження властивостей складних конструкцій і механізмів дані питання потребують особливої уваги, тому детально аналізуються в роботі. За певних умов описані підходи могли б бути використані в якості методичного забезпечення для курсових і лабораторних робіт або практичних занять при викладанні теоретичної механіки.

Ключові слова: математична модель, теоретична механіка, статика, кінематика, динаміка, геометричні умови рівноваги, рівняння руху.

Abstract

Gundareva L.A. Mathematical and graphical modeling for solving problems of theoretical mechanics. – Manuscript.

Diploma work for Master degree, specialty 104 – «physics and astronomy», – Kharkiv: Kharkiv National University named after V.N. Karazin, 2024. – p. 43, f. 11, t. 1.

The paper is devoted to the actual problem of applying computational and graphic methods for study the movement and equilibrium of mechanical systems. Universal methods of constructing mathematical models are adapted to the classical approaches to solving problems of various sections (statics, kinematics, dynamics) of theoretical mechanics in order to unify the construction of schemes, carry out calculations and analyze the obtained results. The proposed methods can allow optimizing the process of consideration of problems related to the compilation and study of equations of equilibrium and movement of a material point, as well as a mechanical system. At the stage of designing and researching the properties of complex structures and mechanisms, these issues require special attention, so they are analyzed in detail in the work. Under certain conditions, the described approaches could be used as methodical support for course and laboratory works or practical classes in teaching theoretical mechanics.

Keywords: : mathematical model, theoretical mechanics, statics, kinematics, dynamics, geometric equations of equilibrium, equations of movement.

ЗМІСТ

<u>ВСТУП</u>	5
<u>РОЗДІЛ 1. РІВНОВАГА ТІЛА ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ В ПЛОЩИНІ</u>	10
<u>1.1 Визначення реакцій опор твердого тіла</u>	10
1.1.1 Скорочений теоретичний огляд	10
1.1.2 Рекомендації та приклад розв’язання задачі.....	17
<u>РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ</u>	21
<u>2.1 Визначення кінематичних параметрів матеріальної точки</u>	21
<u>2.2 Координатний спосіб завдання руху точки</u>	21
<u>2.3 Натуральний спосіб завдання руху точки</u>	27
<u>РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА ТОЧКИ ТА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ</u> ..	30
<u>3.1 Скорочений теоретичний огляд з динаміки</u>	30
<u>3.2 Приклад завдання з рекомендаціями</u>	33
3.2.1 Випадок постійних сил.....	33
3.2.2 Випадок з врахуванням сили опору	37
3.2.3 Випадок змінної сили	38
<u>ВИСНОВКИ</u>	41
<u>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</u>	42

ВСТУП

Сучасні науковці та освітяни все більше покладаються на математичне моделювання як потужний інструмент дослідження та аналізу складних систем. Теоретична механіка, як фундаментальна наука про рух та взаємодію матеріальних тіл, не є винятком. З розвитком обчислювальної техніки та програмного забезпечення, з'явилися нові можливості для детального дослідження механічних систем, що раніше були недоступні і, відповідно розширили наукові методики при викладанні дисципліни. Такі підходи дають можливість представити умови, хід розв'язання та результати таким чином, щоб оптимізувати та конкретизувати їх максимально.

Математичне та графічне моделювання для розв'язку задач теоретичної механіки — це методологія, яка дозволяє вирішувати та представляти задачі механіки через побудову математичних моделей та їх візуалізацію за допомогою графічних засобів.

Основою теоретичної механіки, як відомо, є багато фізичних моделей, що дозволяють абстрагуватись від деяких властивостей об'єктів дослідження для вивчення основних характеристик. Прикладами є матеріальна точка, абсолютно тверде тіло, геометричні умови рівноваги та інше. Додавання до відомих фізичних моделей математичних і графічних, особливо на практиці, може стати дуже доречним. Математичне моделювання полягає у створенні абстрактних математичних моделей, що описують поведінку механічних систем. Це дозволяє використовувати рівняння та аналітичні методи для вивчення механічних явищ, таких як рівновага твердих тіл, динаміка руху, коливання тощо. Математичні моделі, як правило, базуються на диференціальних рівняннях, які описують фізичні закони, наприклад, закони Ньютона в динаміці або закони збереження енергії в механіці.

Графічне моделювання передбачає візуалізацію задач, їхніх рішень та процесів, що відбуваються у механічній системі. Це може включати побудову графіків, схем, креслень та інших візуальних зображень для полегшення розуміння і аналізу задач. Графічні методи часто використовуються для вивчення руху тіл у просторі, взаємодії сил,

напружень, деформацій, що допомагає у вирішенні завдань механіки на практиці.

В розділах теоретичної механіки моделі використовуються для аналізу таких систем як:

- розділ Статика: моделювання рівноваги систем під дією тільки зовнішніх сил;
- розділ Кінематика: дослідження руху тіл без врахування їх мас і сил, які викликають рух;
- розділ Динаміка: описання руху систем з урахуванням інерції, сили і часу.

Математичні моделі дозволяють отримати кількісні рішення задач, тоді як графічні методи допомагають представити ці рішення в зручній для інтерпретації формі.

Математичне та графічне моделювання в теоретичній механіці допомагає зосередитися на спрощенні складних систем до ключових параметрів, що робить задачі більш керованими і зрозумілими. Це важливо як для інженерів і науковців, які займаються проектуванням машин, будівель, роботизованих систем та іншого обладнання, так і для студентів на етапі засвоєння дисципліни.

Важливі аспекти моделювання:

1. Формулювання задачі: починається з опису фізичної системи та формулювання основних законів механіки. Це можуть бути закони збереження імпульсу, енергії або моменти інерції.

2. Побудова моделі: на цьому етапі відбувається математизація задачі. Це може включати побудову рівнянь руху, рівнянь стану або рівнянь рівноваги для статичних систем.

3. Чисельні методи: коли аналітичні методи є занадто складними для прямого розв'язку, використовують чисельні підходи, наприклад, метод кінцевих елементів (МЕ), який є потужним інструментом для розрахунків в інженерії. Такі методи дозволяють розв'язувати нелінійні та складні системи рівнянь.

4. Візуалізація результатів: графічне моделювання дозволяє візуально побачити деформації, рух або напруження в об'єктах. Це полегшує аналіз і прийняття інженерних рішень.

Програми для моделювання:

Для математичного та графічного моделювання використовують різноманітні програмні пакети:

- MATLAB: використовується для чисельного розв'язку рівнянь, моделювання систем і візуалізації результатів.
- ANSYS: популярне програмне забезпечення для аналізу методом кінцевих елементів, яке широко застосовується для механічних систем.
- AutoCAD та SolidWorks: забезпечують графічне моделювання та конструювання механічних компонентів.

Це моделювання допомагає не лише зрозуміти фізичні явища, але й прогнозувати поведінку механічних систем у реальних умовах, що робить його критично важливим в інженерії та прикладних науках.

Актуальність теми полягає в тому, що математичне моделювання дозволяє не тільки описувати рух механічних систем, але й прогнозувати їх поведінку в різних умовах. Це особливо важливо для розробки нових технологій, оптимізації виробничих процесів та вирішення певних наукових, дослідницьких і інженерних питань. Графічне представлення умов задачі або проекту та результатів моделювання дозволяє наочно продемонструвати процес в динаміці та зрозуміти його поведінку. Враховуючи фундаментальність проблем та підходів теоретичної механіки, як навчальну дисципліну її вивчають студенти майже всіх технічних спеціальностей на початкових курсах, що достатньо складно. При викладанні дисципліни на основі теоретичного курсу дуже велика увага приділяється практичним питанням. Зручно і корисно було б застосування уніфікованих підходів до практичного курсу, особливо для розв'язання задач розділів дисципліни. Отримання результатів задач та їх вірний глибинний аналіз не можливі без складання певних математичних моделей та графічного представлення,

навіть на етапі формування умов та встановлення чітких оціночних характеристик. Відомо, що різноманітність задач механіки, зокрема теоретичної механіки, не дозволяє досі створити шаблонних системних баз для розрахунків. Тому в роботі, базуючись на класичних підходах до рішення задач, планується використання моделювання та сучасних комп'ютерних ресурсів з метою оптимізації і уніфікації.

Метою дипломної роботи є встановлення та використання математичних і графічних моделей та методів для розв'язку задач з розділів теоретичної механіки, а також їх реалізація за допомогою сучасних програмних засобів.

Нами були поставлені такі *завдання дослідження*:

- проаналізувати існуючі методи математичного моделювання в теоретичній механіці;
- розробити методичні підходи для вибраних задач теоретичної механіки;
- реалізувати розроблені моделі за допомогою сучасного програмного забезпечення (MATLAB, SolidWorks та інше);
- проаналізувати отримані результати, проводячи їх порівняння з експериментальними даними (за доступності);
- створити візуалізації результатів моделювання.

Об'єктом дослідження є науково – методичні підходи до розв'язання задач різних розділів теоретичної механіки.

Предметом є математичні, графічні та комп'ютерні моделі, що корелюють з існуючими методиками.

Практична цінність результатів, отриманих у даній роботі, полягає у тому, що розроблені моделі та програмні продукти можуть бути використані для вирішення широкого кола задач в різних науково – технічних галузях, а тому може бути корисною в якості методичного забезпечення для проведення курсових і лабораторних робіт або практичних занять при викладанні теоретичної механіки. При цьому провідна роль відводиться лекційним курсам, які висвітлюють основні питання розділів «Статика», «Кінематика», «Динаміка». При цьому, передбачається виконання розрахунково-графічних або курсових робіт для студентів в умовах аудиторної та самостійної діяльності. З метою кращого засвоєння практичного курсу, перед постановкою конкретної задачі, доречно скористатись комплексним підходом, тобто навести стислу інформацію з певного теоретичного матеріалу, що дає змогу активізувати роботу студентів, сприяє перетворенню самостійної роботи у творчий процес.

Достовірність наведених у роботі результатів підтверджується тим, що розрахунки, отримані вручну класичними методами найкориснішими для сприйняття та оптимізовані моделюванням, чітко корелюють. Демонстрація результатів наводиться на прикладах розв'язання деяких найхарактерніших задач статички, кінематики та динаміки.

