

Міркування узагальненням та за подібністю — індукція та аналогія. Біном Ньютона

Курінний Григорій Чарльзович, Невмержицька Олена Миколаївна

Вересень 2014 року

Зміст

1	Міркування за подібністю	2
1.1	Означення та приклади	2
1.2	Використання міркувань за подібністю в обчислювальних машинах	4
1.3	Завдання, подібні до яких використовуються при визначенні коефіцієнта інтелекту	5
1.4	Ненадійність знань, одержаних міркуваннями за подібністю	7
1.5	Вгадування відповіді в задачі — гіпотеза та припущення	7
2	Міркування узагальненням — неповна і повна індукція	11
2.1	Повна та неповна індукція	11
2.2	Математична ідукція	17
2.3	Аксіома математичної індукції.	17
2.4	Принцип найменшого числа.	18
2.5	Доведення методом математичної індукції . . .	19
2.6	Індуктивне означення	21

2.7	Софізми, що ґрунтуються на некоректному використанні індукції	22
2.8	Приклад використання індукції в поетичній системі	23
3	Біномні коефіцієнти	25
3.1	Означення, приклади, граничні випадки	25
3.2	Формула для біномних коефіцієнтів	27
3.3	Доведення формули для біномних коефіцієнтів методом повної математичної індукції	27
3.4	Трикутник Паскаля	29

1 Міркування за подібністю

1.1 Означення та приклади

Відмітимо, що логіка не вивчає такі шляхи одержання знань як

- а) досвід;
- б) дослід подумки;
- в) безпосереднє одержання знань — від батьків, від авторитету, з книг, від відчуттів;
- г) блим-думання, підсвідоме думання, інтуїтивне мислення.

Найбільш важливі шляхи одержання знань, які вивчає логіка, — міркування за подібністю, та міркування узагальненням. Зупинимося на міркуваннях за подібністю. Згідно з такими міркуваннями розумно вважати, що в подібних ситуаціях відбуваються подібні події. Наведемо приклади.

Якщо ви сьогодні взяли в руку гарячу чашку і вам було неприємно, то завтра вам також буде неприємно, якщо візьмете в руки гарячу чашку.

Якщо цілий семестр студент вчився гарно, то і в наступному семестрі студент буде добре вчитись.

Досить часто справджується прикмета: "Гроші — це до грошей".

Прогноз погоди "Завтра буде така ж погода, як і сьогодні" справджується більш ніж у половині випадків.

Слово "подібність" в логіці вживається у вузькому розумінні, ніж у приватному спілкуванні. Точніше, подібність в логіці підкоряється наступним двом вимогам:

- Вимога точного формулювання — спільні прикмети повинні бути точно вказані словами.
- Вимога суттєвості — вказані прикмети повинні бути суттєвими.

Щоб підкреслити те, що слово подібність вживається в вузькому розумінні, замість нього вживають слово *аналогія*.

Якщо в деякій місцевості в теплу пору року після дощу на поверхні ґрунту виповзли дощові черви, то

- а) в тій же місцевості;
- б) в теплу пору року;
- в) після дощу

можна очікувати, що

- г) дощові черви виповзуть на поверхню ґрунту.

В наведеному прикладі ми словами виражаємо спільність важливих признаков а), б), в) у двох подій, отже маємо аналогію між цими двома подіями, і цілком до речі припустити, що спільним буде і признак г).

Якщо поет порівнює жінку з квіткою і не збирається точно вказати, які саме признаки у них спільні, то таку подібність аналогією не називають. Схожість двох облич, подібність зовнішніх виглядів двох автомобілів, які словами не виражаються, аналогією не називають.

1.2 Використання міркувань за подібністю в обчислювальних машинах

В обчислювальних машинах є дві принципово різні пам'яті — з повільним доступом і із швидким (оперативна пам'ять). Для підвищення швидкості роботи ЕОМ потрібно якомога менше звертатись до пам'яті з повільним доступом. Для цього в конструкції ЕОМ в оперативній пам'яті виділяють спеціальну область. Коли ви звернулись до повільної пам'яті, переслали інформацію в швидку пам'ять, то після використання цієї інформації ЕОМ не відсилає її назад, а зберігає певний час у відведених області оперативної пам'яті. В цій ситуації ЕОМ мов би думає за подібністю: “Якщо користувачеві один раз недавно потрібен був запис із повільної пам'яті, то мабуть ще раз цей запис йому буде потрібен, і для прискорення роботи нема чого повертати цей запис в повільну пам'ять”. Таке конструктивне рішення прискорює роботу ЕОМ.

І в текстових чи графічних редакторах, і в пакетах символічних обчислень вводиться спеціальна кнопка, натискаючи на яку ви виводите на екран перелік недавно використаних файлів. В цьому місці запрограмована думка — якщо ви недавно користувалися файлом, то дуже ймовірно, що ви знову звернетесь до цього файлу.

Потужно використовують міркування за подібністю системи штучного інтелекту. Наприклад, коли ЕОМ досліджує зображення і знайшла там дві паралельні лінії, то вона робить припущення, що ці прямі мають одна до одної якесь відноше-

ння.

Якщо в однотонній області на зображенні система штучного інтелекту побачить мальньку цяточку іншого кольору чи іншої яскравості, то вона зробить припущення, що це випадкова цяточка, яку можна знищити.

1.3 Завдання, подібні до яких використовуються при визначенні коефіцієнта інтелекту

В наступних трьох таблицях знаком питання позначене натуральне число. Оскільки в першій таблиці можна побачити, що

Табл.1	Табл.2	Табл.3
7 8 15	7 6 8	5 6 3
9 10 19	9 10 8	6 5 8
1 5 ?	5 1 ?	4 1 ?

