КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА

Я. И. Житомирский

В работе изучаются вопросы единственности решения задачи Коши для уравнений вида

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + q(x)\,u(x, t), \tag{1}$$

$-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$, $a \neq 0$ — комплексное число при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2}$$

Как показал А. Н. Тихонов [1], для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ задача Коши имеет единственное решение в классе функций, которые при каждом $t \geqslant 0$ и при $|x| \to \infty$ растут медленнее, чем e^{x^2}, причем в классе функций, растущих не быстрее, чем $e^{|x|^{2+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, единственность решения задачи Коши нарушается. О. А. Ладыженская распространила этот результат на любые параболические по И. Г. Петровскому уравнения [2]. Более тонкий результат принадлежит Тэклинду [3], указавшему необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{k-1}\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}$, в классе функций, растущих при $|x| \to \infty$ не быстрее, чем $e^{|x|h(|x|)}$, $h(|x|) \geqslant 0$ и монотонна; это условие состоит в расходимости интеграла $\int\limits_1^\infty h^{1-2k}(x)\,dx$.

Аналогичные результаты были получены рядом авторов [4], [5], [6] для любых линейных систем с постоянными коэффициентами вида $\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u$.

Кроме того, достаточные условия (типа Тихонова, Тэклинда) единственности для параболических по И. Г. Петровскому систем с переменными коэффициентами получены в работах [7], [8] — в предположении ограниченности коэффициентов системы и в работах [9], [10], [11] — в предположении, что коэффициенты системы растут не быстрее некоторых фиксированных степеней $|x|$ (например, для уравнения (1) это предположение имеет вид: $|q(x)| \leqslant (Ax^2 + B)$). Иная теорема единственности для параболических уравнений 2-го порядка получена в работе [12] при некоторых специальных предположениях о поведении коэффициентов уравнения, не ограничивающих впрочем скорости роста коэффициентов при $|x| \to \infty$.

В настоящей работе не делается каких-либо предположений о типе уравнения (1) (a — любое комплексное число), а также не ограничивается порядок роста $|q(x)|$ при $|x| \to \infty$. При этом устанавливаются необходимые и достаточные условия единственности решения нормального типа [13] задачи (1), (2) в различных классах функций в зависимости от поведения $|q(x)|$ при $|x| \to \infty$.

§ 1. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $ay'' + q(x)y = \lambda y$

Рассмотрим уравнение

$$ay'' + q(x)y = \lambda y, \quad \lambda = \sigma + i\tau \tag{1.1}$$

при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$.

Асимптотика решений уравнения (1.1) при фиксированном λ и при $|x| \to \infty$ хорошо известна [14], [15]. Используя метод сведения уравнения (1.1) к системе L-диагонального вида [14], мы исследуем асимптотику решений этого уравнения при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$.

В дальнейшем будем предполагать, что а) $q(x)$ — вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция, б) функции $q'^2|q|^{-\frac{5}{2}}$ и $q''|q|^{-\frac{3}{2}}$ принадлежат $L(-\infty, -x_0)$ и $L(x_0, \infty)$ при достаточно большом значении x_0.

Обозначив

$$y(x, \lambda) \equiv y_1(x, \lambda), \quad y'_x(x, \lambda) \equiv y_2(x, \lambda),$$
$$\bar{y}(x, \lambda) = \{y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda)\}, \tag{1.2}$$

запишем уравнение (1.1) в виде системы

$$\bar{y}'(x, \lambda) = A(x, \lambda)\bar{y}(x, \lambda).$$

Собственными значениями матрицы $A(x, \lambda)$ являются функции $w_1(x, \lambda) = \sqrt{a^{-1}(\lambda - q(x))}$ и $w_2(x, \lambda) = -w_1(x, \lambda)$. Значение $\sqrt{a^{-1}(\lambda - q(x))}$ при каждом λ и каждом x будем выбирать так, чтобы $\operatorname{Re} w_1(x, \lambda) \geqslant 0$.

