

Вісник Харківського національного університету
Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи
управління»

УДК 517.9:535.4

№ 605, 2003, с. 118-125

Решение одной осесимметричной задачи электростатики для сферы с круговым отверстием и конуса с шаровым закруглением

В.А. Резуненко, О.В. Степуренко

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина¹⁾

The solution of the axissymmetrical problem of electrostatics was constructed. Potential of ideal conductivity spherical segment is investigated in presence of infinite grounding cone with spherical grounding round. We used the following methods: the method of the separation of variables, the method of residue in special points of analytical functions, the method of inversion of part of an operator corresponding analogical problem for the sphere without presence of the cone. The auxiliary integral Fredholm's equation of the second kind is obtained. The space distribution of potential and capacity of the system are analyzed. The comparison with known results and limit cases of the solving problem is presented. The effectiveness of applied algorithm is confirmed.

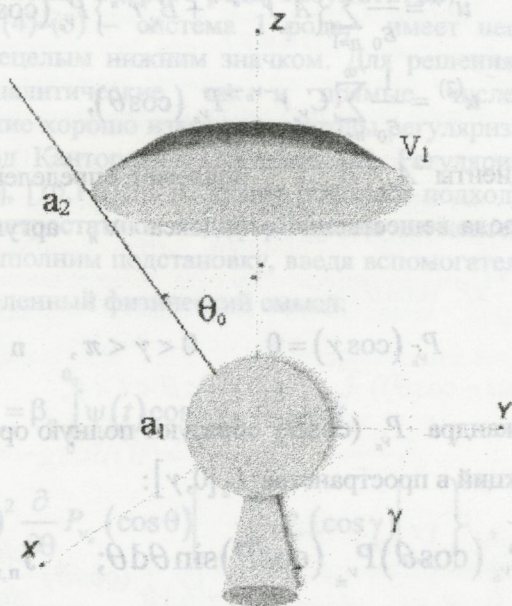
1. Введение.

Задачи электростатики являются актуальными по многим причинам. Известны многочисленные применения конических и сферических структур, например, в антенной и волноводной технике, в электронной оптике, в электронике больших мощностей [1]–[8]. Методы решения задач электростатики часто являются ключевыми для решения других задач. Задачи электростатики на таких структурах являются модельными, так как они позволяют проанализировать главные части соответствующих операторных уравнений более сложных задач. Например, электростатические поля имеют такие же особенности на ребрах структур, как и дифракционные поля. В связи с этим возникает необходимость в решении и анализе прямых и обратных задач на рассматриваемой структуре [1]–[11]. Целью работы является строгое решение сложной задачи электростатики, построение интегрального уравнения Фредгольма II рода для вспомогательной функции. Для этого применяются численно–аналитические методы полуобращения матричного и интегрального операторов задачи [1],[4]–[10]. Обосновываются методы решения интегрального уравнения. Приводятся тестовые примеры. Отметим, что рассматриваемая задача не сводится к известным решенным задачам [2,5,8,15] и отличается от них не только геометрией структуры, но и установленными интегральными уравнениями, а также техникой их получения.

2. Постановка задачи.

Поместим вершину конуса и центр полой сферы с круговым отверстием в начало декартовой и сферической систем координат, ось OZ считаем осью симметрии структуры (см. рис.).

¹⁾ e-mail: rezunenko@univer.kharkov.ua



Полагаем сферу с круговым отверстием идеально проводящей, бесконечно тонкой, а конус и его закругление – заземленными. Пусть потенциал сферы с круговым отверстием равен V_1 ($V_1 \neq 0$). Потенциалы конуса и закругления, по условию, равны нулю. Полагаем полярный угол (отсчитываемый от положительного направления оси OZ) плоского среза сферы с круговым отверстием равным θ_0 , угол раскрытия конуса – γ ($\theta_0 < \gamma$), радиус сферы с круговым отверстием (сегмента) – a_2 , радиус шарового закругления – a_1 ($0 < a_1 < a_2$), ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость среды ($\epsilon_0 \neq 1$). Требуется найти потенциал сферического сегмента в присутствии конуса с шаровым закруглением. Для искомого потенциала приходим к задаче Дирихле для уравнения Лапласа. Потребуем выполнение условий, обеспечивающих существование и единственность решения поставленной задачи электростатики в бесконечной области в R^3

3. Система функциональных уравнений.

Так как поверхности сегмента, закругления и конуса являются координатными, то применим метод разделения переменных в сферической системе координат. Вторичные потенциалы $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ представим так:

$$u^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_{v_n} r^{-v_n-1} + B_{v_n} r^{v_n} \right\} P_{v_n}(\cos \theta), \quad a_1 < r < a_2, \quad (1)$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} C_{v_n} r^{-v_n-1} P_{v_n}(\cos \theta), \quad r > a_2, \quad (2)$$

где коэффициенты $A_{v_n}, B_{v_n}, C_{v_n}$ подлежат определению, $P_{v_n}(\cos \theta)$ – функции Лежандра I рода вещественного индекса v_n аргумента $\cos \theta$, для которых [11]

$$P_{v_n}(\cos \gamma) = 0, \quad 0 < \gamma < \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Функции Лежандра $P_{v_n}(\cos \theta)$ образуют полную ортогональную с весом $\sin \theta$ систему функций в пространстве $L_2[0, \gamma]$:

$$J_{n,m} = \int_0^\gamma P_{v_n}(\cos \theta) P_{v_m}(\cos \theta) \sin \theta d\theta; \quad J_{n,m} = 0, \quad n \neq m,$$

$$J_{n,m} = \|P_{v_n}\|_{L^2(0,\gamma)}^2 = \frac{\sin \gamma}{2v_n + 1} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} P_{v_n}(\cos \gamma) \frac{\partial}{\partial v} P_{v_n}(\cos \gamma).$$

Используя граничные условия, получаем линейную связь между искомыми коэффициентами потенциалов:

$$A_{v_n} a_2^{-v_n-1} + B_{v_n} a_2^{v_n} = C_{v_n} a_2^{-v_n-1}, \quad A_{v_n} a_1^{-v_n-1} + B_{v_n} a_1^{v_n} = 0, \quad n \geq 1.$$

Из граничных условий, введя обозначение

$$C_{v_n}^1 = C_{v_n} a_2^{v_n} (a_2^{2v_n+1} - a_1^{2v_n+1})^{-1}, \quad (3)$$

получаем парную сумматорную систему функциональных уравнений относительно неизвестных $C_{v_n}^1$:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} C_{v_n}^1 \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^{2v_n+1} \right] P_{v_n}(\cos \theta) &= V_1, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n + 1) C_{v_n}^1 P_{v_n}(\cos \theta) &= 0, & \theta_0 < \theta \leq \gamma. & (5) \end{aligned} \right.$$

4. Интегральное уравнение второго рода. Результаты.

Система уравнений (4)–(5) – система 1 рода, имеет непростое ядро – функции Лежандра с нецелым нижним значком. Для решения таких систем неэффективны как аналитические, так и прямые численные методы. Неприменимы также такие хорошо известные методы регуляризации, как метод факторизации [3], метод Канторовича-Лебедева [2]. Регуляризируем данную систему, используя [5-8], [10,11,15]. В основу положим подход, используемый при решении задач электростатики на сферическом сегменте в отсутствии конуса. С этой целью выполним подстановку, введя вспомогательную функцию $\Psi(t)$, имеющую определенный физический смысл:

$$C_{v_n}^{-1} = \beta_n \int_0^{\theta_0} \Psi(t) \cos\left(v_n + \frac{1}{2}\right) t dt, \quad (6)$$

$$\beta_n = -2 \left\{ \left(\sin \gamma \right)^2 \frac{\partial}{\partial \theta} P_{v_n}(\cos \theta) \Big|_{\theta=\gamma} - \frac{\partial}{\partial v} P_v(\cos \gamma) \Big|_{v=v_n} \right\}^{-1}, \quad n \geq 1.$$

Для преобразования уравнений (4), (5) используем интегральное представление Мелера-Дирихле для полиномов Лежандра $P_n(\cos \theta)$ первого рода целой степени n

$$P_n(\cos \theta) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi, \quad (n \geq 0),$$

и используем разложение

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+\frac{1}{2})t} P_n(\cos \theta) = (2(\cos t - \cos \theta))^{-1/2}, \quad t, \theta \in (0, \pi),$$

получаемое с помощью производящей функции для полиномов Лежандра

$$((z-a)(z-\bar{a}))^{-1/2}, \quad |z| < 1, \quad a = e^{i\theta}$$

(здесь черта обозначает комплексное сопряжение). Для выделения главной части уравнения (4) применим контурное интегрирование и нахождение вычетов для аналитической функции $Nl(z; t, \theta, \gamma)$ комплексного аргумента z в ее полюсах [5],[12]

$$N1(z; t, \theta, \gamma) = 2Q_z(\cos \theta) \frac{P_z(\cos \theta)}{P_z(\cos \gamma)} e^{i(z+\frac{1}{2})t} - \pi \operatorname{ctg}(z\pi) P_z(\cos \theta) e^{i(z+\frac{1}{2})t}, \quad (1)$$

где параметры $t, \theta \in (0, 1)$, а $P_z(x), Q_z(x)$ - функции Лежандра 1-го и 2-го рода (соответственно) комплексного индекса z при $x \in [0, 1]$. Выполнив контурное интегрирование и отделяя реальные и мнимые части вспомогательных функциональных рядов, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) P_{\nu_n}(\cos \theta) =$$

$$\begin{cases} I(\theta, t) + (2(\cos t - \cos \theta))^{-\frac{1}{2}}, & 0 < \theta < t < \gamma, \\ I(\theta, t), & 0 < t < \theta < \gamma. \end{cases}$$

где

$$I(\theta, t) = - \int_0^{\infty} \frac{P_{-1/2+ir}(-\cos \gamma)}{P_{-1/2+ir}(\cos \gamma)} P_{-1/2+ir}(\cos \theta) \frac{ch(tr)}{ch(\pi r)} dr.$$

В результате подстановки $C_{\nu_n}^{-1}$ (6), (3) в уравнение (5) устанавливаем, что оно выполняется тождественно. В итоге подстановки $C_{\nu_n}^{-1}$ (6) в уравнение (4) получаем интегральное уравнение Фредгольма II рода:

$$\psi(x) - \int_0^{\theta_0} K(x, t) \psi(t) dt = \frac{2V_1}{\pi} \cos \frac{x}{2}, \quad (7)$$

в котором ядро $K(x, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} K(x, t) = & \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \beta_n \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) x \cos\left(\nu_n + \frac{1}{2}\right) t - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_{-1/2+ir}(-\cos \gamma) ch(xr) ch(tr)}{P_{-1/2+ir}(\cos \gamma) ch(\pi r)} dr, \end{aligned} \quad (8)$$

Этим мы полностью обратили главную часть сумматорных уравнений (4), (5).

В полученном интегральном уравнении в ядре $K(x, t)$ (7) $\varepsilon_n = (a_1/a_2)^{2\nu_n+1}$. При этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$, так как $a_1 < a_2$. Согласно (6) находим, что в (7)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. Ядро (7) является непрерывной функцией, так как интеграл и сумма, входящие в ядро, сходятся равномерно. Значит, интегральное уравнение имеет регулярное ядро и, кроме того, дифференцируемую правую часть. Для

полученного уравнения справедлива альтернатива Фредгольма [13]. Соответствующее однородное уравнение имеет единственное нулевое решение. Значит, решение неоднородного интегрального уравнения существует и единственно. Решение уравнения может быть найдено численно для любых параметров задачи и аналитически для углов раскрыва конуса γ , близких к 0 или π , при этом угол θ_0 раскрыва сферического сегмента может быть как угодно близким к γ или равен ему. Решая интегральное уравнение аналитически удобно использовать, например, метод последовательных приближений, а также метод замены ядра вырожденным [14,16].

