Д. З. ГОРДЕВСКИЙ (Харьков)

КЛАССИФИКАЦИЯ ПРИНЦИПОВ ДУАЛЬНОСТИ И ДЕЗАРГОВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В МНОГОМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Общие замечания

Будем считать известным аксиоматическое построение геометрии многомерного проективного пространства, например, по Veblen'у и Young'у [1].

Точки, прямые, плоскости и т. д. пространства n измерений будем называть, соответственно, 0 элементами, 1 элементами, 2 элементами и т. д., инцидентными данному пространству. Всякий iэлемент есть множество 0элементов.

Примечание 1. iэлемент часто будем обозначать через $\boldsymbol{i}$.

Примечание 2. Если $k+1$ 0элементов не все инцидентны одному $(k-1)$элементу, то они называются независимыми.

§ 2. —1элемент

Введём —1элемент как пустое множество 0элементов. Введение —1элемента сообщает симметрию формулировкам и стройность всей теории.

Примером может служить теорема:

Два элемента $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ $(i \leqslant j,\ 2i < n,\ 2j \leqslant n)$ *могут быть расположены в* (n) *пространстве следующим образом:*

1) $\boldsymbol{i}$ *инцидентен* $\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{i}$ *и* $\boldsymbol{j}$ i*зависимы*);

2) $\boldsymbol{i}$ *и* $\boldsymbol{j}$ *инцидентны одному* $\boldsymbol{i}-1$ *и одновременно инцидентны одному* $\boldsymbol{j}+1$ ($\boldsymbol{i}$ *и* $\boldsymbol{j}$ $(i-1)$*зависимы*);

3) $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ *инцидентны одному* $\boldsymbol{i}-2$ *и одновременно инцидентны одному* $\boldsymbol{j}+2$ ($\boldsymbol{i}$ *и* $\boldsymbol{j}$ $(i-1)$*зависимы*); и т. д.

$i+2$) $\boldsymbol{i}$ *и* $\boldsymbol{j}$ *инцидентны одному* -1 *и одновременно инцидентны одному* $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+1$ ($\boldsymbol{i}$ *и* $\boldsymbol{j}$ *—1зависимы или независимы*).

Наметим доказательство.

1. Пусть задан $\boldsymbol{j}$. Отметим $i+1$ независимых 0элементов $A_1, A_2, \ldots, A_{i+1}$, ему инцидентных; определённый ими $\boldsymbol{i}$ будет инцидентен заданному $\boldsymbol{j}$. Имеет место первый случай теоремы.

2. Отметим i 0элементов $A_1, A_2, \ldots, A_i$, инцидентных данному $\boldsymbol{j}$, и пусть 0элемент A_{i+1} ему не инцидентен ($A_1, A_2, \ldots, A_{i+1}$ независимы), тогда $\boldsymbol{j}$ и A_{i+1} единственным образом определят инцидентный им $\boldsymbol{j}+1$ и одновременно $(i-1)$элемент $A_1A_2 \ldots A_i$ будет инцидентен как данному jэлементу, так и iэлементу $A_1A_2 \ldots A_{i+1}$. Имеет место второй случай и т. д.

Примечание 1. Задание n в этой теореме несущественно.

§ 3. Принцип дуальности $(PD)_{-1,m}$

Будем считать известным принцип дуальности (который правильнее было бы назвать теоремой симметрии) в mпространстве ($m \leqslant n$). Сформулируем его так (см.[2], стр. 42,[7], стр. 412):

если в предложении, вытекающем из аксиом, положенных в основу проективной геометрии, и касающемся конфигурации, вмещённой в (m)пространство, поменять местами слова:

—1элемент и m элемент,

0элемент и (m—1)элемент,

1элемент и (m—2)элемент

и т. д.

kэлемент и ($m-k$—1)элемент,

то получим предложение, которое также вытекает из тех же аксиом.

Обозначим этот принцип дуальности символом

$$(PD)_{-1,m} \equiv \{(-1)012\ldots(m-2)(m-1)\,m\} \equiv \{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots 210\,(-1)\}.$$

В отличие от других принципов дуальности, о которых речь будет ниже, принцип дуальности $(PD)_{-1,n}$ будем называть большим или главным принципом дуальности nпространства.

