ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Выпуск 10 1970

О РОСТЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ЯДЕР СЕГЁ

Б. Л. Голинский

ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$P_n(z) = \varkappa_n z^n + \ldots,\ \varkappa_n > 0,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

многочлены, ортонормированные на единичной окружности $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ относительно обложения $d\sigma(\theta)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(e^{i\theta})\,\overline{P_m(e^{i\theta})}\,d\sigma(\theta) = \delta_{mn},$$

где $\sigma(\theta)$ — неубывающая ограниченная функция с бесчисленным множеством точек роста. Почти всюду существующую $\sigma'(\theta) = p(\theta)$ назовем плотностью распределения. Если $\sigma(\theta)$ — абсолютно непрерывна на $[-\pi, \pi]$, то плотность распределения называют весом. Под полиномиальным ядром Г. Сегё понимают обычно билинейную форму

$$K_n(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{n} P_k(z)\,\overline{P_k(\zeta)}.$$

Если $\zeta = z = e^{i\theta}$, будем писать $K_n(\theta)$.

При нахождении оценки погрешности в представлении функции отрезком ее ряда Фурье—Чебышева требуется знать порядок роста ядер $K_n(\theta)$ при безграничном возрастании индекса n, а также в вопросах, связанных с исследованием сходимости бесконечных процессов, связанных с многочленами $\{P_n(z)\}_0^\infty$.

В настоящей статье получен точный порядок роста ядер $K_n(\theta)$ в точке $\theta = \theta_0$, где $\sigma'(\theta_0)$ обращается в нуль или бесконечность типа

$$|\theta - \theta_0|^\alpha,\ \alpha > 0;\ |\theta - \theta_0|^{-\alpha'},\ 0 < \alpha' < 1;\ \left\{\ln\frac{1}{|\theta - \theta_0|}\right\}^\beta\ \ \beta \gtrless 0.$$

Рассмотрено асимптотическое поведение ядер $K_n(\theta)$ в односторонних особых точках указанного типа, а также в нулях типа $\exp\{-|\theta - \theta_0|^{-\gamma}\}$, $\gamma > 0$.

§ 1. ОСНОВНОЕ ЛОКАЛЬНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ЯДЕР $K_n(\theta)$.

Лемма 1. Для всякого $0 < \delta < 1$ *и всякого* $0 < \eta < \varepsilon$ *найдется такое значение* $n_0 = n_0(\delta, \eta)$, *что при всех* $n \geqslant n_0$ *и при* $\alpha + 2\varepsilon \leqslant \theta_0 \leqslant \beta - 2\varepsilon$, $[\alpha, \beta] \subseteq [-\pi, \pi]$ *будет выполняться неравенство*

$$\frac{1}{2\pi}\int_e |H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2\,d\sigma(\theta) \geqslant \frac{(1-\delta)^2}{2\pi}\left\{\sigma\left(\theta_0 + \frac{\delta}{n}\right) - \sigma\left(\theta_0 - \frac{\delta}{n}\right)\right\}, \quad (1.1)$$

где

$$e = [\theta_0 - \eta,\ \theta_0 + \eta],\ H_n(z, z_0) = \frac{K_n(z, z_0)}{K_n(z_0, z_0)},\ z = e^{i\theta},\ z_0 = e^{i\theta_0}.$$

Доказательство. Применим метод доказательства от противного. Предположим, что, начиная с некоторого n, справедливо неравенство, обратное (1. 1), т. е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_e \left| H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})\right|^2 d\sigma(\theta) < \frac{(1-\delta)^2}{2\pi}\left\{\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\right\}. \tag{1.2}$$

Рассмотрим новый многочлен (см. [1, стр. 101])

$$g_\nu(z, z_0) = H_n(z, z_0)\left\{\frac{9+\left(\frac{z}{z_0}\right)^2}{10}\right\}^{\left[\frac{1}{4}n\delta\right]}, \quad g_\nu(z, z_0)=1,$$

степени $\nu \leqslant n\left(1+\frac{\delta}{2}\right)$. Имеем

$$|g_\nu(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 \leqslant |H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2\left\{1-\frac{9}{25}\sin^2(\theta-\theta_0)\right\}^{\left[\frac{1}{4}n\delta\right]} \leqslant |H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2.$$

Известно, что

$$\frac{1}{K_n(\theta_0)} = \min_{G_n(z)\in G^{(n)}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{G_n(z)}{G_n(z_0)}\right|^2 d\sigma(\theta), \quad z=e^{i\theta}, \quad z_0=e^{i\theta_0}, \tag{1.3}$$

где $G^{(n)}$ — множество многочленов n-й степени. Заменим в (1. 3) многочлен $G_\nu(z):G_\nu(z_0)$, $G_\nu(z)\in G(\nu)$ многочленом $g_\nu(z, z_0)$. Тогда

$$\frac{1}{K_\nu(\theta_0)} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_\nu(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta).$$

Указанный прием, когда в равенстве (1. 3) вместо $G_n(z)\in G^{(n)}$ берется определенный многочлен, был впервые использован Н. И. Ахиезером при доказательстве одной теоремы С. Н. Бернштейна [2].