В работе обсуждаются результаты вычисления пространственного распределения потенциалов $u^{(1)}, u^{(2)}$ (1), (2) и электрического поля

$$\vec{E} = -grad(u) = -\frac{\partial u}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \vec{e}_\theta.$$

Здесь потенциалы $u^{(1)}, u^{(2)}$ (1), (2) и поле \vec{E} не зависят от переменной φ , так как структура симметрична относительно оси OZ. Так как величины потенциалов на оси OZ представляют определенный интерес, то они отдельно табулировались. Отметим, что емкость конденсатора для различных геометрических параметров структуры вычисляем по формуле:

$$C = \frac{a_2}{V_1} \int_0^{\theta} \psi(t) \cos \frac{t}{2} dt, \quad (9)$$

где $\psi(t)$ - решение интегрального уравнения (7). Величина ёмкости С (9) пропорциональна радиусу сферического полого сегмента a_2 , обратно пропорциональна величине потенциала V_1 и сложным образом зависит от величины θ_0 раскрыва сферического сегмента. Получено совпадение результатов с известными результатами [2] и с результатами различных предельных случаев. Так например, для случая, когда сфера с круговым отверстием "касается" поверхности конуса (в этом случае она изолирована от конуса непроводящей прокладкой). коэффициенты искоемых потенциалов $u^{(1)}, u^{(2)}$ (1), (2) находятся явным образом и таковы:

$$C_{v_n} = R_n a_2^{v_n+1}, \quad A_{v_n} = B_{v_n} = 0,$$

$$R_n = \frac{V_1}{(2v_n+1)} [(P_{v_n+1}(1) - P_{v_n-1}(1)) - (P_{v_n+1}(\cos \gamma) - P_{v_n-1}(\cos \gamma))].$$

Проверочным вариантом являлся и выбор угла раскрыва сегмента $\theta_0 = 0$ (сегмент исчезает). В этом варианте коэффициенты потенциалов $u^{(1)}, u^{(2)}$

имеют нулевые значения: $A_{v_n} = B_{v_n} = C_{v_n} = 0$. Тестовыми примерами также служат задачи, имеющие самостоятельный интерес. Так, для случая, когда угол раскрытия конуса γ достигает значения 90 градусов (конус переходит в плоскость), наша задача эквивалентна задаче для разрезного (двух пластинчатого) сферического конденсатора с концентрическим шаровым включением. Заметим, что эта задача может быть сведена как к решению вспомогательного интегрального уравнения Фредгольма II рода, так и линейных алгебраических к решению вспомогательной бесконечной системы уравнений II рода с вполне непрерывным матричным оператором в некотором энергетическом пространстве [3], [7]. Отметим, что в этом случае ядро получаемого интегрального уравнения типа (7), (8) не будет содержать интегрального слагаемого и вместе с тем будет непрерывным при $(x, t) \in [0, \theta_0] \times [0, \theta_0]$.

5. Выводы.

Построен, проанализирован и применен впервые алгоритм для вычисления основных характеристик электростатического потенциала сложной структуры, обладающей осевой симметрией и состоящей из сферического сегмента бесконечного (однополостного) конуса с шаровым закруглением в неограниченной области. Показано совпадение результатов с известными частными случаями постановки рассматриваемой задачи. Обсуждаемая в работе задача может быть обобщена. Например, интересным её обобщением является выбор закругления шарового конуса многослойным. Естественным шагом в обобщении задачи и изучении свойств полей при наличии такой структуры является, в частности, построение функций Грина точечных и распределенных источников в сфероконических областях и развитие метода решения задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ziolkowski and Kipple A.D. Application on Double Negative Materials to Increase the Power by Electrically Small Antennas. //IEEE Transaction on Antenna and Propagation. vol. 51, №10, p.2626-2640, oct.2003.
2. Конторович М.И., Лебедев Н.Н. Об одном методе решения некоторых задач дифракции и родственных ей проблем. //Письма в Журн. Техн. Физ.-1938. Т.№ 6058, 10-11.С.1193-1206.
3. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны.-М.:Радио и связь,-1988.-440 с.
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. Т.2.-М.:Мир,- 1978.- 555 с.
5. Уфлянд Я. С. О решении одного класса задач электростатики методом парных рядов. // Письма в Журн. Тех. Физ. – 1976. - Т.2, 17. - С.794-798.
6. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с круговым отверстием.// ЖВМ и МФ. Т.17, 2.-1977.- С.394-406.
7. Литвиненко Л. Н., Сальникова Л.П. Численное исследование электростатических полей в периодических структурах.- Киев: Наукова думка,-1986. -159 с.

8. Вязьмитинов А. И., Вязьмитинова С. С., Резуненко В. А. Расчет потенциалов электронно-оптических систем с разгруженным сферическим катодом. // Радиотехника. Изд. ХГУ. – 1990. -Т. 89. - С. 130-133
9. Куриляк Д.Б., Назарчук З.Т. О симметричном электромагнитном облучении конечного конуса. //Радиофизика и радиоастрономия.-2000.-Т.35,4.-С.29-37.
10. Шестоपालов В. П., Тучкин Ю. А., Поединчук А. Е., Сиренко Ю. К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции.– Харьков: Основа, - 1997. – 284 с.
11. Шестоपालов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. – Харьков: Изд. ХГУ, 1973. – 288 с.
12. Марченко В. А. Операторы Штурма - Лиувилля и их приложения.- Киев: Наукова Думка,-1977.- 362 с.
13. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.- М.:Наука,-1973.-736 с.
14. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы.- Киев: Наукова Думка,-1986.-543 с.
15. Варяница Л.А., Резуненко В.А. Регуляризация задачи электростатики на бесконечном конусе и двух сферических сегментах. //Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". №542, випуск 51, - 2002, с.59-68.
16. Ильин В.П. Численные методы решения задач электрофизики. М.: Наука, 1985 - 334 с.

Сравнительный анализ моделей разработки программного обеспечения с точки зрения соответствия компонентно-ориентированным линиям программных продуктов

Л. Е. Сергеев

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

The article describes the method of comparative analysis of six different software development models from the point of view of their applicability as a complementary model to Software Product Lines Practice for creation of component-based product lines. The method based on probability inference approach initially formulated and investigated by G.N Zholtkevich. As a result of comparative analysis Rational Unified Process was identified as a most suitable development model.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Задача сравнительного анализа различных вариантов принятия решений, базирующегося на использовании противоречивых критериев, является типичной для проектной деятельности. Обоснование выбора модели технологического процесса разработки программного обеспечения (ПО), наиболее адекватной компонентной архитектуре, чему посвящена настоящая работа, является примером такой задачи. Особый интерес производителей программного обеспечения к компонентным технологиям обосновывается ростом сложности процесса разработки ПО, необходимости повышения качества продукции при снижении стоимости разработки. Естественное решение возникающих в этом контексте проблем основывается на повторном использовании компонентов ПО и стандартизации выявляемых в процессе разработки инвариантных компонентов. Подробный обзор работ в области компонентного ПО приведен в [1]. Важным аспектом при создании модели разработки программного обеспечения является ее соответствие общей парадигме Software Products Line Practice (SPLP) [2]. В этой связи анализ существующих моделей разработки ПО на предмет их соответствия указанной парадигме и компонентной технологии является чрезвычайно актуальной задачей управления разработкой современного промышленного ПО. В настоящей работе будут приведены результаты такого анализа шести наиболее известных моделей технологического процесса создания ПО.

2. Истоки исследования авторов

Настоящая работа для решения задачи выбора наиболее адекватной модели разработки ПО компонентной архитектуре опирается на метод "нечеткого" вывода, разработанный в [3]. Несмотря на то, что в общем виде применение этого метода затруднено ввиду вычислительной сложности алгоритмов, предлагаемая в настоящей статье модель анализа приводит к алгоритму с линейной сложностью за счет учета специфики задачи.

3. Используемый метод "нечеткого" вывода

Для полноты изложения приведем описание предложенной в [1] общей модели принятия решений.

Пусть задано множество F фактов, используемых для описания ситуации и результатов принятия решений. В результате оценивания фактов им приписывается истинностные значения. Принцип исключения третьего позволяет отождествить каждую оценку с множеством тех фактов, которые были оценены с ее помощью как истинные. Таким образом, если обозначить через $P(F)$ – множество всех подмножеств множества фактов F , то его элементы будут соответствовать всем возможным оценкам. Множество $P(F)$ несет естественную топологическую структуру (так называемую тихоновскую топологию [4]), поэтому правомерным является рассматривать для него симплекс вероятностных борелевских мер $M(P)$. Как известно из функционального анализа, дираковские меры определенные соотношением

$$\delta_E(A) = \begin{cases} 1, & E \in A \\ 0, & E \notin A \end{cases}, \text{ где } E \in P(F), \text{ а } A - \text{ борелевское подмножество } P(F),$$

образуют остов симплекса $M(P)$. Очевидно, что оценки находятся во взаимно-однозначном соответствии с дираковскими мерами. Тогда произвольную вероятностную борелевскую меру μ , которая, как известно, может быть аппроксимирована выпуклыми комбинациями (смесями) дираковских мер в слабой топологии на $M(P)$ сколь угодно точно можно интерпретировать как обобщенную оценку. При этом, значением такой обобщенной оценки для факта $f \in F$ является величина $\mu(\{E : P(F) | f \in E\})$, которая, очевидно, лежит между нулем и единицей.

Важной конструкцией, которая используется для построения модели механизма принятия решений, является конструкция условной вероятностной меры относительно борелевское подмножество $A \subseteq P(F)$. Она определена для всякой меры $\mu \in M(P)$ и борелевского подмножества $A \subseteq P(F)$, которое

$$\text{удовлетворяет условию } \mu(A) > 0, \text{ по формуле } \mu(B|A) = \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}, \text{ где } B -$$

произвольное борелевское подмножество множества $P(F)$. В основе модели, предложенной в работе [1], лежит представление о том, что уверенность в выводе факта f из конечного множества фактов X на основании обобщенной оценкой μ оценивает снизу условную вероятность $\mu(\{f\} | [X])$, где $\{f\} = \{E : P(F) | f \in E\}$, $[X] = \{E : P(F) | X \subset E\}$ – очевидно, борелевские подмножества $P(F)$.

Таким образом, если заданы $\{f_i : \mathbf{F} | i=1, \dots, n\}$ и $\{X_i \subset \mathbf{F}, X_i - \text{конечно} | i=1, \dots, n\}$, а также система оценок снизу $\{c_i, 0 \leq c_i \leq 1 | i=1, \dots, n\}$ для условных вероятностей вида $\mu(\{f_i\} | X_i)$, то можно записать систему неравенств

$$c_i \cdot \mu(X_i) \leq \mu(X_i \cup \{f_i\}), \text{ где } i=1, \dots, n \quad (1)$$

Числа c_i будут называться априорными оценками уверенности и обозначаться $c_i = c(f_i | X_i)$. В этих обозначениях система неравенств (1) переписывается в виде

$$c(f_i | X_i) \cdot \mu(X_i) \leq \mu(X_i \cup \{f_i\}), \text{ где } i=1, \dots, n \quad (1')$$

Для заданной системы неравенств вида (1') можно построить подмножество $\mathcal{C} \subset \mathbf{M}(\mathbf{F})$ тех мер, которые удовлетворяют системе неравенств. Иными словами, будет получено множество обобщенных оценок, удовлетворяющих априорным оценкам уверенности. Нас будет интересовать максимально возможная оценка уверенности для некоторого факта $f \in \mathbf{F}$ при условии выполнения некоторой конечной совокупности фактов $Y \subset \mathbf{F}$, которую можно обозначит $\bar{c}(f | Y)$, при условии выполнения всех неравенств системы (1'). Очевидно, что для ее вычисления можно воспользоваться формулой

$$\bar{c}(f | Y) = \max_{\mu \in \mathcal{C}} (0 \leq z \leq 1 | z \cdot \mu(Y) \leq \mu(Y \cup \{f\}))$$

Математическая корректность этого утверждения обосновывается на основании топологических свойств симплекса борелевских мер $\mathbf{M}(\mathbf{F})$ [4].

