

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

Факультет (навчально-науковий інститут) радіофізики,  
біомедичної електроніки та комп'ютерних систем

Кафедра прикладної електродинаміки

До захисту допущено кафедрою  
прикладної електродинаміки  
протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_  
в.о. завідувача кафедри

\_\_\_\_\_ Вадим ПЛАХТІЙ  
(підпис) (ім'я, прізвище)  
« \_\_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 202\_р.

Кваліфікаційна робота  
здобувача \_\_\_\_\_ другого (магістерського) \_\_\_\_\_ рівня вищої освіти  
(першого (бакалаврського) / другого (магістерського))

ВИПРОМІНЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОЇ ХВИЛІ,  
ЗБУДЖЕНОЇ ДЕЛЬТА-СТРУМОМ

(назва роботи)

Спеціальність (спеціалізація) \_\_\_\_\_ 105 Прикладна фізика та наноматеріали  
(код та найменування спеціальності; спеціалізації спеціальності - за наявності)

Освітня програма \_\_\_\_\_ Радіофізика і електроніка  
(назва освітньої програми)

Виконавець \_\_\_\_\_ Максим Єфімчик  
(підпис) (ім'я, прізвище)

Науковий керівник \_\_\_\_\_ Сергій Бердник  
(підпис) (ім'я, прізвище)

Науковий консультант \_\_\_\_\_ Дмитро Гавриленко  
(підпис) (ім'я, прізвище)

## РЕФЕРАТ

Кваліфікаційна робота магістра містить 8 рис., 48 стор., 24 бібліографічних посилання.

Випромінювання та поширення нестационарної електромагнітної Н-хвилі, збудженої дельта-подібним поверхневим струмом на круглій апертурі у вільному просторі, досліджуються з використанням еволюційного підходу до електродинаміки, адаптованого для циліндричних геометрій. Задача в часовій області зводиться до неоднорідного узагальненого рівняння телеграфного типу, причинний розв'язок якого отримано методом Рімана–Гріна. Повні електромагнітні поля виражені через модові розклади по поперечному перерізу, де поздовжньо-часова еволюція міститься в амплітудах мод, а радіально-азимутальна залежність представлена базисними функціями бесселевого типу. Для цього класу джерел отримані вирази для полів зводяться до  $\chi$ -зважених спектральних інтегралів, що містять добутки функцій Бесселя. Примітно, що для випадку на осі отримано компактні замкнені вирази, що дають чисто поперечні поля, еволюція яких визначається причинним дельта-членом. Для числової обробки дельта-функції використана гаусова регуляризація. Для загальної позаосьової конфігурації аналіз зосереджено на залежностях від запізнювального часу та поздовжньої координати. Поперечні компоненти оцінюються при нульовому азимуті, тоді як поздовжня магнітна компонента розглядається при ортогональному азимуті. Розглянуто два характерних радіальних положення, що відповідають точкам всередині та зовні області апертури. Результати виявляють виражену просторово-часову локалізацію випромінюваного імпульсу. Наведено коротке порівняння зі збудженнями типу Хевісайда та похідної від дельта-функції.

ДЕЛЬТА-ПОДІБНЕ ЗБУДЖЕННЯ, НЕСТАЦІОНАРНІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ, ПОШИРЕННЯ У ВІЛЬНОМУ ПРОСТОРИ, ЕВОЛЮЦІЙНИЙ ПІДХІД В ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ, МОДОВІ РОЗКЛАДИ, ВЕКТОР ПОЙНТІНГА

## ABSTRACT

Qualification work of the master contains 8 fig., 48 p., 24 bibliographic references.

This work investigates the radiation and subsequent propagation of a transient H-polarized electromagnetic wave. The wave is generated by an instantaneous, delta-like current distribution over a circular aperture in free space. To solve this problem, we apply the Evolutionary Approach to Electromagnetics, specifically tailored for systems with cylindrical geometry. Within the framework of the chosen approach, the original time-domain formulation is converted into an inhomogeneous equation of the generalized telegraph type. A causal solution to this equation is then derived using the Riemann-Green (or Riemann function) method. The complete electromagnetic field components are represented via a modal expansion across the transverse plane. In this representation, the evolution along the longitudinal axis and in time is encoded within the modal amplitudes. Simultaneously, the field's dependence on radial and azimuthal coordinates is captured by basis functions constructed from Bessel functions. For this class of sources, the resulting field expressions reduce to  $\chi$ -weighted spectral integrals involving products of Bessel functions. Notably, compact closed-form expressions are obtained for the on-axis case, yielding purely transverse fields whose evolution is governed by a causal delta-term. Gaussian regularization is employed for the numerical handling of the delta-function. To facilitate numerical computation, the singular delta-function in the source model is approximated using a Gaussian regularization technique. The transverse components are evaluated at zero azimuth, whereas the longitudinal magnetic component is examined at an orthogonal azimuth. Two representative radial positions, corresponding to points inside and outside the aperture region, are considered. It should be emphasized that the results reveal pronounced spatiotemporal localization of the radiated impulse. A brief comparison with Heaviside-type and derivative-of-delta excitations is also included.

DELTA-LIKE EXCITATION, TRANSIENT ELECTROMAGNETIC WAVES, FREE-SPACE PROPAGATION, EVOLUTIONARY APPROACH IN ELECTROMAGNETICS, MODAL EXPANSIONS, POYNTING VECTOR

## ЗМІСТ

ЗМІСТ .....	4
ВСТУП .....	5
РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ФУНДАМЕНТ РОБОТИ.....	8
РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	14
РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ .....	17
3.1. Знаходження загального розв'язку .....	17
3.2. Обчислення еволюційного коефіцієнта поперечного магнітного поля.....	19
3.3. Обчислення еволюційного коефіцієнта поперечного електричного поля.....	20
3.4. Знаходження повздовжнього магнітного поля.....	21
3.5. Знаходження поперечного магнітного та електричного полів .....	22
3.6. Додаткові спостереження .....	27
РОЗДІЛ 4. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ .....	29
4.1. Аналіз поля та вектора Пойнтінга на осі випромінювання ( $\rho = 0$ ) ...	29
4.2. Аналіз поля та вектора Пойнтінга в загальному випадку ( $\rho > 0$ ).....	33
ВИСНОВОК.....	37
ЛІТЕРАТУРА .....	38
ДОДАТОК. ПРОГРАМИ ЧИСЛОВИХ МОДЕЛЕЙ.....	42

## ВСТУП

Одним із важливих напрямів сучасної нестационарної електродинаміки є дослідження локалізованих електромагнітних хвиль. Такі хвилі являють собою розв'язки рівнянь Максвелла, які характеризуються просторово-часовою концентрацією енергії і здатні поширюватися на великі відстані з мінімальною дисперсією та дифракцією. Початок системних досліджень таких розв'язків зазвичай пов'язують із роботою Брітінгема [1], який запропонував концепцію фокусованих хвильових мод. Ці моди є пакетоподібними розв'язками рівнянь Максвелла у вільному просторі, що поширюються вздовж однієї осі практично без розширення хвильового фронту. Їх ключова властивість полягає в можливості перенесення скінченної енергії. Однак, подальший аналіз показав, що вихідне положення Брітінгема має певні математичні та фізичні обмеження: для TE-моди дивергенція електричного поля не є нульовою, а енергія хвилі виявляється нескінченною у деяких областях простору [2]. Попри це, результати Брітінгема стимулювали появу нових підходів. Зокрема, Ву запропонував концепцію електромагнітного снаряду [3], який є нестационарним імпульсом зі скінченною енергією, що зменшується повільніше за обернено квадратичний закон. Пізніше, за допомогою імпульсно-радіаційної антени з параболічним рефлектором, було отримано експериментальне підтвердження такого типу випромінювання [4].

Це далеко не єдиний приклад локалізованих електромагнітних хвиль. До цього класу належать зокрема X-хвилі, сублумінальні локалізовані хвилі, заморожені хвилі, сплеш-хвилі, електромагнітні кулі тощо. На даний момент різні типи таких хвиль добре вивчені і більшість результатів станом на 2008 рік було систематизовано в монографії [5], однак їх дослідження продовжується й дотепер.

Добре відомо, що в класичній електродинаміці низка задач випромінювання зводиться до побудови фундаментальних розв'язків

неоднорідних хвильових рівнянь, у правих частинах яких містяться дельта-подібні джерела. Такий розв'язок має назву функції Гріна і, знаючи його, згідно з принципом суперпозиції можна знайти розв'язок для випадку довільного збудження. У гармонічному формулюванні фігурують переважно просторові дельта-функції, тоді як у часовому просторі з'являється і часова дельта-функція, що відповідає миттєвому імпульсному збудженню. У роботі [6], присвяченій поширенню хвиль у часозмінних (зокрема плазмових) середовищах, детально досліджуються два типи точкових імпульсних джерел. Перший з них задає миттєвий імпульс із фіксованою амплітудою (часова дельта-функція). Другий описує різку зміну швидкості збудження, що особливо цікаво, через часову похідну від часової дельта-функції. Такий тип джерела природно пов'язаний із часовою похідною функції Гріна. Ситуація, коли похідна береться не за часом, а за координатою, виникає в дипольних моделях, що розглядається в класичних підручниках з електродинаміки [7]. Дослідження подібних моделей продовжується й нині, зокрема в роботі [8], де аналізується сингулярна поведінка поля гармонічного осцилюючого диполя. Окремо варто згадати й часові постановки, у яких отримано як наближений [9], так і точний [10] розв'язок для нестационарних полів диполя Герца у вільному просторі.

Варто зазначити, що моделі, в яких одночасно присутні як часова, так і координатна похідні від дельта-функцій, в одному й тому самому рівнянні, у літературі не зустрічаються. Гіпотетично вони могли б відповідати ідеалізованому диполю, збудженому імпульсом з різким стрибком у часі, проте ризик таких постановок полягає в породженні надмірних сингулярностей і фізично нетрагованих полів і енергій. Натомість природне одночасне виникнення похідних можливе в рамках однієї задачі, але в різних рівняннях: для густини струму може фігурувати часова похідна від часової дельта-функції, а для густини заряду це буде координатна похідна (градієнт) просторової дельта-функції, що узгоджується з рівнянням неперервності.

Такий підхід можна знайти, зокрема, у [11] для диполя в дисперсійному середовищі.

Цікавим і перспективним напрямком є еволюційний підхід до електродинаміки, який нині активно розвивається для аналізу імпульсного випромінювання антен. Випадок збудження Хевісайдівським імпульсом досліджено досить ґрунтовно, зокрема було відтворено ефект електромагнітного снаряду [12]. Аналіз енергетичних характеристик поля при стрибкоподібному збудженні представлено в роботах [13, 21]. Цікавий і ґрунтовний енергетичний аналіз проведено і для збудження прямокутним імпульсом [22, 23]. Окрему увагу приділено й більш складним формам імпульсів, для яких часткові аналітичні та числові розв'язки наведено у [12, 14]. Додаткові новітні результати, отримані за допомогою цього методу, можна знайти в роботах як вітчизняних [25, 26], так і закордонних [27, 28] радіофізиків. Разом із тим, випадок миттєвого збудження (дельта-імпульсом) в рамках еволюційного підходу досі не був досліджений належним чином, хоча він становить значний академічний і педагогічний інтерес. Саме цій проблемі й присвячена дана робота.

На основі матеріалів дипломної роботи було підготовлено та подано дві конференційні публікації. Перша з них [16] вже представлена на конференції «Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп'ютерних систем» (MEICS-2025, 26–28 листопада, м. Дніпро). Збірник тез наразі перебуває в процесі підготовки. Другу роботу [17] подано на міжнародну конференцію «2026 IEEE 18<sup>th</sup> International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering» (TCSET, 17–21 February, Lviv), яка індексується у базі даних Scopus. Як видно з дат, її представлення відбудеться вже після захисту кваліфікаційної роботи. Крім того, на основі отриманих результатів планується підготовка повноцінної статті.

