

К ВОПРОСУ О РЕГУЛЯРИЗУЕМОСТИ СУПЕРПОЗИЦИЙ ОБРАТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть X и Y — банаховы пространства. Через $L_0(X, Y)$ обозначим множество линейных непрерывных инъективных операторов, действующих из X в Y . Для оператора $A \in L_0(X, Y)$ существует обратный A^{-1} , который является замкнутым линейным, но, вообще говоря, не непрерывным оператором $A^{-1}: \text{im } A \rightarrow X$. В теории некорректных задач среди таких операторов выделяют подкласс регуляризуемых [1].

Напомним, что подпространство $M \subset X^*$ (не обязательно замкнутое) называется нормирующим, если

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall x \in X \quad \exists f \in M \quad (\|f\| = 1) \wedge (|f(x)| \geq \lambda \|x\|).$$

Если пространство X сепарабельно и $A \in L_0(X, Y)$, то регуляризуемость оператора A^{-1} эквивалентна [2] тому, что подпространство $A^*Y^* \subset X^*$ является нормирующим. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением сепарабельных банаховых пространств (СБП).

Известно [3, 4], что, вообще говоря, суперпозиция регуляризуемых операторов не обязана быть регуляризуемой. Настоящая работа посвящена исследованию вопроса: для каких троек (X, Y, Z) бесконечномерных СБП найдутся такие операторы $A \in L_0(X, Y)$ и $B \in L_0(Y, Z)$, что A^{-1} и B^{-1} регуляризуемы, а $(BA)^{-1}$ — нет? То, что для тройки (X, Y, Z) такие операторы существуют, будем записывать так: $(X, Y, Z) \in RS$.

Будем пользоваться без пояснений некоторыми понятиями из [5, 6].

Предложение 1. Для того, чтобы $(X, Y, Z) \in RS$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такой оператор $A \in L_0(X, Y)$ и такое нормирующее подпространство $M \subset Y^*$, что A^*Y^* — нормирующее подпространство в X^* , а A^*M — нет.

Доказательство. Необходимость. Пусть $(X, Y, Z) \in RS$, а $A \in L_0(X, Y)$ и $B \in L_0(Y, Z)$ — соответствующие операторы. Положим $M = B^*Z^*$. Тогда $M \subset Y^*$ и $A^*Y^* \subset X^*$ — нормирующие подпространства, так как A^{-1} и B^{-1} регуляризуемы, а $A^*M = (BA)^*Z^*$ — нет, так как $(BA)^{-1}$ не регуляризуем.

Достаточность. Выделим в Z минимальную последовательность $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ (напомним, что мы рассматриваем только бесконечномерные Z), а в Y такую полную минимальную систему $\{y_i\}_{i=1}^\infty$, что ее биортогональные функционалы $\{y_i^*\}_{i=1}^\infty$ содержатся в M и их линейная оболочка N является нормирующим подпространством в Y^* [5, с. 43]. Введем оператор $B \in L_0(Y, Z)$ равенством

$$B(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i^*(y) z_i}{2^i \|y_i^*\| \|z_i\|}.$$

Легко видеть, что $N \subset B^*Z^* \subset \text{cl}(M)$. Следовательно, оператор A^{-1} регуляризуем. Регуляризуемость оператора A^{-1} следует из того, что подпространство $A^*Y^* \subset X^*$ — нормирующее. Оператор $(BA)^{-1}$ регуляризуем, так как $(BA)^*Z^* = A^*(B^*Z^*) \subset \text{cl}(A^*M)$, а подпространство A^*M не является нормирующим. Следовательно, $(X, Y, Z) \notin RS$.

Следствие 1. Если $(X, Y, Z) \notin RS$ для некоторого бесконечномерного СБП Z , то $(X, Y, Z) \notin RS$ для произвольного бесконечномерного СБП Z .

Следствие 2. Необходимым условием для $(X, Y, Z) \notin RS$ является неквазирефлексивность пространства X .