РОЗДІЛ 1. РІВНОВАГА ТІЛА ПІД ДІЄЮ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ В ПЛОЩИНІ

1.1 Визначення реакцій опор твердого тіла.

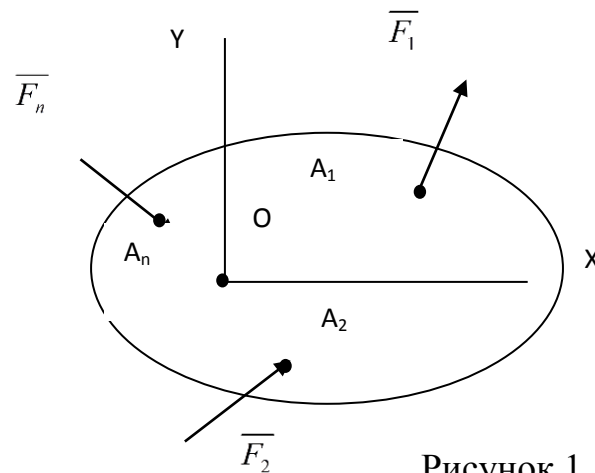
Основною задачею статyki є приведення систем сил, що діють на тіло, до еквівалентних простішого вигляду та визначення умов рівноваги. Таким чином, розв'язок задач стосовно рівноваги плоскої довільної системи сил стає основою та надає загальні підходи до найважливіших питань розділу.

1.1.1 Скорочений теоретичний огляд

Мета завдання полягає в наступному: визначити реакції опор твердого тіла (конструкції), на яке діє довільна система сил в площині.

Довільна плоска система сил – система сил, лінії дії яких розташовані в площині незалежно.

A_1, A_2, A_n , - точки прикладання сил системи $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\}$ (рисунок 1).



За основною теоремою статyki (про приведення системи сил до даного центра): будь – яка плоска довільна система сил, що діють на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно обраного центра O може бути замінена одною силою \bar{R} , що дорівнює головному вектору системи і прикладається в центрі приведення O , та одною парою з моментом M_o , що дорівнює головному моменту системи відносно центра O [1, 2]

Випадки приведення плоскої системи сил до простішого вигляду:

1 $\overline{R} = 0$ і $M_O = 0$ - система знаходиться в стані рівноваги.

2 $\overline{R} = 0$ і $M_O \neq 0$ – система приводиться до пари з моментом, який дорівнює головному моменту системи M_O . Система може викликати обертальний рух тіла, до якого прикладена.

3 $\overline{R} \neq 0$ і $M_O = 0$ – система приводиться до рівнодійної \overline{R} , яка проходить через центр O . Під дією такої сили тіло, на яке вона діє, може рухатись поступально в напрямку вектора сили \overline{R} .

4 $\overline{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$ – система приводиться до рівнодійної \overline{R} , яка прикладається в іншій точці, що не проходить через центр O .

Аналітичні умови рівноваги довільної плоскої системи сил:

Основна форма умов рівноваги

$$\sum_{n=1}^k F_{nX} = 0, \quad \sum_{n=1}^k F_{nY} = 0, \quad \sum_{n=1}^k M_O(\overline{F}_n) = 0$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій всіх сил на координатні осі та сума їх моментів відносно будь – якого центра, який лежить у площині дії сил, дорівнювали нулю.

Друга форма умов рівноваги

$$\sum_{n=1}^k M_A(\overline{F}_n) = 0, \quad \sum_{n=1}^k M_B(\overline{F}_n) = 0, \quad \sum_{n=1}^k F_{nX} = 0$$

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких двох центрів A і B та сума їх проекцій на вісь QX , не перпендикулярну до прямої AB ($AB \perp OX$), дорівнювали нулю.

При складанні суми проєкцій сил системи на координатні вісі, доцільно нагадати основні принципи, які наведено на рисунку 2.

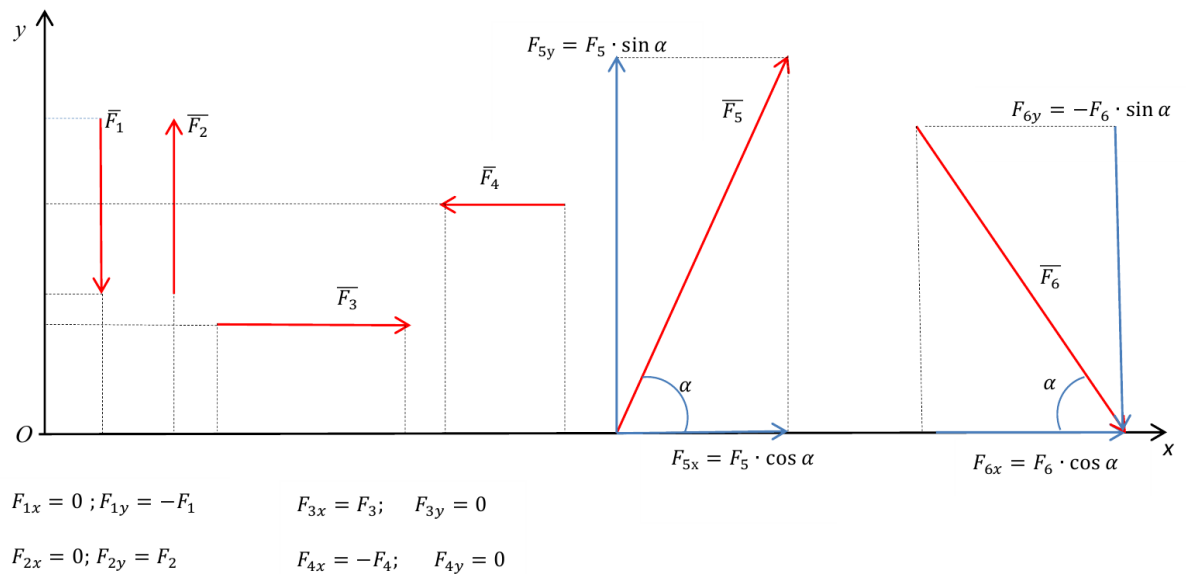


Рисунок 2.

Третя форма умов рівноваги (рівняння трьох моментів)

$$\sum_{n=1}^k M_A(\overline{F}_n) = 0, \quad \sum_{n=1}^k M_B(\overline{F}_n) = 0, \quad \sum_{n=1}^k M_C(\overline{F}_n) = 0.$$

Для рівноваги плоскої довільної системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів всіх сил відносно будь – яких трьох центрів А, В і С, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю [3].

Для складання рівняння моментів (суми моментів сил системи відносно точки) треба пам'ятати основні правила для визначення моменту сили відносно точки, які схематично наведені на рисунку 3.

Момент сили відносно точки визначається як добуток сили на плече з врахуванням знаку $M_A(\overline{F}) = \pm F \cdot h$.

Одиниці вимірювання моменту сили в СІ це 1 кНм

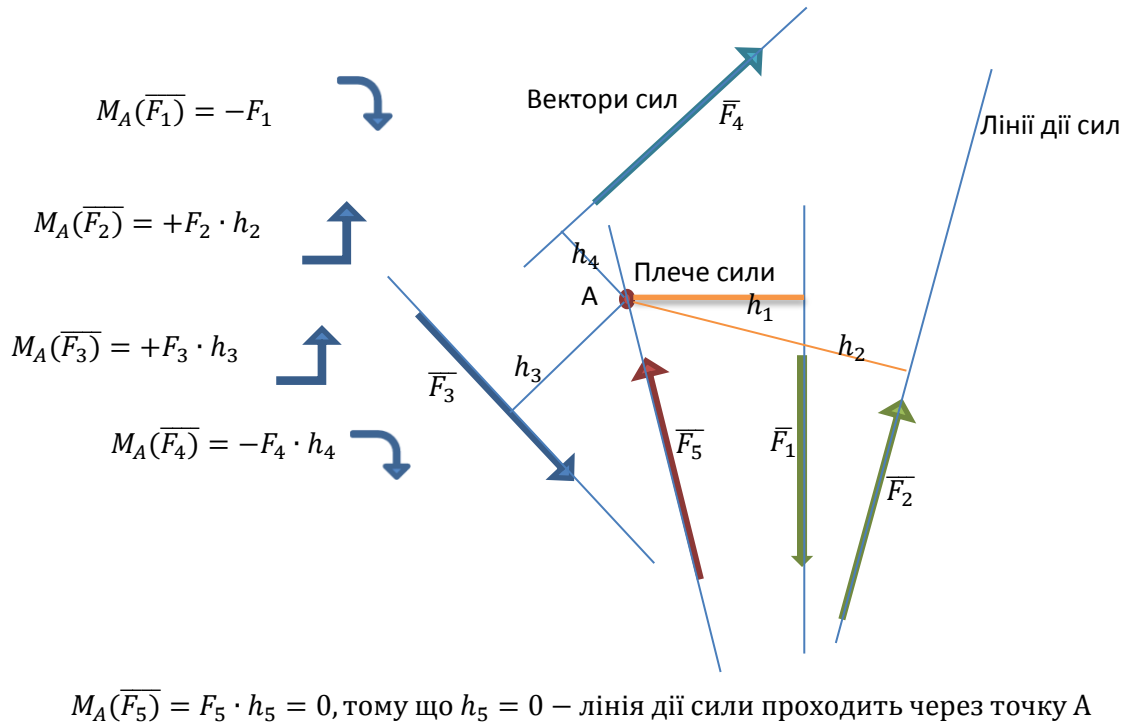


Рисунок 3.

Плече сили h - найкоротша відстань від точки (центру обертання) до лінії дії сили, тобто перпендикуляр встановлений із точки на лінію дії сили. Щоб визначити плече сили треба продовжити лінію дії сили та встановити із точки (наприклад, A на рисунку 3) перпендикуляр. При роботі з абсолютно твердими тілами, сила є ковзним вектором, тобто її можна переносити вздовж власної лінії дії, не змінюючи величину та напрямок M [4].