## РОЗДІЛ 1. МАТЕМАТИЧНИЙ ФУНДАМЕНТ РОБОТИ

Розглядається система циліндричних координат  $(\rho, \varphi, z)$ , де вісь  $OZ$  є напрямком поширення. Нехай джерело випромінювання в загальному випадку задається густиною електричного струму  $\vec{j}_0$ , яку можна представити у вигляді:

$$\vec{j}_0(\rho, \varphi, z, t) = \vec{x}_0 A(\rho, \varphi) Z(z) T(t), \quad (1)$$

Тут  $A(\rho, \varphi)$  описує поперечний профіль струму,  $Z(z)$  – його розподіл уздовж осі поширення,  $T(t)$  – часову залежність, а  $\vec{j}_0$  – постійний вектор, що задає напрямок струму в просторі. Вважається, що електромагнітна хвиля поширюється у вільному просторі.

Об'єктом дослідження є хвиля Н-типу. Це така хвиля, для якої поздовжня компонента електричного поля дорівнює нулю ( $E_z = 0$ ), а поздовжня компонента магнітного поля  $H_z$  є ненульовою.

В рамках еволюційного підходу повне поле представляється у вигляді інтегрального розкладу за повним ортонормованим базисом власних функцій поперечного перерізу, які будуть наведені у Розділі 3.

Запишемо систему еволюційних рівнянь для Н-хвилі:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2 \right\} h_m^h(z, t, \chi) = \sqrt{\mu_0} j_m(z, t, \chi); \\ I_m^h(z, t, \chi) = \frac{\partial}{\partial z} h_m^h(z, t, \chi); \\ V_m^h(z, t, \chi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} h_m^h(z, t, \chi). \end{array} \right. \quad (2)$$

Пояснення позначень та фізичний зміст:

- $\chi$  – спектральний параметр, за яким ведеться інтегрування при визначенні полів.
- $m$  – цілий азимутальний індекс, за яким проводиться сумування.
- $h_m^h(z, t, \chi)$  – еволюційний коефіцієнт, що визначає амплітуду та фазу поздовжньої магнітної компоненти для моди

•  $I_m^h(z, t, \chi)$  та  $V_m^h(z, t, \chi)$  – еволюційні коефіцієнти, через які виражаються відповідно поперечні компоненти магнітного та електричного полів.

Верхній індекс  $h$  позначає тип хвилі, а самі вони залежать від поздовжньої координати  $z$  і часу  $t$ . Їх потрібно відшукати, так як саме вони задають поведінку електромагнітного поля.

Перше рівняння у виразі (2) відоме з математичної фізики як рівняння Клейна-Гордона. Воно неоднорідне, оскільки містить у правій частині модовий коефіцієнт струму  $j_m(z, t, \chi)$ , який визначається як:

$$j_m(z, t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \vec{x}_0(\rho, \varphi, z, t) [\nabla \psi_m^*(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0], \quad (3)$$

де  $\rho, \varphi$  – радіус та кут. У виразі (3)  $\psi_m$  – це базисна функція, яка є відомою і виражається як розв'язок однорідного рівняння Гельмгольца в циліндричних координатах:

$$\psi_m(\rho, \varphi, \chi) = \frac{J_m(\chi\rho)}{\sqrt{\chi}} e^{im\varphi}, \quad (4)$$

де  $J_m$  – функція Бесселя першого роду  $m$ -го порядку. Оператор набла в поперечних циліндричних (полярних) координатах:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} \vec{\rho}_0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{\varphi}_0. \quad (5)$$

Наведемо готовий вираз для векторного добутку, що містить градієнт від комплексно спряженої базисної функції на орт поздовжньої осі:

$$[\nabla \psi_m^* \times \vec{z}_0] = -\frac{e^{-im\varphi} \sqrt{\chi}}{2} i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0. \quad (6)$$

Підставимо усі ці вирази до модової густини струму:

$$j_m(z, t, \chi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho A(\rho, \varphi) Z(z) T(t) \vec{j}_0 \left( -\frac{e^{-im\varphi} \sqrt{\chi}}{2} \right) i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0. \quad (7)$$

Бачимо, що такий повторний інтеграл в загальному випадку взяти не вдається через наявність довільної функції  $A(\rho, \varphi)$ . Припустимо, що ми маємо справу з джерелом у вигляді круглого диску (в циліндричних координатах він задається як функція Хевісайда виду  $H(R - \rho)$ ), а сам струм спрямуємо вздовж осі  $\vec{x}_0$ . Тоді, для зручності випишемо початковий струм на апертурі:

$$\vec{j}_0(\rho, \varphi, z, t) = \vec{x}_0 A_0 H(R - \rho) Z(z) T(t), \quad (8)$$

де  $A_0$  – деякий амплітудний множник.

Підставимо його до досліджуваної формули, винісши попередньо функції поздовжньої координати і часу, корінь квадратний від спектрального параметру та двійку, що під ним:

$$j_m(z, t, \chi) = -\vec{x}_0 A_0 \frac{\sqrt{\chi}}{4\pi} Z(z) T(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) e^{-im\varphi} \{i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho))\vec{\rho}_0 + (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho))\vec{\varphi}_0\}. \quad (9)$$

Також не забудемо перевести декартовий орт до циліндричних:

$$\vec{x}_0 = \vec{\rho}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi. \quad (10)$$

Це буде

$$j_m(z, t, \chi) = -A_0 (\vec{\rho}_0 \cos \varphi - \vec{\varphi}_0 \sin \varphi) \frac{\sqrt{\chi}}{4\pi} Z(z) T(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) e^{-im\varphi} \{i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho))\vec{\rho}_0 + (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho))\vec{\varphi}_0\}. \quad (11)$$

Здійснимо певні алгебраїчні перетворення. Дужку, яка містить полярні орти та тригонометричні функції перемножимо з іншою дужкою, яка складається з функцій Бесселя і тих же ортів. Тоді, добутки виду  $\vec{\rho}_0 \cdot \vec{\varphi}_0$  і навпаки дають нуль в силу перпендикулярності. А добутки однакових одиничних векторів дають одиниці. Тоді, замість  $\vec{\rho}_0$  ми напишемо косинус, а замість  $\vec{\varphi}_0$  – синус зі знаком мінус:

$$j_m(z, t, \chi) = -A_0 \frac{\sqrt{\chi}}{4\pi} Z(z) T(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) e^{-im\varphi} \{i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)) \cos \varphi - (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \sin \varphi\}. \quad (12)$$

Розкриємо дужки з функціями Бесселя і перегрупуємо доданки відносно функцій Бесселя однакових порядків:

$$j_m(z, t, \chi) = -A_0 \frac{\sqrt{\chi}}{4\pi} Z(z) T(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) e^{-im\varphi} \{(i \cos \varphi - \sin \varphi) J_{m-1}(\chi\rho) + (i \cos \varphi + \sin \varphi) J_{m+1}(\chi\rho)\}. \quad (13)$$

Винесемо уявну одиницю за дужки, сама уявна одиниця вийде за увесь вираз, а вираз  $\frac{1}{i}$  можна переписати як  $-i$ :

$$j_m(z, t, \chi) = -iA_0 \frac{\sqrt{\chi}}{4\pi} Z(z) T(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) e^{-im\varphi} \{(\cos \varphi + i \sin \varphi) J_{m-1}(\chi\rho) + (\cos \varphi - i \sin \varphi) J_{m+1}(\chi\rho)\}. \quad (14)$$

Виходить, що вирази в дужках з тригонометричними функціями – це просто формули Ейлера, і їх можна переписати через комплексні експоненти:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}; \quad \cos \varphi - i \sin \varphi = e^{-i\varphi}. \quad (15)$$

Тобто

$$j_m(z, t, \chi) = -iA_0 \frac{\sqrt{\chi}}{4\pi} Z(z) T(t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) \{e^{-i(m-1)\varphi} J_{m-1}(\chi\rho) + e^{-i(m+1)\varphi} J_{m+1}(\chi\rho)\}. \quad (16)$$

Аргумент експоненти по модовому номеру став співпадати з порядком функції Бесселя, занесемо інтеграли до дужок:

$$j_m(z, t, \chi) = -iA_0 \frac{\sqrt{\chi}}{4\pi} Z(z) T(t) \left\{ \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i(m-1)\varphi} \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) J_{m-1}(\chi\rho) + \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i(m+1)\varphi} \int_0^{\infty} \rho d\rho H(R - \rho) J_{m+1}(\chi\rho) \right\}. \quad (17)$$

На даному етапі, можна проводити інтегрування по радіусу та куту. По радіусу, завдяки функції Хевісайда, верхня межа інтегралу обрізається і дає  $R$ . Інтеграл по куту – це одне із визначень символу Кронекера:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)\varphi} d\varphi = \delta_{m,n}} \quad (18)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m-1)\varphi} d\varphi = \delta_{m,1}; \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i(m+1)\varphi} d\varphi = \delta_{m,-1}, \quad (19)$$

Сам символ Кронекера характеризується тим, що якщо його нижні індекси рівні, він дорівнює одиниці, в противному випадку – нуль

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n; \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \quad (20)$$

Модовий коефіцієнт густини струму спрощується:

$$j_m(z, t, \chi) = -iA_0 \frac{\sqrt{\chi}}{2} Z(z)T(t) \left\{ \delta_{m,1} \int_0^R \rho d\rho J_{m-1}(\chi\rho) + \right. \\ \left. + \delta_{m,-1} \int_0^R \rho d\rho J_{m+1}(\chi\rho) \right\}. \quad (21)$$

Перший доданок у дужках має ненульове значення тоді, коли  $m = 1$ , а другий, коли  $m = -1$ . Тоді, функції Бесселя довільного порядку зводяться до функції Бесселя нульового порядку. При цьому, самі символи Кронекера ще нікуди не зникають, тому що вони визначатимуть еволюційні коефіцієнти, і як наслідок компоненти електромагнітного поля. Самі інтеграли зрівнюються, і їх можна винести за дужки:

$$j_m(z, t, \chi) = -iA_0 \frac{\sqrt{\chi}}{2} Z(z)T(t) (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \int_0^R \rho d\rho J_0(\chi\rho). \quad (22)$$

Залишилося порахувати інтеграл від функцій Бесселя. Це табличні інтегралі, що містять степеневу функцію і дану циліндричну функцію

$$\boxed{\int x J_0(x) dx = x J_1(x) + C} \quad (23)$$

Перепишемо змінну інтегрування зручним чином

$$j_m(z, t, \chi) = -iA_0 \frac{\sqrt{\chi}}{2\chi^2} Z(z)T(t)(\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \int_0^{\chi R} \chi \rho d\chi \rho J_0(\chi \rho). \quad (24)$$

Інтегруємо і застосовуємо контекст формули Ньютона-Лейбніца через те, що інтеграл визначений. В нулі маємо нуль, а для  $\chi R$  відповідну змінну записуємо замість  $\chi \rho$ :

$$j_m(z, t, \chi) = -iA_0 \frac{\sqrt{\chi}}{2\chi^2} Z(z)T(t)(\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \chi R J_1(\chi R). \quad (25)$$

Запишемо модовий коефіцієнт струму в зручній формі:

$$j_m(z, t, \chi) = -i \frac{A_0 R}{2} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{J_1(\chi R)}{\sqrt{\chi}} Z(z)T(t). \quad (26)$$

і перейдемо до постановки задачі.

## РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Отримано модовий коефіцієнт (26) для конкретного виду функції поперечного перерізу  $A(\rho, \varphi)$ . У нашому випадку, вона описує струмовий диск радіуса  $R$ . Серед альтернативних поперечних розподілів, які потенційно могли б бути використані, відзначимо гаусівський профіль

$$e^{-(\rho/R)^2},$$

що моделює локалізоване збудження без жорсткої границі, а також першу пелюстку функції Бесселя нульового порядку

$$J_0(\alpha_{01} \rho/R).$$

Це приклад так званої Х-хвилі (або пучка Бесселя). Обидві моделі можна знайти, наприклад, в дисертаційному дослідженні Джина Юна [19] в контексті задач дифракції ультракоротких імпульсних пучків. На нашу думку, їх там розглянуто доволі стисло, основна увага приділяється хвилеводним режимам. Це означає, що для антенних задач подібні моделі (принаймні гаусівська) або й інші варіанти розподілів збудження мають цікаву перспективу подальших досліджень.

Як видно з (26), модовий коефіцієнт густини струму містить довільні залежності від координати поширення  $Z(z)$  та часової еволюції  $T(t)$ . Задамо конкретний вигляд і для цих функцій. Залежність  $Z(z)$  визначає товщину джерела уздовж осі  $OZ$ . У більшості реальних задач електромагнітне поле та енергія концентруються на краях апертури, тому просторовий розподіл джерела доцільно апроксимувати нескінченно тонким шаром, тобто задати у вигляді дельта-функції:

$$Z(z) = \delta(z). \quad (27)$$

Часову ж форму можна обирати різною. В попередніх роботах [12] розглядали вже стандартний випадок стрибкоподібного збудження  $H(t)$ . Після знаходження розв'язку для нього можна застосувати інтеграл Дюамеля, що дозволяє отримати розв'язок для довільної часової форми.

Підкреслимо, однак, що така процедура коректна лише для лінійних середовищ. У випадках нелінійності інтеграл Дюамеля непридатний, а задачу необхідно розв'язувати з урахуванням індивідуальних особливостей джерела і середовища,

Метою нашої роботи буде дослідити збудження дискового випромінювача дельтаподібним струмом, який задаємо у вигляді:

$$T(t) = A\delta(t), \quad (28)$$

де  $A$  – це деякий сталий множник, що має розмірність часу [с]. Його поява тут обумовлена тим, що дельта-функція, на відміну від функції Хевісайда, має розмірність [1/с], і має сенс ввести додатковий розмірний множник, щоб надалі зберігалася коректна розмірність.

Попри свою простоту, така модель збудження має фундаментальний, методичний та педагогічний інтерес. Вона стане природним доповненням лекційних курсів з нестаціонарних електромагнітних хвильових процесів. Більш того, результати такого аналізу можуть підказати нові ідеї у складніших задачах як для вже розглянутих типів збудження [14], так і для задач з передачею імпульсів через різного типу середовища [20]. В будь-якому разі, метод інтеграла Дюамеля дозволить і з цієї початкової точки знайти розв'язки для довільних часових форм.

Таким чином, розглядаємо круглий нескінченно тонкий диск, який збуджується миттєвим імпульсним струмом, спрямованим вздовж одиничного вектора  $\vec{x}_0$ . Геометрія системи зображена на Рис. 1. Початковий розподіл густини струму (1) у нашому випадку набуває вигляду

$$\vec{j}_0(\rho, \varphi, z, t) = \vec{x}_0 I_0 H(R - \rho) \delta(z) \delta(t), \quad (29)$$

де  $I_0 = A_0 A$  – амплітудна стала з розмірністю  $A \cdot c \cdot m^{-1}$ , що відповідає імпульсу поверхневого струму на апертурі,  $H(\cdot)$  – функція Хевісайда, а  $\delta(\cdot)$  – дельта-функція Дірака. Таке джерело збуджує нестаціонарну хвилю  $H$ -поляризації. Необхідно визначити часово-просторовий розподіл компонент електричного та магнітного полів, дослідити їх енергетичні характеристики



### РОЗДІЛ 3. АНАЛІТИЧНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

Для розв'язання поставленої задачі, застосуємо метод еволюційних рівнянь в модифікації для задач випромінювання у вільний простір.

Згадаємо як виглядає система (2):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \chi^2 \right\} h_m^h(z, t, \chi) = \sqrt{\mu_0} j_m(z, t, \chi); \\ I_m^h(z, t, \chi) = \frac{\partial}{\partial z} h_m^h(z, t, \chi); \\ V_m^h(z, t, \chi) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} h_m^h(z, t, \chi). \end{array} \right. \quad (2)$$

Права частина першого рівняння у (2) містить модовий коефіцієнт струму (26), який для заданої його густини (29) прийме такий вигляд:

$$j_m(z, t, \chi) = -i \frac{I_0 R}{2} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{J_1(\chi R)}{\sqrt{\chi}} \delta(z) \delta(t). \quad (30)$$

Перше рівняння системи (2) має назву рівняння типу Клейна-Гордона. Воно неоднорідне, містить ненульову праву частину – задану функцію-джерело (30). Для його розв'язання існує метод, який є аналогом методу функції Гріна для нестационарних задач – метод функції Рімана [18]. Для даного рівняння вона має вигляд функції Бесселя нульового порядку:

$$R(z, z', t, t', \chi) = J_0 \left( \chi \sqrt{c^2(t - t')^2 - (z - z')^2} \right). \quad (31)$$

#### 3.1. Знаходження загального розв'язку

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння виражається через інтеграл по змінним  $z$  і  $t$  від функції Рімана, помножений на функцію-джерело зі штрихованими змінними (уся права частина), з урахуванням швидкості світла та ділення на двійку, тобто

$$h_m^h(z, t, \chi) = \sqrt{\mu_0} \frac{c}{2} \int_0^\infty dz' \int_0^\infty dt' R(\chi, z, z', t, t') j_m(z', t', \chi). \quad (32)$$

Підставимо функцію Рімана (31) до представлення розв'язку (32):

$$h_m^h(z, t, \chi) = -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{J_1(\chi R)}{\sqrt{\chi}} \int_0^\infty \delta(z') dz' \int_0^\infty \delta(t') dt' J_0 \left( \chi \sqrt{c^2(t-t')^2 - (z-z')^2} \right). \quad (33)$$

Обидва інтеграли містять дельта-функцію. Це означає, що вони можуть бути знайдені автоматично завдяки її інтегральній властивості:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) f(x) dx = f(y). \quad (34)$$

Отримаємо значення підінтегральної функції в точці  $z' = 0$  і момент часу  $t' = 0$ .

$$\int_0^\infty \delta(z') dz' \int_0^\infty \delta(t') dt' J_0 \left( \chi \sqrt{c^2(t-t')^2 - (z-z')^2} \right) = J_0 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \quad (35)$$

Звідси маємо загальний розв'язок, тобто еволюційний коефіцієнт поздовжньої магнітної компоненти:

$$h_m^h(z, t, \chi) = -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{J_1(\chi R)}{\sqrt{\chi}} J_0 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \quad (36)$$

В нашому випадку, розв'язок має вигляд заданої функції Рімана (31), але тут відсутні змінні  $z', t'$  та враховуються сталі множники, що мають місце у функції-джерелі (30). У розв'язку,  $J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2})$  описує імпульсну фронтальну хвилю, що поширюється зі швидкістю  $c$ . Аргумент  $\sqrt{c^2 t^2 - z^2}$  забезпечує причинність. Він означає, що поле не з'явиться раніше, ніж пройде хвиля від джерела. Для  $ct < z$  – хвиля відсутня поза світловим конусом. При  $ct = z$  функція Бесселя нульового порядку переходить у одиницю, а сам еволюційний коефіцієнт має деяке скінченне значення. Поле фінітне на фронті хвилі, не розривається.

### 3.2. Обчислення еволюційного коефіцієнта поперечного магнітного поля

Знаючи еволюційний коефіцієнт (36), можемо знайти інші коефіцієнти через формули (2). Розглянемо еволюційний коефіцієнт поперечного магнітного поля:

$$\begin{aligned} I_m^h(z, t, \chi) &= \frac{\partial}{\partial z} h_m^h(z, t, \chi) = \\ &= -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{J_1(\chi R)}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial}{\partial z} J_0 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Обчислення зводиться до того, щоб знайти похідну від функції Бесселя нульового порядку. Вона дорівнює узятій з протилежним знаком функції Бесселя першого порядку з урахуванням її складного аргументу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} J_0 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) &= -J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \chi \frac{1}{2\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} (-2z) = \\ &= \chi z \frac{J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right)}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

Підставимо (38) у (37), скоротимо спектральні параметри та запишемо кінцевий вираз:

$$\begin{aligned} I_m^h(z, t, \chi) &= -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \\ &\quad \sqrt{\chi} J_1(\chi R) J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \end{aligned} \quad (39)$$

При  $z = 0$ , еволюційний коефіцієнт і магнітне поле дорівнює нулю. Це пов'язано з тим, що у площині диска  $z = 0$  немає вертикального градієнта поля. Поперечна компонента відсутня, бо поле ще не піднялося у вільний простір. Поле відсутнє прямо в площині струму.

### 3.3. Обчислення еволюційного коефіцієнта поперечного електричного поля

Тут вже маємо похідну за часом:

$$\begin{aligned} V_m^h(z, t, \chi) &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} h_m^h(z, t, \chi) = \\ &= -\frac{1}{c} \left( -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} \right) (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{J_1(\chi R)}{\sqrt{\chi}} \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Швидкості світла скорочуються, а знак мінуса зникає. Похідна від функції Бесселя обчислюється так само як і для попереднього випадку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) &= -J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \chi \frac{2c^2 t}{2\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} = \\ &= -c \chi c t \frac{J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right)}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Підставимо (41) у (40), та кінцевий вираз

$$\begin{aligned} V_m^h(z, t, \chi) &= -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{c t}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \\ &\quad \sqrt{\chi} J_1(\chi R) J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

При  $t = 0$  еволюційний коефіцієнт дорівнює нулю, теж саме що і в минулому випадку.

Випишемо для зручності всі вирази для еволюційних коефіцієнтів:

$$\left\{ \begin{aligned} h_m^h(z, t, \chi) &= -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{1}{\sqrt{\chi}} J_1(\chi R) J_0 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right); \\ I_m^h(z, t, \chi) &= -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \times \\ &\quad \times \sqrt{\chi} J_1(\chi R) J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right); \\ V_m^h(z, t, \chi) &= -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{c t}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \times \\ &\quad \times \sqrt{\chi} J_1(\chi R) J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right). \end{aligned} \right. \quad (43)$$

### 3.4. Знаходження повздовжнього магнітного поля

Почнемо з поздовжнього магнітного поля. Його модовий розклад:

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \chi^2 h_m^h(z, t, \chi) \psi_m(\rho, \varphi, \chi). \quad (44)$$

Підставимо базисну функцію (4) та еволюційний коефіцієнт (36) до магнітного поля (44):

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \chi^2 \left( -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} \right) (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \frac{J_1(\chi R)}{\sqrt{\chi}} J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \frac{J_m(\chi \rho)}{\sqrt{\chi}} e^{im\varphi}. \quad (45)$$

Спектральні параметри скорочуються. Константа  $\sqrt{\mu_0}$  теж скорочується.

Інші константи виносимо з-під усіх операторів:

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = -i \frac{I_0 R c}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \int_0^{\infty} d\chi \chi J_1(\chi R) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) J_m(\chi \rho) e^{im\varphi}. \quad (46)$$

Застосуємо визначення символу Кронекера. Залишаються тільки два доданки, для яких  $m = \pm 1$ , всі інші – нуль.

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = -i \frac{I_0 R c}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \int_0^{\infty} d\chi \chi J_1(\chi R) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) (J_1(\chi \rho) e^{i\varphi} + J_{-1}(\chi \rho) e^{-i\varphi}). \quad (47)$$

Для функції Бесселя першого порядку застосуємо властивість парності/непарності:

$$J_{-1}(\chi \rho) = -J_1(\chi \rho). \quad (48)$$

Виносимо її за дужки. Виходить різниця комплексних експонент, яка дає  $2i \sin \varphi$ .