Действительно, если A и M удовлетворяют условиям предложения 1, то A^*M — тотальное подпространство в X^* , обязанное быть нормирующим для квазирефлексивного X .

Следствие 3. Необходимым условием для $(X, Y, Z) \notin RS$ является существование в Y^* замкнутых нормирующих подпространств бесконечной коразмерности.

Действительно, пусть $(X, Y, Z) \in RS$. Тогда найдутся подпространство $M \subset Y^*$ и оператор $A \in L_0(X, Y)$, удовлетворяющие условиям предложения 1. Легко видеть, что можно считать подпространство замкнутым. Тогда A^*M является тотальным подпространством бесконечной коразмерности в нормирующем подпространстве $A^*Y^* \subset X^*$. Известно [4], что такое подпространство обязано быть нормирующим.

Ниже мы увидим, что совокупность условий из следствий 2, 3 является достаточной для $(X, Y, Z) \notin RS$.

Для тотального подпространства $M \subset X^*$ через X_M обозначим дополнение пространства X по норме

$$\|x\|_M = \sup \{ |f(x)| : f \in M, \|f\| = 1 \}.$$

Слабым* секвенциальным замыканием $M_{(1)}$ множества $M \subset X^*$ называется множество всех пределов слабо* сходящихся последовательностей из M ; $M_{(2)}$ определяется как $(M_{(1)})_{(1)}$.

Предложение 2. Для того, чтобы $(X, Y, Z) \notin RS$, достаточно, чтобы в X нашлось такое дополняемое подпространство U , что для некоторого $N \subset U^*$, удовлетворяющего условию

$$N_{(1)} \neq N_{(2)} = U^*, \quad (1)$$

пространство U_N было изоморфно некоторому подпространству W в Y , и при этом $\dim(X/U) \leq \dim(Y/W)$.

Доказательство. Ясно, что N , рассматриваемое как подпространство в $(U_N)^*$, является нормирующим. Выберем в пространстве U_N полную минимальную систему $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, биортогональные функционалы которой содержатся в N и натягивают нормирующее подпространство в $(U_N)^*$. Будем отождествлять U_N и W . Воспользовавшись теоремой о расширении минимальных систем с нормирующими сопряженными [7], находим векторы $\{y_i\}_{i=1}^k$ (где $k = \dim Y/U_N$) такие, что система $\{u_i\}_{i=1}^\infty \cup \{y_i\}_{i=1}^k$ является полной минимальной системой в Y , а ее биортогональные функционалы натягивают нормирующее

подпространство M в Y^* . Ясно, что для любого $y^* \in M$ имеем $y^*|_{U_N} \in \text{cl}(N)$.

По условию пространство X можно представить в виде прямой суммы $X = U \oplus V$. В соответствии с этим векторы пространства X будем записывать в виде (u, v) , где $u \in U, v \in V$. Выберем в пространстве V полную минимальную систему $\{v_i\}_{i=1}^m$ (где $m = \dim X/U$), биортогональные функционалы $\{v_i^*\}_{i=1}^m$ которой натягивают нормирующее подпространство в V^* . Оператор естественного вложения $U \rightarrow U_N$ обозначим через C .

Введем оператор $A \in L_0(X, Y)$ равенством

$$A(u, v) = Cu + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^*(v) y_i}{2^i \|v_i^*\| \|y_i\|}.$$

То, что подпространство $A^*M \subset X^*$ не является нормирующим, вытекает из того, что $A^*M|_U$ принадлежит $\text{cl}(N)$, а подпространство $N \subset U^*$ не является нормирующим в силу условия (1) [6, с. 47].