§ 4. Ситуация $C_{k,r}$

Назовём ситуацией *) $C_{k,r}$ ($k < r < n$) образ, дуальный по $(PD)_{-1,r}$ пространству $r-k-1$, вмещённому в r. Число ($r-k-1$) назовём измерением ситуации.

Примеры ситуаций:

1) ситуация измерения —1: $C_{i,i}$—iэлемент,

2) ситуация измерения 0: $C_{i,i+1}$—пара инцидентных элементов i и $i+1$,

3) ситуация измерения 1: $C_{i,i+2}$—пучок ($i+1$)элементов, инцидентных данному i и данному $i+2$ **),

4) ситуация измерения 2: $C_{i,i+3}$—связка ($i+1$)элементов и ($i+2$)элементов, инцидентных данному i и данному $i+3$,

5) ситуация измерения n: $C_{-1,n}$—nпространство.

Всякая ситуация $C_{k,r}$ ($r \geqslant k+3$) имеет свой принцип дуальности $(PD)_{k,r}$.

В самом деле, подвергая $(PD)_{-1,\,r-k-1}$ действию $(PD)_{-1,r}$, получим $(PD)_{k,r}$.

Сформулируем $(PD)_{k,r} \equiv \{k\,(k+1)\,\ldots\,(r-1)\,r\}$ так:

если в правильном утверждении проективного характера, касающемся конфигурации, инцидентной с данным k и данным r ($k < r$, k инцидентно с r), поменять местами слова:

kэлемент и rэлемент,

($k+1$)элемент и (r—1)элемент,

($k+2$)элемент и (r—2)элемент

и т. д.,

то получим утверждение, также правильное.

§ 5. «Число» элементов ситуации

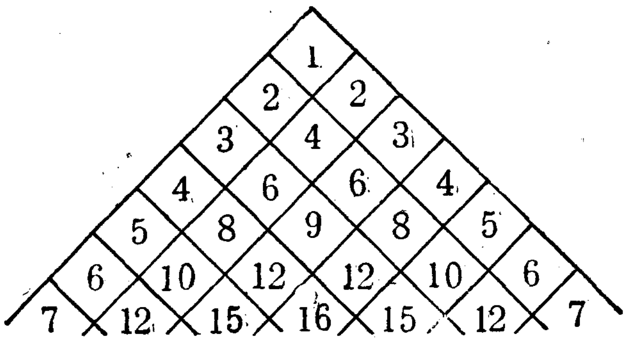
Рассмотрим ситуацию измерения n, например, $C_{-1,n}$, т. е. nпространство.

---

*) Более подходящие термины — пучок, связка, узел — заняли уже прочное место в математической литературе.

**) При $i=0$ — пучок прямых, при $i=1$ — пучок плоскостей.

Нетрудно подсчитать, что nпространству инцидентны ∞^n 0элементов, $\infty^{2(n-1)}$ 1элементов, $\infty^{3(n-2)}$ 2элементов, ..., $\infty^{(n-i)(i+1)}$ iэлементов, $\infty^{2(n-1)}$ $(n-2)$элементов, ∞^n $(n-1)$элементов. Этот результат очень удобно представлять наглядно с помощью таблицы умножения, подвешенной за вершину угла.



Читать таблицу надо так.

Например, 7пространство содержит ∞^7 0элементов, ∞^{12} 1элементов, ∞^{15} 2элементов, ∞^{16} 3элементов, ∞^{15} 4элементов, ∞^{12} 5элементов, ∞^7 6элементов.

§ 6. Многообразия и формы

Представим ситуацию $C_{k,k+l}$ наглядно на фиг. 1, указывая при этом и «число» входящих в ситуацию элементов.

$$1 \quad \infty^{l-1} \quad \infty^{2(l-2)} \quad \infty^{3(l-3)} \ldots \infty^{(i-1)(l-i+1)} \quad \infty^{i(l-i)} \quad \infty^{(i+1)(l-i-1)} \ldots \infty^{l-1} \quad 1$$

$$k \quad k+1 \quad k+2 \quad k+3 \ldots \quad k+i-1 \quad k+i \quad k+i+1 \ldots \quad k+l-1 \quad k+l$$

Фиг. 1.