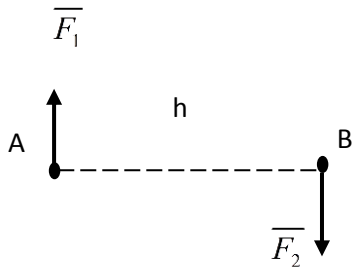
Момент вважається додатним (знак +), коли сила намагається обертати тіло проти стрілки годинника $\oplus \uparrow$ та від'ємним (знак -), коли за стрілкою. $\ominus \downarrow$

Момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через точку, тому що при цьому плече сили дорівнює нулю.



Момент, заданий за умовами завдань, є моментом пари сил, що діє в площині. Поряд із силою пара сил є самостійним елементом статички.

Момент пари сил дорівнює добутку модуля одної із сил пари на плече пари.



Пара сил – система двох паралельних, рівних за модулем та протилежних за напрямком сил, прикладених до абсолютно твердого тіла.

Основою для визначення реакцій опор будь-якого твердого тіла є аксіома про звільнення тіла від зв'язків: будь-яке невільне тіло можна розглядати як вільне, звільнивши його від зв'язків і замінивши їх дію реакціями. У цьому полягає принцип звільнення від зв'язків [2].

Вільним тілом називається таке тіло, яке може здійснювати довільні переміщення в просторі в будь-якому напрямку.

Невільним тілом називається тіло, переміщення якого в просторі обмежено іншими тілами (зв'язками).

Зв'язками (або опорами) називаються тіла, які обмежують рух даного тіла в просторі.

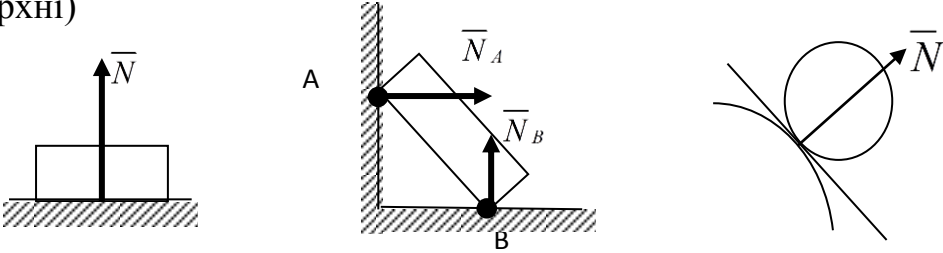
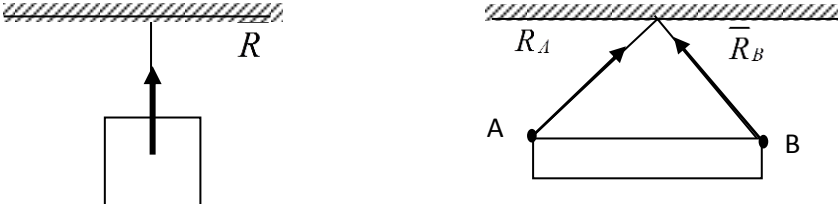
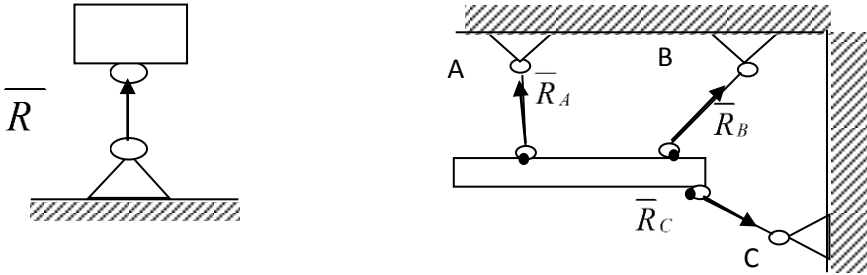

Реакцією зв'язку (реакцією опори) називається сила, з якою зв'язок діє на дане тіло. Реакція зв'язку завжди спрямовується протилежно тому напрямку, в якому зв'язок протидіє можливому руху тіла.

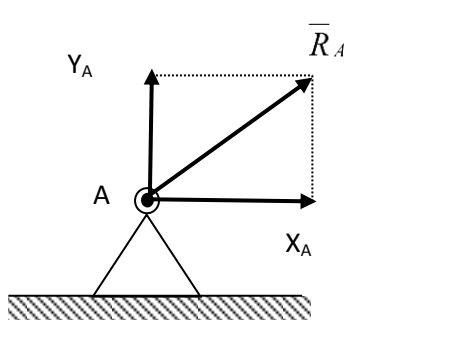
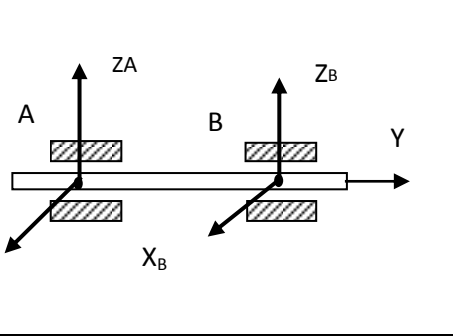
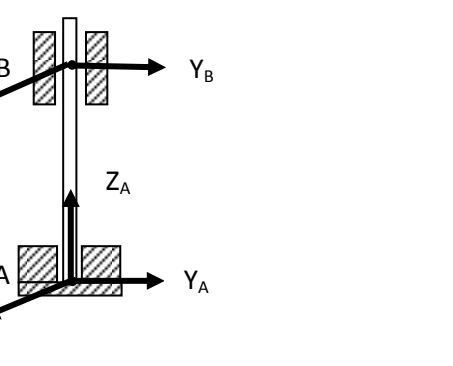
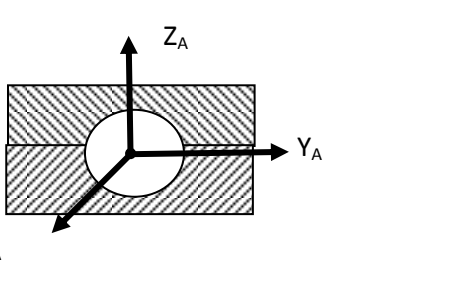
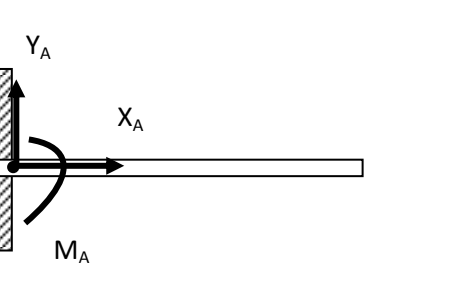
Активна сила - сила, яка характеризує дію інших тіл на задане, що викликає або може викликати зміну його кінематичного стану.

Реактивна сила – сила, яка характеризує дію зв'язків на дане тіло.

Основні види зв'язків наведено в таблиці 1.

Таблиця 1 – Основні види зв'язків

1	<p><i>Ідеальна (гладенька) поверхня або опора</i> (реакція перпендикулярна поверхні - \bar{N}-нормальна реакція поверхні)</p> 
2	<p><i>Ідеальна нитка</i> (реакція \bar{R} спрямована вздовж нитки, троса)</p> 
3	<p><i>Ідеальний стержень</i> (реакція \bar{R} спрямована вздовж стержня)</p> 
4	<p><i>Шарнірно – рухома опора</i> (опора на катках) (реакція \bar{R} перпендикулярна поверхні)</p> 

5	<p><i>Шарнірно – нерухома опора</i> (реакція \bar{R}_A складається з її проєкцій на координатні осі X_A та Y_A)</p> $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$	
6	<p><i>Циліндричний шарнір або підшипник</i> (реакція складається з проєкцій, спрямованих вздовж осей, перпендикулярних осі циліндра)</p>	
7	<p><i>Упорний підшипник</i> (реакція точки А складається з проєкцій вздовж координатних осей. В точці В – циліндричний шарнір)</p>	
8	<p><i>Сферичний підшипник</i> (реакція складається з проєкцій на просторові осі координат)</p> $R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2}$	
9	<p><i>Нерухоме закріплення</i> (жорстке закладання) (реакція складається з проєкцій X_A і Y_A, а також реактивного моменту M_A)</p>	

1.1.2 Рекомендації та приклад розв'язання задачі

Умови: - графічну частину доречно представити з використанням пакету SolidWorks; - чисельну – вручну, с послідовною обробкою MATLAB.

Дано: схему конструкції розташовану в площині, на яку діє зрівноважена довільна система сил (рисунок 4): $G=10$ кН, $P=5$ кН, $M=8$ кНм, $q=0,5$ кН/м, $\alpha = 30^\circ$, розміри - в метрах.

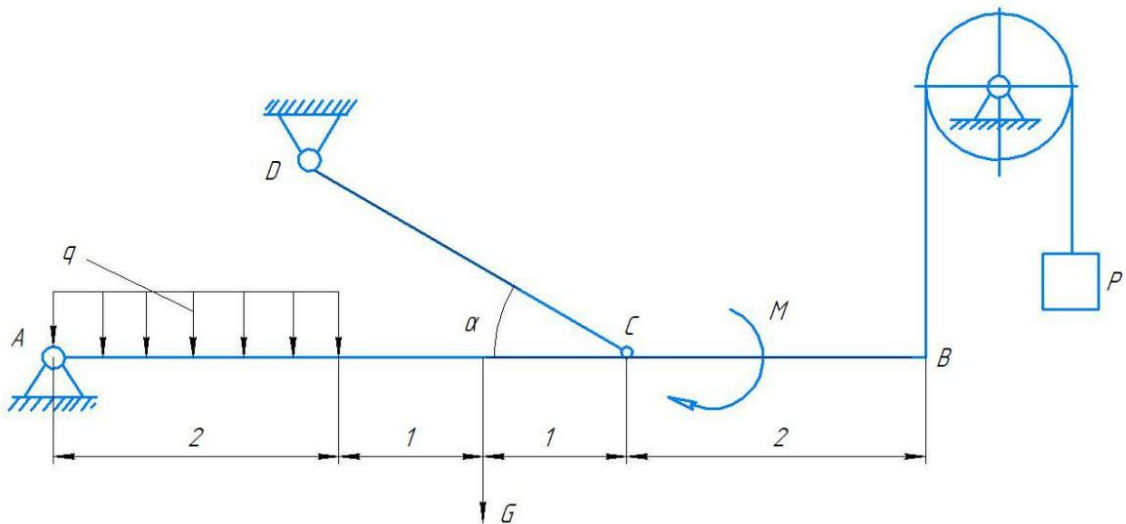


Рисунок 4

Визначити:

реакції опор (реакцію опори А і реакцію стержня CD).

