УДК 517.95

И. Д. ЧУЕШОВ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ВОЗНИКАЮЩЕЙ В ФИЗИКЕ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

1. В гладкой ограниченной области $\Omega \subset R^d$ ($d = 1, 2, 3$) рассматривается следующая система уравнений в частных производных:

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \operatorname{div}(D_n \nabla n - \mu_n n \nabla \varphi) + F(n, p) = 0; \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(D_p \nabla p + \mu_p p \nabla \varphi) + F(n, p) = 0; \tag{2}$$

$$D_n \frac{\partial n}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = j_n^\nu(x), \quad -D_p \frac{\partial p}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = j_p^\nu(x); \tag{3}$$

$$n|_{t=0} = n_0(x), \quad p|_{t=0} = p_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

где ν — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, а потенциал $\varphi(x, t)$ определяется как решение задачи

$$\Delta\varphi = -(N(x) - n(x, t) + p(x, t)), \quad x \in \Omega, \ t \geqslant 0; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_\Omega \varphi(x, t)\, dx = 0. \tag{6}$$

Здесь $j_n^\nu(x)$, $j_p^\nu(x)$, $n_0(x)$, $p_0(x)$, $N(x)$ — заданные функции, величина $F(n, p)$ имеет вид

$$F(n, p) = npf_1(n, p) - f_2(n, p), \tag{7}$$

где $f_1(n, p)$, $f_2(n, p)$ — неотрицательные функции класса C^1, D_n, D_p, μ_n, μ_p — положительные константы.

Отметим, что эта система уравнений возникает при расчетах полупроводниковых приборов в рамках диффузионно-дрейфовой модели [1]. При этом структура (7) функции $F(n, p)$ позволяет, например, учесть объемную рекомбинацию носителей заряда и рекомбинацию Шокли-Рида-Холла. Для этого следует [1, с. 168] f_1 и f_2 выбрать так, чтобы при $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$

$$f_1(n, p) = R + (an + bp + c)^{-1}, \quad f_2(n, p) = d \cdot f_1(n, p), \tag{8}$$

где R, a, b, c, d — положительные константы. Заметим также, что по смыслу задачи функции $n(x, t)$ и $p(x, t)$ должны быть неотрицательными.

В данном сообщении приведен ряд результатов, относящихся к проблеме существования и единственности решений задачи (1) — (6) и исследован вопрос о существовании и свойствах глобального (максимального) аттрактора рассматриваемой системы.

2. Легко обнаружить, что необходимыми условиями разрешимости задачи (1) — (6) являются соотношения:

$$\int_{\partial\Omega} (j_n^\nu(x) + j_p^\nu(x))\, d\sigma = 0, \quad \langle n_0 - p_0 \rangle = \langle N \rangle, \tag{9}$$

где $\langle g \rangle = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g(x)\, dx$. В дальнейшем эти условия предполагаются выполнеными. Будем также считать, что $N(x) \in H^2(\Omega)$ (здесь и далее $H^s(Q)$ — соболевское пространство порядка s на многообразии Q), а функции $f_1(n, p)$ и $f_2(n, p)$ являются непрерывно дифференцируемыми и обладают свойствами:

$$0 < f_0 \leqslant f_1(n, p) \leqslant C, \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial f_1}{\partial p}\right| \leqslant \frac{C}{1 + |n| + |p|};$$

$$0 \leqslant f_2(n, p) \leqslant C, \quad \left|\frac{\partial f_2}{\partial n}\right| + \left|\frac{\partial f_2}{\partial p}\right| \leqslant C. \tag{10}$$

Отметим, что эти условия охватывают случай (8). Кроме того, при $d = \dim \Omega \leqslant 2$ они могут быть значительно ослаблены. Введем классы функций

$$V_T = L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)),$$

$$W_T = \{w : w(t) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \frac{\partial w}{\partial t} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), w(T) = 0\},$$

где $L^2(0, T; X)$ — пространство квадратично интегрируемых вектор-функций со значениями в X, аналогично определяется и $L^\infty(0, T; X)$.