Обозначим $e+e' = [-\pi, \pi]$. Для $\theta \in e'$ имеем $|\theta-\theta_0| \geqslant \eta$, откуда

$$1-\frac{9}{25}\sin^2(\theta-\theta_0) \leqslant 1-\frac{9}{25}\sin^2\eta \leqslant 1-\lambda_0^2\eta^2, \quad \lambda_0=\frac{6}{5\pi}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_\nu(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta) \leqslant (1-\lambda_0^2\eta^2)^{\left[\frac{1}{4}n\delta\right]}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{e'}|H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta) +$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_e |H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta).$$

Отсюда, принимая во внимание (1. 2), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta) > \frac{1}{2\pi}\int_{e'}|H_n e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta) > \frac{1}{(1-\lambda_0^2\eta^2)^{\left[\frac{1}{4}n\delta\right]}}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g_\nu(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta)-\frac{1}{2\pi}\int_e|H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2 d\sigma(\theta)\right\} >$$
$$>(1+\lambda_0^2\eta^2)^{\left[\frac{1}{4}n\delta\right]}\left\{\frac{1}{K_\nu(\theta_0)}-\frac{(1-\delta)^2}{2\pi}\left[\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\right]\right\}.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|H_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2\,d\sigma(\theta)=\frac{1}{K_n(\theta_0)}.$$

Итак,

$$\frac{1}{K_n(\theta_0)}>(1+\lambda_0^2\eta^2)^{\left[\frac{1}{4}n\delta\right]}\cdot\left\{\frac{1}{K_\nu(\theta_0)}-\frac{(1-\delta)^2}{2\pi}\left[\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\delta\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\right]\right\}$$

или

$$(1+\lambda_0^2\eta^2)^{\left[\frac{1}{4}n\delta\right]}<\frac{2\pi}{K_n(\theta_0)}:\left\{\frac{2\pi}{K_\nu(\theta_0)}-(1-\delta)^2\left[\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\right]\right\}. \quad (1.4)$$

Известно [3, стр. 79], что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{K_n(\theta_0)}=\frac{1}{2\pi}[\sigma(\theta_0+0)-\sigma(\theta_0-0)]. \quad (1.5)$$

Поэтому предел правой части в (1.4) при $n\to\infty$ будет равен $1:[1-(1-\delta)^2]$. Предел левой части в (1.4) при $n\to\infty$ и заданном η будет сколь угодно большим, и мы приходим к противоречию. Лемма доказана.

Теорема 1. *При условиях леммы 1 имеем*

$$K_n(\theta_0)\left[\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\right]\leqslant\frac{2\pi}{(1-\delta)^2},\quad n\geqslant n_0, \quad (1.6)$$

θ_0 — любая точка внутри отрезка $[-\pi, \pi]$.

Доказательство. По лемме 1 имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_e|K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2\,d\sigma(\theta)\geqslant\frac{(1-\delta)^2}{2\pi}K_n^2(\theta_0)\left[\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\right].$$

Но

$$K_n(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(e^{i\theta}, e^{i\theta_0})|^2\,d\sigma(\theta)\geqslant\frac{1}{2\pi}\int_e|K_n(e^{i\theta},e^{i\theta_0})|^2\,d\sigma(\theta),$$

откуда следует (1.6).

Соотношение (1.6) впервые получил Я. Л. Геронимус [4, стр. 67], когда θ_0 — точка, где тригонометрическая сумма $K_n(\theta)$ достигает своего максимума.

Следствие 1. *Пусть существует $\sigma(\theta_0)$. Тогда имеют место односторонние оценки*

$$K_n(\theta)\left[\sigma(\theta_0)-\sigma\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\right]\leqslant\frac{2\pi}{(1-\delta)^2},\quad\theta\to\theta_0-0,\quad -\pi+\varepsilon<\theta_0<\pi-\varepsilon,\quad\varepsilon>0. \quad (1.7_1)$$

$$K_n(\theta)\left[\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma(\theta_0)\right]\leqslant\frac{2\pi}{(1-\delta)^2},\quad\theta\to\theta_0+0. \quad (1.7_2)$$

Действительно, если $0<\theta_0-\theta<\frac{\delta}{n}$, то

$$\sigma(\theta_0)-\sigma\left(\theta_0-\frac{\delta}{n}\right)\leqslant\sigma\left(\theta+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma\left(\theta-\frac{\delta}{n}\right). \quad (1.8_1)$$

Если $\theta_0-\theta>-\frac{\delta}{n}$, *то*

$$\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma(\theta_0)\leqslant\sigma\left(\theta+\frac{\delta}{n}\right)-\sigma\left(\theta-\frac{\delta}{n}\right). \quad (1.8_2)$$

Умножая обе части неравенства (1.8_1) и (1.8_2) на $K_n(\theta)$ и применяя (1.6), получим (1.7_1) и (1.7_2).