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = -i \frac{I_0 R c}{4} \int_0^{\infty} d\chi \chi J_1(\chi R) J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) J_1(\chi \rho) 2i \sin \varphi. \quad (49)$$

Звідси видно, що отримане поле має чітко виражений синусоїдальний кутовий розподіл. Перемножуємо уявні одинички, вносимо синус з-під інтегралу, двійку з четвіркою скорочуємо:

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{2} \sin \varphi \int_0^{\infty} d\chi \chi J_0(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) J_1(\chi R) J_1(\chi \rho). \quad (50)$$

Інтеграл (50) може бути обчислений аналітично із застосуванням формули 2.12.42.16 [15]. Випишемо його кінцевий вигляд:

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{2} \sin \varphi \times \begin{cases} 0, & 0 \leq \sqrt{c^2 t^2 - z^2} < |R - \rho|; \\ \frac{1}{\pi R \rho} \frac{R^2 + \rho^2 - (c^2 t^2 - z^2)}{\sqrt{4R^2 \rho^2 - (R^2 + \rho^2 - (c^2 t^2 - z^2))^2}}, & |R - \rho| \leq \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \leq R + \rho. \end{cases}$$

Якщо ж  $\sqrt{c^2 t^2 - z^2} > R + \rho$ , то маємо такий результат:

$$H_z(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{2} \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(R^2 + \rho^2 - (c^2 t^2 - z^2))^2 - 4R^2 \rho^2}} \times \frac{2\pi R \rho}{\sqrt{(R^2 + \rho^2 - (c^2 t^2 - z^2))^2 - 4R^2 \rho^2} - (R^2 + \rho^2 - (c^2 t^2 - z^2))} \times \sin \varphi \sin \frac{2\pi R \rho}{\sqrt{(R^2 + \rho^2 - (c^2 t^2 - z^2))^2 - 4R^2 \rho^2}}.$$

### 3.5. Знаходження поперечного магнітного та електричного полів

Розглянемо тепер поперечне магнітне поле. Його можна визначити таким чином:

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi I_m^h(z, t, \chi) \nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi). \quad (51)$$

Тут присутній градієнт від базисної функції (4), який ми для зручності, випишемо:

$$\nabla \psi_m = \frac{e^{im\varphi} \sqrt{\chi}}{2} \left( (J_{m-1}(\chi \rho) - J_{m+1}(\chi \rho)) \vec{\rho}_0 + i(J_{m-1}(\chi \rho) + J_{m+1}(\chi \rho)) \vec{\varphi}_0 \right). \quad (52)$$

Підставимо цей градієнт (52) і еволюційний коефіцієнт (39) до магнітного поля (51):

$$\begin{aligned} \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = & \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} d\chi \left( -i \frac{I_0 R c \sqrt{\mu_0}}{4} \right) (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \\ & \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \sqrt{\chi} J_1(\chi R) J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \frac{e^{im\varphi} \sqrt{\chi}}{2} \left( (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + \right. \\ & \left. + i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0 \right). \end{aligned} \quad (53)$$

Корені від спектральних параметрів перемножуємо. Магнітна стала скорочується. Двійку перемножимо з четвіркою. Усі інші множники, які не залежать від змінних інтегрування та сумування, винесемо з-під цих операцій:

$$\begin{aligned} \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = & -i \frac{I_0 R c}{8} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\delta_{m,-1} + \delta_{m,1}) \int_0^{\infty} d\chi \chi J_1(\chi R) \\ & J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) e^{im\varphi} \left( (J_{m-1}(\chi\rho) - J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + \right. \\ & \left. + i(J_{m-1}(\chi\rho) + J_{m+1}(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0 \right). \end{aligned} \quad (54)$$

Застосуємо визначення символу Кронекера і залишимо доданки під номерами  $m = \pm 1$ :

$$\begin{aligned} \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = & -i \frac{I_0 R c}{8} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^{\infty} d\chi \chi J_1(\chi R) J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \\ & \left( e^{i\varphi} \left( (J_{1-1}(\chi\rho) - J_{1+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + i(J_{1-1}(\chi\rho) + J_{1+1}(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0 \right) + \right. \\ & \left. + e^{-i\varphi} \left( (J_{-1-1}(\chi\rho) - J_{-1+1}(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + i(J_{-1-1}(\chi\rho) + J_{-1+1}(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0 \right) \right). \end{aligned} \quad (55)$$

У дужках виходять функції Бесселя нульового та другого порядків (функція Бесселя мінус другого порядку є парною, тобто  $J_{-2}(x) = J_2(x)$ ).

$$\begin{aligned} \vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = & -i \frac{I_0 R c}{8} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^{\infty} d\chi \chi J_1(\chi R) J_1 \left( \chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2} \right) \\ & \left( e^{i\varphi} \left( (J_0(\chi\rho) - J_2(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + i(J_0(\chi\rho) + J_2(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0 \right) + \right. \\ & \left. + e^{-i\varphi} \left( (J_2(\chi\rho) - J_0(\chi\rho)) \vec{\rho}_0 + i(J_2(\chi\rho) + J_0(\chi\rho)) \vec{\varphi}_0 \right) \right). \end{aligned} \quad (56)$$

Перегрупуємо доданки відносно сум та різниць функцій Бесселя:

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = -i \frac{I_0 R c}{8} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (57)$$

$$\left( (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi})(J_0(\chi\rho) - J_2(\chi\rho))\vec{\rho}_0 + i(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})(J_0(\chi\rho) + J_2(\chi\rho))\vec{\varphi}_0 \right).$$

Різниця між комплексними експонентами дає  $2i \sin \varphi$ , а сума буде  $2 \cos \varphi$ :

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = -i \frac{I_0 R c}{8} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (58)$$

$$(2i \sin \varphi (J_0(\chi\rho) - J_2(\chi\rho))\vec{\rho}_0 + i2 \cos \varphi (J_0(\chi\rho) + J_2(\chi\rho))\vec{\varphi}_0).$$

Виник спільний множник  $2i$ , який можна винести за дужки. Уявну одиницю можна поєднати з іншою такою. Тоді знак мінуса зникає. А двійку з вісімкую можна скоротити.

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (59)$$

$$(\sin \varphi (J_0(\chi\rho) - J_2(\chi\rho))\vec{\rho}_0 + \cos \varphi (J_0(\chi\rho) + J_2(\chi\rho))\vec{\varphi}_0).$$

Це кінцева формула для поперечного магнітного поля в полярних координатах. Отримаємо формулу для поля в декартових координатах.

Перегрупуємо доданки відносно функцій Бесселя:

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (60)$$

$$((\sin \varphi \vec{\rho}_0 + \cos \varphi \vec{\varphi}_0)J_0(\chi\rho) + (-\sin \varphi \vec{\rho}_0 + \cos \varphi \vec{\varphi}_0)J_2(\chi\rho)).$$

Застосуємо зв'язок між циліндричними та декартовими координатами:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\rho &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (61)$$

Тобто

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) (\vec{y}_0 J_0(\chi\rho) + \quad (62)$$

$$+ (-\sin \varphi (\cos \varphi \vec{x}_0 + \sin \varphi \vec{y}_0) + \cos \varphi (-\sin \varphi \vec{x}_0 + \cos \varphi \vec{y}_0)) J_2(\chi\rho)).$$

Спростуємо вираз:

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (63)$$

$$(\vec{y}_0 J_0(\chi \rho) + (-\sin \varphi \cos \varphi \vec{x}_0 - \sin^2 \varphi \vec{y}_0 - \cos \varphi \sin \varphi \vec{x}_0 + \cos^2 \varphi \vec{y}_0) J_2(\chi \rho)).$$

Перед ортом  $\vec{x}_0$  утвориться синус подвійного кута, а перед ортом  $\vec{y}_0$  – косинус подвійного кута.

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (64)$$

$$(\vec{y}_0 J_0(\chi \rho) + (-\sin 2\varphi \vec{x}_0 + \cos 2\varphi \vec{y}_0) J_2(\chi \rho)).$$

Перегрупуємо доданки і отримуємо кінцевий результат:

$$\vec{H}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (65)$$

$$(-\vec{x}_0 \sin 2\varphi J_2(\chi \rho) + \vec{y}_0 (J_0(\chi \rho) + \cos 2\varphi J_2(\chi \rho))).$$

Оскільки процедура отримання електричного поля є аналогічною до розглянутої для магнітного поля (з відповідною заміною виразу в системі (43)), детальний вивід опускається. Надалі наведено лише початковий та кінцевий вираз:

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty d\chi V_m^h(z, t, \chi) [\nabla \psi_m(\rho, \varphi, \chi) \times \vec{z}_0]. \quad (66)$$

$$\vec{E}(\rho, \varphi, z, t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{I_0 R c}{4} \frac{ct}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}) \quad (67)$$

$$(\vec{x}_0 (J_0(\chi \rho) + \cos 2\varphi J_2(\chi \rho)) + \vec{y}_0 \sin 2\varphi J_2(\chi \rho)).$$

Інтегралі у полях (65), (67) можуть бути обчислені аналітично, але в силу громіздкості результатів їх ми не наводитимемо. Натомість декілька коментарів з цього приводу зробимо. Поперечні компоненти полів, як видно з виразів, містять два типи інтегралів за спектральним параметром. Перший тип має структуру

$$\int_0^{\infty} d\chi \chi J_0(\chi\rho) J_1(\chi R) J_1\left(\chi\sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right),$$

який нагадує по формі інтеграл з поздовжнього магнітного поля (50) з невеличкою перетасовкою аргументів, тож розраховується він через 2.12.42.16 [15]. А ось другий тип, замість функції Бесселя нульового порядку матиме відповідну циліндричну функцію другого порядку

$$\int_0^{\infty} d\chi \chi J_1(\chi R) J_1\left(\chi\sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) J_2(\chi\rho).$$

Для його аналітичного опрацювання скористаємося відомим рекурентним співвідношенням між функціями Бесселя [15], через яке випишемо функцію Бесселя першого порядку з радіальним аргументом [24]

$$J_1(\chi\rho) = \frac{\chi\rho}{2} (J_0(\chi\rho) + J_2(\chi\rho)).$$

Звідси легко виразити циліндричну функцію другого порядку:

$$J_2(\chi\rho) = \frac{2}{\chi\rho} J_1(\chi\rho) - J_0(\chi\rho).$$

Підставивши її до інтегралу і застосувавши лінійність інтегрального оператора, отримаємо два інтеграли:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\rho} \int_0^{\infty} d\chi J_1(\chi R) J_1(\chi\rho) J_1\left(\chi\sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right) - \\ & - \int_0^{\infty} d\chi \chi J_0(\chi\rho) J_1(\chi R) J_1\left(\chi\sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right). \end{aligned}$$

Другий інтеграл у цій різниці збігається за структурою з поздовжнім магнітним полем (50) і тому подальші дії з ним зрозумілі. В свою чергу, перший інтеграл, що містить добуток трьох функцій Бесселя, також піддається аналітичному обчисленню за допомогою формул 2.12.42.14 та 2.12.42.15 [15], кожна з яких охоплює свою область визначення аргументів. Таким чином, поперечні компоненти полів (65) і (67) можуть бути отримані в замкненій аналітичній формі.