$7 + 8 = 15$, $9 + 10 = 19$, то природно допустити, що $1 + 5 = ? = 6$. Знаючи, як одержано третій стовпчик в першій таблиці, можна припустити, що і в другій таблиці третій стовпчик одержується з перших двох за допомогою арифметичних дій. Справді $2 \times 7 - 6 = 8$ і $2 \times 9 - 10 = 8$. Отже, цілком природно припустити, що в другій таблиці $? = 2 \times 5 - 1 = 9$.

Після заповнення перших двох таблиць можна з більшою переконаністю припустити, що третій стовпчик таблиці № 3 одержується з перших двох за допомогою арифметичних дій і встановити, що $? = 10$.

Спільні властивості звичайно одержуються позалогічними способами, так званим блим-думанням, — коли ви на помах вій видаєте відповідь, але не уявляєте, звідки вона взялася. Не досвідчені в комбінаториці люди розв'язують комбінаторні задачі за допомогою блим-думання. Вони видають відповідь на комбінаторну задачу “на помах вій”. А коли відповідь “на помах вій” не видається, то це, здається, дуже важка комбінаторна задача. Видану “на помах вій” відповідь обгрунтовують

Табл. 1: Міркуючи за подібністю поставити замість знаків питання букви

A	V	D		?	V	D
X	B	W		X	?	W
K	N	S		K	?	?

словами “Хіба не так?”. В математиці блим-думання використовується як чорнове, для приватного вжитку. Одержані за його допомогою результати повинні бути обґрунтовані чи подібністю, чи узагальненням, чи іншими точно вказаними методами.

Розглянемо задачу: потрібно на місце знаків питання в правій таблиці (див. табл. 1) поставити потрібні літери

Оскільки ліва та права таблиці мають однакові розміри, на відповідних місцях у лівій та правій таблицях стоять однакові відомі літери, то можна припустити, що невідомі літери, що сховані за знаками питання, у правій таблиці такі ж, як і у лівій. Отже в першому рядку замість знака питання потрібно поставити **A**, у другому рядку — **B**, а у третьому — **N, S**.

Задачі, що подібні до наведеної, використовують для розвитку уміння бачити спільне у предметів, явищ і т.п. Аналогію використовують в системах, що самі себе навчають, при програмуванні поведінки роботів, в системах штучного інтелекту, в теорії розпізнавання образів. Люди використовують аналогію у випадках, коли потрібно визначити спосіб поведінки, а більш надійні критерії визначення відсутні. Аналогію використовують в наукових дослідженнях для висування припущень, що підлягають подальшій перевірці.

1.4 Ненадійність знань, одержаних міркуваннями за подібністю

Знання, що одержані міркуванням за подібністю, не надійні, їх можна назвати правдоподібними. Ці знання будуть тим більш надійні, чим суттєвіші спільні риси у двох об'єктів спостереження та чим більша кількість подібних рис. Суттєвість чи не суттєвість виділених прикмет визначається дослідником. Людина зі спеціальними знаннями і великим досвідом роботи в певній області (експерт) міркуючи за подібністю одержить більш надійні знання ніж новачок в цій області.

Наведемо приклад хибних міркувань за подібністю: Вода в котлі має верхню частину плоску, а нижню — опуклу. Каша в котлі пригорає знизу. Отже хлібина, що має плоску частину і опуклу підсмажену, пеклася плоскою частиною вверху.

1.5 Вгадування відповіді в задачі — гіпотеза та припущення

Гіпотезою називають обгрунтоване наукове припущення.

Гіпотези слід відрізняти від найближчих побутових прогнозів (таких як, наприклад, “мабуть сьогодні ми зустрінемося”), та необгрунтованих фантазій (таких як, наприклад, “мабуть скоро люди будуть пересуватися по Землі силою думки”).

Наведемо приклад.

Дитина провалилася під кригу, пережила клінічну смерть, але її врятували. Після цього лікар, журналіст та вчений роблять припущення.

Лікар: “Дитина швидко видужає” — це прогноз.

Журналіст: “Люди скоро за власним бажанням зможуть переривати свої життя на будь-який час” — це фантазія.

Вчений: “Існує можливість штучного вповільнення життєвих процесів шляхом охолодження” — це гіпотеза.

Міркування за подібністю, що розглянуті в попередньому параграфі, — це одне з найважливіших джерел одержання припущень, в тому числі гіпотез.

В правильності гіпотетичних припущень (гіпотез) переконуються суто логічними міркуваннями, перевіркою окремих випадків, перевіркою наслідків прийняття гіпотези. В середовищі вчених-теоретиків (наприклад, математиків) найкращим доведенням гіпотези є чисто логічне, тобто з використанням чітко вказаних прийнятих спільнотою способів мислення. В середовищі вчених-практиків найкращим доведенням є перевірка несподіваних наслідків. В середовищі математиків перевірка припущення на ЕОМ малоприйнятна.

Наведемо приклад.

1. Математики довго доводили гіпотезу (теорему Ферма), яка полягає в тому, що рівняння

$$x^n + y^n = z^n$$

при заданому натуральному n , що більше двох, в цілих числах, що не дорівнюють нулю, не має розв’язків. Оскільки Ферма одержував безпомилкові результати в теорії чисел і висловлював інші гіпотези, які підтвердилися, то авторитет Ферма серед математиків високий і вони були переконані, що теорема Ферма правильна. Провівши значну кількість досліджень, перевірюючи велику кількість окремих випадків, математики ще більше впевнилися в правильності теореми Ферма. Але все це не заважає математикам шукати й ще раз шукати доведення цієї теореми (на сьогодні теорема вважається доведеною).