Практическое применение изложенной методики в общем случае, как уже отмечалось, затруднительно, поскольку для случая конечного множества фактов из n элементов, размерность пространства мер равна 2^n . Однако в частных случаях этот метод позволяет получить результат. Такой удовлетворительный результат был получен в практически важном случае для систем проектирования в работе [3].

4. Сравнительный анализ моделей разработки ПО

Используя описанную выше общую модель принятия специализируем ее для случая сравнительного анализа моделей технологического процесса разработки ПО с целью определения наиболее адекватной для компонентного подхода.

Множество фактов в этом случае состоит из фактов двух видов:

1. m_i = «адекватной является модель с номером i »;
2. p_k^j = «модель с номером i предпочтительнее модели с номером j относительно критерия с номером k ».

Каждой паре «модель – критерий» путем опроса экспертов поставим в соответствие одно из четырех чисел $-1, 0, 1, 2$. Значения критериев для модели будут означать соответственно

-1 – модель не соответствует критерию

0 – явные несоответствия критерию не обнаружены

1 – модель в основном соответствует критерию

2 – модель полностью соответствует критерию.

Таким образом, мы можем говорить, что модель с номером i предпочтительнее модели с номером j относительно критерия с номером k , если оценка модели с номером i больше оценки модели с номером j по критерию с номером k .

Модели, критерии и оценки приведены в табл. 1.

Таблица 1. Экспертная оценка моделей технологического процесса разработки ПО

Модель	Критерий								
	Зрелость	Признание	Возможность внедрения языка UML	Поддержка итерационной модели разработки	Поддержка компонентной разработки	Прескриптивность	Покрытие областей модели SPLP "Разработка ПО"	Покрытие областей модели SPLP "Техническое Управление"	Автоматизация и инструментальная поддержка
V-Model 98	1	2	1	1	0	1	1	1	1
SSADM	1	2	-1	1	0	1	1	1	0
Microsoft ESF	1	1	1	1	1	-1	1	1	0
Catalyst, CSC	1	1	1	2	1	1	1	2	0
Catalysis	1	1	2	2	2	1	2	1	0
RUP	1	2	2	2	1	1	1	2	2

Невыясненным является вопрос, что делать, когда по конкретному критерию разные модели имеют одинаковую оценку.

В рамках нашей модели принятия решений он разрешается за счет введения априорных оценок уверенности.

Итак, положим, что $c(p_k^j | \emptyset) = 1$, если оценка модели с номером i больше оценки модели с номером j по критерию с номером k .

Предположим теперь, что оценка модели с номером i равна оценке модели с номером j по критерию с номером k . Подсчитаем общее число моделей, для которых оценка по критерию с номером k принимает то же значение равное, например, q . Положим в этом случае $c(p_k^j | \emptyset) = \frac{1}{q}$. Такое предположение вполне естественно. Фактически оно предписывает выбирать в случае равенства

оценок вариант случайного выбора с равномерным распределением по нераспознаваемым моделям.

Интуитивно убедительное правило вывода неформально можно сформулировать так: «модель выбирается тогда и только тогда, когда она является самой предпочтительной».

В терминах априорных оценок уверенности это можно записать в виде:

$$\begin{cases} c(m_i | \{p_k^j\}) = 1 \\ c(p_k^j | \{m_i\}) = 1 \end{cases} \quad (2)$$

Анализ равенств (2) для априорных оценок уверенности позволяет заключить, что в соответствии с общей моделью они обеспечивают следующие равенства для мер из c^* :

$$\mu(\{m_i\}) = \mu(\{m_i, p_k^j\}) \quad (3)$$

По определению $c(m_i | \emptyset) \leq \mu(\{m_i\})$, что с учетом (3) приводит к следующему заключению для мер из c^* : $c(m_i | \emptyset) \leq \mu(\{p_k^j\})$, причем оценка точна. Из этих неравенств немедленно следует, что $c(m_i | \emptyset) = \min_{k,j} c(p_k^j)$.

Таблица 2. Оценки уверенности выбора модели

Модель	Оценка уверенности
V-Model 98	0.20
SSADM	0.20
Microsoft ESF	0.20
Catalyst, CSC	0.20
Catalysis	0.25
RUP	0.33

Таким образом, общая методика, предложенная в [1], позволяет получить окончательный ответ для задачи сравнительного анализа ПО. В табл. 2 приведены оценки уверенности выбора для всех рассмотренных моделей.

Из этих оценок следует, что наиболее предпочтительной для построения технологического процесса разработки компонентного ПО в соответствии с общей моделью SPLP (Software Product Lines Practices) является модель RUP (Rational Unified Process).

7. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Сравнительный анализ шести наиболее распространенных моделей разработки ПО с использованием критериев, оценивающих адекватность процесса компонентной архитектуре показывает, что наиболее адекватной моделью является Rational Unified Process. Это позволяет выбрать эту модель для дальнейших работ, направленных на построение интеллектуальных CASE-средств для проектирования компонентно-ориентированного ПО.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сергеев Л.Е. Component-based information systems. Вестник НТУ "ХПИ", вып. 22. – 2001. – С. 46-53.
2. Clements P., Northrop L. Software Product Lines, Practices and Patterns. – NY: Addison Wesley Longman. – 2002. – 563 p.
3. Жолткевич Г.Н. Автоматизация проектирования технологической оснастки: теория и практика. – К.: Техніка. – 1998. – 263 с.
4. Наймарк М.А. Нормированные кольца. – М.: Наука. – 1968. – 698 с.

Следующая теорема описывает условия существования в банаховых пространствах хаотического поведения. Теорема 1. Пусть X – банахово пространство, $T: X \rightarrow X$ – линейный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны: (i) T – гиперциклический оператор; (ii) T – хаотический оператор; (iii) существует такая константа $\lambda > 1$, что $\|T^n x\| \geq \lambda^n \|x\|$ для некоторого $x \in X$.

1. Постановка задачи и ее актуальность. В математике хорошо известны аппроксимационные свойства модели Тейлора-Сулена (ТС). В настоящее время исследователи рассматривают свойства хаотического поведения модели ТС нулевого порядка, определяющие их хаотическое поведение. Работа опирается на следующие определения хаоса. Определение 1. Пусть X – банахово пространство, $T: X \rightarrow X$ – линейный оператор. Тогда отображение T хаотично, если: (i) T – гиперциклический оператор; (ii) T – хаотический оператор; (iii) существует такая константа $\lambda > 1$, что $\|T^n x\| \geq \lambda^n \|x\|$ для некоторого $x \in X$.

В первую очередь необходимо выяснить: (i) Существование хаотического поведения модели ТС нулевого порядка; (ii) Условия хаотичности модели ТС нулевого порядка; (iii) Условия хаотичности модели ТС нулевого порядка.

$$R_1: \text{If } x_1 = L_1 \text{ then } x_{1+1} = A_1. \quad (a) \quad \delta \subset (2) \delta$$

$$R_2: \text{If } x_1 = L_2 \text{ then } x_{1+1} = A_2. \quad (b) \quad \text{для каждого } x_0 \in \mathbb{Z} \text{ и } \forall \epsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}} |f^n(x) - f^n(x_0)| < \epsilon \quad (2)$$

$$R_N: \text{If } x_1 = L_N \text{ then } x_{1+1} = A_N. \quad (c) \quad \text{для каждого } x_0 \in \mathbb{Z} \text{ и фиксированной точки } \forall \epsilon > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{Z}} |f^n(x) - f^n(x_0)| < \epsilon$$

Исследование динамики рекуррентных нечетких моделей Такаги-Сугено

А. Ю. Соколов, А. Р. Емад, О. В. Яровая

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «Харьковский
авиационный институт», Украина

In processing of heuristic (linguistic) knowledge fuzzy rules has been established. Particularly, models of Takagi-Sugeno type have become popular due to their lucidity and flexibility allowing the construction of structured crisp and fuzzy models in fuzzy ranges, what is a typical task in simulation and modeling of technological processes. By the application of this method to dynamical processes the evolved models can be interpreted as crisp respectively fuzzy recurrent difference equations. So the problems of chaotic behavior appears in this evolving time series, i.e. how the dynamic behavior of the underlying technological process is constitutionally to be estimated. The target aim is to demonstrate, in which structures or parameter combinations Takagi-Sugeno models feature chaotic behavior (e.g. in terms of Li and Yorke (1975)). Furthermore analysis are necessary, in with way these models are strongly initial value dependent, which in terms of stability undesirably.

1. Постановка задачи и её актуальность

В математике хорошо известны аппроксимационные свойства модели Такаги-Сугено (ТС). В настоящем исследовании мы рассматриваем свойства динамических моделей ТС нулевого порядка, определяющие их хаотическое поведение.

Работа опирается на следующие определения хаоса.

Исторически Ли и Йорке первыми дали определение хаоса [1]. Они рассматривали отображение $f: I \rightarrow I$ (где I - единичный интервал) типа

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (1)$$

Определение 1. (Ли и Йорке) [2]. *Отображение $f: I \rightarrow I$ является хаотическим, если*

- (I) *Существует положительное число K ($K=1$ в [2]), такое, что итерационная схема (1) имеет цикл периода k для любого $k > K$;*
 (II) *Итеративная схема (1) имеет такое «неустойчивое» множество (scrambled set) $S \subset I$, которое является несчетным и не содержит циклических точек в f , а также обладает свойствами:*

(a) $f(S) \subset S$,

(b) для каждого $x_0, y_0 \in S$ при $x_0 \neq y_0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > 0$$

(c) для каждого $x_0 \in S$ и циклической точки y_0 для f

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0) - f^n(y_0)| > 0;$$

(III) Существует несчетное подмножество $S_0 \subset S$ такое, что для всех $x_0, y_0 \in S$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |f^n(x_0) - f^n(y_0)| = 0.$$

Теорема 1. (Ли и Йорке) [1]. Если функция $f: I \rightarrow I$ является непрерывной на компакте I , и существует такая точка $a \in I$, для которой выполняется $f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a)$ (либо $f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a)$), тогда f имеет цикл длиной три и является хаотическим отображением.

Следующая теорема определяет достаточные условия существования хаоса в Банаховом пространстве.

Теорема 2. (Клоеден) [2]. Пусть $f: I \rightarrow I$ - непрерывное отображение Банахового пространства I в себя и пусть существуют непустые компактные подмножества A и B из I , а также целые числа $n_1, n_2 \geq 1$ такие, что

- (i) A гомеоморфно выпуклому подмножеству из I ,
- (ii) $A \subseteq f(A)$,
- (iii) f является расширяющимся отображением на A , то есть существует такая константа $\lambda > 1$, что

$$\lambda \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|$$

для всех $x, y \in A$,

- (iv) $B \subset A$,
- (v) $f^{n_1}(B) \cap A = \emptyset$,
- (vi) $A \subseteq f^{n_1+n_2}(B)$,
- (vii) $f^{n_1+n_2}$ инъективно на B (один-к-одному).

Тогда отображение f хаотично в смысле определения 1 (при условии, что I - Банаховое пространство).

В первую очередь необходимо выяснить:

- могут ли нечеткие рекуррентные модели быть хаотическими?
- какие условия необходимы для появления хаоса?
- как распознать хаотичное поведение по структуре модели ТС?