Розв'язання.

1. Розглянемо плоску (розташовану в плоскій системі відліку XOY) зрівноважену систему сил, прикладених до балки АВ.

2. Відкинемо блок (вантаж на підвісі) та замінемо силу ваги вантажу \bar{P} силою натягу тросу \bar{S} (за модулем $S=P$).

3. Рівномірно-розподілене навантаження q замінимо зосередженою силою Q , яка дорівнює $Q = 2 \cdot q = 2 \cdot 0,5 = 1$ кН і прикладається в центрі ваги епюри цього навантаження в тому ж напрямку.

Розподіленими силами (q) називаються сили, що діють на всі точки тіла (масові, об'ємні) чи на всі точки певної частини поверхні тіла (поверхневі, як в даному прикладі). Зосереджена сила (Q) є рівнодієюною системи паралельних односпрямованих розподілених сил, визначається як $Q = L \cdot q$, прикладається посередині відрізка і спрямовується в тому ж напрямку (рисунок 5).

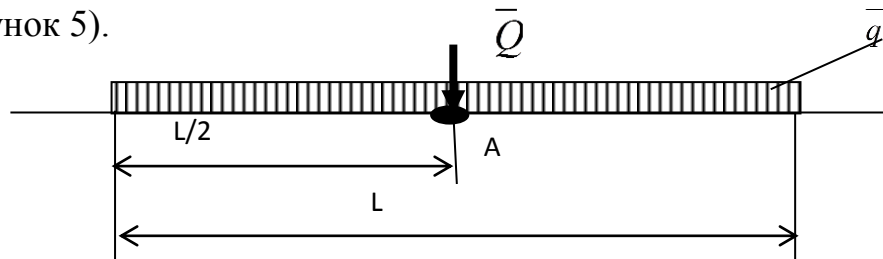


Рисунок 5

4. Відкинемо зв'язки (опори): шарнірно-нерухому опору A та стержень CD . Дію зв'язків на балку замінимо їх реакціями (рисунок 6).

Тому що напрямок реакції шарнірно-нерухомої опори A невідомий, визначимо її складові \bar{X}_A та \bar{Y}_A . Вкажемо також реакцію \bar{S}_{CD} стержня CD .

Слід зауважити, що на схемі конструкцій в інших індивідуальних варіантах завдання, можуть використовуватись інші види опор. Всі види опор (зв'язків) указані в таблиці 1.

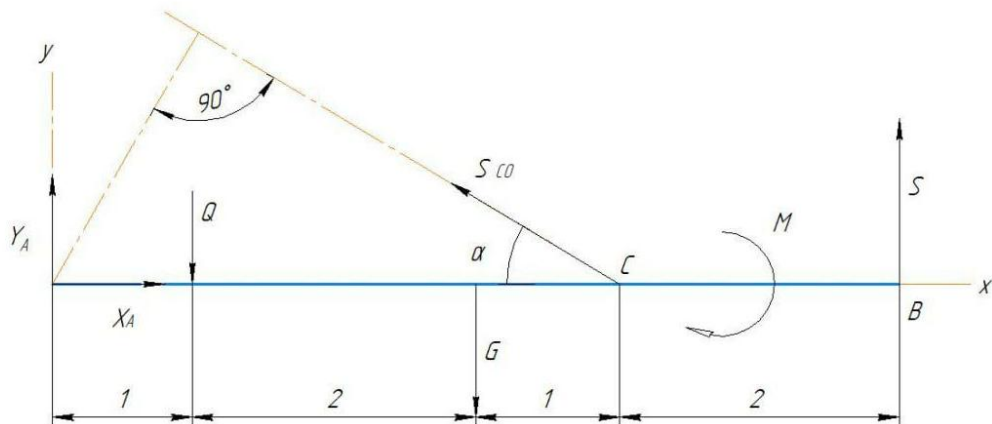


Рисунок 6

5. Для плоскої системи сил, прикладених до балки, складаємо три рівняння рівноваги:

При складанні сум проекцій сил на координатні вісі (рівняння 1 та 2) зручно скористатись рекомендаціями рисунку 2, а для суми моментів (рівняння 3) – рисунку 3. Також важливо зауважити, що суму моментів можна складати відносно будь-якої точки конструкції, виходячи з математичної оптимальності при подальшому розв'язанні системи. Найзручнішою точкою завжди буде та, яка відповідає двом умовам: 1) точка з найскладнішою опорою, що надасть можливість позбавитись в рівнянні невідомих реакцій цієї опори; 2) точка, в якій перетинається максимальна кількість ліній дії сил системи. Поясненням є властивість моменту – його рівняння нулю для сили, лінія дії якої проходить через точку [5].

$$\sum X_i = 0; \quad X_A - S_{CD} \cos 30^\circ = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - Q - G + S_{CD} \cos 60^\circ + S = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{iA} = 0; \quad -Q \cdot 1 - G \cdot 3 + S_{CD} \cdot 4 \sin 30^\circ - M + S \cdot 6 = 0. \quad (3)$$

7. Розв'язати систему рівнянь.

З рівняння (1)

$$X_A = S_{CD} \cos 30^\circ = 4,5 \cdot 0,866 = 3,90 \text{ кН.}$$

З рівняння (2)

$$Y_A = Q + G - S_{CD} \cos 60^\circ - S = 1 + 10 - 4,5 \cdot 0,5 - 5 = 3,75 \text{ кН.}$$

З рівняння (3)

$$S_{CD} = \frac{Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - S \cdot 6}{4 \sin 30^\circ} = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0,5} = 4,5 \text{ кН.}$$

Значення X_A , Y_A та S_{CD} отримано додатними. Це вказує на те, що прийняті напрямки цих сил збігаються з їх дійсними напрямками.

8. Для перевірки скласти рівняння моментів всіх сил системи (активних та знайдених реакцій) відносно іншої точки.

$$\sum M_{iB} = -M + S_{CD} \cdot \sin 30^\circ \cdot 2 + G \cdot 3 + Q \cdot 5 - Y_A \cdot 6$$

$$\sum M_{iB} = -8 + 4,5 \cdot 0,5 \cdot 2 + 10 \cdot 3 + 1 \cdot 5 - 3,75 \cdot 6 = 0$$

Сума моментів після підстановки отриманих реакцій опор повинна дорівнювати нулю (допущенням є арифметична помилка розрахунків, яка складає приблизно 10% від значення заданих величин).

РОЗДІЛ 2. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

2.1 Визначення кінематичних параметрів матеріальної точки.

Основною задачею кінематики є встановлення кінематичних параметрів матеріального тіла (механічної системи) в цілому та кожної точки окремо. Взагалі, кінематика вивчає рух тіл або точок з геометричної точки зору, тобто без врахування діючих сил, причин даного руху. Тут буде розглянута перша частина задачі кінематики, а саме, визначені траєкторія, швидкість та прискорення точки при прямо- та криволінійному рухах, тобто базові характеристики руху.

2.2 Координатний спосіб завдання руху точки

Скорочений теоретичний огляд та приклад завдання з методичними рекомендаціями для координатного способу завдання руху точки.

Мета завдання полягає в наступному: за заданими рівняннями руху точки M встановити вид її траєкторії і для моменту часу $t = t_1(c)$ визначити положення точки на траєкторії, її швидкість, повне дотичне і нормальне прискорення, а також радіус кривини траєкторії у відповідній точці.

Задача вирішується за допомогою формул, за якими визначаються швидкість та прискорення точки у декартових координатах (координатний спосіб завдання руху точки), а також формул, за якими визначаються швидкість, дотичне та нормальне прискорення точки при натуральному способі завдання її руху.

Всі теоретичні викладки наведено як коментарі до відповідних етапів.

Дано: Рух точки заданий координатним способом

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3 \quad (см),$$

$$y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1 \quad (см),$$

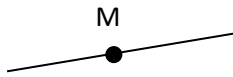
$$t_1 = 1 \text{ с.}$$

Знайти: 1) рівняння траєкторії точки; 2) положення точки М; 3) швидкість; 4) повне, 5) дотичне; 6) нормальне прискорення для моменту часу t_1 , а також 7) радіус кривизни у відповідній точці траєкторії.

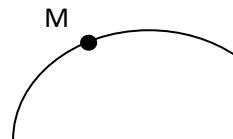
Розв'язок та коментарі.

Матеріальною точкою називається фізичне тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати [1]. Знаючи закон руху точки, можна визначити всі кінематичні характеристики її руху.

1) Траєкторія – це безперервна лінія, яку описує рухома точка відносно обраної системи відліку. За виглядом траєкторії можна охарактеризувати вид руху точки.



Якщо траєкторія руху точки М – пряма лінія, рух називається прямолінійним.



Якщо траєкторія руху точки М – крива лінія, рух називається криволінійним.

У деяких варіантах завдання при визначенні траєкторії або при подальших розрахунках (для їх спрощення) треба мати на увазі відомі з тригонометрії формули:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Для визначення рівняння траєкторії точки в даному прикладі виключимо із заданих рівнянь руху час t . Застосуємо формулу $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, тобто

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right),$$

$$\text{тоді } \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2}, \quad \text{отже } \frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

Остаточно маємо рівняння траєкторії точки: $x = (y + 1)^2 + 1$ – це парабола (рисунок 7).

2) Положення точки M_1 при $t_1 = 1c$ буде визначено координатами:

$$x_1 = -2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 3 = 1,6 \text{ (см)},$$

$$y_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = -0,23 \text{ (см)}.$$

та зображено в масштабі, як показано на рисунку 7.

3) Швидкість точки – одна з основних кінематичних характеристик руху, векторна величина, що характеризує зміну положення та напрямку руху точки в даній системі відліку [2].