### 3.6. Додаткові спостереження

На нашу думку, цікавим видається порівняння отриманого розв'язку рівнянь Максвелла (50), (65) і (67) з результатами роботи [12], де розглядалося збудження антени стрибкоподібним струмом. Насамперед було виявлено, що поперечна структура полів практично не змінюється – її визначає той самий циліндричний базис (4), у якому поперечні моди виділяються однаковим чином. Натомість поздовжньо-часова залежність поведінки полів суттєво модифікується. Для поперечного електричного поля різниця зводиться до заміни функції Бесселя першого порядку на циліндричну функцію нульового порядку та зникнення множника  $ct/\sqrt{c^2t^2 - z^2}$ . У магнітному ж полі зміни є значно глибшими: замість єдиної функції Бесселя (нульового порядку для поздовжньої та першого порядку разом із множником  $z/\sqrt{c^2t^2 - z^2}$  для поперечної) виникають ряди за парними та непарними функціями Бесселя. Кожен член таких рядів супроводжується поздовжньо-часовим множником

$$\left(\frac{ct - z}{ct + z}\right)^{\frac{k}{2}},$$

що описує поступове загасання амплітуди під час поширення хвилі, причому степінь  $k$  узгоджено з порядком відповідної циліндричної функції.

Відмінність розв'язків простежується і в самій структурі інтегралів. Узагальнено, для дельтаподібного випадку вони мають вигляд

$$\int_0^{\infty} d\chi \chi J_{\alpha}(\chi a) J_{\beta}(\chi b) J_{\gamma}(\chi c),$$

тоді як для стрибкоподібного

$$\int_0^{\infty} d\chi J_{\alpha}(\chi a) J_{\beta}(\chi b) J_{\gamma}(\chi c),$$

тобто без додаткового вагового множника. Математично це забезпечує кращу збіжність інтегралів, а фізично може вплинути на більш плавну, в

порівнянні з миттєвим збудженням, просторово-часову еволюцію полів і їх характеристик.

Додатково звернімося до моделей, які ми обговорювали у Вступі. Це моделі з похідними від дельта-функцій. Так, якщо замінити будь-яку з дельта-функцій у джерелі (29) на її похідну, то після розв'язання еволюційних рівнянь (2) та підстановки отриманих еволюційних коефіцієнтів до виразів для полів (44), (64) і (66), то виникнуть інтеграли виду

$$\int_0^{\infty} d\chi \chi^2 J_{\alpha}(\chi a) J_{\beta}(\chi b) J_{\gamma}(\chi c),$$

які не є збіжними через квадратичне зростання спектральної ваги. Якщо ж розглядати гіпотетичну ситуацію, коли похідні містяться в обох дельта-функціях одночасно, спектральна вага зростатиме вже кубічно, що лише погіршує ситуацію. Дійсно, з урахуванням асимптотики функцій Бесселя при великих аргументах [24]

$$J_{\nu}(\chi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi\chi}} \cos\left(\chi - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

підінтегральний вираз поводитиметься як  $\sqrt{\chi}$  у випадку однієї похідної або як  $\chi\sqrt{\chi}$  у випадку двох похідних, що веде до розбіжності інтегралу. В результаті виникають нескінченні значення полів і, відповідно, енергетичних характеристик, які не мають фізичного змісту. Тому моделі з похідними всередині джерел не придатні для опису Н-поляризованого випромінювання. Водночас це не означає беззмістовність даних моделей взагалі. У ряді інших постановок (зокрема, для Е-хвиль або хвиль, збуджених дипольними моментами) вони можуть виявитися цілком коректними.

## РОЗДІЛ 4. ЧИСЛОВІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОБГОВОРЕННЯ

Отримані в попередньому розділі аналітичні вирази дозволяють провести повний аналіз просторово-часової еволюції поля. Однак, основним інструментом дослідження є числове моделювання. Надалі розглянемо випадок на осі випромінювання  $\rho = 0$  та загальний випадок.

### 4.1. Аналіз поля та вектора Пойнтінга на осі випромінювання ( $\rho = 0$ )

Функція Бесселя нульового порядку з нульовим аргументом дорівнюватиме одиниці, а другого порядку – нулю.

$$J_0(0) = 1, \quad J_2(0) = 0. \quad (68)$$

Тому для поздовжнього магнітного поля (44) все дуже просто:

$$H_z(\varphi, z, t)|_{\rho=0} = 0. \quad (69)$$

Поперечні поля розглянемо на прикладі магнітного поля. Вираз у великих дужках в (65) суттєво спроститься. Залишається лише та частина, що відповідає проекції вектора на орт  $\vec{y}_0$ ,

$$\vec{H}(\varphi, z, t)|_{\rho=0} = \vec{y}_0 \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \int_0^\infty d\chi \chi J_1(\chi R) J_1(\chi \sqrt{c^2 t^2 - z^2}). \quad (70)$$

А інтеграл, що утворився, дорівнює дельта-функції [24],

$$\int_0^\infty \rho d\rho J_{k_1}(\tilde{\chi}\rho) J_{k_2}(\chi\rho) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\chi}\chi}} \delta_{k_1, k_2} \delta(\tilde{\chi} - \chi). \quad (71)$$

Тобто

$$\vec{H}(\varphi, z, t)|_{\rho=0} = \vec{y}_0 \frac{I_0 R c}{4} \frac{z}{\sqrt{c^2 t^2 - z^2}} \frac{1}{\sqrt{R\sqrt{c^2 t^2 - z^2}}} \delta\left(R - \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right). \quad (72)$$

Вийшов результат, що містить дельта-функцію. Перепишемо по-іншому:

$$\vec{H}(\varphi, z, t)|_{\rho=0} = \vec{y}_0 \frac{I_0 \sqrt{R} c}{4} \frac{z}{(c^2 t^2 - z^2)^{\frac{3}{4}}} \delta\left(R - \sqrt{c^2 t^2 - z^2}\right). \quad (73)$$

Для поперечного електричного поля (67) буде те ж саме, що і для магнітного поля (71), але інший напрямок, і замість  $z$  маємо  $ct$ .

$$\vec{E}(\varphi, z, t)|_{\rho=0} = \vec{x}_0 \sqrt{\frac{\mu_0 I_0 \sqrt{R} c}{\varepsilon_0}} \frac{ct}{4 (c^2 t^2 - z^2)^{\frac{3}{4}}} \delta(R - \sqrt{c^2 t^2 - z^2}). \quad (74)$$

Підведемо підсумок проговореного.

$$\begin{aligned} H_z(\varphi, z, t)|_{\rho=0} &= 0; \\ \vec{H}(\varphi, z, t)|_{\rho=0} &= \vec{y}_0 \frac{I_0 \sqrt{R} c}{4} \frac{z}{(c^2 t^2 - z^2)^{\frac{3}{4}}} \delta(R - \sqrt{c^2 t^2 - z^2}); \\ \vec{E}(\varphi, z, t)|_{\rho=0} &= \vec{x}_0 \sqrt{\frac{\mu_0 I_0 \sqrt{R} c}{\varepsilon_0}} \frac{ct}{4 (c^2 t^2 - z^2)^{\frac{3}{4}}} \delta(R - \sqrt{c^2 t^2 - z^2}). \end{aligned} \quad (75)$$

Маючи  $J_0(0) = 1$  та  $J_2(0) = 0$ , отримуємо, що зберігаються лише ті складові виразів, що в загальному випадку супроводжуються множником  $J_0$ . В результаті магнітне поле спрямовується вздовж осі  $OY$ , тоді як електричне – вздовж осі  $OX$ . Відзначимо, що при зникненні радіальної змінної синхронно зникає і залежність від азимутального кута. Це логічно, адже точка на осі не має площини обертання, а отже значення  $\varphi$  втрачає фізичний сенс. Саме тому конфігурація полів тут визначається виключно координатами  $(z, t)$ , тобто має чисто поздовжньо-часовий характер. Самі поперечні поля характеризуються інтегралом виду (71), що виражає класичну ортогональність Bessel-мод [7]. Також легко знайти вектор Пойнтінга. Він спрямований вздовж осі  $OZ$  і буде мати вигляд:

$$\vec{S}(\varphi, z, t)|_{\rho=0} = \vec{z}_0 \sqrt{\frac{\mu_0 I_0^2 R c^2}{\varepsilon_0}} \frac{ctz \delta^2(R - \sqrt{c^2 t^2 - z^2})}{16 \sqrt{(c^2 t^2 - z^2)^3}}, \quad (76)$$

де більшість амплітудних множників з (75) підносяться до квадрату.

Розглянемо і фізичну сторону виразів (75) та (76). Умова  $R = \sqrt{c^2 t^2 - z^2}$ , яка впливає з дельта-функцій, задає момент, коли сферичний фронт радіуса  $ct$ , що поширюється зі швидкістю  $c$ , досягає точки спостереження на осі. Саме тоді й виникає імпульсний сплеск поля. Структура виразів у чисельниках (75) містить множники  $z$  та  $ct$ , що додатково підкреслює

ортогональність полів та задає відмінності між ними на рівні локальної геометрії джерела. Поява  $\delta^2$  у (76) свідчить про надзвичайно вузьку локалізацію енергії на фронті.

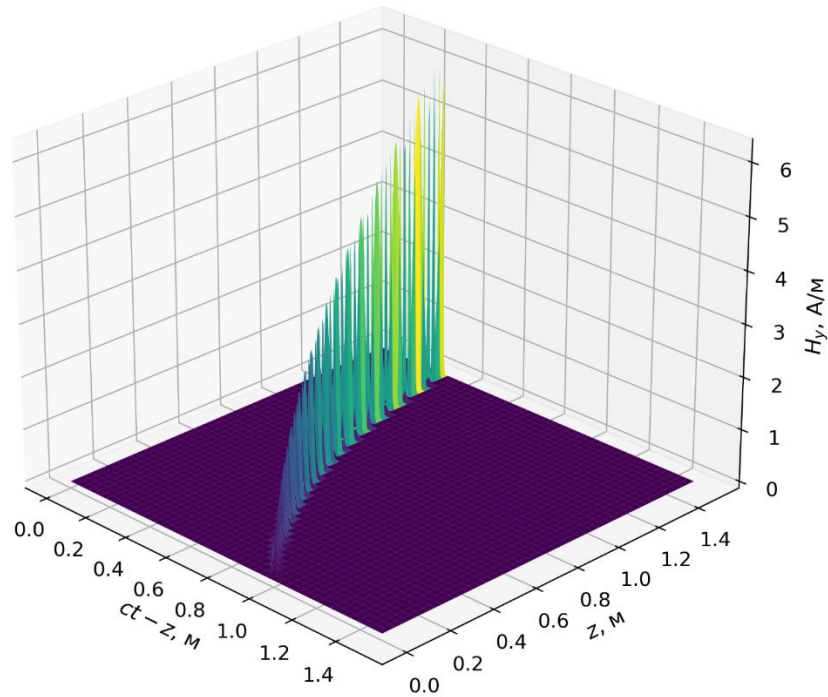


Рис. 2. Поперечна магнітна компонента  $H_y$  на осі випромінювання як функція  $ct - z$  та  $z$ .

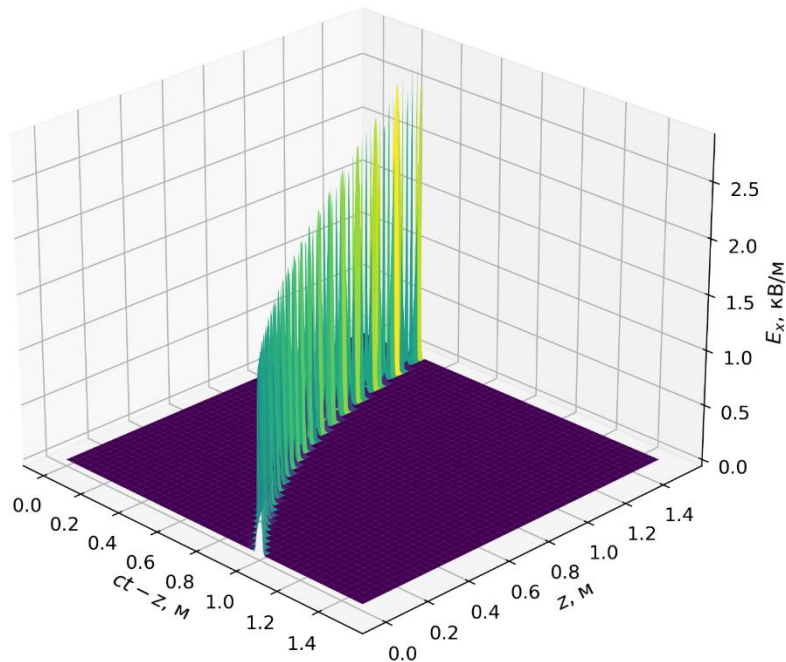


Рис. 3. Поперечна електрична компонента  $E_x$  на осі випромінювання як функція  $ct - z$  та  $z$ .