Примечание 1. Я Шохат [5] ввел впервые понятие о модуле роста функции распределения $\sigma(\theta)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ или на отрезке $[a, b]$, $-\pi < a < b < \pi$:

$$a(\delta) = \inf_{\theta}[\sigma(\theta+\delta) - \sigma(\theta)], \quad a \leqslant \theta < \theta + \delta \leqslant b.$$

В силу теоремы 1 получим

$$a\left(\frac{2\delta}{n}\right) K_n(\theta) \leqslant \frac{2\pi}{(1-\delta)^2}, \quad n \geqslant n_0, \quad \theta \in [a, b]. \tag{1.9}$$

Неравенство (1.9), когда $[a, b] \equiv [-\pi, \pi]$, было впервые получено Я. Л. Геронимусом [4, лемма 1.2]. Доказательство леммы 1.2 основано в [4] на следующей лемме 1.1 (см. [4]): если $T_n(\theta)$ — тригонометрическая сумма n-го порядка, удовлетворяющая на отрезке $[-\pi, \pi]$ условию $|T_n(\theta)| \leqslant \mu_n = |T_n(\theta_0)|$, то при любом $0 < \lambda < 1$ справедливо неравенство $|T_n(\theta)| \geqslant \mu_n(1-\lambda)$, $\theta \in e_n = \left[\theta_0 - \frac{\lambda}{n}, \ \theta_0 + \frac{\lambda}{n}\right]$. При доказательстве этой леммы применяется неравенство С. Н. Бернштейна. Рассматривая внутренний отрезок $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, нужно доказать локальный аналог леммы 1.2, но так как положение точки θ_0 на $[a, b]$ неизвестно, то приходится применять не локальный аналог неравенства С. Н. Бернштейна, а неравенство А. А. Маркова. Поэтому в [4] для внутреннего отрезка $[a, b]$ в формуле (1.9) стоит $a\left(\frac{2\delta}{n^2}\right)$.

§ 2. ПОВЕДЕНИЕ ЯДЕР $K_n(\theta)$ В ОДНОСТОРОННИХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорема 2. *Пусть*

$$\sigma'(\theta) \geqslant p_0(\theta)\,\rho(\theta-\theta_0), \quad \theta \in [\theta_0, \theta_0+\eta], \quad \eta > 0, \quad p_0(\theta) \geqslant m_0 > 0, \tag{2.1}$$

где функция $\rho(\theta)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} \rho(t)\,dt \geqslant C_1 \rho(\tau)^*. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\frac{K_n(\theta)}{n} \leqslant C_2 \frac{1}{\rho\left(\frac{\delta}{n}\right)}, \quad \theta \to \theta_0 + 0, \quad n \geqslant n_0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma(\theta_0+\delta) - \sigma(\theta_0) = \int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta} d\sigma(\theta) \geqslant \int_{\theta_0}^{\theta_0+\delta} \sigma'(\theta)\,d\theta \geqslant m_0 \int_0^{\delta} \rho(t)\,dt \geqslant m_0 C_1 \delta \rho(\delta) \tag{2.4}$$

В силу (2.2) и (1.7_2) получим

$$\frac{K_n(\theta)}{n} \leqslant \frac{2\pi}{(1-\delta)^2 m_0 C_1 \delta} \frac{1}{\rho\left(\frac{\delta}{n}\right)} = \frac{C_2}{\rho\left(\frac{\delta}{n}\right)}.$$

---

* $C_1, C_2, \ldots, A_1, A_2, \ldots$ — положительные постоянные.

Условию (2.2) удовлетворяют функции

$$\rho(t)=t^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\beta},\ \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0;\ \rho(t)=t^{-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\beta},\ 0<\alpha'<1.$$

Действительно,

$$I_1=\int_0^{\tau}t^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\beta}dt=\frac{t^{1+\alpha}}{1+\alpha}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\beta}\Bigg|_0^{\tau}-\frac{\beta}{1-\alpha}\int_0^{\tau}t^{\alpha}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\beta-1}dt.$$

Так как

$$\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-1}<\left(\ln\frac{1}{\delta_0}\right)^{-1},\ 0<t<\delta_0,$$

то

$$I_1\geqslant C_2\tau^{1+\alpha}\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{-\beta},\quad C_2=(1-\alpha)\left(1+\frac{\beta}{1+\alpha}\frac{1}{\ln\frac{1}{\delta_0}}\right).$$

Пусть

$$I_2=\int_0^{\tau}t^{-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\beta}dt=\frac{t^{1-\alpha'}}{1-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\beta}\Bigg|^{\tau}+\frac{\beta}{1-\alpha'}\int_0^{\tau}t^{-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\beta-1}dt,$$

$$I_2>C_2\tau^{1-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{\tau}\right)^{\beta},\quad C_2=\frac{1}{1-\alpha'}.$$

Итак,

$$\frac{I}{\tau}\geqslant C\rho(\tau),$$

где $I=I_1$ или I_2, C равно соответственно C_1 или C_2.