Отметим в этой ситуации совокупность $\infty^{i(l-i)}$ $(k+i)$элементов, которую назовём **многообразием** и обозначим символом

$$M^i_{k,k+l} \equiv [k, k+i, k+l].$$

Число $i(l-i)$ назовём **ступенью** многообразия. При $i=1$ и $i=l-1$ многообразие будем называть **формой** $l-1$ ступени и обозначать так:

$$[k, k+1, k+l] \equiv \underline{\Phi}_{k,k+l}, \quad [k, k+l-1, k+l] \equiv \overline{\Phi}_{k,k+l}.$$

$\underline{\Phi}_{k,k+l}$ будем называть **нижней**, $\overline{\Phi}_{k,k+l}$—**верхней формой** ситуации $C_{k,k+l}$.

Подсчёт всех ситуаций, принципов дуальности, многообразий и форм nпространства ясен из таблицы 1 (стр. 158).

Таким образом, в nпространстве имеется $\frac{(n+2)(n+3)}{2}$ ситуаций, $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ многообразий, n^2 форм, $\frac{n(n-1)}{2}$ принципов дуальности.

Таблица 1

Измерения ситуаций	-1	0	1	2	3	...	i	...	n	Всего в пространстве
Число ситуаций	$n+2$	$n+1$	n	$n-1$	$n-2$		$n-i+1$		1	$\frac{(n+2)(n+3)}{2}$
Число многообразий в ситуации	0	0	1	2	3		i		n	$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$
Число форм в ситуации	0	0	1	2	2		2		2	n^2
Число принципов дуальности	0	0	0	$n-1$	$n-2$		$n-i+1$		1	$\frac{n(n-1)}{2}$

§ 7. Дезарговы конфигурации

Дезарговой конфигурацией $(\underline{DK})_{k,k+l}$ формы $\underline{\Phi}_{k,k+l}$ **назовём** *$l+1$ $(k+1)$ элементов, из которых никакие l не инцидентны одному* $(k+l-1)$элементу ситуации $C_{k,k+l}$. Будем коротко называть эту дезаргову конфигурацию нижней дезарговой конфигурацией ситуации $C_{k,k+l}$.

Под верхней дезарговой конфигурацией $(\overline{DK})_{k,k+l}$ ситуации $C_{k,k+l}$ будем понимать совокупность $l+1$ $(k+l-1)$элементов, из которых никакие l не инцидентны одному $(k+1)$элементу ситуации $C_{k,k+l}$. Иногда можно пользоваться обозначениями

$$(\underline{DK})_{k,k+l} \equiv (k,\ k+1,\ k+l), \qquad (\overline{DK})_{k,k+l} \equiv (k,\ k+l-1,\ k+l).$$

Число дезарговых конфигураций nпространства равно числу форм, т. е. равно n^2.

Примеры дезарговых конфигураций:

1) $(\underline{DK})_{-1,1} \equiv (-1,\ 0,\ 1) \equiv (\overline{DK})_{-1,1}$—три различные точки на прямой,

2) $(\underline{DK})_{-1,2} \equiv (-1,\ 0,\ 2)$—четырёхточечник на плоскости*),

3) $(\overline{DK})_{-1,2} \equiv (-1,\ 1,\ 2)$—четырёхсторонник,

4) $(\overline{DK})_{-1,3} \equiv (-1,\ 2,\ 3)$—обычная дезаргова конфигурация в 3пространстве,

5) $(\underline{DK})_{-1,3} \equiv (-1,\ 0,\ 3)$—дуальная предыдущей.

Определение дезарговых конфигураций, данное в этом параграфе, отличное от обычного, о котором речь будет в заключении, позволяет определить замечательную полную дезаргову конфигурацию, тесно связанную с красивой обобщённой теоремой Дезарга:

Если через точку O провести прямые $p_1, p_2, \ldots, p_n$, не инцидентные одному $(n-1)$пространству, и на каждой прямой p_i зафиксировать пару точек A_i и B_i, то $(n-1)$пространство $A_1A_2 \ldots A_n$ пересечёт $(n-1)$пространство $B_1B_2 \ldots B_n$ по дезарговой конфигурации $(\overline{DK})_{-1,n-2}$.