По аналогии с [2, с. 198] слабым решением задачи (1)—(6) на интервале $[0, T]$ будем называть пару функций $(n(x, t); p(x, t))$, каждая из которых лежит в V_T и для любых $u, v \in W_T$ удовлетворяет соотношениям

$$\int_0^T \left\{-\left(n, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + (D_n \nabla n - \mu_n n \nabla\varphi, \nabla u) + (F, u)\right\} dt =$$

$$= (n_0, u(0)) + \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} j_n^\nu u\, d\sigma;$$

$$\int_0^T \left\{-\left(p, \frac{\partial v}{\partial t}\right) + (D_p \nabla p + \mu_p p \nabla\varphi, \nabla v) + (F, v)\right\} dt =$$

$$= (p_0, v(0)) - \int_0^T dt \int_{\partial\Omega} j_p^\nu v\, d\sigma,$$

где $\varphi(x, t)$ определяется по n и p как решение задачи (5), (6), $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть $n_0(x)$, $p_0(x)$ — неотрицательные функции из $L^2(\Omega)$, $j_n^\nu(x)$, $j_p^\nu(x) \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, причем $j_n^\nu(x) \geqslant 0$, $j_p^\nu(x) \leqslant 0$ и выпол-*

нены условия (7), (9) (10). Тогда задача (1)—(6) на любом интервале $[0, T]$ *имеет слабое решение* $(n(t); p(t))$. *Это решение определяется однозначно. Каждая из функций* $n(x, t)$ *и* $p(x, t)$ *лежит в* $C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^3(\Omega \times (0, T))$ *и является неотрицательной, причем* $\langle n(t) - p(t)\rangle = \langle N\rangle$. *Если же при этом* $n_0(x), p_0(x) \in H^2(\Omega)$, $j_n^\nu(x), j_p^\nu(x) \in H^{1/2}$ *и на* $\partial\Omega$ *выполнены условия*

$$D_n \frac{\partial n_0}{\partial \nu} = j_n^\nu(x); \quad -D_p \frac{\partial p_0}{\partial \nu} = j_p^\nu(x),$$

то слабое решение оказывается сильным, т. е. обладает свойствами:

$$n(t), \; p(t) \in C(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H^2(\Omega));$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial t} \in C(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega)).$$

Для каждого сильного решения имеет место равенство (ниже $\|\cdot\|$ — *норма в* $L^2(\Omega)$*):*

$$\mu_n^{-1}\|n(t)\|^2 + \mu_p^{-1}\|p(t)\|^2 + 2\int_0^t \left\{\frac{D_n}{\mu_n}\|\nabla n(t)\|^2 + \frac{D_p}{\mu_p}\|\nabla p(t)\|^2 + \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Omega [(n-p)^2 - N\cdot(n-p)](n+p)\,dx + \left(F(n, p), \frac{n}{\mu_n} + \frac{p}{\mu_p}\right) -$$

$$\left. - \int_{\partial\Omega}\left(\frac{n}{\mu_n} j_n^\nu - \frac{p}{\mu_p} j_p^\nu\right) d\sigma\right\} dt = \mu_n^{-1}\|n_0\|^2 + \mu_p^{-1}\|p_0\|^2. \qquad (11)$$

Опишем схему доказательства. Структура функции $F(n, p)$ и нелинейных слагаемых в (1) и (2), порождаемых потенциалом $\varphi(x, t)$, не позволяет непосредственно к задаче (1) — (6) применить метод компактности. Поэтому сначала вместо (1) — (6) рассматривается регуляризированная задача, отличающаяся от исходной тем, что в левые части равенств (1), (2) добавлены слагаемые εn^3 и εp^3 соответственно, где ε — малый положительный параметр. Уравнение (5) при этом заменяется уравнением

$$\Delta\varphi = -(N(x) - n + p - \langle N - n + p\rangle).$$

Используя метод Галеркина, получим необходимые априорные оценки и докажем существование слабых и сильных решений регуляризированной задачи. При этом для сильных решений справедлив соответствующий аналог уравнения баланса (11). Он отличается от (11) наличием в левой части дополнительного слагаемого

$$\int_0^t \left\{\varepsilon\int_\Omega\left(\frac{1}{\mu_n}n^4 + \frac{1}{\mu_p}p^4\right)dx + \frac{1}{2}\langle N - n + p\rangle\int_\Omega (n^2 - p^2)\,dx\right\} dt$$