Обозначим

$$B(x, \lambda) = \begin{pmatrix} w_1^{-\frac{1}{2}} & w_1^{-\frac{1}{2}} \\ w_1^{\frac{1}{2}} & -w_1^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad G(x, \lambda) = B^{-1}(x, \lambda)B'(x, \lambda) = -\frac{w_1'}{2w_1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S(x, \lambda) = -\frac{w_1'}{4w_1^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

и положим в (1.3)

$$y = B(x, \lambda)(I + S(x, \lambda))\bar{Z}(x, \lambda), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Тогда из (1.3) получим

$$\bar{Z}' = W(x, \lambda)\bar{Z} + C(x, \lambda)\bar{Z}, \tag{1.5}$$

где

$$W(x, \lambda) = \begin{pmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & w_2 \end{pmatrix}, \quad C(x, \lambda) = \|c_{ik}\| = -(I + S)^{-1}(GS + S'). \tag{1.6}$$

Лемма 1.1. *Если $q(x)$ удовлетворяет условию*

$$q(x) \leqslant q_1 \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.7}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon) > 0$, *что при всех* λ, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ *имеет место оценка*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |c_{ik}(x, \lambda)|\,dx < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Если $q(x)$ *удовлетворяет условию*

$$q(x) \to +\infty \text{ при } |x| \to \infty, \tag{1.9}$$

то для любого $\varepsilon > 0$ *и любого* $\gamma > 0$ *можно указать такие* $\sigma_1 = \sigma_1(\varepsilon, \gamma)$ *и* $\sigma_2 = \sigma_2(\varepsilon)$, *что при всех* $\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1$, $|\arg\lambda| \geqslant \gamma$ *справедливо (1.8), а при всех* $\lambda : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_2$, $|\arg\lambda| \leqslant \gamma$ *справедлива оценка*

$$\int_{-\infty}^{\tilde{p}(2\sigma)} |c_{ik}(x, \lambda)|\,dx + \int_{p(2\sigma)}^{\infty} |c_{ik}(x, \lambda)|\,dx < \varepsilon, \tag{1.10}$$

где $p(\alpha)$ и $\tilde{p}(\alpha)$ *определяются из условий* $q(x) \geqslant \alpha$ *при* $x \geqslant p(\alpha) > 0$ *и при*

$$x \leqslant \tilde{p}(\alpha) < 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Элементы матрицы $C(x, \lambda)$ имеют вид

$$(I + S)^{-1}GS = 2v^2\sqrt{a^{-1}(\lambda - q)}\,(1 + v^2)^{-1}\begin{pmatrix} -1 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

$$(I + S)^{-1}S' = \frac{1}{8}\sqrt{a}\,\Big[q''(\lambda - q)^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}q'^2(\lambda - q)^{-\frac{5}{2}}\Big](1 + v^2)^{-1}\begin{pmatrix} v & 1 \\ -1 & v \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

где $v = \frac{1}{8}q'\sqrt{a}(\lambda - q)^{-\frac{3}{2}}$.

Из условия б) следует [14], что

$$q'(x)\,|q(x)|^{-\frac{3}{2}} \to 0 \text{ при } |x| \to \infty. \tag{1.14}$$

Пусть сначала выполнено условие (1.7). Оценим $v(x, \lambda)$:

$$|v(x, \lambda)| \leqslant c_1|q'|\,|q_2 - q_1|^{-\frac{3}{2}}\left|\frac{q_2 - q}{\lambda - q}\right|^{\frac{3}{2}} \quad q_2 > q_1.$$

По заданному $\varepsilon_1 > 0$ найдем $X(\varepsilon_1)$ такое, что при $|x| \geqslant X$ $c_1|q'|\,|q_2 - q|^{-\frac{3}{2}} < \varepsilon_1$. Это возможно в силу (1.14). Тогда, поскольку $\left|\frac{q_2 - q}{\lambda - q}\right| < 1$ при $\operatorname{Re}\lambda > q_2$, справедлива оценка

$$|v(x, \lambda)| \leqslant \varepsilon_1 \text{ при } |x| \geqslant X, \tag{1.15}$$

Далее при $|x| \leqslant X$ $c_1|q'|\,|q_2 - q(x)|^{-\frac{3}{2}} \leqslant c(\varepsilon)$, а $\left|\frac{q_2 - q(x)}{\lambda - q(x)}\right| \leqslant c_1(\varepsilon_1) \times \frac{1}{\sigma - q_1} \to 0$ при $\sigma \to \infty$. Отсюда и из (1.15) заключаем, что при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma(\varepsilon_1)$, $-\infty < x < \infty$

$$|v(x, \lambda)| \leqslant \varepsilon_1. \tag{1.16}$$

Поэтому для элементов $\tilde{c}_{ik}(x, \lambda)$ матрицы (1.12) справедливы оценки

$$|\tilde{c}_{ik}(x, \lambda)| \leqslant C_2 |q'|^2 |\lambda - q|^{-\frac{5}{2}}. \tag{1.17}$$