*) Иначе — четырёхвершинник [7].

Доказательство. 1. Два $(n-1)$пространства $A_1A_2\ldots A_n$ и $B_1B_2\ldots B_n$ (несовпадающие, ибо в противном случае прямые $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, т. е. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ были бы инцидентны одному $(n-1)$пространству) пересекаются по $(n-2)$пространству σ_{n-2}.

2. Точки пересечения прямых: A_1A_2 с B_1B_2, A_1A_3 с B_1B_3 и т. д., $A_{n-1}A_n$ с $B_{n-1}B_n$, которые обозначим, соответственно, через $C_{12}, C_{13}, \ldots$ и т. д., $C_{n-1,n}$, принадлежат σ_{n-2}.

3. Прямые q_{ijk} пересечения граней $A_iA_jA_k$ с $B_iB_jB_k$ также принадлежат σ_{n-2} и т. д.

4. $(n-3)$пространства $\sigma^1_{n-3}, \sigma^2_{n-3}, \ldots, \sigma^n_{n-3}$ пересечения, соответственно, пространств $A_2A_3\ldots A_n$ с $B_2B_3\ldots B_n$, $A_1A_3\ldots A_n$ с $B_1B_3\ldots B_n, \ldots, A_1A_2\ldots A_{n-1}$ с $B_1B_2\ldots B_{n-1}$ принадлежат σ_{n-2}. Они образуют $(\overline{DK})_{-1,n-2}$ (см. определение).

Пример. При $n=4$ получаем теорему: *если два тетраэдра в 4пространстве перспективны (т. е. прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке), то соответственные рёбра и грани, попарно пересекаясь, образуют* $(\overline{DK})_{-1,2}$, *т. е. четырёхсторонник.*

§ 8. Полная дезаргова конфигурация

Рассмотрим $(\overline{DK})_{-1,n}$. По определению $(\overline{DK})_{-1,n}$ состоит из $n+2$ $(n-1)$пространств $\tau^1_{n-1}, \tau^2_{n-2}, \ldots, \tau^{n+2}_{n-1}$, из которых никакие $n+1$ не инцидентны одному 0элементу. Каждое из τ^i_{n-1} пересекается остальными $n+1$ τ^k_{n-1} по $n+1$ $(n-2)$пространствам $\lambda^1_{n-2}, \lambda^2_{n-2}, \ldots, \lambda^{n+1}_{n-2}$, из которых, повидимому, никакие n не инцидентны одному 0элементу (в противном случае нарушилось бы условие о том, что никакие $n+1$ $(n-1)$пространств τ^j_{n-1} не инцидентны одному 0элементу) и которые, следовательно, по определению образуют дезаргову конфигурацию $(\overline{DK})_{-1,n-1}$.

Таким образом с данной $(\overline{DK})_{-1,n}$ связаны $(n+1)$ $(\overline{DK})_{-1,n-1}$.

Применяя эти же рассуждения к $(\overline{DK})_{-1,n-1}$, обнаружим, что с ней связаны n $(\overline{DK})_{-1,n-2}$. Продолжая рассуждать дальше таким же образом, обнаружим различные $(\overline{DK})_{-1,n-3}, (\overline{DK})_{-1,n-4}, \ldots, (\overline{DK})_{-1,1}$, связанные с данной $(\overline{DK})_{-1,n}$.

Совокупность всех этих $(\overline{DK})_{-1,k}$ назовём **полной дезарговой конфигурацией** $[\overline{DK}]_{-1,n}$, которую условно можно представить формулой

$$[\overline{DK}]_{-1,n}\equiv(n+2)\,(\overline{DK})_{-1,n-1}+\frac{(n+2)(n+1)}{2!}(\overline{DK})_{-1,n-2}+$$
$$+\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}(\overline{DK})_{-1,n-3}+\ldots+\frac{(n+2)(n+1)\ldots(n-i+3)}{i!}(\overline{DK})_{-1,n-i}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(n+2)(n+1)n}{3!}(\overline{DK})_{-1,1}+\frac{(n+2)(n+1)}{2!}(\overline{DK})_{-1,0},\qquad(1)$$

где под $(\overline{DK})_{-1,0}$ понимаем 0элемент.