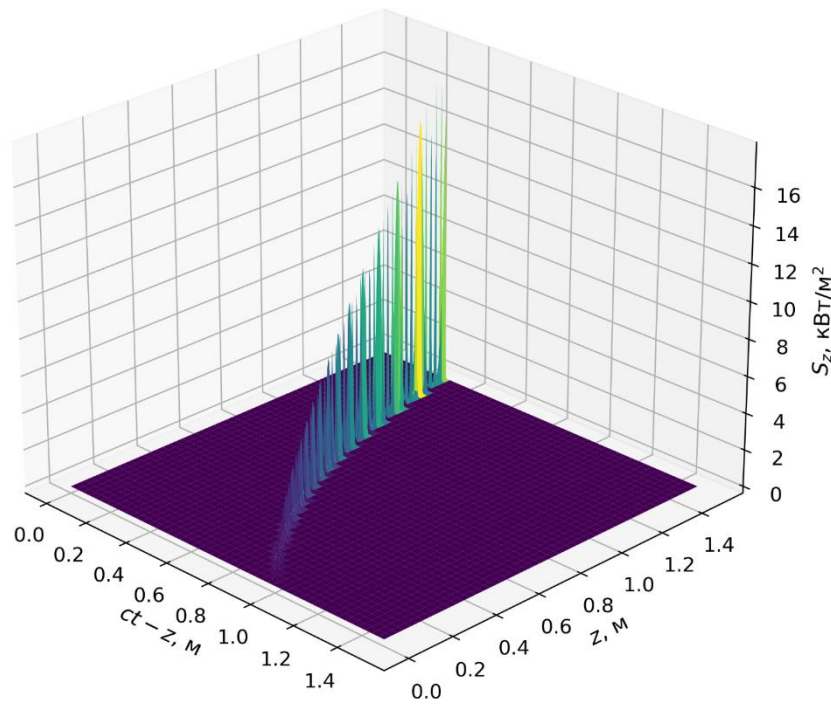


Рис. 4. Поздовжня компонента вектора Пойнтінга  $S_z$  на осі випромінювання як функція  $ct - z$  та  $z$ .

Графічні результати наведено на Рис. 2. – Рис. 4. В усіх обчисленнях приймалось  $I_0 = 1 \text{ нА} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$  та  $R = 1 \text{ м}$ . Залежності подано як функції часу запізнення  $ct - z$  та координати поширення  $z$ . Для числової обробки дельта-функції використовувалася гаусова апроксимація [7]

$$\delta(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}, \quad \sigma \ll 1 \quad (77)$$

із параметром  $\sigma$ , оптимізованим до значення 0.01. В усіх поверхнях імпульсний сплеск виникає в момент, коли фронт  $\sqrt{c^2 t^2 - z^2} = R$  досягає осі, тобто при  $ct - z = R$ . Відмітимо, що на відміну від стрибкоподібного збудження [12], результатом якого є прямокутний імпульс по поперечним компонентам полів, чия амплітуда залишається сталою, а тривалість яких зменшується за законом  $z^{-1}$ , у випадку дельтаподібного збудження ми маємо нескінченно малу тривалість і, що цікаво, поступове зростання амплітуди з відстанню. Якщо для полів ця зміна має характер виду  $H_y, E_x \sim \sqrt[4]{z}$ , то для густини потоку енергії це відбувається з відповідним піднесенням до квадрату  $S_z \sim \sqrt{z}$ . Це може бути пов'язане з тим, що на малих

відстанях від диска на осі присутній внесок переважно від центральних його областей, тоді як при збільшенні координати дедалі сильніше проявляється внесок краю апертури, де збудження найбільш інтенсивне. Тобто маємо геометричний механізм фокусування. Паралельно зростанню амплітуди спостерігається зсув фронту в часі. Його зменшення описується законом  $ct - z = \sqrt{z^2 + R^2} - z$ . Графіки демонструють також відмінності у стартових значеннях полів. Магнітне поле та густина потоку енергії характеризуються нульовою амплітудою на площині апертури  $z = 0$  через множник  $z$  у відповідних формулах. Натомість електричне поле починається зі скінченним значенням, для якого  $ct = R$  а амплітуда

$$E_x|_{\substack{\rho=0 \\ z=0}} \approx \sqrt{\frac{\mu_0 I_0 c}{\varepsilon_0} \frac{1}{4 \sqrt{\pi \sigma}}} \approx 1.6 \text{ кВ.}$$

Вектор Пойнтінга наслідуює геометричну структуру магнітного поля, а його числові значення успадковують масштаб переважно від електричної компоненти.

## 4.2. Аналіз поля та вектора Пойнтінга в загальному випадку ( $\rho > 0$ )

Всі компоненти поля зберігають повну залежність від  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ,  $t$  і просторово-часова структура хвилі виявляється значно багатшою. Можна досліджувати десятки різних конфігурацій, проте для забезпечення послідовного опису еволюції хвилі зосередимося на тих самих змінних  $ct - z$  та  $z$ . Через те, що поздовжня магнітна компонента містить кутовий множник  $\sin \varphi$ , зміна азимутального кута впливає на неї лише амплітудно. Тому для визначеності покладемо  $\varphi = 90^\circ$ , що відповідає максимально можливій амплітуді. В свою чергу поперечні поля мають складнішу залежність від  $\varphi$  в тому сенсі, що вона поєднується з функціями Бесселя  $J_0(\chi\rho)$  і  $J_2(\chi\rho)$ , які характеризуються радіальною координатою. Тут особливий інтерес для нас представлятиме випадок  $\varphi = 0^\circ$ , тому що поля,

подібно до випадку на осі, поляризуються вздовж осей ОУ (магнітне) та ОХ (електричне), а вектор Пойнтінга – вздовж ОZ, але тепер з додатковою радіальною складовою.

Графічні результати представлено на Рис. 5. – Рис. 8. Щоб продемонструвати вплив радіальної координати, було обрано два характерні значення:  $\rho = 0.5$  м, що відповідає точці всередині апертури ( $\rho < R$ ), та  $\rho = 2$  м, тобто області поза джерелом ( $\rho > R$ ).

Перш за все, усі розподіли мають низку спільних рис. Для обох значень  $\rho$  формується одна й та сама просторово-часова область існування хвилі; змінюються лише масштаби амплітуд, які для більших радіусів приймають менші значення, та діапазони незалежних змінних. Межі цієї області визначаються умовою  $|\rho - R| < ct - z < \rho + R$  і залишаються однаковими для всіх графіків при фіксованому  $\rho$ . Зі збільшенням координати  $z$  ширина області поступово звужується, а рух її границь описується виразом  $ct - z = \sqrt{z^2 + (\rho \mp R)^2} - z$ , де знак «-» відповідає лівій межі, а «+» – правій. Водночас детальна структура розподілів усередині цієї області залежить від конкретної компоненти поля. На Рис. 6. – Рис. 8. додатково видно, що зі зростанням  $z$  амплітуда поперечних компонент поля та пов'язаного з ними потоку енергії монотонно збільшується.

За формальної екстраполяції на великі відстані ширина області прагне до нуля, а амплітуди – до нескінченності. На відміну від однофронтового випадку, еволюціонує ціла обмежена область простору, що одночасно звужується та підсилюється. Додатково відзначимо, що для Рис. 6. – Рис. 7. повністю зберігаються властивості, описані раніше: поперечне магнітне поле та поздовжня складова вектора Пойнтінга починаються з нульового значення; поперечне електричне – з ненульового; а сам вектор Пойнтінга успадковує геометрію поперечного магнітного і масштаб електричного. Візуально на Рис. 8 спостерігається вужча кольорова смуга порівняно з Рис. 6, що зумовлено різним масштабуванням; фізична ширина області при

цьому не змінюється. На Рис. 5 поздовжня магнітна компонента демонструє чітко виражені граничні структури. В околі лівої межі виникає різкий позитивний пік, який практично не змінює свою амплітуду з віддаленням, тоді як у правій межі спостерігається стійкий «провал» у від’ємні значення, що зберігає аналогічну стабільність. Усередині області  $|\rho - R| < ct - z < \rho + R$  значення поля є малими або коливаються навколо нуля, тоді як за межами цієї області воно зануляється, як і інші компоненти. Показовою є і радіальна залежність: якщо на осі ( $\rho = 0$ ) ця компонента відсутня, то при  $\rho = 0.5$  м її амплітуда стає суттєвішою, а при  $\rho = 2$  м знову зменшується. Це дозволяє припустити, що максимальне значення поздовжня магнітна компонента досягає поблизу краю апертури  $\rho = R$ : у напрямку до нього вона зростає, а за його межами спадає.

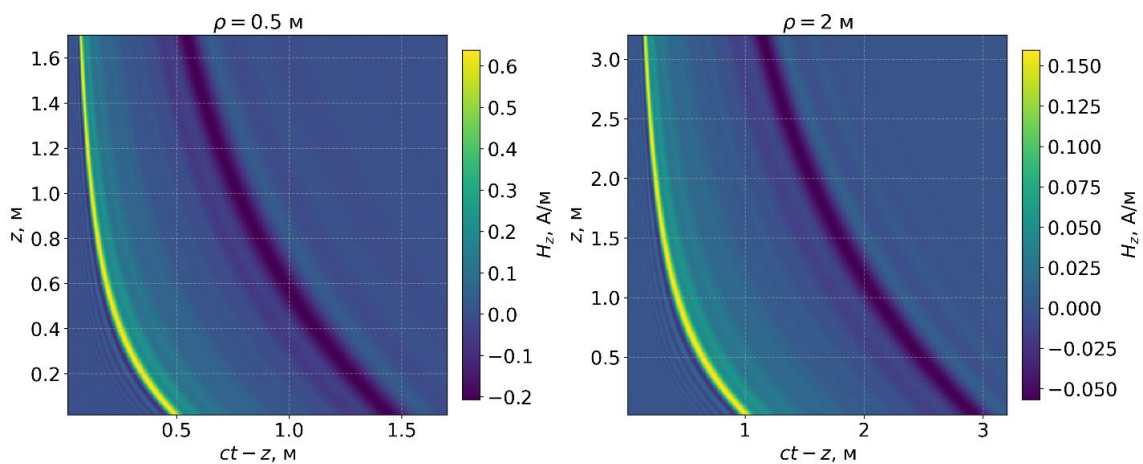


Рис. 5. Поздовжня магнітна компонента  $H_z$  для різних радіусів.