2. Фізики та астрономи преконалися в правильності законів руху небесних тіл, що одержані бездоганними міркуваннями, тільки після їх практичної перевірки. Після відкриття планети Плутон, існування якої впливало із законів руху небесних

тіл, сумніви в правильності цих законів покинули найбільших скептиків.

3. Хіміки переконалися в важливості розташування хімічних елементів в таблиці (таблиці Менделєєва) за атомними масами, коли за допомогою цієї таблиці були відкриті нові елементи із наперед передбаченими властивостями.

Близьким по значенню до поняття гіпотеза є поняття "робоча гіпотеза". Робоча гіпотеза — це припущення, яке не вимагає наукової обгрунтованості, вона висувається на початку досліджень, вона мінлива, рухома. Її мета - зробити дослідження зручнішими, більш впорядкованими, направляти дослідження. Робоча гіпотеза також ставить своєю задачею пояснення явищ. З часом, після належного обгрунтування, робоча гіпотеза може перетворитися в гіпотезу.

Для прикладу, візьмемо задачу: усно обчислити вираз

$$a = \frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}.$$

Життєвий досвід підказує, що a є цілим числом — тут використовується аналогія. Це — робоче припущення. Якщо припущення правильне, то остання цифра в чисельнику повинна бути або 0 або 5. Слідкуємо за останньою цифрою чисельника.

$$0 + 1 + 4 + 9 + 6 = 20,$$

Отже остання цифра чисельника є 0, а це узгоджується із припущенням.

Тепер маємо такі факти щодо чисельника

- Доданків 5, і всі вони більше або дорівнюють 100, отже $a > 1$.
- Доданків 5, і всі вони менші ніж 200. Отже чисельник менше 1000 і $a < 3$.
- Остання цифра в чисельнику дорівнює 0.

Одежані факти дозволяють висунути гіпотезу:

$$a = 2.$$

Доводити щось конкретне простіше, ніж “робити те, не знаю що” і “робити так, не знаю як”. Коли $a = 2$, тоді чисельник n дорівнює 730. І нам потрібно довести або спростувати припущення $n = 730$.

Будемо вважати, що всі доданки мають вигляд $(12 + x)^2$, — тут використовується блим-думання, так спало на думку, та й усе. Коли підноситься до квадрату сума двох чисел, то одержується сума квадратів доданків плюс подвійний добуток цих доданків. Оскільки

$$10 = 12 - 2, \quad 11 = 12 - 1, \quad 13 = 12 + 1, \quad 14 = 12 + 2,$$

то всі подвійні добутки знищуються. Таким чином чисельник має вигляд — 5 разів 12 в квадраті і дві суми $1^2 + 2^2$. Відомо, що 12 в квадраті дорівнює 144. 5 помножити на 144 дорівнює 720. Сума 1 та 4 дорівнює 5, а подвійна сума буде 10. Отже

$$n = 720 + 10 = 730$$

саме те, що нам потрібно було довести. Гіпотеза $a = 2$ доведена.

В кримінальній практиці гіпотези називають *версіями*.

Гіпотеза в своєму розвитку проходить наступні етапи.

I етап — поява умов для виникнення гіпотези. На цьому етапі у дослідника збираються певні факти, що вимагають свого пояснення, і у нього виникає потреба їх пояснити. Дослідник збирає інформацію, що стосується зібраних фактів, консультується з колегами, і виділяє таку групу фактів, що не вкладається в попередні, існуючі теорії, не пояснені обґрунтованими твердженнями.

II етап — формулювання робочих гіпотез. На основі тих чи інших міркувань (наприклад, за допомогою міркувань за

подібністю) дослідник формулює робочу гіпотезу, проводить дослід та міркування для її підтвердження, при необхідності змінює робочу гіпотезу і знову обґрунтовує.

III етап — формулювання гіпотези. Дослідник точно формулює обґрунтоване припущення — гіпотезу.

IV етап — життя гіпотези. На цьому етапі гіпотеза використовується дослідниками для пояснення фактів, узгоджується з іншими припущеннями та теоріями.

V етап — перетворення гіпотези в наукову теорію. На цьому етапі переходять від припущень до прийнятих науковою спільнотою, беззаперечних (для певної наукової спільноти) знань — наукової теорії.

Власне, гіпотези і використовують для того, щоб відкрити певний факт дійсності, створити певну теорію

Наукові теорії можуть суперечити одна одній. Тоді ті, хто підтримує одну наукову теорію, іншу вже науковою теорією не вважають. Для прикладу можна взяти три наукові теорії — еволюціонізм, панспермія та креатизм. Згідно еволюціонізму життя на Землі зародилося і розвивалося саме по собі. Згідно креатизму життя на Землі створене Творцем. А згідно панспермії життя занесене на Землю із космосу. Звичайно, ті хто сповідує креатизм, еволюціонізм за наукову теорію не вважають. А в школах України викладають еволюціонізм, тому що креатизм не є науковою теорією.

2 Міркування узагальненням — неповна і повна індукція

2.1 Повна та неповна індукція

Наведемо приклади міркувань :

В торбинці були олівець і блокнот.
Крім олівця і блокнота в торбинці не було нічого.
Олівець і блокнот виклали з торбинки на стіл.

Всі предмети із торбинки ми виклали на стіл.

Ще один приклад.

Великими ріками, що течуть по території України є
Дніпро, Дністер та Дунай і тільки вони.

Дніпро, Дунай та Дністер течуть з півночі на південь.

Всі великі ріки Укра?ни течуть з півночі на південь.