Динамику модели Такаги-Сугено 0-го порядка в скалярном случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_1: & \text{ If } x_k = L_1 \text{ then } x_{k+1} = A_1, \\ R_2: & \text{ If } x_k = L_2 \text{ then } x_{k+1} = A_2, \\ & \dots \end{aligned} \tag{2}$$

$$R_N: \text{ If } x_k = L_N \text{ then } x_{k+1} = A_N,$$

R_N : If $x_k = L_N$ then $x_{k+1} = A_N$,

где L_i – лингвистические переменные (термы), A_i – числовые коэффициенты.

В современных исследованиях моделей ТС преобладают следующие наиболее общие ограничения:

1. Полная база знаний (2),
2. Непротиворечивый набор правил,
3. Одношаговая временная задержка,
4. Скалярное отображение – SISO.

Функции принадлежности лингвистических термов обладают, как правило, следующими ограничениями:

1. Ограниченность $\mu(x) \in [0,1], x \in X$.
2. Выпуклость $\mu(x)$ с возрастающей (убывающей) ветвью для $x > (<) s^x$ – центры функций принадлежности.
3. Разделение $\sum_j \mu_j(x_i) > 0, x_i \in X_i$.
4. Обратное соответствие $\mu_i(s_j) = 0, i \neq j$.

Переходная функция отображения (2) может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i(x) \cdot A_i}{\sum_{i=1}^N \mu_i(x)}$$

либо с учетом приведенных выше ограничений для полной базы знаний

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \mu_i(x) \cdot A_i.$$

Тогда можно исследовать орбиты

$$x_{k+n} = f^n(x_k) = f(f(f \dots (x_k))). \quad (3)$$

При условии $A_i \in \{L_1, L_2, \dots, L_N\}$ (модель Мамдани) рекуррентная нечеткая система может рассматриваться как лингвистический автомат, в котором $L(0), L(1), \dots, L(k), L(k+1), \dots$ – лингвистическая орбита, где $L(i)$ – лингвистическая переменная нечеткой модели. Последовательность $s(0), s(1), \dots, s(k), s(k+1)$ центров соответствующих функций принадлежности можно также рассматривать как дефазифицированную орбиту. Известна следующая теорема.

Теорема 3. Если одномерная непрерывная рекуррентная нечеткая система имеет лингвистическую орбиту $L(0), L(1), \dots, L(n), \dots$, а лингвистические значения удовлетворяют цепному неравенству

$$L(n) \geq L(0) > L(1) > L(2) \text{ либо } L(n) \leq L(0) < L(1) < L(2),$$

тогда эта рекуррентная нечеткая система будет хаотичной по Ли-Йорке в окрестности соответствующих орбит центров функций принадлежности $s(0), s(1), \dots, s(k), s(k+1)$.

Проблемой остается исследование поведения рекуррентной модели ТС в произвольной точке фазового пространства. Идентификация хаотической динамики для произвольных начальных условий в модели ТС нулевого порядка и является основной задачей исследования в настоящей работе.

В связи с этим актуальными представляются следующие вопросы:

- определить минимальное число правил, которые могут создавать хаос.
- определить зависимости между параметрами модели ТС, определяющие хаотическое поведение.

Настоящая работа опирается на определения хаоса в динамических системах [1,2], которые с различных позиций позволяют исследовать динамические системы – от анализа орбит до теоретико-множественного представления динамики отображений.

2. Минимальное количество правил модели ТС для создания хаоса

Согласно теореме 1 в фазовом пространстве должна существовать, по крайней мере, одна точка a , для которой отображение (2) будет создавать последовательности, удовлетворяющие условию

$$f^3(a) \leq a < f(a) < f^2(a) \text{ либо } f^3(a) \geq a > f(a) > f^2(a) \quad (4)$$

Тогда справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Минимальное число правил модели ТС θ -го порядка для создания хаоса равно трем.

Доказательство. В случае одного правила передаточную функцию $f: x_k \rightarrow x_{k+1}$ модели (2) согласно общим ограничениям нормировки можно записать в виде

$$f(x) = \mu_1(x) \cdot A_1 \text{ для } \forall x \in X.$$

Поскольку в данном случае $\mu_1(x) = 1$ для $\forall x \in X$, то

$f(x) = A_1$ для $\forall x \in X$ и $x_1 = f(x_0) = x_0$. То есть условия (4) не выполняются.

Для двух правил верно

$$f(x) = \mu_1(x) \cdot A_1 + \mu_2(x) \cdot A_2 \text{ для } \forall x \in X. \quad (5)$$

Если предположить, что центры функций принадлежности удовлетворяют условиям $0 \leq a_1 < a_2 < a_3 \leq 1$, то

для $x \in [0, a_1]$: $f(x) = A_1$;

для $x \in [a_2, 1]$: $f(x) = A_2$;

для $x \in [a_1, a_2]$: $f(x) = \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2$.

Поскольку отображение (4) -- это монотонная функция, то есть $a \leq f(a) \leq f^2(a) \leq f^3(a)$ либо $a \geq f(a) \geq f^2(a) \geq f^3(a)$ (в зависимости от значений A_1, A_2), следовательно, условия (3) также не удовлетворяются.

В случае трех правил имеем

$$\begin{aligned} R_1: & \text{If } x_k = L_1 \text{ then } x_{k+1} = A_1, \\ R_2: & \text{If } x_k = L_2 \text{ then } x_{k+1} = A_2, \\ R_3: & \text{If } x_k = L_3 \text{ then } x_{k+1} = A_3. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда

$$\text{для } x \in [0, a_1]: f(x) = A_1;$$

$$\text{для } x \in [a_3, 1]: f(x) = A_3;$$

$$\text{для } x \in [a_1, a_2]: f(x) = \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2;$$

$$\text{для } x \in [a_2, a_3]: f(x) = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3.$$

Тогда отображение $f(x)$ является кусочно-линейной функцией и если $A_1 = a_1, A_2 = a_3, A_3 = a_1, a_1 = 0, a_2 = 0.5, a_3 = 1$, представляет собой известное отображение тента [2] и, следовательно, является хаотическим.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. База правил (6) с передаточной функцией $f: I \rightarrow I$ хаотична в смысле Ли-Йорке, если удовлетворяются следующие условия

$$(a) A_1 \in [a_1, a_2],$$

$$(b) A_2 = a_3,$$

$$(c) A_3 \in [a_1, a_2].$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 2 достаточно найти подходящие множества A и B . Очевидно, что f отображает интервал $[a_1, a_3]$ в себя.

$$\text{Пусть } A = [a_2 + \varepsilon_1, a_3 - \varepsilon_2], \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0, B = [\xi, \psi] \subset A.$$

Определим $f(A)$. В соответствии с допущениями (b),(c) теоремы 2

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} f(a_2 + \varepsilon_1) = a_3 \text{ и } \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} f(a_3 - \varepsilon_2) = A_3 \in [a_1, a_2]. \text{ Следовательно, } f(A) \subset I.$$

Более того, f является выпуклым на A . Нетрудно видеть, что для каждого

$$a \in A \text{ в соответствии с } f(x) = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3 \text{ существуют}$$

$c = f(a)$ и $a = f^{-1}(c)$ удовлетворяющие условиям (b) и (c) теоремы Клоедена.

Легко также видеть, что $A \subseteq f(A)$. Действительно,

$$f(A) = [f(a_3 - \varepsilon_2), f(a_2 + \varepsilon_1)] \subset [A_3, a_3],$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0, \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} f(A) = [A_3, a_3].$$

Далее мы должны доказать, что f является расширяющимся на A , то есть для $\forall x, y \in A = [a_2 + \varepsilon_1, a_3 - \varepsilon_2]$ необходимо найти константу $\lambda > 1$, при которой верно неравенство

$$\lambda \|x - y\| \leq \left\| \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2} \cdot A_2 + \frac{x - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3 - \frac{a_3 - y}{a_3 - a_2} \cdot A_2 - \frac{y - a_2}{a_3 - a_2} \cdot A_3 \right\|.$$

Тогда необходимо и достаточно, чтобы

$$\left\| \frac{A_3 - A_2}{a_3 - a_2} \right\| > 1.$$

Когда $A_2 = a_3$ (условие (b)), очевидно, что должно выполняться $A_3 \in [a_1, a_2)$ (условие (c)).

Поскольку $B = [\xi, \psi] \subset A$, достаточно найти $\xi > a_2 + \varepsilon_1$, $\psi \leq a_3 - \varepsilon_2$ и n_1 и n_2 удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} f^{n_1}(B) \cap A &= \emptyset, \\ A &\subseteq f^{n_1+n_2}(B). \end{aligned}$$

Для $n_1 = 1$ необходимо, чтобы $f(a) \notin A$ для всех $a \in B$.

Поскольку $\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} f(a_3 - \varepsilon_2) = A_3 \in [a_1, a_2)$ и $f(\xi) > f(a_3 - \varepsilon_2)$, то в соответствии с условием (a) имеем также $f(\xi) > a_1$. Пусть $\xi = f^{-1}(a_2)$. Следовательно, $B = [f^{-1}(a_2), \psi]$ и $f(B) = [f(\psi), a_2]$. Тогда очевидно, что $f(B) \cap A = \emptyset$. Для $n_2 = 1$ имеем

$$f(f(B)) = [f(f(\psi)), a_3].$$

Для обеспечения $A \subseteq f^{n_1+n_2}(B)$ необходимо $f(f(\psi)) \leq a_2$. Это значит, что принимая во внимание, что для

$$x \in [a_1, a_2] \quad f(x) = \frac{a_2 - x}{a_2 - a_1} \cdot A_1 + \frac{x - a_1}{a_2 - a_1} \cdot A_2$$

и if $\psi \leq a_3$, $A_3 = a_1$ имеем $A_1 \leq a_2$. Следовательно, условие (a) выполнимо.

Поскольку отображение (4) — это монотонная функция, то есть $a \leq f(a) \leq f^2(a) \leq f^3(a)$ либо $a \geq f(a) \geq f^2(a) \geq f^3(a)$, $[a, \psi] = [a, f(a)]$ и if $\psi \leq a_3$, $A_3 = a_1$ имеем $A_1 \leq a_2$. Следовательно, условие (а) выполнимо. Очевидно, что $\psi = f^{-2}(a_2)$ является подходящим значением. И, наконец, $f(f(B))$ является инъективным на B (один-к-одному). Поэтому f является хаотическим в смысле определения 1. Графическая иллюстрация теоремы 4 приведена на рис. 1.

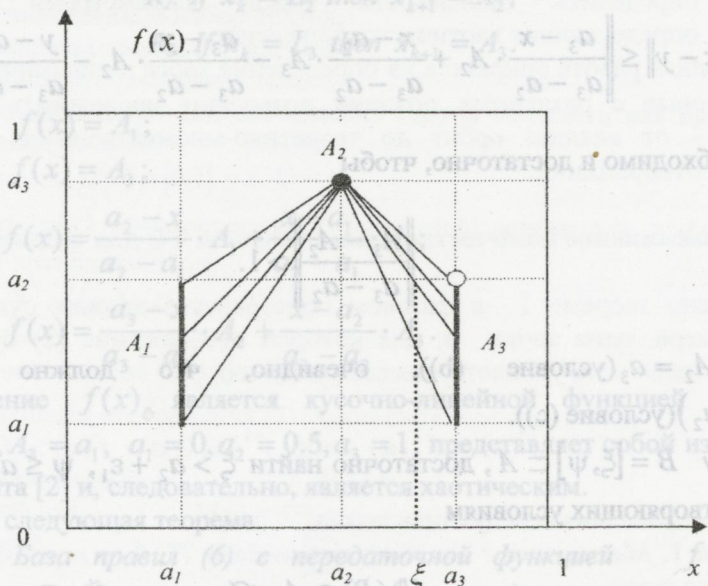


Рис. 1. Условия для коэффициентов модели Такаги-Сугено 0 порядка

На рис.2. показана иллюстрация теоретико-множественного представления отображения (6), обладающего хаотической динамикой.