Остается показать, что A^*Y^* — нормирующее подпространство в X^* . Имеем

$$(A^*y_j^*)(u, v) = y_j^*(Cu + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^*(v) y_i}{2^i \|v_i^*\| \|y_i\|}) = \frac{v_j^*(v)}{2^j \|v_j^*\| \|y_j\|}.$$

Следовательно,

$$(0, v_j^*) \in A^*Y^*.$$

Рассмотрим произвольный элемент $f^* \in N_{(1)}$. Из теоремы о биполяре следует, что f^* является функционалом вида C^*g^* , где $g^* \in (U_N)^*$. Рассмотрим некоторое продолжение $\tilde{g}^*$ функционала g^* на все Y . Имеем

$$\begin{aligned} A^*\tilde{g}^*(u, v) &= \tilde{g}^*(Cu + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^*(v) y_i}{2^i \|v_i^*\| \|y_i\|}) = \\ &= (C^*g^*, \sum_{i=1}^m \frac{\tilde{g}^*(y_i) v_i^*}{2^i \|v_i^*\| \|y_i\|})(u, v). \end{aligned}$$

Воспользовавшись (2), заключаем, что $(f^*, 0) \in \text{cl}(A^*Y^*)$. Известно [6, с. 47], что из (1) вытекает: подпространство $N_{(1)} \subset U^*$ является нормирующим. Это в совокупности с (2) доказывает требуемое.

Многочисленные примеры применения этого предложения можно получить с помощью результатов [4, 8].

Предложение 3. Условие дополняемости подпространства U в предложении 2 нельзя опустить.

Доказательство. Положим $X = C(0, 1)$, $Y = L_1(0, 1)$. По теореме Банаха — Мазура в X найдется подпространство U , изометричное $L_1(0, 1)$. В [4] доказано, что в $(L_1(0, 1))^*$ найдется подпространство N , удовлетворяющее условию (1), для которого $(L_1(0, 1))^*$ изоморфно $L_1(0, 1)$ и, следовательно, подпространству бесконечно-

оразмерности в Y . Таким образом, все условия предложения 2, кроме дополняемости U в X , выполнены. В то же время известно [5, с. 57], что любой оператор из $C(0, 1)$ в $L_1(0, 1)$ слабо компактен, а необходимым условием для $(X, Y, Z) \notin RS$ является существование не слабо компактного оператора в $L_0(X, Y)$ [9].

Замечание. Нетрудно видеть, что этот пример доказывает недостаточность условий следствий 2, 3 для $(X, Y, Z) \notin RS$.

Теорема. Условия предложения 2 не являются необходимыми для $(X, Y, Z) \notin RS$, даже если опустить условие дополняемости подпространства U .

Предложение 4. Для любого неквазирефлексивного СБП X и любого бесконечномерного СБП Z имеем $(X, c_0, Z) \notin RS$.

Доказательство. В силу теоремы 2 из [10] в X найдется такая нормированная базисная последовательность $\{x_k\}_{k=0}^\infty$, что множество

$$\left\{ \left\| \sum_{k=i}^p x_{n_k+i} \right\| \right\}_{i=0}^\infty, \quad p=i,$$

где $n_k = k(k+1)/2$, является ограниченным. Воспользовавшись соответствующей теоремой о расширении минимальных систем [7], дополняем последовательность $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ до полной минимальной нормированной системы $\{x_k\}_{k=0}^\infty \cup \{y_i\}_{i=1}^\infty$, биортогональные функционалы $\{x_k^*\}_{k=0}^\infty \cup \{y_i^*\}_{i=1}^\infty$ которой равномерно ограничены и натягивают нормирующее подпространство в X^* . Можно считать $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ бесконечной системой, так как в противном случае мы часть x_k «переквалифицировали» бы в y_i . Перенумеруем векторы $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ и их биортогональные функционалы в двойные последовательности $\{x_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$ и $\{x_{ij}^*\}_{i,j=1}^\infty$ так, чтобы

$$\sup_{i,k} \left\| \sum_{j=1}^k x_{ij} \right\| = C < \infty.$$

Орты пространства c_0 занумеруем в двойную последовательность $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^\infty$. Зафиксируем последовательность чисел $\{b_i\}_{i=1}^\infty$, для которых $b_i > 0$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = 0$.