Каждую из функций $n_\varepsilon(t)$ и $p_\varepsilon(t)$, дающих решение регуляризированной задачи, можно рассматривать как решение линейного уравнения вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} - D\Delta w + \mu(\nabla\varphi, \nabla w) + V(x, t)\,w = G(x, t);$$

$$D\frac{\partial w}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = j(x), \quad w|_{t=0} = w_0(x),$$

где $G(x, t) \geqslant 0$, $j(x) \geqslant 0$, $w_0(x) \geqslant 0$. Поэтому с помощью подходящих регуляризаций коэффициентов этой задачи можно доказать неотрицательность решений $n_\varepsilon(t)$ и $p_\varepsilon(t)$ (см. принцип максимума в формулировке, приведенной в [2, с. 25]). А использование уравнения баланса и структуры функции $F(n, p)$ позволяет получить для неотрицательных решений регуляризированной задачи оценку вида

$$\| n_\varepsilon(t) \|^2 + \| p_\varepsilon(t) \|^2 + a_1 \int_0^t \Big\{ \| n_\varepsilon(t) \|_1^2 + \| p_\varepsilon(t) \|_1^2 +$$

$$+ \int_\Omega (n_\varepsilon^3 + p_\varepsilon^3)\, dx \Big\}\, dt \leqslant a_2 + a_3 (\| n_\varepsilon(0) \|^2 + \| p_\varepsilon(0) \|^2), \qquad (12)$$

где положительные константы a_1, a_2 a_3 не зависят от ε, $t \in [0, T]$, $\| \cdot \|_1$ — норма в пространстве $H^1(\Omega)$. Эта оценка дает возможность выполнить предельный переход $\varepsilon \to 0$ и доказать существование слабых решений задачи (1)—(6). Теорема единственности доказывается с помощью техники, применяемой для линейных задач (см., например, [2, с. 174]).

Что касается теоремы существования сильных решений, то для ее доказательства необходимо получить дополнительные оценки решений регуляризированной задачи, независящие от ε. Сделать это можно, рассматривая систему уравнений, получающуюся формальным дифференцированием по t регуляризированной задачи, и используя оценку (12).

Отметим, что для сильных решений справедливы соотношения (1) — (6), если равенства (1) и (2) понимать как равенства элементов в пространстве $L^2(\Omega \times (0, T))$. Кроме того, исходя из (11), легко проверить, что любое слабое неотрицательное решение задачи (1) — (6) может быть аппроксимировано последовательностью сильных (доказательство приведенных ниже утверждений это обстоятельство существенно использует).

3. Дальнейшие рассмотрения посвящены исследованию асимптотического поведения решений задачи (1) — (6) при $t \to \infty$. Как известно (см., например, [3—7] и др.), при обсуждении подобных проблем важную роль играют аттракторы, изучение которых позволяет дать ответ на вопрос о возможных предельных режимах рассматриваемой системы.

Пусть

$$H_0^+ = \{(n(x); p(x)) : n, p \in L^2(\Omega),\ n(x),\ p(x) \geqslant 0,\ \langle n - p \rangle = \langle N \rangle\}.$$

Тогда теорема 1 позволяет построить сильно непрерывную полугруппу S_t, действующую в H_0^+ по формуле

$$S_t y_0 = y(t) = (n(t);\ p(t)),\ y_0 = (n_0, p_0),$$

где $(n(t); p(t))$ — решение задачи (1)—(6) с начальными условиями $(n_0; p_0) \in H_0^+$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Полугруппа S_t обладает в H_0^+ компактным глобальным аттрактором M, т. е. существует компактное множество*

$M \subset H_0^+$ такое, что $S_t M = M$ и для любого ограниченного множества B из H_0^+

$$\lim_{t\to\infty} \sup \{\mathrm{dist}_{H_0}(S_t y,\ M) : y \in B\} = 0,$$

где $\mathrm{dist}_{H_0}(y, M)$ — расстояние в пространстве $H_0 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ от элемента y до множества M. Аттрактор M имеет конечную хаусдорфову размерность (определение см., например, в [3, с. 270]) и является ограниченным замкнутым подмножеством пространства $H_1 = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Если же при этом $j_n^\nu(x),\ j_p^\nu(x) \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, то аттактор M лежит в ограниченном множестве многообразия

$$H_2^+ = H_0^+ \cap \left\{(n;\ p) \in H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) : D_n \frac{\partial n}{\partial \nu} = j_n^\nu;\ \ -D_p \frac{\partial p}{\partial \nu} = j_p^\nu \Big|_{\partial\Omega}\right\}.$$

Доказательство существования аттрактора опирается на результаты общего характера (см., например, [3—5]) и то обстоятельство, что полугруппа S_t обладает компактным поглощающим множеством. Существование этого множества вытекает из лемм, приведенных ниже.