В наведених міркуваннях ми від знань про окремі предмети сукупності переходимо до знань про всі предмети сукупності. Такі міркування називають міркування узагальненням або індуктивними. Отже,

Індукція — це перехід від тверджень про окремі предмети чи явища (поняття) до тверджень про всі предмети та поняття із даної сукупності.

В залежності від того, маємо ми знання про кожен предмет сукупності, чи тільки про частину, індуктивні міркування діляться на повну та неповну індукцію.

Неповна індукція — це перехід від тверджень про частину предметів чи явищ певної сукупності (не всі), до твердження про всі предмети чи явища сукупності, що розглядаються.

Повна індукція — це перехід від знань про кожний предмет сукупності до знань про всі предмети сукупності, що розглядаються.

Щоб повна індукція дозволила стверджувати, що всі банки України мали в 2009 році збитки, потрібно :

- мати список банків України і знати, що не включених в список банків немає;
- перевірити, що кожен з банків, що включений до списку, має в 2009 році збитки.

Знання, які дає повна індукція про всі предмети сукупності, якісно відрізняються від знань про окремі предмети сукупності.

Покажемо на прикладах, що можна мати знання про кожен окремий предмет якоїсь сукупності і не знати про всі предмети як одне ціле, а можна знати щось про всі предмети як одне ціле і не знати нічого про окремі предмети.

Коли шкільний лікар має список здорових учнів — то це одне, а коли шкільний лікар має список здорових учнів школи і знає, що не включених в список учнів немає, тобто він знає, що здорові всі учні школи, то це якісно інше знання.

Якщо ви переконані, що всі вірші Наталі Дзюбенко хороші, то цих знань не досить, щоб сказати хороший чи ні вірш “У підземеллі ...” Потрібно ще знати — це її вірш чи ні.

Якщо ви хочете переконатись, що всі лампочки в квартирі вимкнені, вам потрібно не тільки подивитися на вимкнені лампочки, але й переконатись, що ви побачили всі лампочки. А якщо ви знаєте, що всі розетки після запобіжника вимкнені, знаходяться не під напругою і бажаєте знати — чи під напругою одна певна розетка, то потрібно ще переконатися, що ця розетка знаходиться після запобіжника.

Доведення за допомогою повної індукції можна назвати також “доведення повним перебором”.

Повна індукція дає надійні знання, вона є одним з правил доведення в логіці. Але одне з припущень — припущення про наявність повного переліку предметів, що розглядаються, носить дуже спеціальний характер. Ретельно аналізуючи це правило ми бачимо, що при його записі ми або використовуємо

знання про всі натуральні числа, а це пов'язане з розгляданням нескінченності, або окремо формулюємо правила повної індукції для переліку з одного предмета, двох, трьох і т.д. В другому випадку у нас є потенційно нескінченна сукупність правил доведення, що об'єднані однією назвою — повна індукція. Сказаним зумовлене те, що правило доведення тверджень за повною індукцією формулюється осторонь від решти правил.

Коли повну індукцію важко реалізувати — або забагато випадків потрібно розглянути, або немає фізичної змоги це зробити, і можлива помилка в міркуваннях не тягне за собою неприйнятних наслідків, роблять висновок про всі предмети із сукупності на основі знання про частину предметів, на основі неповної індукції. Наведемо приклади.

Знайдемо правило, у відповідності з яким написана послідовність чисел

$$11, 31, 41, 61, 71, 11, 131, \dots$$

Оскільки всі з написаних чисел прості і в десятковому записі мають останньою цифрою 1, то можна вважати, що всі числа послідовності — прості числа, що мають останньою цифрою в десятковому записі цифру 1. Тепер ми можемо сказати, яке перше з чисел, що стоять після 131 в послідовності — це 151.

Неповна індукція дає правдоподібне, ненадійне знання. Її використовують для створення робочих гіпотез. Прикладом знання, що одержане неповною індукцією, і яке виявилось хибним — це знання, що всі лебеді білі. Вчені спостерігали лебедів, бачили серед них тільки білих і зробили висновок, що всі лебеді білі. А через деякий час виявилось, що в Австралії існують чорні лебеді.

Розглядаючи метали — залізо, мідь, алюміній та інші ми можемо зробити висновок, що метали тверді. Але існування ртуті — рідкого металу, спростовує припущення, яке одержане за

допомогою неповної індукції. За допомогою неповної індукції легко одержати такі твердження як :

“Всі хороші люди бажають миру“

“Всі виховані люди ходять по вулицях взутими“

“Всі чесні люди не обманюють“

Одним з видів неповної індукції є так звана наукова індукція.

Наукова індукція — це перехід від окремих знань про окремі предмети, чи явища, що спостерігались в показових умовах, коли діють суттєві і не діють несуттєві чинники, до знань про всі предмети чи явища. Суттєвість, показовість умов спостерігання підтверджує науковий загал.

Знання, що одержані за допомогою наукової індукції значно надійніші, ніж інші, що одержані неповною індукцією, і вони цілком придатні для використання.

Міркування за допомогою індукції вимагають звичайної ретельності, без якої можна за допомогою цього правила одержати хибні висновки. Так на підставі того, що люди, яких ми бачили і яких ми уявляємо, живуть менше 200 років, не можна стверджувати, що людство живе менше ніж 200 років.

Точно вкажемо на різницю між міркуваннями за подібністю та міркуваннями за неповною індукцією. В міркуваннях за неповною індукцією ми переносимо знання з частини предметів на всі предмети (на рис. 1 знаками питання позначені трикутники, тому що частина фігур є трикутниками), а в міркуваннях за подібністю знання з однієї сукупності предметів переносяться на іншу (на рис. 2 зліва знаком питання позначений квадратик, тому що на подібному рис. 2 справа на відповідному місці стоїть квадратик).