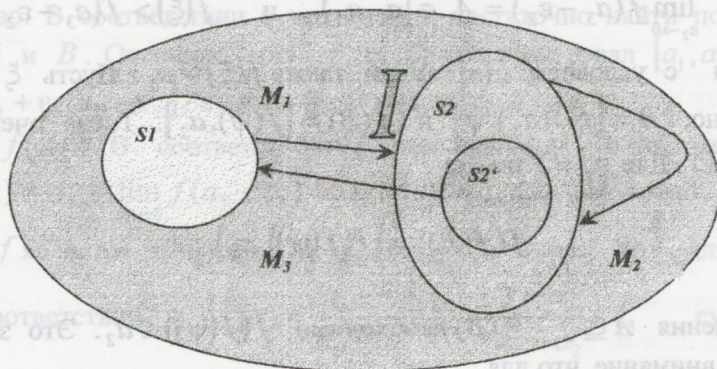


Рис.2. Теоретико-множественное представление отображения (6)

Здесь, $I = [0,1]$, $S_1 = [A_1, a_2]$, $S_2 = [a_2, A_3]$, $S'_2 = (\xi, A_3]$. Легко видеть, что также $S_1 \cup S_2 \subseteq I$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S'_2 \subset S_2$. Тогда имеет следующие типы отношений из отображения (6)

$$M_1 : S_1 \rightarrow S_2, M_2 : S_2 \rightarrow S_2, M_3 : S'_2 \rightarrow S_1.$$

3. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований

Предлагаемый в работе подход позволяет определять свойства динамических рекуррентных нечетких моделей Такаги-Сугено 0 порядка, обладающих хаотической динамикой в смысле Ли-Йорке, на основании значений коэффициентов в консеквентах правил, а не на традиционном подходе, базирующемся на исследовании переходных функций. Дальнейшие исследования будут направлены на развитие методов идентификации хаотической динамики с произвольным количеством правил модели ТС 0 порядка, а также для моделей ТС 1 порядка. Предполагается также исследование в направлении векторных нечетких моделей, и решение задачи анализа временных рядов с помощью продукционных моделей Такаги-Сугено.

ЛИТЕРАТУРА

1. T.Y. Li, J.A. Yorke. Period three implies chaos. Amer. Math. Monthly 82 – 1975 - P.985-992.
2. P.E. Kloeden. Chaotic iterations of fuzzy sets. Fuzzy Sets and Systems 42 - 1991- P.37-42.

3. Ion source control and synchronization

The experimental plant contains two ion sources for the formation of own elaboration. The principle of operation of

Control of Ion Beam Assisted Processing of Materials

A. Styervoyedov, V. Farenik, S. Styervoyedov, M. Silkin

Scientific Centre of Physical Technologies, Kharkiv, Ukraine¹⁾

V.N.Karazin Kharkiv National University, Ukraine

Ion beam assisted deposition (IBAD) as a very complex process of multilayer functional coatings formation requires precise synchronization and control of all parts of vacuum plant. In the work the system of synchronization and control of plant for IBAD is presented. The system was elaborated for synchronization of work and parameters control of two ion sources, which can work both in pulse and continuous regime, several electron beam evaporators with different evaporable materials, ionizer and measuring devices. Elaborated system allows to completely automate a very complex technological IBAD process and opens additional benefits in synthesis of complex multi-layer coatings.

Keywords: Ion Beam Assisted Deposition, ion source, control system, synchronization system.

1. Introduction

Processing of a surface of materials and wares by ion beams is a progressive way of influence on their physicotechnical, electro-physical, physicochemical and mechanical properties. Creation of vacuum coatings on the surface (PVD) in a combination with ion irradiation - ion mixing or implantation assisted deposition, allows to get coatings, that have high adhesion, low porosity, defined thickness and precisely predicted properties. Technologies of simultaneous or alternate evaporation of two or more metals on substrates using any of methods and their irradiation by various sorts of ions (nitrogen, oxygen, argon, carbon, a pine forest) with energy in a range from tens eV up to some tens keV [1,2,3] are especially perspective.

These technologies allow to form multilayered coatings and to receive the composite materials having unique properties. In particular, it is possible, varying density of streams of evaporated metals, energy and a current of ions, changing their sort, to form ceramic-metal coatings with various structures, properties, concentration and dimensional characteristics.

It is possible to completely realize advantages of multi-component implantation assisted evaporation of coatings and synthesis of thin-film systems and also to achieve repeatability of results only in case of strictly controlling of technological process and automation of technological equipment. Automation is especially necessary for synthesis of nano-dimensional structures and layers at which duration of separate working cycles of multistage technological process can make the tenth shares of second. It is clear, that the person-operator can hardly make these operations in a manual mode.

Рис. 2. Теоретико-множественное представление отображения (6)

¹⁾ 1, Novgorodskaya Str., Kharkov, 61145, Ukraine

The purpose of the given work was system engineering of synchronization and the technological control of experimental installation for implantation assisted evaporation of coatings and synthesis of materials.

2. Experimental Plant

The scheme of the experimental vacuum-technological plant, for which the synchronization and control system was elaborated, is shown on fig.1 on the background of control panel, realized on the base LabView software [4]. The plant is designed for deposition of hardening, protecting, wear resistant coatings including multilayer ones, onto the surface of metal and non-metal materials and products. The principle of plant operation is based on using the hybrid technology of physical vapor deposition under condition of bombarding simultaneously with small and medium-energy gas ions.

The plant is equipped with the system of oil-free pumping, two ion sources, several electron-beam evaporators, the device for specimens changing, the target temperature stabilization system, sensors of monitoring and control of flows of evaporable materials

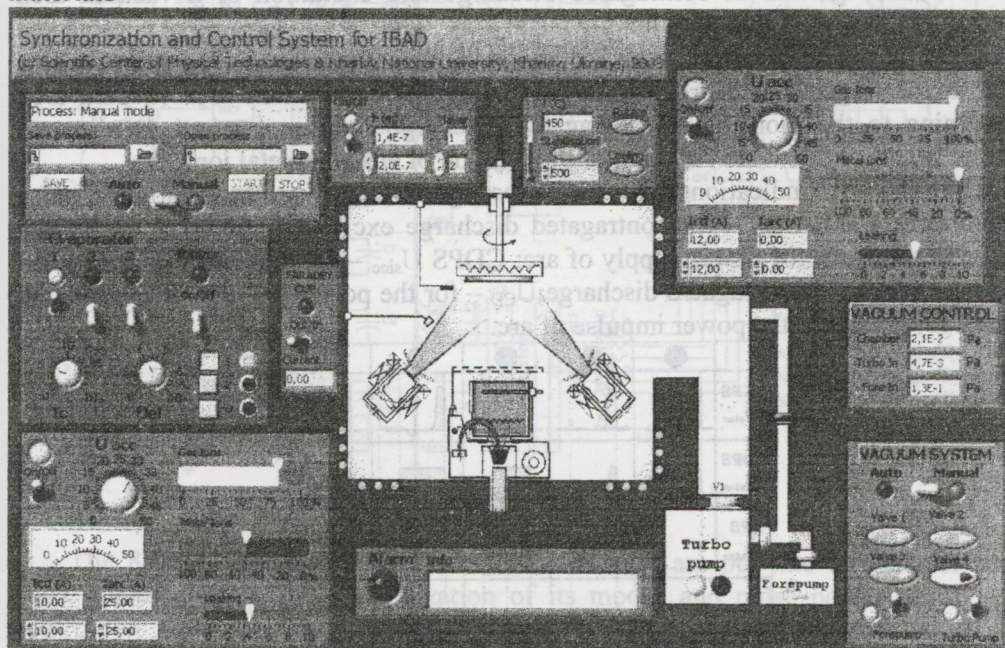


Fig. 1. Virtual Instrument User Display

The plant control system was elaborated both for the solution of maintenance task for vacuum cycle and temperature condition, and for assignment of temporary sequence of ion sources operation and electron evaporators on rigid or adaptive algorithm.

3. Ion source control and synchronization

The experimental plant contains two ion sources for gas and metal ion beam forming, of own elaboration. The principle of operation of each source is based on

sequential ignition between plain cold cathodes and hollow anode of self-maintained discharge, contragated by small hole, and then excitation of vacuum arc on the surface of electrode with consumable cathode fixing. For the selection gas ions only there is no supply voltage of arc. Charged particle extraction from plasma and beam forming are realized due to multiaperture electrode system composed of emissive, accelerating and gate-type electrodes.

Pulse periodic regime of contragated and arc discharge burning allows to get a big range of pulse and average currents of charged particles beams, execute flexible controlling of average currents of ion beams, and also to change fine a sort of processing ions, thus realizing various kinds of influence. Changing pulses frequency that follow with constant duration it is easy to carry out adjustment of average current and to provide the thermal mode both of the source, and the material of a target to be processed. Changing the pulse duration of the arc and contragated discharge supply, internal adjustment of a sort of processed ions and partial currents is held. This is shown on fig.2.

At ignition only of contragated discharge (variant 1) we have a beam of gas ions. At short-term ignition of contragated discharge and excitation of a vacuum arch (variant 2) the source generates mainly metal ions. Ignition and burning of contragated discharge during all duration of the vacuum arch current (variant 5), the short feeding pulse of contragated discharge (variant 3), a delay of excitation of a vacuum arch concerning to the moment of contragated discharge ignition (variant 4) allow to receive beams with a wide variation of the relation of gas and metal ions.

The following indications are used in the figure: U_{sync} – synchronization impulse accordingly: CIPS U_{sync} – for contragated discharge excitation; APS U_{sync} – for the controlling impulse of power supply of arc; CDPS U_{sync} – for the controlling impulse of power supply of contragated discharge; U_{CD} – for the power impulse of contragated discharge; U_{AC} – for the power impulse of arc.

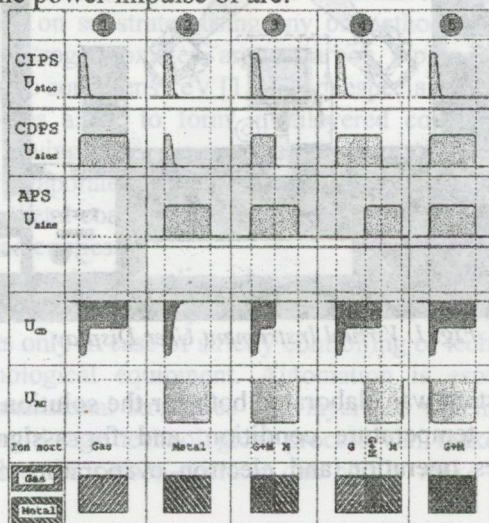


Fig. 2. Pulse-width modulation diagram of the ion source contragated and arc discharges

the working program for the microcontrollers allows to adopt the system easily for different tasks and also for other plants of similar class.

REFERENCES

1. J.J.Cuomo, S.M.Rossnagel. Nucl. Inst. Meth. in Phis. Res., B 19/20, 1987, p.963-974.
2. I.Brown. Proceedings 5-th conference on Modification of Materials with Particles Beams and Plasma Flows, 2000, p. 235-239.
3. S.Rossnagel, J.Cuomo. Thin Solid Films, 1989, 171, p.143-156.
4. National Instruments homepage. www.ni.com
5. A.Guglya., Yu.Marchenko, M.Silkin, S.Stervoyedov, Ves. Khar. Univ.//Yad. Chast. Pol.,(RU) 2001, № 605510, V.1 (13), p. 94-98.