При координатному способі завдання руху, проекції швидкості на координатні осі визначаються як перші похідні від належних координат точки за часом. Відповідно, проекції швидкості для заданого моменту часу дорівнюють:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) \text{ при } t_1 = 1c \quad V_x = 1,11 \text{ (см/с)},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{8}t\right) \text{ при } t_1 = 1c \quad V_y = 0,73 \text{ (см/с)}.$$

Модуль швидкості $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{1,11^2 + 0,73^2} = 1,33 \text{ (см/с)}$.

Вектор швидкості точки в даний момент часу спрямований по дотичній до траєкторії точки в бік руху. У випадку прямолінійного руху вектор \vec{V} весь час спрямовується вздовж прямої, за якою відбувається рух точки, і може змінюватись лише за модулем. При криволінійному русі, окрім чисельної величини, весь час може змінюватись і напрямок вектора швидкості точки [3].

Вірно побудовані за визначеними проєкціями вектори, є підтвердженням розрахунків (рисунок 7).

4) Прискоренням точки \vec{a} називається векторна величина, яка характеризує зміну модуля і напрямку швидкості точки з плином часу.

При координатному способі завдання руху, проекції вектора прискорення точки в даний момент часу визначаються як перші похідні від проекцій вектора швидкості або другі похідні від відповідних координат точки за часом [4].

Повне прискорення точки для заданого моменту часу дорівнюють:

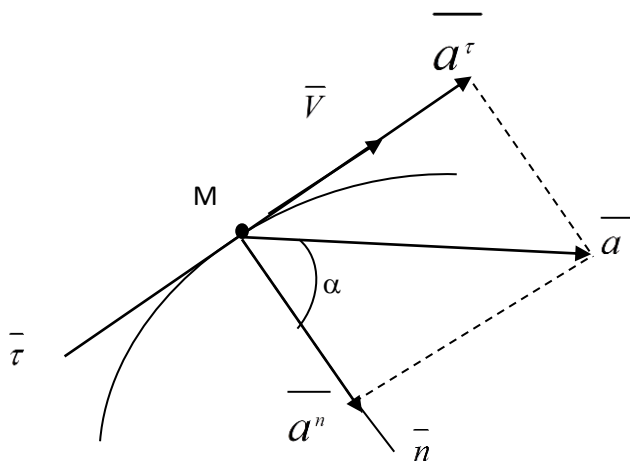
$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{\pi^2}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \text{ при } t_1 = 1c \quad a_x = 0.87 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = -\frac{\pi^2}{32} \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) \text{ при } t_1 = 1c \quad a_y = -0.12 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

$$\text{Модуль прискорення } a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0,87^2 + 0,12^2} = 0,88 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор прискорення точки в даний момент часу \bar{a} лежить у дотичній площині і спрямований у бік увігнутості траєкторії при криволінійному русі точки та вздовж прямої при прямолінійному русі. Саме це повинно відобразитись при побудові \bar{a} за визначеними проєкціями (рисунок 7).

Повне прискорення точки \bar{a} також визначається як векторна сума дотичного \bar{a}^τ та нормального \bar{a}^n прискорень: $\bar{a} = \bar{a}^\tau + \bar{a}^n$, а модуль, відповідно, дорівнює $a = \sqrt{(a^\tau)^2 + (a^n)^2}$



\bar{a}^τ - дотичне прискорення;
 \bar{a}^n - нормальне прискорення;
 \bar{a} - прискорення (повне);
 $(\bar{a}^\tau \perp \bar{a}^n), \quad \text{tg } \alpha = \frac{a^\tau}{a^n}.$

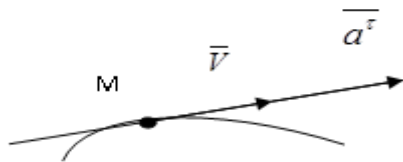
5) Дотичним (тангенціальним) прискоренням \bar{a}^τ називається проєкція повного прискорення точки на дотичну до траєкторії, тобто на вектор швидкості [6]. Дотичне прискорення дорівнює першій похідній від

алгебраїчної величини швидкості або другій похідній від криволінійної координати s за часом: $a^{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$. Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості точки за величиною. Існує тільки при нерівномірному русі.

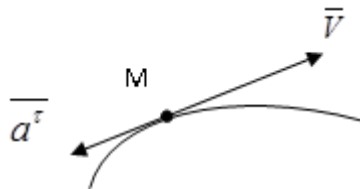
Дотичне прискорення знайдемо за формулою:

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V} = \frac{1.11 \cdot 0.87 + 0.73 \cdot (-0.12)}{1.33} = 0.66 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Вектор дотичного прискорення завжди спрямований по дотичній до траєкторії точки, тобто вздовж лінії вектору швидкості \vec{V} .



Якщо знак a^{τ} є додатнім (+), тобто рух є прискореним, вектор \vec{a}^{τ} спрямовано в бік вектора швидкості.



В протилежному випадку, коли a^{τ} має від'ємний знак (-), рух точки сповільнений, вектор \vec{a}_{τ} спрямовується протилежно \vec{V} вектору швидкості точки.

б) Нормальним прискоренням a^n називається проекція прискорення точки на головну внутрішню нормаль до траєкторії [7]. Нормальне прискорення дорівнює квадрату швидкості, поділеному на радіус кривизни траєкторії в даній точці: $a^n = \frac{V^2}{R}$. Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямком. Існує тільки при криволінійному русі і є завжди додатною величиною.

Нормальне прискорення характеризує рух за виглядом траєкторії точки:

Якщо $a^n \neq 0$ - рух точки криволінійний ($R \neq 0$); $a^n = const$ - рух за колом радіусу R ; $a^n = 0$ - рух точки прямолінійний (тобто $R \rightarrow \infty$).

Нормальне прискорення точки для заданого моменту часу дорівнює:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{0.88^2 - 0.66^2} = 0.58 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

Всі побудови (з врахуванням масштабу) векторів $\overline{a_\tau}$ та $\overline{a_n}$ на рисунку 1 повинні відповідати властивостям величин, це і буде підтвердженням вірності розрахунків.

Рекомендується, проводити побудови (обов'язково в масштабі) всіх розрахованих кінематичних параметрів поступово, тобто в тому ж порядку, тоді будь-яка помилка буде одразу помітною [3].

б) Радіус кривизни траєкторії у точці M_1 знайдемо як:

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{1.33^2}{0.58} = 3.05 \text{ (см)}.$$

Відповідь: $x = (y + 1)^2 + 1$,

$$V = 1.33 \text{ (см/с)},$$

$$a = 0.88 \text{ (см/с}^2\text{)}, \quad a_\tau = 0.66 \text{ (см/с}^2\text{)}, \quad a_n = 0.58 \text{ (см/с}^2\text{)},$$

$$R = 3.05 \text{ (см)}.$$

Всі результати нанесено на плоску декартову систему відліку (рисунок 7).

Візуалізація результатів розрахунків, побудована поступово, тобто коли дань наносяться на систему координат відповідно до виконаних пунктів, буде підтвердженням вірності чисельних даних. Важливо дотримуватись масштабу та відомостей про розташування векторів, що наведені в коментарях до кожного розрахунку.

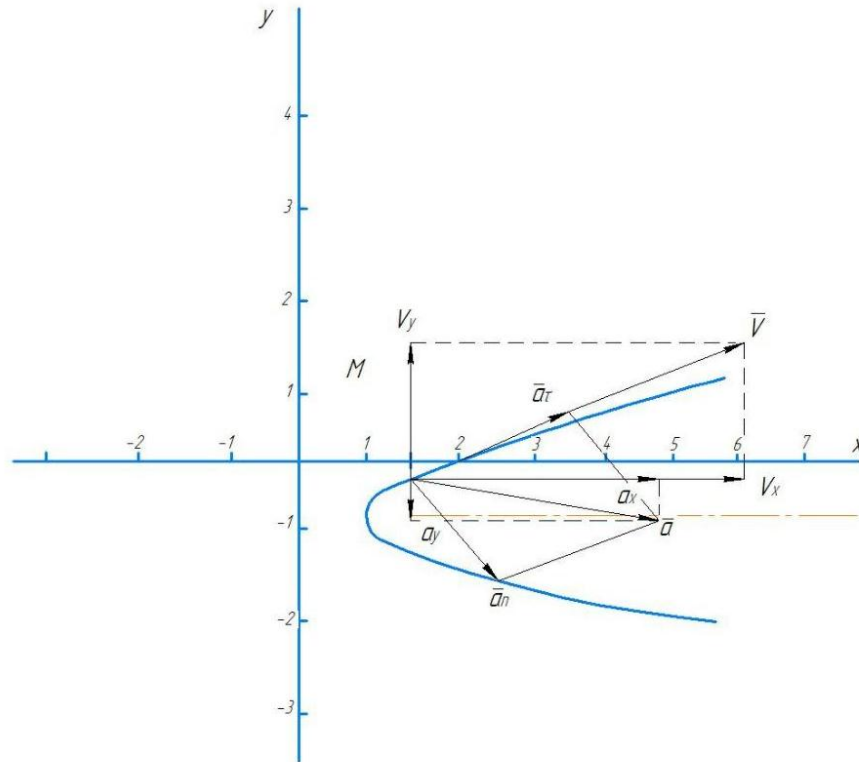


Рисунок 7.

2.3 Натуральний спосіб завдання руху точки

Дано: $R=2(m)$, $\check{S}=AM=2\sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right) (m)$, $t_1=1(c)$.

Знайти: положення точки M_1 для моменту часу t_1 ; її швидкість і прискорення.

Розв'язок та коментарі.

В даному завданні рух точки задано натуральним (природним) способом, тобто рівнянням руху є залежність дугової координати \check{S} (переміщення) від часу [2]. Траєкторія (лінія AM) відома – це коло відповідного радіуса R , зображення якої наведено на рисунку 8. Всі результати подальших розрахунків також будуть нанесені на рисунок 8 послідовно.

1) Положення точки M_1 на траєкторії в момент часу t_1 :

$$\check{S}_1 = AM_1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,4 \text{ м},$$

Центральний кут α , який відповідає положенню точки

$$\alpha = \frac{S_1}{R} = \frac{1,4}{2} = 0,7 \text{ рад} = 40^\circ.$$

2) Швидкість точки M_1 :

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) \Big|_{t=1} = 1,11 \text{ м/с},$$

так, як $V > 0$, то вектор швидкості \bar{V} спрямований по дотичній до кола у бік збільшення дугової координати \check{S} .