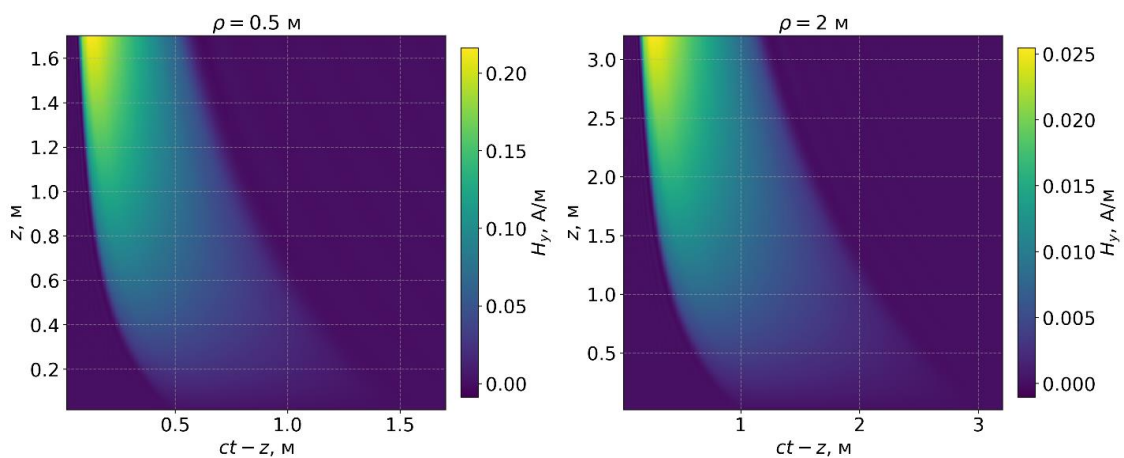


Рис. 6. Поперечна магнітна компонента  $H_y$  для різних радіусів.

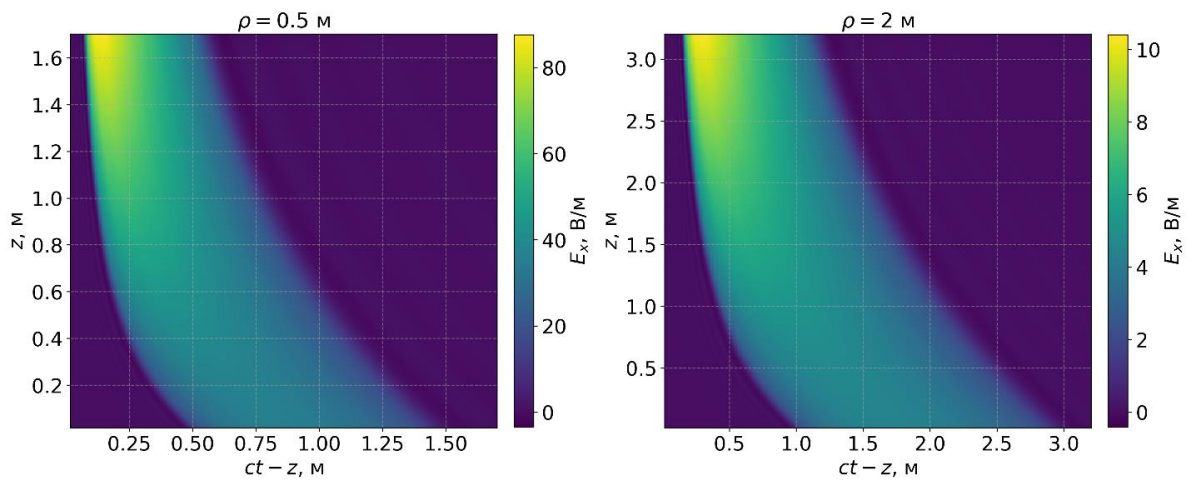


Рис. 7. Поперечна електрична компонента  $E_x$  для різних радіусів.

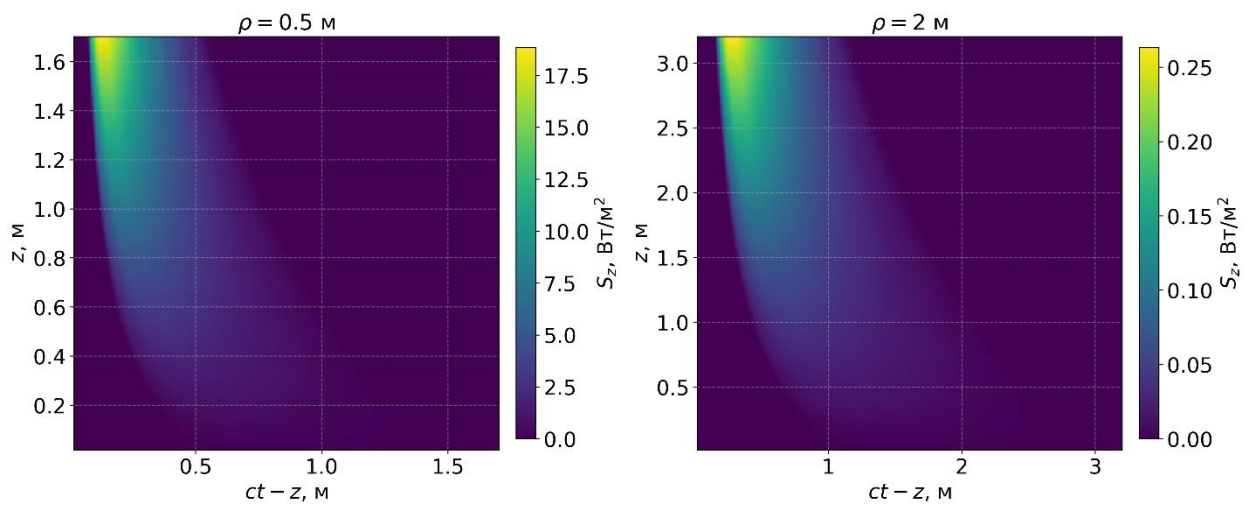


Рис. 8. Поздовжня компонента вектора Пойнтінга  $S_z$  для різних радіусів.

## ВИСНОВОК

У цій роботі розв'язано задачу поширення імпульсної Н-хвилі, збудженої дельтаподібним поверхневим струмом, у межах еволюційного підходу в електродинаміці. Показано, що амплітуда згенерованої хвилі зростає зі збільшенням відстані від апертури, що узгоджується з геометричним механізмом самофокусування, який виникає внаслідок сумарного внеску всіх точок випромінювальної поверхні. Хоча справжнє дельта-збудження є фізично недосяжним, локального фокусування, ймовірно, можна наблизитися, використовуючи імпульси надзвичайно малої тривалості та достатньо високої амплітуди. На відміну від цього, збудження, що містять похідні від дельта-функції, призводять до нескінченних характеристик хвилі й не мають фізичного сенсу в межах Н-хвильової конфігурації. Загалом, дослідження повністю задовольнило свій академічний і педагогічний інтерес.

## ЛІТЕРАТУРА

1. J. N. Brittingham, "Focus wave modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode," *J. Appl. Phys.*, vol. 54, no. 3, pp. 1179–1189, Mar. 1983, doi: 10.1063/1.332196
2. T. T. Wu and R. W. P. King, "Comment on 'Focus wave modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode'," *J. Appl. Phys.*, vol. 56, no. 9, pp. 2587–2588, Nov. 1984, doi: 10.1063/1.334289
3. T. T. Wu, "Electromagnetic missiles," *J. Appl. Phys.*, vol. 57, no. 7, pp. 2370–2373, Apr. 1985, doi: 10.1063/1.335465
4. H.-M. Shen, "Experimental study of electromagnetic missiles," in *Proc. SPIE*, vol. 873, *Microwave and Particle Beam Sources and Propagation*, San Diego, CA, USA, May 1988, pp. 338–346, doi: 10.1117/12.965113
5. H. E. Hernandez-Figueroa, M. Zamboni-Rached, and E. Recami, Eds., *Localized Waves*. Hoboken, NJ, USA: Wiley, 2008, 387 pp., doi: 10.1002/9780470168981
6. L. B. Felsen and G. M. Whitman, "Wave propagation in time-varying media," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-18, no. 2, pp. 242–253, Mar. 1970, doi: 10.1109/TAP.1970.1139657
7. J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. New York, NY, USA: Wiley, 1998, 833 pp.
8. P. T. Leung, "Singular behaviour of the electrodynamic fields of an oscillating dipole," *Eur. J. Phys.*, vol. 29, no. 1, pp. 137–141, 2008, doi: 10.1088/0143-0807/29/1/014
9. V. A. Plakhtii, O. M. Dumin, V. A. Katrich, O. O. Dumina, and I. S. Volvach, "Energy transformation of transient field of Hertzian dipole," in *Proc. 2016 IEEE Int. Conf. Math. Methods Electromagn. Theory (MMET)*, Lviv, Ukraine, Jul. 2016, pp. 314–317, doi: 10.1109/MMET.2016.7544054
10. A. A. Ergin and S. Karaca, "An exact time-domain evaluation for radiated fields from a Hertz dipole," in *Proc. 2010 10th Mediterranean Microw. Symp.*

- (MMS), Guzelyurt, Northern Cyprus, Aug. 2010, pp. 70–72, doi: 10.1109/MMW.2010.5605141
11. I. Egorov, A. Karlsson, and S. Rikte, “Time-domain Green dyadics for temporally dispersive simple media,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 31, no. 14, pp. 3219–3240, 1998, doi: 10.1088/0305-4470/31/14/010
  12. R. Akhmedov, O. Dumin, and V. Katrich, “Impulse radiation of antenna with circular aperture,” *Telecommun. Radio Eng.*, vol. 77, no. 20, pp. 1767–1784, 2018, doi: 10.1615/telecomradeng.v77.i20.10
  13. D. Havrylenko, O. Dumin, V. Plakhtii, and V. Katrich, "Energy transformation of transient radiation of plane source with step-like excitation," in *Proc. 2023 IEEE XXVIII Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Probl. Electromagn. Acoust. Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, Sep. 2023, pp. 20–23, doi: 10.1109/DIPED59408.2023.10269461
  14. D. Havrylenko, O. Dumin, V. Plakhtii, V. Katrich, and M. Nesterenko, “Time domain analysis of impulse electromagnetic field on the interface of two media,” in *Proc. 2022 IEEE 16th Int. Conf. Adv. Trends Radioelectron., Telecommun. Comput. Eng. (TCSET)*, Lviv–Slavske, Ukraine, Feb. 2022, pp. 698–703, doi: 10.1109/TCSET55632.2022.9766855
  15. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, and O. I. Marichev, *Integrals and Series, Volume 2: Special Functions*. New York, USA: Gordon & Breach Science Publishers (3rd printing with corrections), 1992, 756 pp.
  16. М. М. Єфімчик, Д. І. Гавриленко, С. Л. Бердник, О. М. Думін, «Випромінювання імпульсної електромагнітної хвилі, збудженої миттєвим струмом», у Х Всеукраїнській науково-практичній конференції “Перспективні напрямки сучасної електроніки, інформаційних і комп’ютерних систем” (MEICS-2025), Дніпро, Україна, 26–28 лист. 2025. (в редакції)
  17. D. Havrylenko, M. Efimchuk, S. Berdnyk, and O. Dumin, "Propagation of a Transient Electromagnetic Wave Excited by a Delta-Like Current," in *2026 IEEE 18th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics,*

Telecommunications and Computer Engineering (TCSET), Lviv, Ukraine, Feb. 17–21, 2026. (**Scopus, в редакції**)

18. B. Riemann, "Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite," *Abh. Königl. Ges. Wiss. Göttingen*, vol. 8, pp. 43–66, 1860. (in German)
19. Дж. Юн, «Дифракція імпульсного хвильового пучка на границі розділу двох середовищ з втратами», дис. канд. фіз.-мат. наук, спец. 01.04.03 «Радіофізика», Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна, 2006. 149 с.
20. D. Havrylenko, O. Dumin, and S. Berdnyk, "Exact Time-Domain Solution for Step-like H-Wave Radiation near a Dielectric Interface," in *Proc. 2025 IEEE 30th Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Probl. Electromagn. Acoust. Wave Theory (DIPED)*, Tbilisi, Georgia, 2025, pp. 50-55, doi: 10.1109/DIPED66951.2025.11194531.
21. Д. І. Гавриленко, О. М. Думін, В. А. Плахтій, «Енергетичні характеристики нестационарного електромагнітного поля, збудженого струмом у формі стрибка», *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка»*, вип. 41, с. 23–36, 2024. doi: 10.26565/2311-0872-2023-38-04
22. D. Havrylenko, O. Dumin, V. Plakhtii and V. Katrich, "Evolutionary Approach to Energy Transformation of Short Rectangular Pulse Radiated from Aperture," in *Proc. 2023 IEEE Int. Conf. on Information and Telecommun. Techn. and Radio Electronics (UkrMiCo)*, Kyiv, Ukraine, 2023, pp. 228-232, doi: 10.1109/UkrMiCo61577.2023.10380340.
23. Д. І. Гавриленко, О. М. Думін, С. Л. Бердник, «Енергетичні характеристики нестационарного хвильового процесу, збудженого прямокутним імпульсом», *Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка»*, вип. 42, с. 24-37, 2025. doi: 10.26565/2311-0872-2025-42-03.