Следствие 2. *Пусть* $\rho_1(t)=\rho_2(t)$ *удовлетворяют условию* (2.2) *и*

$$\sigma'(\theta)\geqslant p_0(\theta)\begin{cases}\rho_1(\theta-\theta_0),\ \theta\in[\theta_0,\ \theta_0+\eta], & (2.5_1)\\ \qquad\qquad\qquad\eta>0,\ p_0(\theta)\geqslant m_0>0. & \\ \rho_2(\theta_0-\theta),\ \theta\in[\theta_0-\eta,\ \theta_0]. & (2.5_2)\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{K_n(\theta)}{n}\leqslant C_3\begin{cases}\dfrac{1}{\rho_1\left(\frac{\delta}{n}\right)},\ \theta\to\theta_0+0,\\[2ex] \dfrac{1}{\rho_2\left(\frac{\delta}{n}\right)},\ \theta\to\theta_0-0.\end{cases}\qquad(2.6)$$

Оценки типа (2.6) для модулей многочленов, ортонормированных на отрезке $[-1,\ 1]$ относительно веса $p(x)$ в случае, когда $\rho_1(x)=x^{\alpha_1}$, $\rho_2(x)=x^{\alpha_2}$, $\alpha_1\neq\alpha_2$, α_1, $\alpha_2>-1$, были впервые получены В. П. Коноплевым [6] с помощью аппарата дифференциально возвратных уравнений и метода эталонных уравнений.

Для случая $\alpha_1=\alpha_2=\alpha>-1$, $\rho(x)=x^{\alpha}$, оценка $K_n(x_0)\leqslant C_4n^{2\alpha_0+1}$, где α_0 — наименьшее целое число $\geqslant\frac{\alpha}{2}$, была впервые получена Я. Шохатом (см. [7]). Оценка Я. Шохата грубее оценки (2.6) при $\rho_1(x)=\rho_2(x)=x^{\alpha}$, $\alpha>-1$.

Теорема 3. *Пусть*

$$\sigma'(\theta) \geqslant \rho_0(\theta) s(\theta-\theta_0), \quad \theta \in [\theta_0, \theta_0+\eta], \quad \rho_0(\theta) \geqslant m_0 > 0, \tag{2.7}$$

где

$$s(\theta) = \exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{\theta}\right)\right\}$$

и

а) $0 \leqslant \varphi(\theta) \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 1)$;

б) $\Psi(\theta)\left|\varphi'\left(\frac{1}{\theta}\right)\right| \frac{1}{\theta^2} \leqslant C_5, \quad \Psi'(\theta) = \varphi(\theta), \quad \Psi(\theta) \geqslant 0, \quad \theta \geqslant 0$;

в) $\lim\limits_{\theta\to+0} s(\theta)\Psi(\theta) = 0$;

г) $\frac{1}{\Psi(\tau)} \int\limits_0^\tau s(t)\,dt \geqslant C_6 s(\tau)$.

Тогда

$$\Psi\left(\frac{\delta}{n}\right) K_n(\theta) \leqslant \frac{C_7}{s\left(\frac{\delta}{n}\right)}, \quad \theta \to \theta_0+0, \quad 0<\delta<1. \tag{2.8}$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma(\theta_0+\delta) - \sigma(\theta_0) \geqslant m_0 \int\limits_0^\delta s(\theta)\,d\theta, \quad s(\theta) \geqslant s(\theta)\varphi(\theta);$$

$$I_\delta = \int\limits_0^\delta s(\theta)\,d\theta \geqslant \int\limits_0^\delta s(\theta)\varphi(\theta)\,d\theta = s(\theta)\Psi(\theta)\Big|_0^\delta - \int\limits_0^\delta s(\theta)\varphi'\left(\frac{1}{\theta}\right)\Psi(\theta)\frac{d\theta}{\theta^2} \geqslant$$

$$\geqslant s(\delta)\Psi(\delta) - C_5 \int\limits_0^\delta s(\theta)\,d\theta.$$

Таким образом,

$$\sigma\left(\theta_0+\frac{\delta}{n}\right) - \sigma(\theta_0) \geqslant \frac{m_0}{1+C_5} \Psi\left(\frac{\delta}{n}\right) s\left(\frac{\delta}{n}\right).$$

По (1.7_2)

$$K_n(\theta)\Psi\left(\frac{\delta}{n}\right) \leqslant \frac{2\pi}{(1-\delta)^2} \frac{1+C_5}{m_0} \frac{1}{s\left(\frac{\delta}{n}\right)} = \frac{C_6}{s\left(\frac{\delta}{n}\right)}.$$