?

?

Рис. 1: Відтворення невідомих фігур узагальненням — знаком питання позначені трикутники

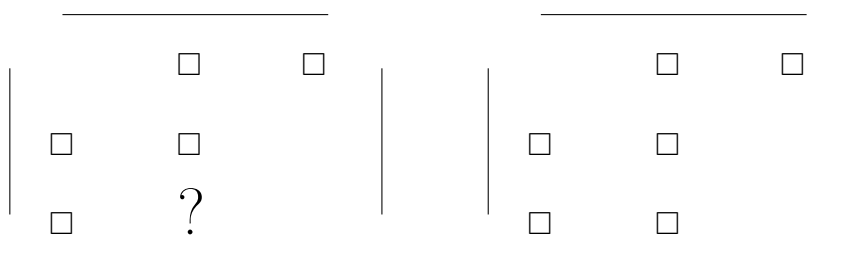


Рис. 2: Відтворення невідомих фігур за подібністю — знаком питання позначено квадратик

2.2 Математична індукція

Математична індукція дає знання про всі натуральні числа, про предмети чи явища, що перенумеровані натуральними числами.

Натуральні числа 1, 2, 3, ... люди використовують для підрахування кількостей (кількість велосипедів у учнів класу, кількість слів у реченні, кількість яблук на дереві, і т.п.) і для впорядковування (сторінки книги нумерують для зручності пошуку відповідної сторінки, будинки нумерують для можливості точного адресування і т.п.). Важливою аксіомою, що стосується натуральних чисел, є наступна.

2.3 Аксіома математичної індукції.

Нехай задана якась сукупність (множина) натуральних чисел (всі числа містяться в ній чи ні - не вказано). Нехай, також, відомо,

- 1) ця сукупність містить в собі число 1;
- 2) якщо число n міститься в цій сукупності, то в ній міститься також число $n + 1$.

Тоді можна стверджувати, що

- 3) задана сукупність містить в собі всі натуральні числа.

Символьно аксіому математичної індукції можна записати так. Для будь-якої множини M

$$(1 \in M \wedge \forall n \in M (n + 1 \in M)) \Rightarrow \mathbb{N} \subseteq M.$$

Покажемо як використовувати аксіому математичної індукції. Для цього доведемо так званий принцип найменшого числа, що полягає в наступному.

2.4 Принцип найменшого числа.

Будь-яка непорожня сукупність натуральних чисел містить в собі найменше, тобто таке, що всі числа цієї сукупності більші або дорівнюють йому.

Доведення. Нехай задана непорожня сукупність натуральних чисел. Якщо вона містить в собі число 1, то число 1, як найменше серед натуральних чисел, буде найменшим і серед чисел сукупності.

Далі розглянемо випадок, коли число 1 не належить заданій сукупності. Доведення потрібного твердження будемо проводити методом “від протилежного” — припустимо, що твердження неправильне, прийдемо до суперечності, з чого зробимо висновок, що саме твердження правильне.

Припустимо, що задана сукупність не має найменшого числа. Утворимо другу сукупність, вона складається з тих чисел, що

- 1) не належать першій.
- 2) менше будь-якого числа першої сукупності.

Оскільки 1 не належить першій сукупності, то воно належить другій.

Припустимо, що число n належить другій сукупності. Число $n + 1$ також буде належати другій сукупності — в протилежному разі воно було б найменшим у першій.

За аксіомою індукції стверджуємо, що друга сукупність містить в собі всі натуральні числа, а перша - порожня. Отже ми прийшли до суперечності з припущенням, що перша сукупність не порожня.

Таким чином принцип найменшого числа доведений.

Як видно з наведеного прикладу, аксіому математичної індукції можна використовувати при доведенні тверджень, що стосуються натуральних чисел.

2.5 Доведення методом математичної індукції

полягає в наступному. Нехай задано твердження, що залежить від натурального числа n і потрібно довести, що воно правильне при будь-якому n . Тоді

- а) перевіряємо правильність твердження при $n = 1$ (база індукції);
- б) припускаємо, що твердження правильне при певному значенні n (індуктивне припущення) і
- в) враховуючи зроблене припущення переконуємося в тому, що твердження лишиться правильним, коли n замінити на $n + 1$ (індуктивний перехід).

Після цього вважаємо доведеним, що твердження правильне при будь-якому натуральному n .

Вельми часто виникає потреба доводити предикат $P(m)$ для всіх цілих m , що більше, або дорівнюють певному цілому числу, скажемо a : $m \geq a$. В такому випадку можна замінити змінну m на $n - a + 1$, тобто $m = n - a + 1$. Тепер змістовно предикат $P(m)$ означає те ж саме, що і предикат $Q(n) = P(n - a + 1)$, але предикат $Q(n)$ потрібно доводити уже при всіх натуральних значеннях n . Таку роботу ніхто ніколи не виконує. Просто користуються дещо ширшим розумінням бази індукції і індуктивного припущення.

Сформулюємо практично використовуваний метод доведення математичною індукцією.

Нехай задано твердження, що залежить від цілого числа n , і потрібно довести, що воно правильне при будь-якому $n \geq a \in \mathbb{Z}$. Тоді

- а) перевіряємо правильність твердження при $n = a$ (база індукції);
- б) припускаємо, що твердження правильне при певному значенні $n \geq a$ (індуктивне припущення) і

в) враховуючи зроблене припущення переконуємося в тому, що твердження лишиться правильним, коли n замінити на $n + 1$ (індуктивний перехід).

Після цього вважаємо доведеним, що твердження правильне при будь-якому цілому $n \geq a$.