Лемма 1. *Полугруппа S_t является диссипативной в H_0^+, т. е. существует $R > 0$ такое, что для любого ограниченного множества B в H_0^+ $\|S_t y\|_{H_0} \leqslant R$, $y \in B$, $t \geqslant t_0(B)$.*

Это утверждение легко получить, используя свойства (7), (10) функции $F(n, p)$ и соотношение (11).

Лемма 2. *Для любых начальных условий $y_0 = (n_0;\ p_0) \in H_0^+$ справедлива оценка*

$$\|S_t y_0\|_{H_1} \leqslant C_T t^{-1/2},\ \ t \in (0, T]. \tag{13}$$

Эта лемма отражает хорошо известный для параболических систем факт сглаживания с течением времени начальных условий. Формально ее доказательство получается, если (1), (2) умножить в $L^2(\Omega)$ соответственно на $t(1 - D_n\Delta_N)^{-s/2}\dfrac{\partial n}{\partial t}$ и $t(1 - D_p\Delta_N)^{-s/2}\dfrac{\partial p}{\partial t}$, где Δ_N — оператор Лапласа с условиями Неймана на $\partial\Omega$. Сначала следует считать, что $s > 0$. Затем, полагая $s = 0$ и используя оценки, полученные при $s > 0$, удается доказать, что

$$\int_0^t \tau\left(\left\|\frac{\partial n}{\partial \tau}\right\|^2 + \left\|\frac{\partial p}{\partial \tau}\right\|^2\right) d\tau + t\left(\|n(t)\|_1^2 + \|p(t)\|_1^2\right) \leqslant C_T, \tag{14}$$

где $t \in (0, T]$, а константа C_T зависит лишь от $\|n_0\|$, $\|p_0\|$, $\|j_n^\nu\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$, $\|j_p^\nu\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$. Отсюда вытекает (13). Оценка (14) позволяет также при условии, что $j_n^\nu,\ j_p^\nu \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, доказать принадлежность $M \subset H_2^+$.

При доказательстве конечномерности аттрактора рассматривается уравнение в вариациях, отвечающее задаче (1)—(6), и устанавливается равномерная квазидифференцируемость (определение см. в [3, с. 270]) полугруппы S_t на M. Свойства квазидифференциала полугруппы S_t позволяют воспользоваться теоремами о размерности инвариантных множеств квазидифференцируемых отображений [5, с. 282]. Здесь можно также использовать метод, применявшийся в [6—8].

В заключение отметим, что аналоги представленных выше утверждений могут быть получены и для других граничных условий. Например, можно считать, что $\partial\Omega$ имеют место соотношения

$$D_n \frac{\partial n}{\partial \nu} + k_1 (n - \bar{n}) = 0, \ D_p \frac{\partial p}{\partial \nu} + k_2 (p - \bar{p}) = 0, \ \varphi = 0,$$

где $\bar{n}, \bar{p}$ — заданные на $\partial\Omega$ неотрицательные функции, $k_1, k_2 > 0$. Используемая выше техника позволяет также рассмотреть некоторые варианты нелинейных граничных условий.

Список литературы: 1. *Моделирование* полупроводниковых приборов и технологических процессов. Последние достижения / Под ред. Д. Миллера. М., 1989. 280 с. 2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., 1967. 736 с. 3. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений. М., 1989. 294 с. 4. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье — Стокса и других уравнений с частными производными // Усп. мат. наук. 1987. **42**, № 6. С. 25—60. 5. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New-York, 1989. 500 p. 6. *Чуешов И. Д.* Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек. // Мат. сб. 1987. **133**, № 4. С. 419—428. 7. *Чуешов И. Д.* Сильные решения и аттрактор системы уравнений Кармана // Мат. сб. 1990. **181**, № 1. С. 25—36. 8. *Ладыженская О. А.* О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье — Стокса и других диссипативных систем. // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1982. **115**. С. 137—155.

Поступила в редколлегию 15.10.90