Условиям а) — г) удовлетворяет функция $\varphi(t) = t^\gamma$, $\gamma > 0$. Справедливость условий а) —в) очевидна. Докажем справедливость условия г). Имеем

$$\int\limits_0^\tau \exp(-t^{-\gamma})\,dt \geqslant \int\limits_0^\tau \exp(-t^{-\gamma}) t^\gamma dt = \exp(-\tau^{-\gamma}) \frac{\tau^{\gamma+1}}{\gamma+1} -$$

$$-\frac{\gamma}{\gamma+1} \int\limits_0^\tau \exp(-t^{-\gamma})\,dt,$$

откуда

$$\int\limits_0^\tau \exp(-t^{-\gamma})\,dt \geqslant \frac{2\gamma+1}{\gamma+1} \tau^{\gamma+1} \exp(-\tau^{-\gamma})$$

или

$$\frac{1}{\Psi(\tau)}\int\limits_0^\tau s(t)\,dt \geqslant (2\gamma+1)\,s(\tau).$$

Следствие 3. Пусть

$$\sigma'(\theta) \geqslant p_0(\theta)\begin{cases}\exp\{-(\theta-\theta_0)^{-\gamma_1}\}, & \theta\in[\theta_0,\ \theta_0+\eta],\ \gamma_1>0, \quad (2.9_1)\\ \exp\{-(\theta_0-\theta)^{-\gamma_2}\}, & \theta\in[\theta_0-\eta,\ \theta_0],\ \gamma_2>0. \quad (2.9_2)\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{K_n(\theta)}{n} \leqslant C_8\begin{cases}n^{\gamma_1}\exp(n^{\gamma_1}), & \theta\to\theta_0+0,\\ n^{\gamma_2}\exp(n^{\gamma_2}), & \theta\to\theta_0-0,\ n\geqslant n_0.\end{cases} \qquad (2.10)$$

Теорема 4. *Пусть*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\ln\sigma'(\theta)\,d\theta > -\infty. \qquad (2.11)$$

В левой и правой окрестностях точки $\theta=\theta_0$ *выполняются условия* (2.5_1) *и* (2.5_2). *Тогда, если* $\rho_1(\theta)$ *и* $\rho_2(\theta)$ *удовлетворяют условию* (2.2), то

$$\sqrt{\frac{\rho_1\left(\frac{\delta}{n}\right)}{n}}\,|P_n(e^{i\theta})| \leqslant \varepsilon_n^{(1)}(\theta),\ \theta\to\theta_0+0,\ \varepsilon_n^{(1)}(\theta)\to 0,\ n\to\infty. \qquad (2.12)$$

$$\sqrt{\frac{\rho_2\left(\frac{\delta}{n}\right)}{n}}\,|P_n(e^{i\theta})| \leqslant \varepsilon_n^{(2)}(\theta),\ \theta\to\theta_0-0,\ \varepsilon_n^{(2)}(\theta)\to 0,\ n\to\infty.$$

Если выполняются условия (2.9_1) *и* (2.9_2), *то*

$$\frac{|P_n(e^{i\theta})|}{n^{\frac{\gamma_1+1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}n^{\gamma_1}\right)} \leqslant \varepsilon_n^{(3)}(\theta),\ \theta\to\theta_0+0;\quad \frac{|P_n(e^{i\theta})|}{n^{\frac{\gamma_2+1}{2}}\exp\left(\frac{1}{2}n^{\gamma_2}\right)} \leqslant \varepsilon_n^{(4)}(\theta),$$

$$\theta\to\theta_0-0. \qquad (2.13)$$

Доказательство. При условии (2.11) имеем ([2, стр. 43], а также [8])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|P_n(e^{i\theta})|^4}{K_n^2(\theta)} < \infty,\quad \theta\in[-\pi,\ \pi].$$

Значит,

$$\frac{|P_n(e^{i\theta})|}{\sqrt{K_n(\theta)}} = \varepsilon_n(\theta),\ \varepsilon_n(\theta)\to 0\ (n\to\infty),\ \theta\in[-\pi,\ \pi]. \qquad (2.14)$$

Применяя оценки (2.6), получим в силу (2.14) оценки (2.12). Применяя оценки (2.10), получим оценки (2.13).

Оценки (2.12) и (2.13) при $\rho_1(\theta)=\rho_2(\theta)=\theta^\alpha\left(\ln\frac{1}{\theta}\right)^{-\beta}$, $\alpha\geqslant 0$, $\beta\geqslant 0$, $\varphi(\theta)=\theta^\gamma$, $\gamma_1=\gamma_2$, $|\theta-\theta_0|\leqslant\pi$, когда в правых частях (2.12) и (2.13) вместо $\varepsilon_n=0\,(1)$ стоят $\varepsilon_n=O\,(1)$, были впервые получены Я. Л. Геронимусом [4].