Наведемо приклад доведення методом математичної індукції. Доведемо, що рівність

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n = n(n + 1)/2 \quad (1)$$

правильна при будь-якому натуральному n .

а) (База індукції) Перевіряємо рівність (1) при $n = 1$. При $n = 1$ ліва частина рівності (1) має один доданок, а саме 1, а права частина при $n = 1$ після обчислення також дає 1. Отже база індукції перевірена.

б) (індуктивне припущення) Припускаємо, що формула (1) правильна при певному значенні n ,

в) (індуктивний перехід) Запишемо твердження, яке потрібно довести, коли ліва частина в ньому має $n + 1$ доданок:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2 \quad (2)$$

Замінивши в лівій частині (2) $1 + 2 + 3 + \dots + n$ згідно з індуктивним припущенням на $\frac{n(n + 1)}{2}$ одержимо

$$\begin{aligned} (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Тобто ми довели, що ліва частина (2) дорівнює правій. Отже індуктивний перехід завершено. Таким чином доведення всього твердження закінчене.

2.6 Індуктивне означення

Покажемо на прикладі означення арифметичного виразу, як використовується математична індукція для означення певних об'єктів.

ар1) Кожне число чи буква, яка означає число, — це арифметичний вираз (база індуктивного означення);

ар2) Якщо є два арифметичні вирази (індуктивне припущення), то з'єднавши їх одним із знаків $+$, $-$, $\times$ знову одержимо арифметичний вираз (індуктивний перехід);

ар3) Ніяких інших арифметичних виразів, крім тих, що можуть бути побудовані за допомогою ар1) та ар2), немає (остаточність означення).

Дамо означення добутку n множинків $a_1, a_2, \dots, a_n$, де n — певна кількість.

По-перше, вважаємо відомим, що таке добуток $a_1 a_2$ двох множинків — база індуктивного визначення.

Індуктивне припущення: вважаємо відомим, що таке добуток $a = a_1 a_2 \dots a_n$ n множинків при деякому $n \geq 2$.

Індуктивний перехід: добуток $a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$ $n + 1$ -го множиника визначається як добуток

$$a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} = (a_1 a_2 \dots a_n) a_{n+1} = a a_{n+1} \quad (4)$$

Щоб формула (4) лишилася правильною, коли $n = 1$, вважаємо, що добуток одного множиника дорівнює цьому множинку.

0 також кількість — кількість елементів порожньої множини. Щоб формула (4) лишилася правильною, коли $n = 0$, вважаємо, що добуток порожньої множини множиників дорівнює одиниці.

Подібним чином індуктивно визначається сума n доданків, де n — певна кількість. Вона визначається в припущенні, що ми знаємо, що таке сума двох доданків. Отже:

База індукції: Сума порожньої множини доданків дорівнює нулю.

Індуктивне припущення: Припустимо, ми знаємо, що таке сума n доданків, де n — певна кількість.

Індуктивний перехід: Сума $n + 1$ -го доданка визначається як сума двох — перший, це сума перших n доданків, а другий — це останній $n + 1$ -й доданок.

За означенням маємо, що сума одного доданка дорівнює цьому доданку.

Індуктивно визначається $n!$ — n -факторіал: $0! = 1$, база індуктивного визначення; $(n + 1)! = n!(n + 1)$.

2.7 Софізми, що ґрунтуються на некоректному використанні індукції

На прикладах софізмів покажемо, до чого може привести помилка в індуктивних міркуваннях.

Приклад 1. Доведемо, що всі натуральні числа дорівнюють одне одному. Дійсно, нехай при певному n буде $n = n + 1$ (індуктивне припущення). Додаймо по одиниці до лівої і до правої частин припущення (це можна робити за арифметичними правилами) і одержимо правильну рівність $n + 1 = n + 2$ (індуктивний перехід). Отже ми методом математичної індукції довели, що всі натуральні числа дорівнюють одне одному.

Наведені міркування неправильні, оскільки в них пропущена база індукції.

Приклад 2. Доведемо, що очі у будь-яких n кішок мають однаковий колір. Справді, візьмемо одну кішку ($n=1$, база індукції), в цьому випадку твердження очевидне.

Припустимо, що n кішок мають один і той же колір очей

(індуктивне припущення). Далі візьмемо $n + 1$ кішку і перконахмося, що вони також мають один і той же колір очей. Для цього ми $n + 1$ кішку розташуємо в ряд і розглянемо n кішок без першої (вони мають один і той же колір очей за індуктивним припущенням) і n кішок без останньої (вони також мають один і той же колір очей за індуктивним припущенням). Тепер перша кішка має той же колір, що і решта в першому випадку, а остання має той же колір, що і решта в другому випадку. Оскільки решта в першому випадку і решта в другому співпадають, то всі кішки мають один і той же колір очей.

В наведених міркуваннях індуктивний перехід обґрунтований не для всіх випадків: коли $n + 1 = 2$, то "решта—це порожня сукупність, і висновок такий як зроблено, робити не можна.

2.8 Приклад використання індукції в поетичній системі

Наведемо приклад індуктивного означення в поетичній системі. Давньоскандинавські поети-співці (скальди), що в XI-XIII столітті оспівували битви й походи вікінгів та конунгів, в своїй поетичній системі мали так звані "кенінги". інтуїтивно кенінг можна уявляти як метафору чи порівняння, чи нове словосполучення для заміни одного слова. Так, "хуртовина списів" є кенінгом слова "битва"; кожна із словосполучень "дерево битви", "кущ шолома", "роздавач золота" є кенінгом слова "воїн" і слова "чоловік"; словосполучення "море возу" є кенінгом слова "земля", а словосполучення "вогонь війни" є кенінгом слова "золото".