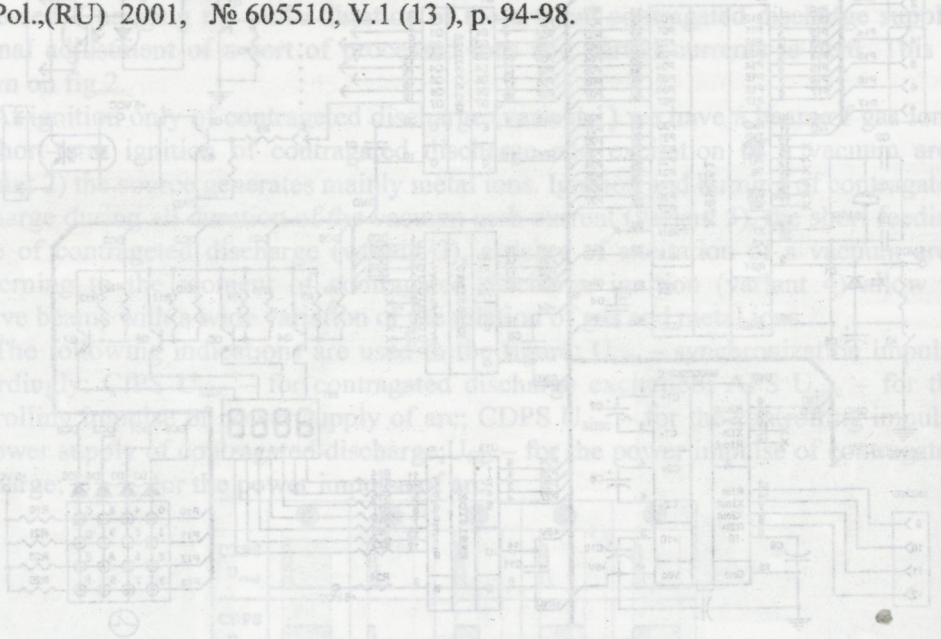


Fig. 3. The principle scheme of controller.

The 8-bit register, transistor and diode keys are put into scheme for plant work cycles control, relay stabilization of its modes and pulse power supply unit control on fibre-optic lines of arc and contracted discharge of plasma-emissive sources and electron evaporators. For the data exchange with the control computer TTL-levels of the processor are transformed into levels of the standard RS-232C by microcircuit MAX 232.

4. Conclusion

The synchronization and control system of vacuum plant for ion beam assisted deposition of coatings and materials synthesis, elaborated on the base of AT89C51 and ADuC812 microcontrollers, allows to automate the complex EB-IBAD process and to achieve the result reproductibility due to exact synchronization of the ion sources work, electron-beam evaporators and technological systems. Simple substitution of

Вычислительный эксперимент на базе численного решения редуцированной СЛАУ-2 для одной периодической структуры

В. В. Хорошун, В. Б. Хохольков

Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Украина

Electromagnetic modeling of harmonic grating as degeneration of diffraction strip grating in linear one with period equal wavelength of incident field is carried out. It is shown, that amplitude transmission coefficient of electromagnetic field of such periodic structure has harmonic behavior and in grating spectrum are present only the main and ± 1 diffraction orders.

1. Общая постановка задачи и её актуальность

Проблема создания эффективных алгоритмов и программ на их основе решения задач дифракции и распространения электромагнитных волн в гиротропных средах (ферриты, плазма), содержащих периодические структуры из элементов различного профиля, имеет важное значение [1,2]. При этом ключевой характер приобретают задачи дифракции на простейших периодических структурах, к числу которых относится и решетка из идеально проводящих проволок нулевого диаметра, т.н. линейная дифракционная решетка (ДР). Ее математическая модель идентична [3, 4] для предельного случая $d = l$, когда ленты решетки превращаются в линии.

На линейную решетку периода l под углом ζ падает плоская Е-поляризованная волна. Требуется найти дифракционное поле во всем пространстве, исключая элементы ДР.

2. Решение задачи

В принципе, решение исходной задачи можно получить путем предельного перехода из решения задачи для ДР из элементов любого профиля поперечного сечения, стягивая контур сечения в точку и образуя линейную ДР. Однако не для всех решений такой предельный переход возможен, поскольку при этом часто исчезает сама периодическая структура.

Кратчайшим путем решения проблемы является предельный переход от решетки из вертикальных лент (ножевой ДР) к линейной решетке, когда ширина вертикальных лент ножевой решетки $h \rightarrow 0$. Однако в работах по ножевой ДР случай $h \rightarrow 0$ не рассматривался. Более того, указывалось, что полученные выражения справедливы для $h > 0$. Поэтому будем рассматривать исходную задачу для решетки из горизонтальных идеально проводящих лент шириной $l - d$, где d - ширина щели решетки (ленточная ДР).

Воспользуемся результатами, полученными в [4] методом АМШ [3] в виде СЛАУ-2 для расчета спектральных характеристик ленточной решетки, на которую под углом ζ падает плоская Е-поляризованная волна

$$\begin{aligned} -b_0 &= i\kappa(b_0 - 1)\cos\zeta W_0^0(u) + \sum_{n \neq 0} b_n \tilde{\chi}_n W_0^n(u), \quad (m=0), \\ b_m &= i\kappa(b_0 - 1)\cos\zeta W_m^0(u) + \sum_{n \neq 0} b_n \tilde{\chi}_n W_m^n(u), \quad (m \neq 0), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$u = \cos \frac{\pi d}{l}, \quad \tilde{\chi}_n = 1 + i\sqrt{\kappa^2/n^2 - [1 + (\kappa/n)\sin\zeta]^2}, \quad (n \neq 0), \quad \kappa = \frac{l}{\lambda}. \quad (2)$$

Для линейной ДР ширина щели $d = l$, т.е. коэффициент заполнения $u = -1$. Поскольку полиномы Лежандра $P_n(-1) = (-1)^n$, то коэффициенты $W_0^n(-1) = (-1)^n$, ($n \neq 0$), $W_m^n(-1) = 0$, ($m \neq n$), $W_m^m(-1) = 1$, $W_{-m}^{-m}(-1) = -1$, $W_0^0(-1) \rightarrow -\infty$.

Подставляя значения этих коэффициентов в (1), находим значения амплитуд дифракционных спектров.

3. Анализ аналитических и численных результатов, полученных методом АМШ [3] и методом СИУ [5]

Прямой подстановкой полученных значений коэффициентов прохождения b_n в исходную систему сумматорных уравнений [4], убеждаемся, что все они являются ее решениями. При этом распределение электрического поля на щели решетки (характер освещенности щели) для линейной ДР имеет вид

$$E(\varphi) = 1 + \cos \varphi, \quad \varphi = 2\pi y/l, \quad |y| \leq l/2.$$

Учитывая, что при этом период решетки $l = \lambda$, из основного уравнения ДР

$$\sin \alpha_n = \sin \zeta + n \frac{\lambda}{l}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

получаем, что в исследуемом спектре присутствуют только основной и ± 1 -е порядки дифракции и представлено на рис. 1 в виде амплитудного спектра и лучевой диаграммы для линейной ДР. Методика получения значений b_n из (1) состоит в нахождении их в нулевом (формула Ламба), первом и втором приближениях при $\zeta = 0$ и в нулевом и первом приближениях в случае наклонного падения. Во всех этих случаях при $u = -1$ получаем $b_0 = 1$ (полное прохождение) и $b_n = 0$ для высших гармоник всюду, кроме точек скольжения гармоник, в которых для b_n имеет место неопределенность вида 0/0. Для проверки результатов использовались системы уравнений, полученные в [5], а

также результаты работы [6]. Т.о. доказано, что линейная ДР полностью прозрачна для Е-поляризованных волн, исключая режимы скольжения высших гармоник, которые носят характер поверхностных волн. В случае Н-поляризации падающая волна «не замечает» решетки.

4. Решение задачи модифицированным методом перерасложения (ММП)

Представим математическую модель исходной задачи как итог двойного предельного перехода ($h=0, d=l$) от ДР из идеально проводящих брусьев прямоугольного поперечного сечения к линейной решетке.

$$(M) \sum_n b_n e^{i h_n y} = 0, \quad (3)$$

$$(III) \sum_n b_n e^{i h_n y} = \sum_{m=1}^{\infty} (c_m + d_m) \sin \frac{\pi m}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right), \quad (4)$$

$$(III) \sum_n b_n \gamma_n e^{i h_n y} = \sum_{m=1}^{\infty} q_m (d_m - c_m) \sin \frac{\pi m}{d} \left(y + \frac{d}{2} \right), \quad (5)$$

$$\text{где } \gamma_n = \frac{2\pi}{l} |n| \sqrt{\frac{\kappa^2}{n^2} - \left(1 + \frac{\kappa}{n} \sin \zeta \right)^2}, \quad q_m = \frac{\pi m}{d} \sqrt{\frac{\tau^2}{m^2} - 1}, \quad \tau = \frac{2d}{\lambda},$$

а остальные обозначения соответствуют [4].

Из уравнений (3) и (4) следует прямая пересчетная формула (ППФ) - (уравнение связи)

$$b_n = \sum_{m=1}^{\infty} m (c_m + d_m) B_n^m(\tau_n), \quad \text{где } B_n^m(\tau_n) = \frac{e^{i\tau_n} - (-1)^m e^{-i\tau_n}}{\left(\frac{\pi m}{2} \right)^2 - \tau_n^2}, \quad \tau_n = \pi(n + \nu). \quad (6)$$

Из уравнения (4) получаем обратную пересчетную формулу (ОПФ)

$$x_m = \frac{\pi m}{2} \sum_n b_n B_n^m(-\tau_n), \quad x_m = c_m + d_m, \quad (m=1, 2, \dots) \quad (7)$$

Трансформируя уравнение (5) к виду

$$(III) \sum_{n \neq 0} b_n |n| \eta_n e^{i h_n y} = \kappa (1 - b_0) \cos \zeta, \quad (8)$$

и исключая из него b_n посредством (6), получаем СЛАУ-1 для определения неизвестных x_m

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x_m c_{ms} = \frac{4\kappa}{\pi} B_0^s(-\tau_0) \cos \zeta, \quad (s=1, 2, \dots) \quad (9)$$

где

$$c_{ms} = -i\kappa \cos \zeta B_0^m(\tau_0) B_0^s(-\tau_0) + \sum_{n \neq 0} |n| B_n^m(\tau_n) B_n^s(-\tau_n) - \sum_{n \neq 0} |n| \tilde{\chi}_n B_n^m(\tau_n) B_n^s(-\tau_n) \quad (10)$$

а параметр малости $\tilde{\chi}_n$ определен выражением (2).

Результаты расчетов СЛАНУ-1 в виде (8) показали, что в случае нормального падения плоской Е-поляризованной волны на линейную решетку ее амплитудный спектр содержит нулевую и первые парные гармоники, что совпадает с результатами [6].

Для случая наклонного падения Е-поляризованной волны на линейную решетку из системы уравнений (8) получаем численные значения, подтверждающие правильность выражений (3) – (4).

5. Вычислительный эксперимент: обоснование алгоритмов и реализация

На рис. 1 приведены амплитудный спектр и лучевая диаграмма линейной решетки для случая нормального падения ($\zeta=0$) на нее плоской Е-поляризованной волны, длина которой равна половине периода решетки. Из рисунка видно, что в спектре, кроме основной, присутствуют только вторые парные гармоники, с амплитудами, равными 0.5. Из лучевой диаграммы следует, что направления распространения этих гармоник перпендикулярны образующим элементов решетки и лежат в плоскости решетки (случай скольжения гармоник).

Для случая нормального падения ($\zeta = 0$) в точках скольжения n -тых парных гармоник ($\kappa_n = |n|$) имеем

$$b_0 = 1, \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}, \quad (n \neq 0).$$

Аналогичные результаты получены в [6] для решетки из тонких проволок.

На рис. 2 представлены результаты расчетов для наклонного падения ($\zeta=40$) плоской Е-поляризованной волны для случая, когда в режиме скольжения находится -1 -я гармоника. Основная гармоника при этом полностью проходит через решетку. В случае наклонного падения точки скольжения гармоник определяются по формуле

$$\kappa_n = \frac{|n|}{1 - \text{sign}(n) \sin \zeta},$$

где $\text{sign}(n) = \frac{|n|}{n}$ - знаковая функция.