§ 3. РОСТ ЯДЕР $K_n(\theta)$ В ОСОБЫХ ТОЧКАХ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Теорема 5. *Пусть* $\sigma(\theta)$ — *абсолютно непрерывна на отрезке* $[\theta_0-\eta, \theta_0+\eta]$:

$$\sigma(\theta)\in AC[\theta_0-\eta,\ \theta_0+\eta]. \tag{3.1}$$

Для

$$|\theta-\theta_0|\leqslant\eta$$

$$\sigma'(\theta)\leqslant p_0(\theta)\,\omega(|\theta-\theta_0|),\ p_0(\theta)\leqslant M, \tag{3.2}$$

$$\omega(t_1)\leqslant A_1\omega(t_2),\ t_1>t_2,\ (t_1,\ t_2\in[0,\ \eta]),\ \delta\leqslant A_2\omega(\delta) \tag{3.3}$$

и

$$\frac{1}{\delta}\int_0^\delta\omega(t)\,dt\leqslant A_3\omega(\delta). \tag{3.4}$$

Тогда

$$\frac{K_n(\theta_0)}{n}\geqslant\frac{A_4}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Положим в (1.3)

$$G_n(z)=\left(\frac{z^\nu-z_0^\nu}{z-z_0}\right)^2,\ \nu=\left[\frac{n+2}{2}\right].$$

Тогда

$$\frac{1}{K_n(\theta_0)}\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\nu(\theta-\theta_0)\,d\sigma(\theta),\ S_\nu(t)=\frac{1}{\nu^4}\left(\frac{\sin\frac{\nu}{2}t}{\sin\frac{1}{2}t}\right)^4$$

или

$$\frac{1}{K_n(\theta_0)}\leqslant I_1(\theta_0)+I_2(\theta_0)+I_3(\theta_0), \tag{3.6}$$

где

$$I_1(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\theta-\theta_0|\leqslant\frac{1}{n}}S_\nu(\theta-\theta_0)\,p(\theta)\,d\theta,\ I_2(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\frac{1}{n}<|\theta-\theta_0|\leqslant\eta}S_\nu(\theta-\theta_0)\,p(\theta)d\theta,$$

$$I_3(\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\eta<|\theta-\theta_0|\leqslant\pi}S_\nu(\theta-\theta_0)\,d\sigma(\theta);$$

$$I_1(\theta_0)\leqslant\frac{M}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{n}}S_\nu(t)\,\omega(t)\,dt\leqslant A_5\int_0^{\frac{1}{n}}\omega(t)\,dt. \tag{3.7}$$

В силу свойства (3.3) получим

$$I_2(\theta_0)\leqslant A_1\omega\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_0^{\eta}S_\nu(t)\,p_0(t)\,dt\leqslant A_1\omega\left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\nu(\theta-\theta_0)\,p_1(\theta)\,d\theta,$$

где $0\leqslant p_1(\theta)$ — продолжение функции $p_0(\theta)$ на весь отрезок $[-\pi, \pi]$ с сохранением максимального значения. Так как $p_1(\theta)\leqslant M$, то и $U_\nu(\theta, p_1)\leqslant M$, $U_\nu(\theta, p_1)$ — тригонометрическая сумма Джексона ν-го порядка, построенная для функции $p_1(\theta)$.

Но

$$I_2(\theta_0) \leqslant A_1 \omega\left(\frac{1}{n}\right) \frac{2\nu^2+1}{3\nu^3} U_\nu(\theta_0, p_1) \leqslant \frac{A_6}{n} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.8}$$

$$I_3(\theta_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\eta<|\theta-\theta_0|<\pi} S_\nu(\theta-\theta_0)\, d\sigma(\theta) \leqslant \frac{A_7}{n^4} < \frac{A_7}{n} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \ (n>1). \tag{3.9}$$

Объединяя (3. 6) — (3. 9), получим (3. 5).

Отметим, что условиям (3. 3) и (3. 4) удовлетворяет функция

$$\omega(t) = t^{-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta, \quad 0<\alpha'<1, \ \beta>0. \tag{3.10}$$

Действительно,

$$I_4 = \int\limits_0^\delta \left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta \frac{dt}{t^{\alpha'}} = \frac{t^{1-\alpha'}}{1-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta\Bigg|_0^\delta + \frac{\beta}{1-\alpha'}\int\limits_0^\delta \left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\beta-1}\frac{dt}{t^{\alpha'}}.$$

Пусть

$$\delta < \delta_0 = \exp\left\{\frac{-2\beta}{1-\alpha'}\right\}, \quad t^{1-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta \to 0 \ (t\to 0)$$

и

$$\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{\beta-1} < \frac{1-\alpha'}{2\beta}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^\beta \ (t\leqslant\delta).$$

Поэтому

$$I_4 \leqslant \frac{2}{1-\alpha'}\delta^{1-\alpha'}\left(\ln\frac{1}{\delta}\right)^\beta,$$

т. е.

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_0^\delta \omega(t)\,dt \leqslant \frac{2}{1-\alpha'}\omega(\delta).$$

Лемма 2. Пусть

$$\sigma(\theta) \in AC[\theta_0-\eta, \theta_0+\eta], \ p(\theta_0)=0$$

и

$$p(\theta) \leqslant p_0(\theta)\, q(|\theta-\theta_0|), \ |\theta-\theta_0|\leqslant\eta, \ p_0(\theta_0)\leqslant M, \tag{3.11}$$

где

$$q(0)=0, \ q(t)\uparrow, \ \frac{q(t_1)}{t_1} \leqslant A\frac{q(t_2)}{t_2}, \ t_2>t_1, \ t_1, t_2 \in [0,\eta]. \tag{3.12}$$

Тогда для $|\theta-\theta_0| < \frac{1}{2}\eta$

$$|U_\nu(\theta) - p(\theta)| \leqslant B\max\left\{q\left(\frac{1}{n}\right), q(|\theta-\theta_0|)\right\}, \ \nu = \left[\frac{n+2}{2}\right], \tag{3.13}$$

где $U_\nu(\theta)$ — *тригонометрические суммы Джексона-Стильтьеса порядка* ν.