3) Прискорення точки M_1 визначаються за його дотичною (\bar{a}_τ) та нормальною (\bar{a}_n) складовими:

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n, (\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_n),$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{8} \sin\left(\frac{\pi \cdot t}{4}\right) \text{ (для } t_1=1) = -0,87 \text{ м/с}^2,$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{1,11^2}{2} = 0,62 \text{ м/с}^2.$$

Модуль прискорення дорівнює

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0,87^2 + 0,62^2} = 1,07 \text{ м/с}^2.$$

Так, як $a_\tau < 0$, то вектор \bar{a}_τ спрямований по дотичній до кола у бік зменшення швидкості V .

Відповідь: $V = 1,11 \text{ м/с}$; $\bar{a}_\tau = -0,87 \text{ м/с}^2$; $\bar{a}_n = 0,62 \text{ м/с}^2$; $\bar{a} = 1,07 \text{ м/с}^2$.

На рисунку 8 зображені всі вектори \bar{V} , \bar{a}_τ , \bar{a}_n , \bar{a} з урахуванням знаків V та a_τ (точка M_1 рухається сповільнено).

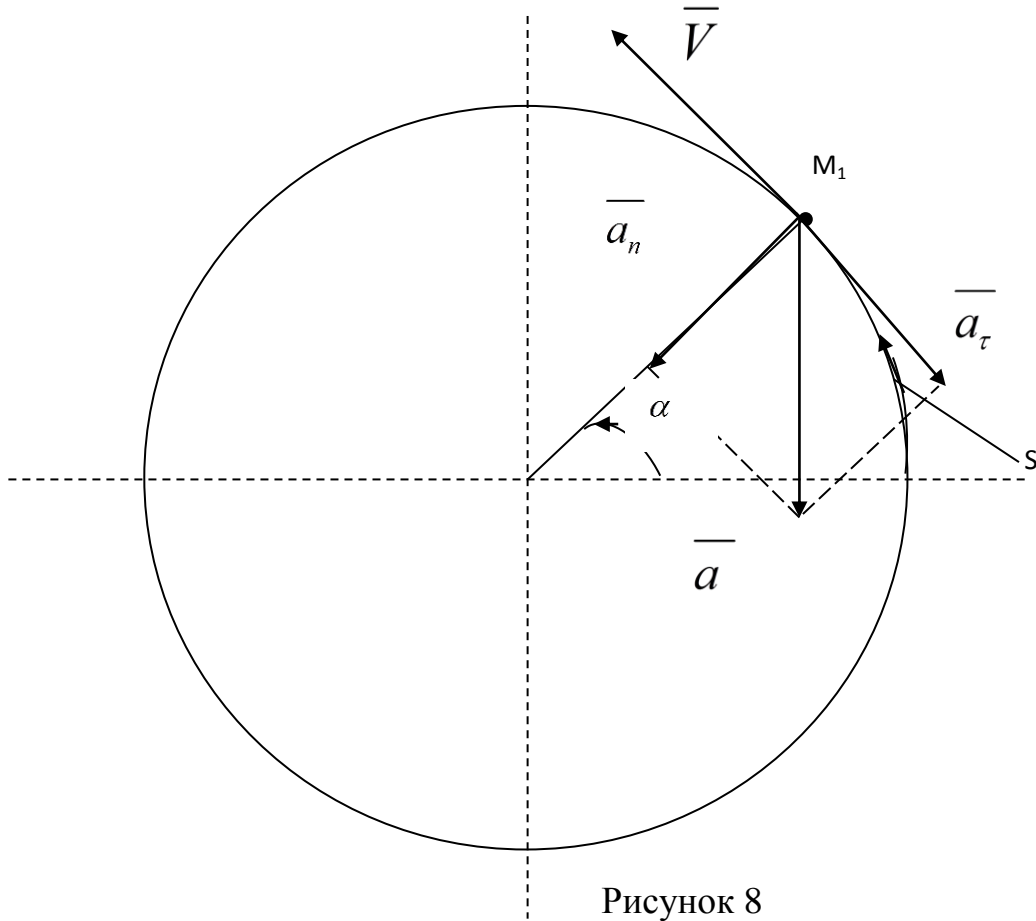


Рисунок 8

РОЗДІЛ 3. ДИНАМІКА ТОЧКИ ТА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Основною задачею динаміки є розв'язання оберненої задачі методом інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під дією сил. Дана процедура залежить від виду та характеру сил, є складною та викликає багато питань.

Вищесказане зумовило необхідність розроблення і введення до навчального процесу методичного забезпечення, яке дає змогу активізувати роботу студентів, сприяє перетворенню самостійної роботи у творчий процес. Математичні моделі та підходи до їх використання надаються в вигляді рекомендацій і схем для виконання індивідуальної роботи за різними варіантами.

3.1 Скорочений теоретичний огляд з Динаміки

За основним законом динаміки прискорення точки пропорційне прикладеній силі та має однаковий з нею напрямок [1, 2]. Іншими словами, добуток маси точки на прискорення, якого вона набуває під дією сили, дорівнює за модулем цій силі та співпадає з напрямком сили: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Якщо вільна матеріальна точка M відомої маси m рухається під дією системи сил $\{\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n\}$, то рівнодійна системі сил визначається як геометрична сума $\vec{F} = \sum_{n=1}^k \vec{F}_n$ (рисунок 9). Прискорення, що надає система сил

точці, є сумарним вектором $\vec{a} = \sum_{n=1}^k \vec{a}_n$, який спрямований за вектором

рівнодійної.

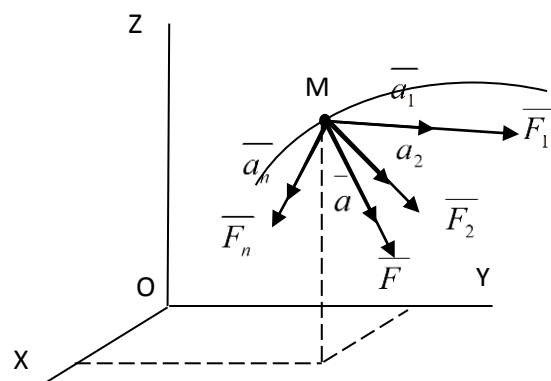


Рисунок 9

Основне рівняння динаміки для системи сил можна надати в вигляді векторного рівняння $m \cdot \bar{a} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$. Склавши проєкції цього рівняння на координатні осі та враховуючи, що прискорення точки є другою похідною від закону її руху за часом [4], можна скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки:

$$\left. \begin{aligned} m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = m \cdot \ddot{x} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{n=1}^k F_{nx}, & \quad m \cdot \ddot{x} = \sum_{n=1}^k F_{nx} \\ m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = m \cdot \ddot{y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{n=1}^k F_{ny}, & \quad m \cdot \ddot{y} = \sum_{n=1}^k F_{ny} \\ m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = m \cdot \ddot{z} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{n=1}^k F_{nz}, & \quad m \cdot \ddot{z} = \sum_{n=1}^k F_{nz} \end{aligned} \right\} (1)$$

В рівняннях $\frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}$, $\frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}$, $\frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$ - проєкції прискорення \bar{a} на координатні осі;

$F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, F_{2x}, F_{2y}, F_{2z}, \dots, F_{nx}, F_{ny}, F_{nz}$ - проєкції сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ на координатні осі.

Дві задачі динаміки точки.

Перша задача динаміки (пряма)

Знаючи масу точки m та рівняння її руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, визначити модуль і напрямок рівнодійної сил, прикладених до точки.

Розв'язок першої задачі динаміки проводиться методом подвійного диференціювання рівнянь руху за часом.

Отримані диференціальні рівняння руху точки $m \cdot \ddot{x} = \sum_{n=1}^k F_{nx} = F_x$,
 $m \cdot \ddot{y} = \sum_{n=1}^k F_{ny} = F_y$, $m \cdot \ddot{z} = \sum_{n=1}^k F_{nz} = F_z$ надають можливість визначити модуль

рівнодійної, як $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$. Напрямок рівнодійної знаходять за направляючими косинусами: $\cos(\overline{F}, \overline{i}) = \frac{F_x}{F}$, $\cos(\overline{F}, \overline{j}) = \frac{F_y}{F}$, $\cos(\overline{F}, \overline{k}) = \frac{F_z}{F}$.

Друга задача динаміки (обернена, основна)

Знаючи масу точки m , сили, що діють на точку, а також початкове положення (X_0, Y_0, Z_0) і початкову швидкість (X'_0, Y'_0, Z'_0) , визначити закон руху $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$.

Розв'язання другої задачі динаміки здійснюється методом подвійного інтегрування за часом диференціальних рівнянь при відомих початкових умовах.

1 Складання диференціальних рівнянь у вигляді (формули 1)

$$m \cdot \ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \cdot \ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$

$$m \cdot \ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}).$$

2 Інтегрування диференціальних рівнянь руху двічі за часом.

3 Визначення постійних інтегрування за початковими умовами:

$$t = 0, x = x_0, y = y_0, z = z_0, \dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0,$$

де $t_0 = t = 0$ – початковий момент часу,

x_0, y_0, z_0 - початкові координати,

$$\dot{x}_0 = \frac{dx}{dt} = v_{0x}, \dot{y}_0 = \frac{dy}{dt} = v_{0y}, \dot{z}_0 = \frac{dz}{dt} = v_{0z} - \text{проекції початкової швидкості } \overline{v_0}$$

(записані як перші похідні за часом від рівнянь руху).

4 Отримання рівнянь руху точки: $x = f_1(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$,

$$y = f_2(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0),$$

$$z = f_3(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Основний підхід, власне математична модель та схема розв'язування оберненої задачі динаміки є процедурою стандартною, але залежність від

системи діючих на матеріальну точку сил, впливає на хід рішення. Далі буде наведено приклади складання та інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки під дією різних видів сил [5, 6].

3.2 Приклад завдання з рекомендаціями

3.2.1 Випадок постійних сил

Інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки, що знаходиться під дією постійних сил.