Маючи інтуїтивне уявлення про кенінги, можна дати їх точне індуктивне визначення

1. Словосполучення є кенінгом певного слова, якщо це так на думку великого скальда (база індуктивного визначення).

2. Якщо дана словосполучення є кенінгом певного слова, то в цій словосполучці будь-яке слово можна замінити його кенінгом і одержати новий кенінг того ж слова, що і початковий кенінг (індуктивний перехід).

3. Ніяких інших кенінгів, крім тих, що є кенінгами по 1 або 2, немах.

Отже коли

“кидальник меча“

є кенінг слова

“воїн“,

а

“вогонь битви“

є кенінг слова

“меч“,

то

“кидальник вогню битви“

є також кенінгом слова “воїн“. А коли кенінгом слова “битва“ є “хуртовина списів“, кенінгом слова “спис“ є “відьмак щита“, то із одержаного вище кенінга “кидальник вогню битви“ для слова “воїн“, одержимо для слова “воїн“ новий кенінг:

“кидальник вогню хуртовини відьмаків щита“. (5)

Довжина кенінгів, згідно з визначенням, нічим не обмежена. Так за допомогою кенінгів

“місяць корабля“ для слова “щит“

“кінь корабельних сараїв“ для слова “корабель“

ми із кенінга (5) одержимо кенінг

“кидальник вогню хуртовини відьмаків місяця коня
корабельних сараїв“

для слова “воїн”.

Якщо Ви умовите товариша назвати Вас великим скальдом,
то Ви будете мати право створювати свої канінги.

3 Біномні коефіцієнти

3.1 Означення, приклади, граничні випадки

Якщо двочлен (або ще кажуть — біном) $a + b$ піднести до n -го ($n \geq 0$) степеня:

$$(a + b)^n = \overbrace{(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)}^{n \text{ множин члв}},$$

розкрити дужки, то ми одержимо суму доданків, що мають вигляд $a^r b^{n-r}$ з певними коефіцієнтами. Кожен такий доданок ми одержимо, коли із r дужок виберемо b , а із решти $n - r$ дужок виберемо a і перемножимо їх. Таким чином $a^{n-r} b^r$ зустрінеся рівно стільки разів, скільки є r -елементних підмножин у множині із n дужок. Ця кількість позначається через C_n^r .¹ Таким чином

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n. \quad (6)$$

Остання формула відома під назвою "біном Ньютона".

¹На пострадянському просторі і кількість r -елементних підмножин в n -елементній множині (її називають кількість r -елементних сполук в n -елементній множині) і коефіцієнт при $a^{n-r} b^r$ в біномі Ньютона позначають однаково — C_n^r . В іноземній літературі тільки кількість сполук позначають через C_n^r , відповідний біномний коефіцієнт позначається через $\binom{n}{r}$

Формула (6) переписується з використанням знака Σ наступним чином

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^n C_n^r a^{n-r} b^r. \quad (7)$$

У формулі (7) перший та останій доданки (при $r=0$ та $r=n$) мають (за домовленістю) наступний вигляд

$$C_n^0 a^n b^0 = C_n^0 a^n = a^n, \quad C_n^n a^0 b^n = C_n^n b^n = b^n.$$

В практиці використання біномних коефіцієнтів часто зручно вважати визначеними коефіцієнти C_n^r і при $r > n$ — вважають

$$r > n \Rightarrow C_n^r = 0.$$

За такої домовленості формулу (7) можна записати у вигляді

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{\infty} C_n^r a^{n-r} b^r.$$

Оскільки C_n^r — це коефіцієнти в біномі Ньютона, то

числа C_n^r ($n, r \geq 0$) називають *біномними коефіцієнтами*.

Прикладами бінома Ньютона при $n=0, 1, 2, 3$ будуть

$$(a+b)^0 = C_0^0 = 1 \quad \text{при } n=0,$$

$$(a+b) = a+b = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1 \quad \text{при } n=1,$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 \quad \text{при } n=2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 \quad \text{при } n=3.$$

3.2 Формула для біномних коефіцієнтів

В загальному випадку біномні коефіцієнти підраховуються за формулою

$$C_n^r = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot \dots \cdot r}, \quad 0 \leq r \leq \infty. \quad (8)$$

В правій частині формули (8) чисельник має r множників і знаменник також має r множників. Якщо $r = 0$, то добуток у чисельнику і добуток у знаменнику мають 0 множників, і за домовленістю про добуток нуля множників і чисельник і знаменник дорівнюють одиниці. Отже формула (8) при $r = 0$ приймає вигляд

$$C_0^0 = 1.$$

Якщо $r > n$, то чисельник формули (8) має нульовий множник. Тому

$$C_n^r = 0 \text{ коли } r > n.$$

Якщо $r = n$, то чисельник формули (8) дорівнює знаменнику і, відповідно,

$$C_n^r = 1 \text{ коли } r = n.$$

Якщо $0 \leq r \leq n$, то за допомогою факторіалів формула (8) записується у вигляді

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}. \quad (9)$$

3.3 Доведення формули для біномних коефіцієнтів методом повної математичної індукції

Формулу (8) доведемо методом математичної індукції. Отже маємо бінарний предикат $P(n, r)$ “Біномні коефіцієнти C_n^r при

заданих $n, r = 0, 1, 2, \dots$ обчислюються за формулою (8).“ Предметною областю для цього предиката (звідки беруться значення для n, r) є множина натуральних чисел з нулем — розширений натуральний ряд. Навісимо на цей предикат обмежений квантор “для всіх $r = 0, 1, 2, \dots$ “. Одержимо новий предикат

$$Q(n) = \forall r \in \mathbb{N} \cup \{0\} P(n, r).$$

Якщо на змінну квантор не навішений, то ця предметна змінна називається вільною, а якщо навішений, то змінна називається зв’язаною. Отже предикат $Q(n)$ має одну вільну змінну. От оцей предикат ми і доведемо при всіх можливих значеннях $n = 0, 1, 2, \dots$.