Доказательство. Пусть функция $f(\theta) = p(\theta)$ при $|\theta-\theta_0|\leqslant\eta$ и продолжена как ограниченная функция на весь отрезок $[-\pi, \pi]$, причем

$$f(\theta+2\pi) = f(\theta).$$

Через $U_\nu(\theta, f)$ обозначим тригонометрическую сумму Джексона ν-го порядка для функции $f(t)$. Известно, что

$$U_\nu(\theta, f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta+t)\,dt, \quad D_n(t) = \frac{1}{c_n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4_{\frac{1}{c_n}},$$

c_n находится из условия

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,dt = 1.$$

Легко показать, что

$$D_n(t) \leqslant \min \frac{\pi}{c}\left\{\left(\frac{n}{\pi}\right), \left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \frac{1}{t^4}\right\},$$

c — постоянная, и так как

$$U_\nu(\theta, f) - f(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [f(\theta) + t) - 2f(\theta) + f(\theta - t)]\, D_n(t)\,dt,$$

а

$$f(\theta + t) - 2f(\theta) + f(\theta - t) = [f(\theta + t) - f(\theta_0)] + [f(\theta - t) - f(\theta_0)] + \\ + 2[f(\theta_0) - f(\theta)],$$

то, полагая

$$|\theta - \theta_0| \leqslant \frac{1}{2}\eta, \quad |\theta_0 - t| \leqslant \frac{1}{2}\eta,$$

получим

$$|f(\theta + t) - 2f(\theta) + f(\theta - t)| \leqslant MA_8\{q(|\theta - \theta_0|) + q(t)\}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\theta_0 = 0$.

Разложим отрезок $[0, \pi]$ на частные отрезки

$$\left[0, \frac{\pi}{n}\right], \left[\frac{\pi}{n}, \frac{1}{2}\eta\right], \left[\frac{1}{2}\eta, \pi\right].$$

Для первого из них

$$D_n(t) \leqslant \frac{n}{c}.$$

Для второго и третьего

$$D_n(t) \leqslant \frac{\pi}{c}\left(\frac{\pi}{n}\right)^3 \frac{1}{t^4} = \frac{\pi^4}{cn^3}\frac{1}{t^4}.$$

Итак, для $|\theta| \leqslant \frac{1}{2}\eta$ получим

$$|U_\nu(\theta, f) - f(\theta)| \leqslant A_8\left\{\frac{n}{c} I_4(\theta) + \frac{\pi^4}{cn^3} I_5(\theta) + \frac{\pi^4}{cn^3} I_6(\theta)\right\}, \tag{3. 14}$$

$$I_4(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{n}} [q(\theta) + q(t)]\,dt, \quad I_5(\theta) = \int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{1}{2}\eta} \frac{q(\theta) + q(t)}{t^4}\,dt,$$

$$I_6(\theta) = \int_{\frac{1}{2}\eta}^{\pi} |f(\theta + t) - 2f(\theta) + f(\theta - t)| \frac{dt}{t^4}.$$

Так как в силу (3. 12) следует
$q(t_1 + t_2) \leqslant A\,\{q(t_1) + q(t_2)\}$, t_1, $t_2 \in [0, \eta]$; $t \leqslant A_9 q(t)$, $q(A_{10}t) \leqslant (1 + A_{10})\,q(t)$, то легко доказать, что

$$I_4(\theta) \leqslant A_{11} \max\left\{q(|\theta|), q\left(\frac{1}{n}\right)\right\}, \quad I_5(\theta) \leqslant A_{12} q\left(\frac{1}{n}\right), \quad I_6(\theta) \leqslant A_{13} q\left(\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда

$$|U_\nu(\theta,f)-f(\theta)|\leqslant A_{14}\max\left\{q\left(\frac{1}{n}\right),\ q(|\theta-\theta_0|)\right\},\quad \theta\in\left[\theta_0-\frac{1}{2}\eta,\ \theta_0+\frac{1}{2}\eta\right].$$

Построим теперь $U_\nu(\theta)$. Легко доказать, что

$$|U_\nu(\theta)-U_\nu(\theta,f)|\leqslant\frac{A_{15}}{n^4}<A_{16}q\left(\frac{1}{n}\right),$$

и поэтому

$$|U_\nu(\theta)-p(\theta)|\leqslant B\max\left\{q\left(\frac{1}{n}\right),\ q(|\theta-\theta_0|)\right\},\quad |\theta-\theta_0|\leqslant\frac{1}{2}\eta.$$