В якості приклада розглядається модель залізничного укосу [3]. У залізничних скальних виїмках для захисту кюветів від потрапляння в них з укосів кам'яних осипів споруджується «полиця» безпеки (ДС на рисунку 10). Враховуючи можливість руху каменя з найвищої точки А укосу та вважаючи при цьому його початкову швидкість V_0 рівною нулю, треба визначити мінімальну ширину «полиці» b та швидкість V_C , з якою камінь падає на неї. Уздовж ділянки АВ укосу, яка складає кут α з горизонтом та має довжину l , камінь рухається протягом τ , секунд. При розв'язанні задачі можна вважати коефіцієнт тертя ковзання f каменя уздовж АВ постійним, а опором повітря знехтувати.

Дано: $V_A = 0$, $\alpha = 60^\circ$, $l = 4\text{ м}$, $\tau = 1\text{ с}$, $f \neq 0$, $h = 5\text{ м}$, $\beta = 75^\circ$.

Визначити: b та V_C .

Розглянемо рух каменя на ділянці АВ як прямолінійний рух точки під дією постійних сил.

Вважаючи, що камінь рухається прямолінійно вздовж поверхні АВ, оберемо систему відліку (x_1, y_1) з початком у точці А в напрямку руху каменя. Приймаючи камінь за матеріальну точку, відобразимо (рисунок 10) сили, що діють на нього: вага \bar{G} , нормальна реакція \bar{N} та сила тертя ковзання \bar{F} .

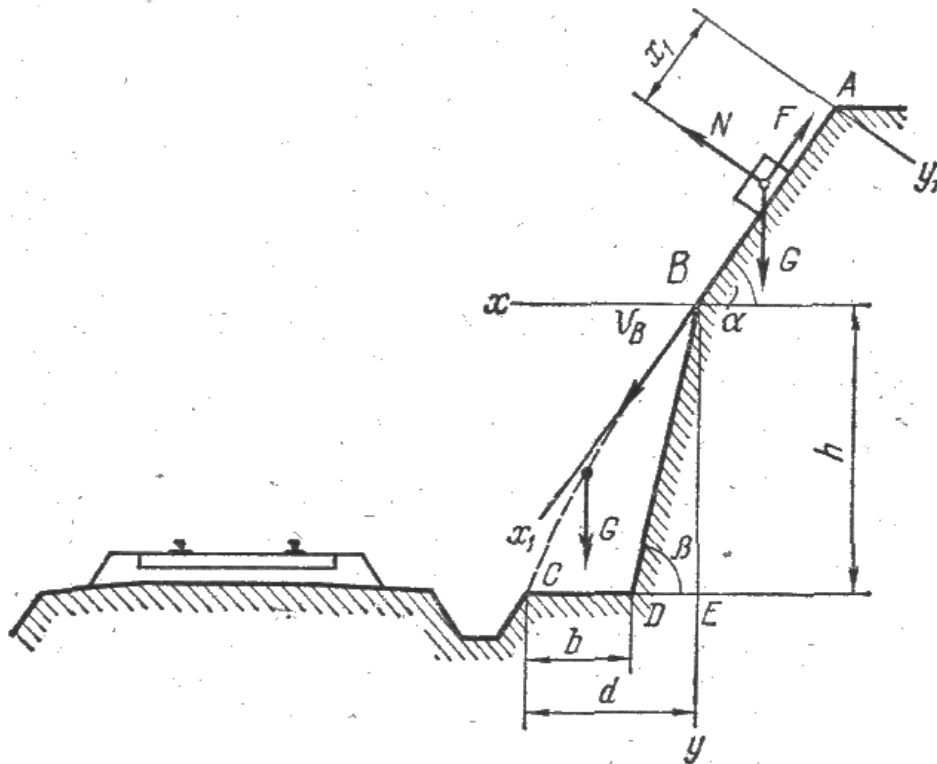


Рисунок 10

Складемо диференціальне рівняння руху каменя вздовж АВ:

$$mx_1'' = \sum X_{n1}, \quad mx_1'' = G \sin \alpha - F.$$

Сила тертя $F = fN$, де $N = G \cos \alpha$. Таким чином,

$$mx_1'' = G \sin \alpha - fG \cos \alpha \quad \text{або} \quad x_1'' = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Інтегруючи диференціальне рівняння двічі за часом, отримаємо:

$$x_1' = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1,$$

$$x_1 = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)t^2 + C_1t + C_2.$$

Для визначення постійних інтегрування скористаємось початковими умовами задачі: при $t = 0$ початкове положення $x_{10} = 0$ та початкова швидкість $x_{10}' = 0$. Склавши рівняння, отримані при інтегруванні, для $t = 0$ $x_{10} = C_2$ та $x_{10}' = C_1$, знайдемо постійні: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Тоді

$$x_1' = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t,$$

$$x_1 = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)t^2.$$

Для моменту τ , коли камінь залишає ділянку АВ $x_1' = V_B$, а $x_1 = l$ (швидкість $x_1' = V_B$ та координата $x_1 = l$ каменя в точці В), тобто

$$V_B = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)\tau;$$

$$l = (g(\sin \alpha - f \cos \alpha)/2)\tau^2,$$

звідки $V_B = 2l/\tau$, тобто $V_B = (2 \cdot 4)/1 = 8 \text{ м/с}$.

Розглянемо рух каменя від точки В до точки С [3] як криволінійний рух точки під дією постійних сил. В даному випадку, розглядається вільне падіння, тобто без врахування опору середовища (за умовами задачі опором повітря можна знехтувати).

Систему відліку (xy) обираємо в напрямку падіння каменя з початком у точці В. Показавши силу тяжіння \overline{G} , що діє на камінь, складемо диференціальні рівняння його руху:

$$mx'' = 0, \quad my'' = G.$$

Інтегруємо перше рівняння $mx'' = 0$: $x' = C_3$, $x = C_3t + C_4$.

Постійні інтегрування C_3 та C_4 визначимо з використанням початкових умов: при $t = 0$ $x_0 = 0$, $x_0' = V_B \cos \alpha$.

За допомогою рівнянь, отриманих при інтегруванні та складених для $t = 0$: $x_0' = C_3$, $x_0 = C_4$, знайдемо, що $C_3 = V_B \cos \alpha$ та $C_4 = 0$. Тоді $x' = V_B \cos \alpha$, $x = V_B \cos \alpha \cdot t$.

Інтегруємо друге рівняння $my'' = G$:

$$y' = gt + C_5, \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_5t + C_6.$$

Початкові умови: при $t = 0$ $y_0 = 0$, $y_0' = V_B \sin \alpha$. Із рівнянь, отриманих інтегруванням та складених для $t = 0$, $y_0' = C_5$, $y_0 = C_6$,

знайдемо, що постійні інтегрування дорівнюють: $C_5 = V_B \sin \alpha$ та $C_6 = 0$.

Остаточно $y' = gt + V_B \sin \alpha$, $y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t$.

Таким чином, рівняння руху каменя мають вигляд

$$x = V_B \cos \alpha \cdot t,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} + V_B \sin \alpha \cdot t.$$

Рівняння траєкторії каменя знайдемо, виключивши параметр t (час) з рівнянь руху. Визначивши t з першого рівняння та підставивши його в друге, отримаємо рівняння параболи:

$$y = \frac{gx^2}{2V_B^2 \cos^2 \alpha} + x \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

У момент падіння, коли $y = h = 5\text{ м}$, а $x = d$, $y = \frac{9,81 \cdot d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0,5^2} + d \cdot \sqrt{3}$,

звідки $d_{1,2} = -2,82 \pm 4,93$, тобто

$$d_1 = 2,11\text{ м}, \quad d_2 = -7,75\text{ м}.$$

Оскільки траєкторією руху каменя є гілка параболи з додатними абсцисами її точок, то $d_1 = 2,11\text{ м}$.

Мінімальна ширина «полиці»

$$b = d - ED = d - \frac{h}{\operatorname{tg} 45^\circ} = 2,11 - \frac{5}{3,73} = 0,77\text{ м}.$$

Скориставшись рівнянням руху каменя $x = V_B \cos \alpha \cdot t$, знайдемо час T руху каменя від точки В до точки С: $2,11 = 8 \cdot 0,5 \cdot T$, звідки $T = 0,53\text{ с}$.

Швидкість каменя при падінні знайдемо через проекції швидкості на осі координат:

$$x' = V_B \cos \alpha, \quad y' = gt + V_B \sin \alpha$$

Далі за формулою $V = \sqrt{x'^2 + y'^2}$.

Для моменту падіння ($t = T = 0,53c$)

$$V_C = \sqrt{(V_B \cos \alpha)^2 + (gT + V_B \sin \alpha)^2} = \sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,87)^2} = 12,8 \text{ м/с.}$$

3.2.2 Випадок з врахуванням сили опору

Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки з врахуванням сили опору (яка залежить від швидкості).

На вертикальній ділянці AB труби (рисунок 11) на вантаж D масою m діють постійна сила ваги P і сила опору R (яка залежить від швидкості); відстань від точки A , де $V = V_0$, до точки B дорівнює l .

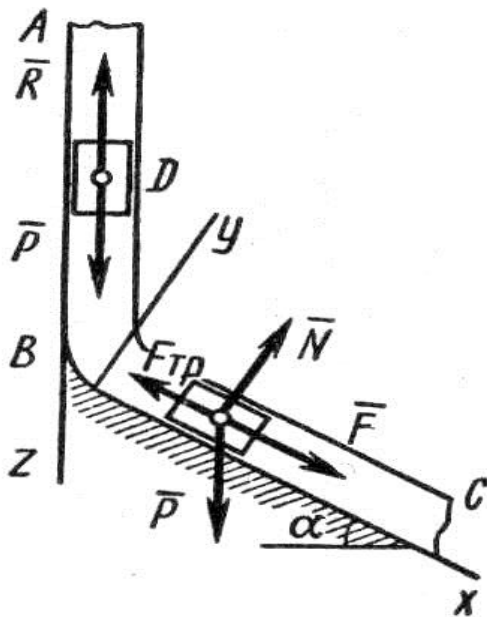


Рисунок 11

Дано: $m = 2 \text{ кг}$;

Ділянка AB : сила опору руху

$R = \mu V^2$, коефіцієнт опору

$\mu = 0,4 \frac{\text{кг}}{\text{м}}$; швидкість $V_0 = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$;

відстань AB $l = 2,5 \text{ м}$;

Ділянка BC :

коефіцієнт тертя ковзання вантажу $f = 0,2$,

змінна сила $F_x = 16 \sin(4t)$.