Определим оператор $A \in L_0(X, c_0)$ равенством

$$Ax = \sum_{i=1}^\infty b_i y_i^*(x) e_{i0} + \sum_{i=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty x_{ij}^*(x) e_{ij}.$$

Это определение корректно в силу того, что система $\{y_i^*\} \cup \{x_{ij}^*\}$ ограничена, а система $\{y_i\} \cup \{x_{ij}\}$ полна. Так как $A^*(e_{i0}^*) = b_i y_i^*$ и $A^*(e_{ij}^*) = x_{ij}^*$ ($i, j \in N$), а система $\{y_i^*\} \cup \{x_{ij}^*\}$ натягивает нормирующее подпространство в X^* , то A^*l_1 — нормирующее подпространство в X^* .

Положим $M = \lim_{i \rightarrow \infty} \{e_{i0}^* + e_{ij}^*\}_{i,j=1}^\infty$. Непосредственно проверяется, что M — нормирующее подпространство в c_0^* . Пространство A^*M — линейная оболочка векторов $\{b_i y_i^* + x_{ij}^*\}_{i,j=1}^\infty$. Покажем, что оно является нормирующим. Действительно, пусть $x^* \in A^*M$, т. е.

$$x^* = \sum_{i,j=1}^k a_{ij} (b_i y_i^* + x_{ij}^*).$$

Тогда, с одной стороны,

$$\|x^*\| \geq |x^* (\sum_{j=1}^k x_{ij}) / C| = |\sum_{j=1}^k a_{ij}|,$$

а, с другой стороны,

$$x^*(y_i) = b_i (\sum_{j=1}^k a_{ij}).$$

Так как $\lim_{i \rightarrow \infty} b_i = 0$, A^*M — не нормирующее подпространство. Предложение доказано.

Предложение 5 (Бессага—Пелчинский [5, с. 103]). Если пространство X^* содержит подпространство, изоморфное c_0 , то пространство X содержит подпространство, изоморфное l_1 .

Следствие. Пусть U — некоторое банахово пространство, $N \subset U^*$ — тотальное подпространство. Если U_N содержит подпространство, изоморфное c_0 , то U^* содержит подпространство, изоморфное l_1 .

Доказательство. Пространство N , рассматриваемое как подпространство в $(U_N)^*$, является нормирующим. Следовательно, U_N изоморфно подпространству в N^* . Воспользовавшись предложением 5, заключаем, что N , а следовательно, и U^* содержат подпространства, изоморфные l_1 .

Для завершения доказательства теоремы осталось привести пример такого неквазирефлексивного СБП X , что для любого подпространства $U \subset X$ пространство U^* не содержит подпространств, изоморфных

l_1 . Таким является, например, $X = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus J)_2$ (где J — пространство Джеймса [5, с. 25]).

Список литературы: 1. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. 153, № 1. С. 49—52. 2. Винокуров В. А., Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Измеримость и регуляризуемость отображений, обратных к непрерывным линейным операторам // Мат. заметки. 1979. 26, № 4. С. 583—591. 3. Доманский Е. Н., Островский М. И. О регуляризуемости обратных операторов к линейным инъекциям и их суперпозициям // Сиб. мат. журн. 1988. 29, № 3. С. 190—193. 4. Островский М. И. Пары регуляризуемых обратных линейных операторов с нерегуляризуемой суперпозицией // Теория функций, функции. анализ и их прил. 1989. Вып. 52. С. 78—88. 5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Berlin, 1977. 1. 188 p. 6. Петунин Ю. И., Пличко А. Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с. Terenzi P. On the theory of fundamental norming bounded biorthogonal systems in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1987. 299, № 2. P. 497—511. 8. Островский М. И. О тотальных не нормирующих подпространствах сопряженного банахова пространства // Теория функций, функции. анализ и их прил. 1990. Вып. 53. С. 9. Винокуров В. А., Доманский Е. Н., Менихес Л. Д., Пличко А. Н. О некоторых проблемах линейной регуляризуемости // Докл. АН СССР. 1983. 270, № 1. С. 31—34. 10. Davis W. J., Johnson W. B. Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces // Isr. J. Math. 1973. 14. P. 353—367.

Поступила в редколлегию 26.09.89