24. M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. New York, NY, USA: Dover, 1972, 1046 pp.
25. М. С. Антюфеева, М. О. Антюфеев, Д. О. Батраков, «Особливості збуджених полів у резонаторі, який заповнено середовищем з показником заломлення близьким до нуля», Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія «Радіофізика та електроніка», вип. 42, с. 7-17, 2023. doi: 10.26565/2311-0872-2023-39-01.
26. M. Antyufeyeva and V. Pacheco-Peña, "Emulating time refraction at photonic time interfaces via smooth temporal transitions," Phys. Rev. Applied, vol. 24, no. 3, pp. 034004-1–034004-19, 2023, doi: 10.1103/PhysRevApplied.24.034004.
27. A. A. Çoşan and F. Erden, "Modal Amplitudes of Electromagnetic Fields in a Conical Cavity: A Novel Approach," 2023 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), Venice, Italy, 2023, pp. 011-014, doi: 10.1109/ICEAA57318.2023.10297737.
28. A. A. Cosan, F. Erden and S. Aksoy, "Time-Domain Analysis of Electromagnetic Fields in Conical Cavities With Modified EAE," in IEEE Access, vol. 12, pp. 28006-28012, 2024, doi: 10.1109/ACCESS.2024.3367434.

## ДОДАТОК. ПРОГРАМИ ЧИСЛОВИХ МОДЕЛЕЙ

У цьому додатку наведено приклади програм, що були розроблені для числового моделювання електромагнітних полів та вектора Пойнтінга. Для наочності кожен приклад продемонстровано на основі поперечної електричної компоненти.

### 1) Моделювання аналітичного результату (формула (75)):

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from tqdm import tqdm
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from multiprocessing import Pool, cpu_count
import math

# --- Фізичні константи ---
mu0 = 4 * np.pi * 1e-7          # [H/m]
c = 299_792_458                 # [м/с]
eps0 = 1 / (mu0 * c**2)        # [F/m]

# --- Параметри задачі ---
R = 1.0                          # [м] радіус диска
Q0 = 1e-9                        # [Кл/м]
sigma = 0.01                     # [м] ширина апроксимації  $\delta$ -функції

# --- Префактор ---
prefactor = np.sqrt(mu0/eps0) * (Q0 * np.sqrt(R) * c) / 4

# --- Дельта-функція (апроксимація) ---
def delta_approx(x, sigma):
    return (1.0 / (np.sqrt(np.pi) * sigma)) * np.exp(-(x / sigma) ** 2)

# --- Основна формула ---
def Ex_delta(u, z):
    arg = u * (u + 2 * z)
    arg = np.where(arg > 0, arg, np.nan)
    sqrt_arg = np.sqrt(arg)

    delta_val = delta_approx(R - sqrt_arg, sigma)
    denom = np.power(arg, 3/4, where=~np.isnan(arg))
    denom = np.where(denom == 0, np.nan, denom)
```

```

val = (u + z) / denom * delta_val
val = np.nan_to_num(val, nan=0.0)
return prefactor * val

# --- Обгортка для multiprocessing ---
def compute_point(args):
    u, z = args
    return Ex_delta(u, z)

# --- Основна програма ---
if __name__ == "__main__":
    u_vals = np.linspace(0.0, 1.5, 400) # ct - z
    z_vals = np.linspace(0.0, 1.5, 400) # z
    U, Z = np.meshgrid(u_vals, z_vals)

    points = [(U[i, j], Z[i, j]) for i in range(U.shape[0]) for j in
range(U.shape[1])]

    print("◆ Обчислення сітки E_x ...")
    with Pool(processes=cpu_count()) as pool:
        results = list(tqdm(pool.imap(compute_point, points), total=len(points)))

    Ex_grid = np.array(results).reshape(U.shape)

    # --- Збереження у CSV ---
    data = {"u": U.flatten(), "z": Z.flatten(), "Ex": Ex_grid.flatten()}
    df = pd.DataFrame(data)
    csv_name = "electric_field_rho0_delta.csv"
    df.to_csv(csv_name, index=False)
    print(f"☑ Дані збережено у файл {csv_name}")

    # --- Побудова 3D-графіка ---
    fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
    ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")

    surf = ax.plot_surface(U, Z, Ex_grid, cmap="gray", edgecolor="none")

    ax.set_xlabel(r"$c t - z$, м", fontsize=13)
    ax.set_ylabel(r"$z$, м", fontsize=13)
    ax.set_zlabel(r"$E_x$, В/м", fontsize=13)
    ax.tick_params(labelsize=12)
    plt.tight_layout()

    png_name = "electric_field_rho0_delta_3D_bw.png"
    plt.savefig(png_name, dpi=300, bbox_inches="tight")
    plt.show()

    print(f"☑ 3D-графік (ч/б) збережено у файл {png_name}")

```

## 2) Числове інтегрування та побудова тривимірних графіків (формула (67), випадок $\varphi = 0$ ):

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import quad
from scipy.special import j0, j1, jn
from tqdm import tqdm
from multiprocessing import Pool, cpu_count
import pandas as pd

# --- Фізичні константи ---
mu0 = 4 * np.pi * 1e-7
c = 299_792_458
eps0 = 1 / (mu0 * c**2)

# --- Параметри задачі ---
R = 1.0          # [м]
Q0 = 1e-9       # [Кл/м]
rho = 1
tol = 1e-6      # точність інтегрування

# --- Префактор ---
prefactor = np.sqrt(mu0 / eps0) * (Q0 * R * c) / 4.0

# --- Адаптивна верхня межа інтегрування ---
def chi_max(u, z):
    arg = u * (u + 2 * z)
    if arg <= 0:
        return 10
    eta = np.sqrt(arg)
    return max(50 / eta, 20)

# --- Підінтегральна функція ---
def integrand(chi, u, z):
    arg = u * (u + 2 * z)
    if arg <= 0:
        return 0.0

    eta = np.sqrt(arg)

    J1_eta = j1(chi * eta)
    J1_R    = j1(chi * R)
    J0_rho  = j0(chi * rho)
    J2_rho  = jn(2, chi * rho)
```

```

return chi * J1_R * J1_eta * (J0_rho + J2_rho)

# --- Основна формула ---
def Ex_general(u, z):
    arg = u * (u + 2 * z)
    if arg <= 0:
        return 0.0

    # геометричний множник ct / sqrt(...)
    numerator = (u + z)
    denom_arg = arg
    geom = numerator / np.sqrt(denom_arg)

    chi_lim = chi_max(u, z)
    val, _ = quad(integrand, 0, chi_lim, args=(u, z),
                 epsrel=tol, epsabs=tol, limit=300)

    return prefactor * geom * val

# --- Обгортка для multiprocessing ---
def compute_point(args):
    u, z = args
    return Ex_general(u, z)

# --- Основна програма ---
if __name__ == "__main__":
    u_vals = np.linspace(0.02, 3.2, 400)
    z_vals = np.linspace(0.02, 3.2, 400)
    U, Z = np.meshgrid(u_vals, z_vals)

    points = [(U[i, j], Z[i, j]) for i in range(U.shape[0]) for j in
              range(U.shape[1])]

    print(f"◆ Обчислення E_x для rho = {rho} м ...")
    with Pool(processes=cpu_count()) as pool:
        results = list(tqdm(pool.imap(compute_point, points), total=len(points)))

    Ex_grid = np.array(results).reshape(U.shape)

    # --- Збереження CSV ---
    csv_name = f"Ex_field_rho{rho:g}_integral_auto.csv"
    pd.DataFrame({"u": U.flatten(), "z": Z.flatten(), "Ex":
                  Ex_grid.flatten()}).to_csv(csv_name, index=False)
    print(f"☑ Дані збережено у файл: {csv_name}")

    # --- 3D графік ---
    fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
    ax = fig.add_subplot(111, projection="3d")

```

```

surf = ax.plot_surface(U, Z, Ex_grid, cmap="viridis", edgecolor="none")

ax.set_xlabel(r"$c t - z$, m", fontsize=13)
ax.set_ylabel(r"$z$, m", fontsize=13)
ax.set_zlabel(r"$E_x$, V/m", fontsize=13)
ax.tick_params(labelsize=12)
ax.view_init(elev=25, azim=-45)
plt.tight_layout()

png_name = f"Ex_field_rho{rho:g}_integral_auto_3D_color.png"
plt.savefig(png_name, dpi=300)
plt.show()

print(f"✅ 3D-графік збережено у файл: {png_name}")

```

### 3) Побудова кольорових карт на основі CSV-даних, отриманих у попередньому пункті:

```

import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import re

# -----
#   Вкажи два CSV-файли поперечного електричного поля E_x
# -----
file1 = "Ex_field_rho0.5_integral_auto.csv"
file2 = "Ex_field_rho2_integral_auto.csv"

files = [file1, file2]

# -----
#   Параметри оформлення (під IEEE двоколонкову верстку)
# -----
label_fs = 18
tick_fs = 18
title_fs = 19

def load_field(filename):
    """Зчитує CSV і повертає (rho, U, Z, Ex_grid)."""

    # Витягнути rho з назви файлу
    match = re.search(r"rho([\d\.]+)", filename)
    rho_str = match.group(1) if match else "unknown"

    df = pd.read_csv(filename)

```

```

u = df["u"].values      # ct - z
z = df["z"].values      # z
Ex = df["Ex"].values    # поле

# Відновлення 2D-сітки
n_u = len(np.unique(u))
n_z = len(np.unique(z))

U = u.reshape((n_z, n_u))
Z = z.reshape((n_z, n_u))
Ex_grid = Ex.reshape((n_z, n_u))

return rho_str, U, Z, Ex_grid
# -----
# Зчитування двох наборів даних
# -----
data = [load_field(f) for f in files]
# -----
# Малювання епюри
# -----
fig, axes = plt.subplots(1, 2, figsize=(15, 6), constrained_layout=True)

for ax, (rho, U, Z, Ex_grid) in zip(axes, data):
    # --- colormap ---
    im = ax.pcolormesh(U, Z, Ex_grid, cmap="viridis", shading="auto")
    # --- окремий colorbar ---
    cbar = plt.colorbar(im, ax=ax, fraction=0.046, pad=0.04)
    cbar.set_label(r"$E_x$, В/м", fontsize=label_fs)
    cbar.ax.tick_params(labelsize=tick_fs)

    # наукова нотація
    cbar.formatter.set_powerlimits((-2, 2))
    cbar.formatter.set_useMathText(True)
    cbar.update_ticks()
    cbar.ax.yaxis.get_offset_text().set_fontsize(tick_fs)

    # --- оформлення графіка ---
    ax.set_title(fr"$\rho = {rho}$ м", fontsize=title_fs)
    ax.set_xlabel(r"$c t - z$, м", fontsize=label_fs)
    ax.set_ylabel(r"$z$, м", fontsize=label_fs)
    ax.tick_params(labelsize=tick_fs)
    ax.grid(True, linestyle="--", alpha=0.5)
# -----
# Збереження
# -----
out_png = "Ex_epure_rho0.5_rho2_colormaps.png"
plt.savefig(out_png, dpi=300, bbox_inches="tight")
plt.show()

print(f"✅ Епюра успішно збережена у файл: {out_png}")

```