Визначити:

$x = f(t)$ – закон руху вантажу на ділянках AB і BC .

Розв'язання:

Зображуємо вантаж (у вільному положенні) та діючі на нього сили $\bar{P} = m\bar{g}$ і \bar{R} . Проводимо вісь Az і складаємо диференціальне рівняння руху вантажу [7] і проекції на цю вісь:

$$m \frac{dV_z}{dt} = \sum F_{kz} \quad \text{чи} \quad mV_z \frac{dV_z}{dz} = P_z + R_z.$$

Далі знаходимо проекції сил ваги $P_z = P = mg$, опору $R_z = -R = -\mu V^2$; підкреслюємо, що в рівнянні всі змінні сили треба обов'язково виразити через величини, від яких вони залежать. Враховуючи ще, що $V_z = V$, отримаємо:

$$mV \frac{dV}{dz} = mg - \mu V^2 \quad \text{чи} \quad V \frac{dV}{dz} = \frac{\mu}{m} \left(\frac{mg}{\mu} - V^2 \right).$$

Введемо для скорочення записів позначення $k = \frac{\mu}{m} = 0,2 \text{ м}^{-1}$, $n = \frac{mg}{\mu} = 50 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$, де при підрахунку прийнято $g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Тоді отримане рівняння можна представити в вигляді $2V \cdot \frac{dV}{dz} = -2k(V^2 - n)$.

Поділяючи змінні, а потім взявши від обох частин інтеграл, отримаємо $\frac{2VdV}{V^2 - n} = -2k dz$ та $\ln(V^2 - n) = -2kz + C_1$.

По початковим умовам при $z = 0$ $V = V_0$, що дає $C_1 = \ln(V_0^2 - n)$, і знаходимо $\ln(V^2 - n) - \ln(V_0^2 - n) = -2kz$.

$$\text{Звідси} \quad \ln \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = -2kz \quad \text{та} \quad \frac{V^2 - n}{V_0^2 - n} = e^{-2kz}.$$

$$\text{В результаті знаходимо} \quad V^2 = n + (V_0^2 - n)e^{-2kz}.$$

Вважаючи, що $z = l = 2,5 \text{ м}$ і замінюючи k та n їх значеннями, визначаємо швидкість V_B вантажу в точці В ($V_0 = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, число $e = 2,7$): $V_B^2 = 50 - \frac{25}{e} = 40,7$ та $V_B = 6,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

3.2.3 Випадок змінної сили

Інтегрування диференціальних рівнянь руху точки під дією змінної сили, що залежить від часу.

На похилій ділянці ВС (рисунок 11) на вантаж діють постійна сила ваги P та змінна сила $F = F(t)$, яка задана в ньютонках. Знайдена швидкість V_B ($V_B = 6,4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$) буде для руху на цій ділянці початковою швидкістю ($V_0 = V_B$).

Зобразимо вантаж (у вільному положенні) та діючі на нього сили $\bar{P} = m\bar{g}$, \bar{N} , \bar{F}_{mp} і \bar{F} . Проведемо з точки B осі Bx і By та складемо диференціальне рівняння руху вантажу в проекції на вісь Bx :

$$m \frac{dV_x}{dt} = P_x + N_x + F_{mp_x} + F_x \text{ чи } m \frac{dV_x}{dt} = mg \sin \alpha - F_{mp} + F_x, \text{ де } F_{mp} = fN.$$

Для визначення N складемо рівняння в проекції на вісь By . Так як $a_y = 0$, отримуємо $N - mg \cos \alpha = 0$, звідки $N = mg \cos \alpha$. Отже, $F_{mp} = fmg \cos \alpha$, крім того, $F_x = 16 \sin(4t)$ і відповідно диференціальне рівняння приймає вигляд:

$$m \frac{dV_x}{dt} = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) + 16 \sin(4t).$$

Поділив обидві частини рівності на m , обчислимо $g(\sin \alpha - f \cos \alpha) = g(\sin 30^\circ - 0,2 \cos 30^\circ) = 3,2$; $\frac{16}{m} = 8$, підставимо ці значення в рівняння і отримаємо: $\frac{dV_x}{dt} = 3,2 + 8 \sin(4t)$.

Помножуючи обидві частини рівняння на dt та інтегруючи, знайдемо $V_x = 3,2t - 2 \cos(4t) + C_2$.

Тепер будемо відраховувати час від моменту, коли вантаж знаходиться в точці B , враховуючи в цей момент $t = 0$. Тоді при $t = 0$ $V = V_0 = V_B$, де $V_B = 6,4 \frac{M}{c}$. Підставляючи ці величини, отримуємо постійну інтегрування $C_2 = V_B + 2 \cos 0 = 6,4 + 2 = 8,4$.

При знайденому значенні C_2 швидкість визначається як

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 3,2t - 2 \cos(4t) + 8,4.$$

Помножуючи обидві частини на dt і знову інтегруючи, знайдемо закон

руху точки

$$x = 1,6t^2 - 0,5 \sin(4t) + 8,4t + C_3.$$

Так як при $t = 0$, $x = 0$, то $C_3 = 0$ і остаточно шуканий закон руху вантажу буде

$$x = 1,6t^2 + 8,4t - 0,5 \sin(4t),$$

де x – в метрах, t – в секундах.

ВИСНОВКИ

У даній роботі проведений теоретичний та практичний аналіз класичних та удосконалених науково – методичних підходів до розв’язання задач теоретичної механіки.

1. Отримано універсальні математичні моделі для розв’язання задач із розділів статички, кінематики та динаміки
2. Знайдено ефективні підходи до адаптації методів графічного моделювання для вирішення задач механіки.
3. Чисельно досліджені приклади побудови рівнянь рівноваги та руху механічних систем із використанням програмного забезпечення MATLAB і SolidWorks.
4. Проведено моделювання реальних механічних систем із врахуванням впливу зовнішніх сил та інших фізичних чинників.
5. Розроблено науково-методичні рекомендації для практичного застосування отриманих результатів у навчальному процесі.

Планується опублікування основних результатів роботи в матеріалах університетської науково – методичної конференції з публікацією тез.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Classical Mechanics, R. Douglas Gregory, University of Manchester, Cambridge University Press September 2012, Online ISBN: 9780511803789, DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511803789>
2. Introduction to Classical Mechanics, David Morin, Senior Lecturer on Physics, Harvard University, Cambridge University Press (2008), 710 pages.
3. М.А. Павловський Теоретична механіка, Київ, Техніка, 2002, с. 511
4. Теоретична механіка. Частина 1. Статика, кінематика: навч. посіб. / Л.М. Березін та ін. – К.: Університет "Україна", 2021. – 142 с. / DOI: <https://doi.org/10.36994/978-966-388-611-4-2021-142>
5. S. Targ Theoretical mechanics, A short course, English translation, Mir Publishers, 1988 – p. 528.
6. Lectures on Theoretical Mechanics, Dietrich Belitz, Department of Physics, University of Oregon
7. Конспект лекцій з дисципліни «Теоретична механіка». Аксьонова Н.А., Оробінський О.В. – Харків: УкрДАЗТ, 2015 – 116 с.
8. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних та контрольних робіт з дисципліни «Теоретична механіка» (розділ «Статика») / укладачі : Н.А. Аксьонова, О.А. Логвіненко ; кафедра механіки і проектування машин. - Харків : УкрДУЗТ, 2023. - 27 с.
9. Методичні вказівки до виконання розрахунково-графічних та контрольних робіт з дисципліни «Теоретична механіка» (розділ «Кінематика») / укладач Н.А. Аксьонова; кафедра механіки і проектування машин. - Харків : УкрДУЗТ, 2023. - 21 с.
10. Методичні вказівки з дисципліни «Теоретична механіка». Розділ «Кінематика» для заочної форми навчання механічного та будівельного факультетів. Аксьонова Н.А., Оробінський О.В., Надтока О.В. – Харків: УкрДУЗТ, 2016. – 30 с.
11. Методичні рекомендації до виконання розрахунково-графічних робіт з дисципліни «Теоретична механіка» (розділ «Динаміка») / Аксьонова Н.А. - Х. : УкрДУЗТ, 2021. - 26 с.

12. Методичні вказівки з дисципліни «Теоретична механіка». Розділ «Динаміка» для заочної форми навчання механічного та будівельного факультетів. Аксьонова Н.А., Оробінський О.В., Надтока О.В. – Харків: УкрДУЗТ, 2018. – 34 с.
13. Лобас Л.Г., Лобас Людм. Г. Теоретична механіка: Підручник для студентів вищих технічних навчальних закладів / Л.Г. Лобас, Людм.Г. Лобас. – К.: ДЕТУТ, 2008. – 406 с
14. Особливості викладання дисципліни «Теоретична механіка» в складних технічних умовах воєнного стану, С. В. Бобрицький, Н. А. Аксьонова, Тези доповідей науково-методичної конференції кафедр університету. – Харків, 2022, с. 95.
15. Ванін В.А. Математичні моделі та чисельні методи в задачах механіки суцільного середовища: Навчальний посібник / Ванін В.А.– Харків : НТУ «ХП», 2018. – 209 с.
16. Дубовой В.М., Кветний Р.Н., Михальов О.І., Усов А.В. Моделювання та оптимізація систем: Підручник для студентів усіх рівнів вищої освіти – Вінниця: ПП «ТД» Едельвейс», 2017. – 804 с.
17. Numerical Methods and Analysis with Mathematical Modelling, By William P. Fox, Richard D. West, New York, Imprint Chapman and Hall/CRC, 2024, p. 423.
18. Advanced Mathematical Modeling and Numerical Solutions in Applied Mechanics and Engineering, Edited by S. Laima, Yong Cao, Xiaowei Jin, Hehe Ren, Reprint of the Special Issue, 2024, 542 pages.