Для коэффициентов прохождения b_n в режиме моноскольжения имеем

$$b_0 = 1, \quad b_n = -(-1)^{-n} \quad n \neq 0$$

На рис. 3 представлена аналогичная ситуация для +1-й гармоники дифракционного спектра.

На рис. 4 показан режим бискольжения (двойного скольжения) -2-й и +1-й гармоник. Попрежнему отсутствует отражение волны от решетки, т.е. имеет место полное прохождение волны через решетку. Значения амплитуд дифракционных спектров определяются по формулам:

$$b_0 = 1, \quad b_n = (-1)^{n+1} \frac{|k|}{n + |k|}, \quad b_{-k} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{n}{n + |k|},$$

где n и k - номера соответственно положительных и отрицательных гармоник, которые одновременно находятся в режиме скольжения, распространяясь в противоположных направлениях поперек лент решетки. Точки скольжения в этом режиме легко определяются, а именно:

$$\kappa_{n>0} = \kappa_{k<0} = \frac{n + |k|}{2}.$$

Значение угла падения ζ , соответствующего режиму бискольжения гармоник, определяется по формуле

$$\zeta = \arcsin \frac{|k| - n}{|k| + n}, \quad |k| \geq n.$$

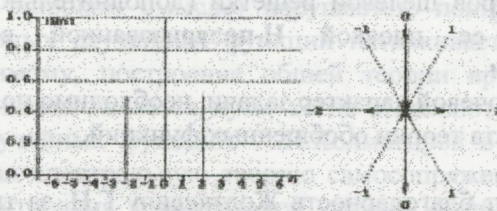


Рис. 1. Амплитудный спектр и лучевая диаграмма линейной ДР ($\zeta=0, \kappa=2$).

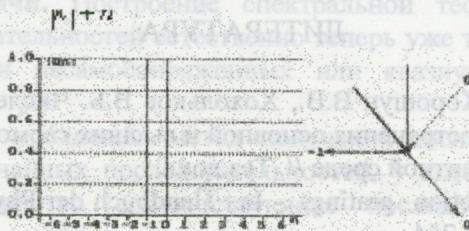


Рис. 2. Режим скольжения для -1-й гармоники ($\zeta=40, \kappa=0.608$).

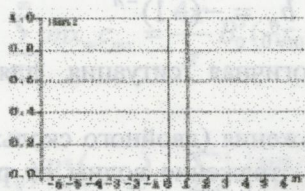


Рис. 3. Режим скольжения для +1-й гармоники ($\zeta=40$, $\kappa=2.800$).

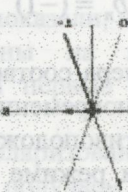
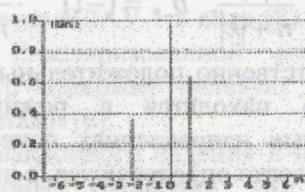


Рис. 4. Режим бискольжения для -2-й и +1-й гармоник ($\zeta=19.471$, $\kappa=1.5$).

6. Выводы по результатам и направления дальнейших исследований.

Рассмотрены дифракционные спектры линейной ДР, для которой имеют место полное прохождение основной волны и режимы моно- и двойного скольжения для высших гармоник.

Анализ спектров щелевой решетки (дополнительной к линейной ДР), при возбуждении ее плоской Н-поляризованной волной проводится аналогичным образом.

Учитывая ключевой характер задачи, необходимо получить ее решение с привлечением аппарата теории обобщенных функций.

Авторы выражают благодарность Жолткевичу Г.Н. за творческое участие в работе и полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жолткевич Г.Н., Хорошун В.В., Хохольков В.Б. Численное моделирование постоянных распространения основной и высших гармоник дифракционного спектра в гиромангнитной среде // Тез.докл.
2. Stroke G.W. Diffraction gratings. - In.: Handbuch der Physik. Berlin, Springer.- 1967.- Bd.29.-P.426-754.
3. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. . Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // ЖТФ, т.32, № 6054, 1962.- С. 381-394.
4. Хорошун В.В. О модификации метода задачи Римана-Гильберта для случая наклонного падения плоской электромагнитной волны на решетку из лент // Вестн. Харьк. Ун-та, Радиофизика и электроника.- 1998.- №405.- С. 137-141.
5. Малин В.В. К теории ленточных решеток конечного периода // Радиотехника и электроника, 1963.- Т. 8, №2, С. 211-221.
6. Wessel W. Hochfreq. u.Electroakust.- 1939, v.54, N2.

Спектральные разложения одного класса нестационарных случайных последовательностей.

Н. В. Черемская

*Национальный технический университет "Харьковский политехнический институт",
Украина*

For receiving spectrum expansions some classes of nonstationary random sequences Hilbert approach and spectrum theory of not self-adjoint operators are used. These expansions are the superposition of noncorrelation discrete oscillators, but these shares are functional connected between themselves, unlike the stationarity random sequences. Beside the new type of spectrum expansions, which are the superposition of nonstationarity condition of discrete strings is appended.

Введение. Спектральные разложения случайных функций являются основой для прикладного анализа случайных процессов и последовательностей, т.к. представляют собой суперпозицию внутренних состояний гармонических осцилляторов с вещественными частотами [1]. В случае, когда условие стационарности (в широком смысле) нарушается, построение спектральной теории нестационарных случайных функций наталкивается на существенные трудности. По-видимому, построение общей теории вряд ли осуществимо. Поэтому более логичным является путь, когда выделяются некоторые классы нестационарных случайных функций. А.Н.Колмогоров в своих работах [2,3] впервые использовал спектральную теорию самосопряженных или унитарных операторов для построения спектральной теории стационарных случайных процессов или стационарных случайных последовательностей.

Постановка задачи. Построение спектральной теории нестационарных случайных последовательностей естественно теперь уже требует использования спектральной теории несамосопряженных или квазиунитарных операторов [4,5,6].

В данной работе предложен метод получения спектральных разложений нестационарных случайных последовательностей, у которых при вложении в гильбертово пространство соответствующая последовательность в этом пространстве имеет представление $x_n = A^n x_0$.

Решение задачи. Если A - самосопряженный ограниченный оператор, то корреляционная функция, которую можно вычислить как соответствующее скалярное произведение [7], зависит от суммы аргументов (ганкелева случайная последовательность). Для такой последовательности легко получить

Из результатов работы [8,9] легко получить следующие необходимые и достаточные условия принадлежности элемента x к ганкелевой последовательности.

спектральное представление вида: $\xi_n = \int_a^b \lambda^n dZ(\lambda)$, где $Z(\lambda)$ - стандартный случайный процесс с некоррелированными приращениями.

Если последовательность неганкелева, но $\dim \text{Im } AH < \infty$, то для получения спектрального разложения можно привлечь методы теории несамосопряженных операторов и ассоциированных открытых систем [7]. Тройку $(H, A \in [H, H], \xi_0 \in H)$ будем называть операторным представлением случайной последовательности (т.е. в соответствующем гильбертовом пространстве последовательность имеет представление $x(n) = A^n x_0$).

Пусть теперь спектр оператора A дискретный и лежит в верхней комплексной полуплоскости. Введем подпространство гильбертова пространства H $E = \overline{\text{Im } AH}$, пусть $\dim E = r < \infty$. Рассмотрим две последовательности некоррелированных случайных величин $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{a_k\}_{\alpha=1}^r$ с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями ($Mz_k \bar{z}_j = \delta_{kj}$, $Ma_{\alpha} \bar{a}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta}$). Рассмотрим совокупность детерминированных функций $\psi_k(n)$, которая удовлетворяет системе разностных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} i\psi_k(n+1) + \lambda_k \psi_k(n) &= \sum_{\alpha=1}^r u_k^{(\alpha)}(n) \sqrt{\omega_{\alpha}} Ma_{\alpha} \bar{z}_k, \\ \psi_k(n)|_{n=0} &= \psi_k(0), \\ u_{k+1}^{(\alpha)}(n) &= u_k^{(\alpha)}(n) - i\sqrt{\omega_{\alpha}} Ma_{\alpha} \bar{z}_k \psi_k(n), \\ u_k^{(\alpha)}(n)|_{k=0} &= 0, \quad u_k^{(\alpha)}(n) = Mu_k(n) \bar{a}_{\alpha}, \end{aligned} \quad (1)$$

где λ_k - собственные числа оператора A , а ω_{α} - собственные числа оператора $2\text{Im } A$.

Теорема 1.

Если $x(n, \omega)$ нестационарная случайная последовательность, которая имеет операторное представление в соответствующем гильбертовом пространстве вида $x(n) = A^n x_0$, то справедливо представление:

$$x_n = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(n) z_k, \quad (2)$$

где $\psi_k(n)$ находится из системы (1).

Доказательство.

Включим A в операторный комплекс $K = (A, H, g_1, \dots, g_r, J = I)$. Тогда [7] комплекс K можно представить в виде сцепления операторных комплексов K_m^{\perp} ,

где K_m^\perp - проекция комплекса K на подпространство $H_m^\perp = H_{m-1} \ominus H_m$, где $H_m = H \ominus H_m^\perp$, а H_m^* - возрастающая система конечномерных инвариантных подпространств $H_0^* = 0 \subset H_1^* \subset H_2^* \subset \dots$ такая, что $\dim(H_{m+1}^* \ominus H_m^*) = 1$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} H_m^* = H$. Комплекс K_m^\perp имеет структуру

$$K_m^\perp = P_m^\perp H = \left(A_m^\perp, H_m^\perp, g_1^{(m)}, \dots, g_r^{(m)}, I \right), \quad A_m^\perp h_m = \lambda_m h_m,$$

$g_\alpha^{(m)} = P_m^\perp g_\alpha = \langle g_\alpha, z_m \rangle z_m$. P_m^\perp - проекция на подпространство $H_m^\perp = H_{m-1} \ominus H_m$, где $H_m = H - H_m^*$.

Обозначим $z_m(n) = \psi_m(n) z_m$. Имеем для открытой системы, ассоциированной с комплексом K_m ,

$$\psi_m(n+1) + i\lambda_m \psi_m(n) = -i \sum_{\alpha=1}^r u_{\alpha,m}(n) \langle g_\alpha, z_m \rangle,$$

$$\psi_m|_{n=0} = \psi_{m,0},$$

$$v_{\alpha,m}(n) = u_{\alpha,m}(n) - i \langle \overline{g_\alpha}, z_m \rangle \psi_m(n).$$

Тогда, используя результаты работы по сцеплению операторных комплексов [4], получаем все утверждения теоремы, учитывая, что g_α можно выбрать в виде $g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|} a_\alpha$, где $|\omega_\alpha|$ - собственные числа оператора $2JmA$. Рассматривая $2JmA = B$, $B = B^*$ и выбирая базисом собственные векторы a_α оператора B , имеем:

$$Bu = B \left(\sum_{\alpha=1}^r u_\alpha a_\alpha \right).$$

Т.к., $\omega_\alpha = \text{sign} \omega_\alpha |\omega_\alpha|$ получаем

$$\sum_{\alpha=1}^r \langle \cdot, a_\alpha \rangle B a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r \omega_\alpha \langle \cdot, a_\alpha \rangle a_\alpha = \sum_{\alpha=1}^r E_\alpha \langle \cdot, g_\alpha \rangle_{g_\alpha}.$$

Итак,

$$g_\alpha = \sqrt{|\omega_\alpha|} a_\alpha,$$

$$\omega_1, \dots, \omega_p > 0,$$

$$\omega_{p+1}, \dots, \omega_r < 0.$$

Учитывая, что элементами гильбертова пространств H и E являются случайные величины, а ортогональность эквивалентна некоррелированности, получаем утверждения теоремы.