Используя тождество $|q'|^2 |\lambda - q|^{-\frac{5}{2}} = |q'|^2 |q_2 - q|^{-\frac{5}{2}} \left|\frac{q_2 - q}{\lambda - q}\right|^{\frac{5}{2}}$, условие б) и рассуждения аналогичные тем, которые привели к (1.15) и (1.16) получим требуемое. Оценки в случае матрицы (1.13) аналогичны.

Пусть теперь выполнено условие (1.9) и $|\arg \lambda| \geqslant \gamma$, где $\gamma > 0$ фиксированное число. И в этом случае $v(x, \lambda) \to 0$ при $\operatorname{Re}\lambda \to \infty$, равномерно относительно x: по $\varepsilon_1 > 0$ можно найти $X(\varepsilon_1)$ такое, что при $|x| \geqslant X$ $q(x) > 0$ и $|q'(x)| \cdot |q(x)|^{-\frac{3}{2}} < \varepsilon_1$. Но при всех λ таких, что $|\arg \lambda| \geqslant \gamma$ и $|x| \geqslant X$ $\left|\arg \frac{\lambda}{q}\right| \geqslant \gamma$, и потому $\left|\frac{\lambda}{q} - 1\right| \geqslant \sin \gamma > 0$. Тогда при $|x| \geqslant X$ $\arg \lambda \geqslant \gamma$: $|v(x, \lambda)| \leqslant c_1 \varepsilon_1 \sin^{-\frac{3}{2}} \gamma$. При $|x| \leqslant X$ имеем:

$$|v(x, \lambda)| \leqslant A |q'| |\lambda - q|^{-\frac{3}{2}} < c(\varepsilon) |\tau|^{-\frac{3}{2}} < c(\varepsilon) (\sigma \operatorname{tg} \gamma)^{-\frac{3}{2}} \to 0$$

при $\sigma \to +\infty$, что вновь приводит к (1.17). Аналогично доказывается оценка (1.8).

Пусть, наконец, выполнено (1.9) и $|\arg \lambda| \leqslant \gamma$. По заданному $\varepsilon > 0$ найдём $X(\varepsilon)$ из условий:

1) $|q'(x)| \cdot |q(x)|^{-\frac{3}{2}} < \varepsilon$ при $|x| \geqslant X$;

2) $\int\limits_{|x| \geqslant X} q'^2 |q|^{-\frac{5}{2}} dx < \varepsilon$;

3) $\int\limits_{|x| \leqslant X} |q''| |q|^{-\frac{3}{2}} dx < \varepsilon$.

Ясно, что при достаточно больших σ справедливы неравенства $p(2\sigma) \geqslant X$, $|\tilde{p}(2\sigma)| \geqslant X$. Поэтому при $x \geqslant p(2\sigma)$ и $x \leqslant \tilde{p}(2\sigma)$ из условия 1) вытекает $|v(x, \lambda)| \leqslant c_3 \varepsilon$, а потому из условий 2) и 3) при достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda$ вытекает справедливость (1.10).

В уравнениях (1.5) положим

$$z_i = \eta_{ij}(x, \lambda) \exp\left\{\int\limits_{x_0}^{x} w_j(t, \lambda)\, dt\right\} \quad i = 1, 2, \ j = 1, 2. \tag{1.18}$$

Здесь при выполнении (1.7) или (1.9) и $|\arg \lambda| \geqslant \gamma$ $-\infty < x < \infty$, $x_0 = 0$, при выполнении (1.9) и $|\arg \lambda| < \gamma$ $x \geqslant p(2\sigma)$, $x_0 = p(2\sigma)$ или $x \leqslant \tilde{p}(2\sigma)$, $x_0 = \tilde{p}_0(2\sigma)$.