Теорема 6. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда*

$$\frac{n}{K_n(\theta)}\leqslant A_{17}\max\left\{q\left(\frac{1}{n}\right),\ q(|\theta-\theta_0|)\right\},\quad |\theta-\theta_0|\leqslant\frac{1}{2}\eta. \tag{3.15}$$

Доказательство. Положим в формуле (1.3)

$$G_n(z)=\left(\frac{z^\nu-\zeta^\nu}{z-\zeta}\right)^2,\quad z=e^{i\vartheta},\ \zeta=e^{i\theta}.$$

Тогда

$$\frac{1}{K_n(\theta)}\leqslant\frac{1}{2\pi\nu^4}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\sin\frac{\nu}{2}(\theta-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\theta-\vartheta)}\right]^4 d\sigma(\vartheta)=\frac{2\nu^2+1}{3\nu^3}U_\nu(\theta)\leqslant\frac{2}{n}U_\nu(\theta),$$

$$\frac{n}{K_n(\theta)}\leqslant 2[U_\nu(\theta)-p(\theta)]+2[p(\theta)-p(\theta_0)], \tag{3.16}$$

но

$$p(\theta)-p(\theta_0)\leqslant p_0(\theta)\,q(|\theta-\theta_0|). \tag{3.17}$$

По лемме 2, (3.16) и (3.17) получим (3.15).

Отметим, что условию (3, 12) удовлетворяет функция

$$q(t)=t^\alpha\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{-\beta},\quad \alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0. \tag{3.18}$$

Следствие 3. *Пусть*

$$\sigma(\theta)\in AC[\theta_0-\eta,\ \theta_0+\eta],$$

$$\sigma'(\theta)\simeq p_0(\theta)\,q(|\theta-\theta_0|),\quad 0<m_0\leqslant p_0(\theta)\leqslant M,\quad |\theta-\theta_0|\leqslant\eta, \tag{3.19}$$

$q(t)$ *удовлетворяет условиям* (3.12) и (2.2). *Тогда*

$$\frac{K_n(\theta_0)}{n}\simeq\frac{1}{q\left(\frac{\delta}{n}\right)}{}^*,\quad n\geqslant n_0. \tag{3.20}$$

Это вытекает из теорем 2 и 6. Условиям, наложенным на $q(t)$, удовлетворяет функция (3.18).

Следствие 4. *Пусть*

$$\sigma(\theta)\in AC[\theta_0-\eta,\ \theta_0+\eta],$$

$$\sigma'(\theta)\simeq p_0(\theta)\,\varphi(|\theta-\theta_0|),\quad 0<m_0\leqslant p_0(\theta)\leqslant M,\quad |\theta-\theta_0|\leqslant\eta, \tag{3.21}$$

---

* $f(\theta)\simeq g(\theta)$, $f(\theta), g(\theta)>0$ означает, что $A_{18}f(\theta)\leqslant g(\theta)\leqslant A_{19}f(\theta)$.

$\varphi(t)$ *удовлетворяет условиям* (3.3) и

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \varphi(t)\,dt \simeq \varphi(\tau),\quad \tau \leqslant \eta. \tag{3.22}$$

Тогда

$$\frac{K_n(\theta_0)}{n} \simeq \frac{1}{\varphi\left(\frac{\delta}{n}\right)},\quad n \geqslant n_0. \tag{3.23}$$

Это вытекает из теорем 2 и 5. Условиям, наложенным на $\varphi(t)$, удовлетворяет функция (3.10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Геронимус. Многочлены, ортогональные на окружности и на отрезке. Физматгиз, М., 1958.

2. Н. И. Ахиезер. Про теорему акад. С. Н. Бернштейна відносно квадратурної формули П. Чебишова. Журн. ін-ту матем. АН УРСР, № 3 (1930), 75—82.

3. *Я. Л. Геронимус. Полиномы, ортогональные на круге и их приложение.* Зап. н.-и. ин-та матем. и мех. и ХМО, с. 4, т. XIX, (1948), 32—120.

4. Я. Л. Геронимус. О зависимости между порядком роста ортогональных многочленов и характером обложения. «Матем. сб.», т. 61 (103), № 1 (1963), 65—79.

5. Я. Шохат. Application of orthogonal Tchebycheff polynmials to Lagrangean interpolation and to the general theory of polinomials. Annali di Mat, 18 (1939), 201—208.

6. Коноплев. Об асимптотическом поведении ортонормальных многочленов в односторонних особых точках весовых функций (алгебраические особенности). ДАН СССР, т. 160, № 5 (1965), 997—1000.

7. Я. Шохат. On the development of continuons functions in series of Tchebycheff polynomials. TAMS, vol., № 4, (1925), 537—550.

8. Б. Л. Голинский. Аналог формулы Кристоффеля для многочленов, ортогональных на единичной окружности, и некоторое ее приложение. Изв. вузов, матем., № 1 (2), (1958), 33—42.

Поступила 16 мая 1966 г.