База індукції — перевірка формули (8) при $n = 0$ — формула правильна за домовленістю про добуток нульової кількості множинків.

Індуктивне припущення — нехай відомо, що при деякому $n \geq 0$ і при всіх $r \geq 0$ формула (6) правильна, де коефіцієнти C_n^r обчислюються за формулою (8).

Індуктивний перехід — доводимо, що формула (6) лишається правильною, коли в лівій частині маємо $n + 1$ множиник, а коефіцієнти C_{n+1}^r обчислюються за формулою (8). Для доведення підносимо $a + b$ до $n + 1$ -го степеня двома способами. Один раз підносимо так (за формулою (6)) :

$$(a + b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \dots + C_{n+1}^r a^{n+1-r} b^r + \dots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}, \quad (10)$$

а другий так:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) = \\ &= (C_n^0 a^n + \dots + C_n^{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1} + C_n^r a^{n-r} b^r + \dots + C_n^n b^n) \times (a + b) = \\ &= C_n^0 a^{n+1} + \dots + C_n^r a^{n-r+1} b^r + \dots + C_n^n a b^n + \\ &+ C_n^0 a^n b + \dots + C_n^{r-1} a^{n-r+1} b^r + \dots + C_n^n b^{n+1}. \quad (11) \end{aligned}$$

Індуктивний перехід буде завершено, коли ми доведемо рівність відповідних коефіцієнтів в формулах (6),(8), тобто лишилося довести, що

$$C_{n+1}^0 = C_n^0, \quad C_{n+1}^{n+1} = C_n^n, \quad n \geq 0,$$

а також

$$C_{n+1}^r = C_n^{r-1} + C_n^r, \quad n \geq 0, 1 \leq r \leq n. \quad (12)$$

Співвідношення (12) називається рекурентним співвідношенням для біномних коефіцієнтів.

Справді,

$$C_{n+1}^0 = C_n^0 = 1, \quad C_{n+1}^{n+1} = C_n^n = 1, \quad n \geq 0,$$

за домовленістю про добуток порожньої кількості множинів. А при $1 \leq r \leq n$

$$\begin{aligned} C_{n+1}^r &= \frac{(n+1)n \dots (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} = \\ &= \frac{n(n-1) \dots (n-r+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (r-1)} + \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot r} = \\ &= C_n^{r-1} + C_n^r. \end{aligned} \quad (13)$$

Закінчивши доведення рекурентного співвідношення ми закінчили доведення формули (8)

3.4 Трикутник Паскаля

Співвідношення (12) дає ефективний спосіб підрахування біномних коефіцієнтів. Записавши біномні коефіцієнти в табли-

цю (ця таблиця називається *трикутником Паскаля*),

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
 C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 & \dots & & & & & \\
 C_n^0 & & C_n^1 & & \dots & & \dots & & C_n^{n-1} & C_n^n
 \end{array}$$

бачимо, що крайні елементи в цих таблицях дорівнюють одиниці, а кожен внутрішній — це сума двох верхніх сусідів. n -ий рядок ($n = 0, 1, 2, \dots$) цієї таблиці складають біномні коефіцієнти C_n^r . Звернемо увагу, що нумерація елементів послідовості елементами розширеного натурального ряду $0, 1, 2, 3, \dots$ є поширеною в математиці практикою.

Випишемо 5 рядків трикутника Паскаля (нульовий, перший, другий, третій та четвертий):

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 1 & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
 \end{array}$$

Показчик

- аксіома
 - математичної індукції, 17
- аналогія, 2
 - використання, 6
- арифметичний вираз, 21
- біном, 25
 - Ньютона, 25
- добуток
 - n множників, 21
 - двох множників, 21
 - одного множника, 21
 - порожньої множини множин-
ків, 21
- досвід, 2
- доведення
 - методом математичної інду-
кції, 19
 - повним перебором, 13
 - за допомогою повної інду-
кції, 13
- експерт, 7
- факторіал
 - індуктивне визначення, 22
- фантазії, 7
- гіпотеза, 7
 - етапи розвитку гіпотези, 10
 - робоча, 14
 - використання, 11
- індукція
 - база індукції, 20
 - індуктивне припущення, 20
 - індуктивний перехід, 20
 - математична, 17
 - наукова, 15
 - неповна, 11
 - повна, 11
 - в поетичній системі, 23
- кенінг, 23
- коефіцієнти
 - біномні, 26
- міркування
 - узагальненням, 11
 - за подібністю, 2
- нумерація
 - елементів послідовності, 30
- область
 - предметна, 28
- побутові прогнози, 7
- подібність, 3
 - вимога суттєвості спільних
прикмет, 3
 - вимога точного виділення спіль-
них прикмет, 3
- принцип
 - математичної індукції, 17
 - найменшого числа, 18
- припущення
 - гіпотетичні, 8
- ряд
 - розширений натуральний, 28

скальди, 23
софізм, 22
співвідношення
 рекурентне, 29
сума
 n доданків, 22
 двох доданків, 22
 одного доданка, 22
 порожньої множини додан-
 ків, 22
трикутник Паскаля, 30
узагальнення, 11
версія, 10
змінна
 вільна, 28
 зв'язана, 28
знання
 ненадійне, 14
 правдоподібне, 14