Для функций $\eta_{ij}(x, \lambda)$ $(i = 1,2;\ j = 1,2)$ получим систему уравнений

$$\frac{d\eta_{ij}}{dx} = (w_i - w_j)\eta_{ij} + \sum_{k=1}^{2} c_{ik}(x, \lambda)\eta_{kj}(x, \lambda). \tag{1.19}$$

Лемма 1.2. *Существует решение $\eta_{ij}(x, \lambda)$ системы (1.19), удовлетворяющее следующим условиям:*

1) если выполнено (1.7), то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать $\sigma_1(\varepsilon)$ такое, что при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1$ $-\infty < x < \infty$

$$|\eta_{ll}(x, \lambda) - 1| < \varepsilon$$
$$|\eta_{ij}(x, \lambda)| < \varepsilon \quad i = 1,2, \; j = 1,2. \tag{1.20}$$

2) если выполнено (1.9), то по любому $\varepsilon > 0$ и любому $\gamma > 0$ можно указать $\sigma_1(\varepsilon, \gamma)$ и $\sigma_2(\varepsilon)$ такие, что неравенства (1.20) имеют место в областях

$$-\infty < x < \infty, \; \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1, \; |\arg\lambda| \geqslant \gamma \text{ и } x \geqslant p(2\sigma), \; \operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_2, \; |\arg\lambda| < \gamma.$$

При $x \leqslant \tilde{p}(2\sigma)$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_2$, $|\arg\lambda| \leqslant \gamma$ существует решение $\tilde{\eta}_{ij}(x, \lambda)$ системы (1.19), удовлетворяющее при указанных значениях x, λ оценкам (1.20).

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда выполнено условие (1.9) и $|\arg\lambda| \geqslant \gamma$ или (1.7). Тогда в (1.18) $x_0 = 0$. Вместо (1.19) рассмотрим следующую систему интегральных уравнений:
при $j = 1$

$$\eta_{11}(x, \lambda) = -\int_x^\infty \sum_{k=1}^2 c_{1k}(t, \lambda)\,\eta_{k1}(t, \lambda)\,dt + 1,$$

$$\eta_{21}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^x \exp\left\{\int_t^x [w_2(\tau, \lambda) - w_1(\tau, \lambda)]\,d\tau\right\} \sum_{k=1}^2 c_{2k}(t, \lambda)\,\eta_{k1}(t, \lambda)\,dt. \tag{1.21'}$$

при $j = 2$

$$\eta_{12}(x, \lambda) = -\int_x^\infty \exp\left\{-\int_x^t [w_1(\tau, \lambda) - w_2(\tau, \lambda)]\,d\tau\right\} \sum_{k=1}^2 c_{1k}(t, \lambda)\,\eta_{k2}(t, \lambda)\,dt,$$

$$\eta_{22}(x, \lambda) = -\int_x^\infty \sum_{k=1}^2 c_{2k}(t, \lambda)\,\eta_{k2}(t, \lambda)\,dt + 1. \tag{1.21''}$$

Очевидно, достаточно доказать существование решений систем (1.21′) и (1.21″), удовлетворяющих (1.20). Системы (1.21′) и (1.21″) можно решить методом последовательных приближений, полагая $\eta_{ij}^{(0)} = 0$ $i = 1,2$, $j = 1,2$,

$$\eta_{ij}(x, \lambda) = \sum_{n=0}^\infty (\eta_{ij}^{(n+1)}(x, \lambda) - \eta_{ij}^{(n)}(x, \lambda)), \tag{1.22}$$

а функции $\eta_{ij}^{(n)}(x, \lambda)$ определяются из рекуррентных соотношений, которые могут быть получены, если в системах (1.21′) и (1.21″) заменить в левых частях $\eta_{ij}(x, \lambda)$ на $\eta_{ij}^{(n+1)}(x, \lambda)$, а в правых на $\eta_{ij}^{(n)}(x, \lambda)$. Из этих рекуррентных соотношений с использованием леммы 1.1 легко вытекает справедливость оценки

$$M_n = \sup_{-\infty < x < \infty} |\eta_{ij}^{(n+1)}(x, \lambda) - \eta_{ij}^{(n)}(x, \lambda)| \leqslant M_{n-1} 2\varepsilon \leqslant (2\varepsilon)^n.$$
$$\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1(\varepsilon), \; 1 \leqslant i, \; j \leqslant 2,$$

откуда, в свою очередь, следует существование ограниченных при $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$ решений $\eta_{ij}(x, \lambda)$ систем (1.21′) и (1.21″). Тогда из рассмотрения систем (1.21′) и (1.21″) с использованием леммы 1.1. вытекает (1.20).