Применяя $(PD)_{-1,n}$ к формуле (1), получим дуальную формулу. Более подробно:

$$(PD)_{-1,n}\to(\overline{DK})_{-1,r}\equiv\{-1012\ldots(n-2)\,(n-1)\,n\}\to(-1,r-1,r)\equiv$$
$$\equiv(n,n-r,n-r-1)\equiv(n-r-1,n-r,n)\equiv(\underline{DK})_{n-r-1,n};$$

следовательно,

$$(\overline{DK})_{-1,r}\to(\underline{DK})_{n-r-1,n}.\qquad(2)$$

Применяя формулу (2) к левой части и каждому «слагаемому» правой части формулы (1), получаем дуальную формулу

$$[\underline{DK}]_{-1,n} \equiv (n+2)(\underline{DK})_{0,n} + \frac{(n+2)(n+1)}{2!}(\underline{DK})_{1,n} + \frac{(n+2)(n+1)n}{3!}(\underline{DK})_{2,n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n+2)(n+1)\ldots(n-i+3)}{i!}(\underline{DK})_{i-1,n} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n+2)(n+1)n}{3!}(DK)_{n-2,n} + \frac{(n+2)(n+1)}{2!}(\underline{DK})_{n-1,n}. \quad (3)$$

Под $(\underline{DK})_{n-1,n}$ понимаем $(n-1)$пространство.

§ 9. Заключение

Если прямые $p_1, p_2, \ldots, p_n$ теоремы § 6 инцидентны $(n-k)$пространству $(k \geqslant 1)$, то получим, так сказать, сплюснутую дезаргову конфигурацию CDK. Таких CDK можно получить сколько угодно, но они не представляют самостоятельного интереса, так как они легко изучаются с помощью рассмотренных нами (DK) *), которые можно назвать нормальными DK (NDK).

Пример. Отметим четыре прямые p_1, p_2, p_3, p_4, пересекающиеся в одной точке и расположенные в 3пространстве. Если отметить на каждой прямой p_i две точки A_i и B_i, то вопрос сведётся к двум перспективным тетраэдрам $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$, которые легко изучаются с помощью $(NDK)_{-1,3}$ (см.[1], т. I, стр. 43) и которые представляют CDK.

Известные мне авторы ([3] **), [4,5,1] ***), [6]) обобщали дезарговы конфигурации, занимаясь именно (CDK) (впрочем, не всегда упоминая имя Дезарга), поэтому, вероятно, от их взора ускользнула великолепная полная дезаргова конфигурация.

Полный пространственный пятиугольник Levi ****) (см.[5], стр. 139) есть не что иное, как $(DK)_{-1,3}$, по определению § 6.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Veblen and Young, Projective geometry, 1916, т. I.
2. H. F. Baker, Principles of geometry, 1929, т. I (Foundations), стр. 42.
3. G. Veronese, Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens, «Math. Ann.», 1881, т. XIX, стр. 161—234.
4. A. Cayley, Sur quelquls théorémes de la géométrie de position, Collected Works 1846, т. I, стр. 317.
5. W. B. Carver, On the Cayley—Veronese class of configurations, Trans. of the Amer. Math. Soc., 1905, т. VI, стр. 534.
6. F. Levi, Geometrische Konfigurationen, 1929.
7. Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, стр. 304.

*) Исключение составляет известная плоская дезаргова конфигурация, состоящая из 10 прямых и 10 точек.

**) На стр. 173 Veronese стоит очень близко к полной DK, но он не только не даёт такого определения DK, как наше, но вообще не говорит о DK и имени Дезарга не упоминает.

***) Том I, стр. 51 и 54.

****) Пространственный пятиточечник по Veblen'y и Joung'y.