Замечание.

Из результатов работ [8,9] легко получить следующие необходимые и достаточные условия операторного представления случайной последовательности.

Для того чтобы случайная последовательность $x(n, \omega)$ имела операторное представление в гильбертовом пространстве $H_x = \overline{V_n x(n, \omega)}$ необходимо и достаточно, чтобы корреляционная функция удовлетворяла следующему условию

$$\left| \sum_{n,m} K(n+1, m) a_n \overline{a_m} \right|^2 \leq \sum_{n,m=1}^{\infty} K(n, m) a_n \overline{a_m} \sum_{n,m=1}^{\infty} K(n, m) b_n \overline{b_m}$$

Пусть теперь в соответствующем операторном представлении оператор A имеет бесконечнократный спектр в нуле и конечномерное неэрмитово подпространство (вольтерров диссипативный оператор).

Включим A в комплекс $\tilde{K} = (\tilde{A}, \tilde{H}, \tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_r, I)$, где $\tilde{g}_\alpha = \sqrt{\omega_\alpha} a_\alpha$ ($\alpha = \overline{1, r}$) $Ma_\alpha \overline{a_\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, тогда по теореме 8.3 [7] комплекс \tilde{K} является унитарно эквивалентным комплексу $K = (A, L_{[0,1]}^2, g_1(x), \dots, g_r(x), I)$, где

$$Af(x) = i \int_0^x f(y) \overline{g(y)} g(y) dy, \quad 0 \leq x \leq l, \quad f(x) \in L_{[0,1]}^2,$$

$$g(x) = (\theta_1(x), \dots, \theta_r(x)),$$

$$\int_0^l g(x) \overline{g(x)} dx = \begin{pmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_r \end{pmatrix},$$

$$\sum_{\alpha=1}^r |\theta_\alpha(x)|^2 = 1, \quad (0 \leq x \leq l).$$

Введем функцию $Z_\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x' \leq x \leq x'' \\ 0, & x \notin [x', x''] \end{cases}$, где $\Delta = [x', x'']$

($0 \leq x' < x'' \leq l$).

$\langle Z_{\Delta_1}, Z_{\Delta_2} \rangle = d \langle \Delta_1 \cap \Delta_2 \rangle$, где d — длина интервала $\Delta_1 \cap \Delta_2$. Тогда g_α и $f(x)$ как элементы гильбертова пространства $L_{[0,1]}^2$ можно представить в виде

$$g_\alpha = \int_0^l \theta_\alpha(x) dZ_{[0,x]},$$

$$f = \int_0^l f(x) dZ_{[0,x]}.$$

Уравнения открытой системы, ассоциированной с комплексом, принимает вид:

$$f(n+1, x) - i \left(i \int_0^x f(n, y) \sum_{\alpha=1}^r \overline{\theta_\alpha(y)} \theta_\alpha(x) dy \right) = -i \sum_{\alpha=1}^r u_\alpha(n) \theta_\alpha(x),$$

$$f(n, x)|_{n=0} = f_0(x),$$

$$v_\alpha(n) = u_\alpha(n) - i \int_0^l f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy,$$

$$f(n+1, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x) \left[u_\alpha(n) - i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy \right].$$

Таким образом,

$$f(n+1, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_\alpha(x) u_\alpha(n, x), \quad (3)$$

где

$$u_\alpha(n, x) = u_\alpha(n) - i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_\alpha(y)} dy,$$

$$u_\alpha(n, x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{du_\alpha(n, x)}{dx} = -i f(n, x) \overline{\theta_\alpha(x)}.$$

Т.к. $\tilde{A} = UAU^{-1}$, где U - унитарный оператор, отображающий $L^2_{[0,1]}$ на H , и полагая $Z_x = Uz_{[0,x]}$ получаем теорему.

Теорема 2.

Для каждой последовательности $x_n = A^n x_0$ конечного квазиранга, где A вполне несамосопряженный оператор со спектром в нуле, существует спектральная мера $z_x (0 \leq x \leq l)$ и множество функций $\theta_\alpha(x) (\alpha = \overline{1, r})$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\langle \Delta_1 z, \Delta_2 z \rangle = \rho(\Delta_1 \cap \Delta_2), \quad \text{где} \quad \Delta_k z (k = 1, 2) \quad - \quad \text{приращения}$$

z_k соответственно на интервалах Δ_k , $\rho(\Delta_1 \cap \Delta_2)$ - длина общей части интервалов Δ_k ;

$$\sum_{\alpha=1}^r |\theta_\alpha(x)|^2 \equiv 1 \quad (0 \leq x \leq l);$$

$$3) \int_0^l \theta_\alpha(x) \overline{\theta_\beta(x)} dx = \omega_\alpha \delta_{\alpha\beta},$$

а последовательность x_n можно представить в виде:

$$x_n = \int_0^l f(n, x) dz_x, \quad (4)$$

где функция $f(n, x)$ находится из системы уравнений (3)

$$\text{Т.к., } W(n, m) = i \sum_{\alpha, \beta=1}^r \varphi_{\alpha}(n) J_{\alpha\beta} \overline{\varphi_{\beta}(m)} = i \sum_{\alpha=1}^r E_{\alpha} \varphi_{\alpha}(n) \overline{\varphi_{\alpha}(m)}, \text{ где}$$

$$E_{\alpha} = \begin{cases} 1, \alpha = \overline{1, p} \\ -1, \alpha = \overline{p+1, r} \end{cases}$$

и $\varphi_{\alpha}(n) = \langle A^n x_0, \tilde{g}_{\alpha} \rangle_H = \int_0^l f(n, x) \overline{g_{\alpha}(x)} dx$, то в данном случае $g_{\alpha}(x) = \theta_{\alpha}(x)$ и

$$f(n, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_{\alpha}(x) u_{\alpha}(n-1, x).$$

Положив $u_{\alpha}(n) = 0$ и $x = l$, получаем, что $\varphi_{\alpha}(n) = i u_{\alpha}(n-1, l)$,

$$f(n+1, x) = -i \sum_{\alpha=1}^r \theta_{\alpha}(x) u_{\alpha}(n, x),$$

$$u_{\alpha}(n, x) = u_{\alpha}(n) - i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_{\alpha}(y)} dy,$$

$$u_{\alpha}(n) \equiv 0, \quad f(n, y)|_{n=0} = f_0(y), \quad (5)$$

$$\frac{du_{\alpha}(n+1, x)}{dx} = -i f(n+1, x) \theta_{\alpha}(x),$$

$$\frac{du_{\alpha}(n+1, x)}{dx} = - \sum_{\beta=1}^r \theta_{\beta}(x) u_{\beta}(n, x) \overline{\theta_{\alpha}(x)}.$$

Таким образом, $W(n, m)$ можно представить в виде

$$W(n, m) = i \sum_{\alpha=1}^r E_{\alpha} u_{\alpha}(l, m) \overline{u_{\alpha}(l, m)}, \text{ где } u_{\alpha}(x, n) \text{ удовлетворяет следующей}$$

системе дифференциальных разностных уравнений

$$\frac{du_{\alpha}(n+1, x)}{dx} + \sum_{\beta=1}^r \theta_{\beta}(x) u_{\beta}(n, x) \overline{\theta_{\alpha}(x)} = 0,$$

$$u_{\alpha}(0, n) = 0,$$

$$u_{\alpha}(x, 0) = -i \int_0^x f_0(y) \overline{\theta_{\alpha}(y)} dy,$$

а $f_0(x)$ - начальный элемент последовательности $f(n, x) = A^n f_0(x)$ в гильбертовом пространстве $L^2_{[0,1]}$. Решение этой системы позволяет найти функцию $f(n, x)$ в спектральном разложении $x_n = \int_0^1 f(n, x) dZ_x$ по формуле:

$$f(n, x) = i \sum_{\alpha=1}^r \frac{du_{\alpha}(n, x)}{dx} \theta_{\alpha}(x).$$

Эту формулу легко получить, используя условие $\sum_{\alpha=1}^r |\theta_{\alpha}(x)|^2 = 1$ и уравнения

$$u_{\alpha}(n, x) = -i \int_0^x f(n, y) \overline{\theta_{\alpha}(y)} dy.$$

Основные результаты. Таким образом, спектральная теория несамосопряженных операторов позволила для нестационарных случайных последовательностей, которые допускают операторные представления получить спектральные разложения.

Эти представления являются аналогом спектральных разложений стационарных случайных последовательностей, которые представляют собой суперпозицию состояний дискретных осцилляторов, амплитуды которых некоррелированы между собой и не связаны функционально. А в нестационарном случае для дискретного спектра получается суперпозиция внутренних состояний дискретных осцилляторов с частотами, лежащими в верхней полуплоскости, причем, как и в стационарном случае амплитуды некоррелированы, но уже функционально связаны рекуррентным соотношением. Кроме того, появляются принципиально новые типы спектральных разложений, когда последовательность представляется в виде суперпозиции внутренних состояний дискретных струн.

Используя операцию сцепления операторных комплексов и операторных систем, ассоциированных с операторными комплексами, можно получать спектральные разложения общего вида (когда спектр нестационарной случайной последовательности расположен в конечной части комплексной полуплоскости или расположен на конечном интервале вещественной оси, каждая точка которого является точкой спектра бесконечной кратности).

Аналогичный подход может быть использован при построении дискретных случайных полей, для которых соответствующая последовательность в гильбертовом пространстве имеет вид $x(n, p) = A_1^n A_2^p x_0$, где A_j - ограниченные дважды перестановочные несамосопряженные операторы. Используя спектральную теорию операторов [10], для $x(n, p)$ можно получить представления вида $x(n, p) = \int_D f(n; \lambda; p; \mu) \xi(d\lambda; d\mu)$, где $\xi(\Delta)$ стандартная

стохастическая мера, определенная на прямоугольниках $\Delta \subseteq D$ $D = [a; b] \times [c; d]$ $M\xi(\Delta_1; \Delta_2) = S(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, где $S(\Delta_1 \cap \Delta_2)$

площадь прямоугольников $(\Delta_1 \cap \Delta_2)$. Функция $f(n; \lambda; p; \mu)$ находится из системы дифференциально-разностных уравнений аналогичной системе (4), а $A_1 f(u; v) = \int_0^u f(\tau_1; v) d\tau_1$; $A_2 f(u; v) = \int_0^v f(u; \tau_2) d\tau_2$.

В случае, когда у диссипативных операторов A_1 и A_2 с дискретным спектром имеется общая цепочка инвариантных подпространств, то для $x(n, p)$ можно получить представление вида: $x(n, p) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(n, p) z_k(\omega)$, где некоррелированные случайные величины, а $\psi_k(n, p)$ находятся из системы разностных уравнений вида (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов //М., 1977, 654с.
2. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений//ДАН СССР, 1940, т.26, № 1.
3. Колмогоров А.Н. Спираль Винера и некоторые интересные кривые в гильбертовом пространстве.//ДАН СССР, 1940, т.26, №2.
4. Лившиц М.С. Операторы, колебания, волны. Открытые системы. //М., Наука, 1966, 298с.
5. Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов // М.: Наука, 1969. - 287с.
6. Kuzhel A. Characteristic Functions and Models of Nonself - Adjoint Operators. // Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996, 267p.
7. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах //Харьков, Изд-во ХГУ, 1971, 160с.
8. Янцевич А.А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве I. Корреляционная теория. // теория функций, функциональный анализ и приложения: сборник. - Харьков. - 1986. - Вып. 45. - С.139-141.
9. Маркус А.Г., Цекановский Э.Р., Янцевич А.А. Линейно представимые решения дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах.// Математические методы кибернетики: сборник. - Киев. - 1980. - С.28-38.
10. Золотарев В.А. О треугольных моделях систем дважды перестановочных операторов. ДАН Арм.ССР, XII, № 3, 136-140.]