Пусть теперь выполнено (1.9) и $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1$, $|\arg\lambda| \leqslant \gamma$. Тогда в (1.18) $x_0 = p(2\sigma)$. Во втором из уравнений системы (1.21′) заменим нижний предел $-\infty$ в интеграле справа числом $p(2\sigma)$ и будем рассматривать обе системы интегральных уравнений лишь при $x \geqslant p(2\sigma)$. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к (1.20) при $x \geqslant p(2\sigma)$.

Если выполнено (1.9) и $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1$, $|\arg\lambda| \leqslant \gamma$ при $x \leqslant \tilde{p}(2\sigma)$ можно аналогично доказать существование решений $\eta_{il}(x, \lambda)$ системы (1.19), удовлетворяющих (1.20). В этом случае в (1.18) $x_0 = \tilde{p}(2\sigma)$, а вместо систем (1.21′) и (1.21″) следует рассмотреть системы

$$\tilde{\eta}_{11}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{k=1}^{2} c_{1k}(t, \lambda)\tilde{\eta}_{k1}(t, \lambda)\,dt + 1,$$

$$\tilde{\eta}_{21}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{\int_{t}^{x} [w_2(\tau, \lambda) - w_1(\tau, \lambda)]\,d\tau\right\} \sum_{k=1}^{2} c_{2k}(t, \lambda)\tilde{\eta}_{k1}(t, \lambda)\,dt.$$

и

$$\tilde{\eta}_{12}(x, \lambda) = -\int_{x}^{\tilde{p}(2\sigma)} \exp\left\{-\int_{x}^{t} [w_1(\tau, \lambda) - w_2(\tau, \lambda)]\,d\tau\right\} \sum_{k=1}^{2} c_{1k}(t, \lambda)\tilde{\eta}_{k2}(t, \lambda)\,dt,$$

$$\tilde{\eta}_{22}(x, \lambda) = \int_{-\infty}^{x} \sum_{k=1}^{2} c_{2k}(t, \lambda)\tilde{\eta}_{k2}(t, \lambda)\,dt + 1.$$

В силу (1.18), система (1.5) имеет решения

$$z_i = \eta_{i1} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} w_1(t, \lambda)\,dt\right\} \quad i = 1,2,$$

и

$$z_i = \eta_{i2} \exp\left\{\int_{x_0}^{x} w_2(t, \lambda)\,dt\right\} \quad i = 1,2.$$

Тогда, в силу (1.4) и (1.2), справедлива следующая **теорема 1.1.** *Уравнение (1.1) имеет решения*

$$y_j(x, \lambda) = w_1^{-\frac{1}{2}}(x, \lambda)\left[\left(1 + \frac{w_1'}{4w_1^2}\right)\eta_{1j}(x, \lambda) + \right.$$
$$\left. + \left(-\frac{w_1'}{4w_1^2} + 1\right)\eta_{2j}(x, \lambda)\right]\exp\left\{\int_{x_0}^{x} w_j(t, \lambda)\,dt\right\}, \tag{1.23}$$

причем

$$y_j'(x, \lambda) = w_1^{\frac{1}{2}}(x, \lambda)\left[\left(1 - \frac{w_1'}{4w_1^2}\right)\eta_{1j}(x, \lambda) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{w_1'}{4w_1^2} + 1\right)\eta_{2j}(x, \lambda)\right]\exp\left\{\int_{x_0}^{x} w_j(t, \lambda)\,dt\right\}, \tag{1.24}$$

где $\eta_{il}(x, \lambda)$ — решения системы (1.19), удовлетворяющие условиям, сформулированным в лемме 1.2. При этом в случае выполнения условия (1.9), *когда* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1$, $|\arg\lambda| \leqslant \gamma$, *уравнение (1.1) имеет решения* $\tilde{y}_j(x, \lambda)$, *для которых при* $x \leqslant p(2\sigma)$ *справедливы равенства (1.23) и (1.24) с заменой справа* $\eta_{ij}(x, \lambda)$ *на* $\tilde{\eta}_{ij}(x, \lambda)$ $i = 1,2$; $j = 1,2$.

Из теоремы 1.1 и оценок функции $v(x, \lambda)$, установленных при доказательстве леммы 1.1, следует, что равенства (1.23) и (1.24) можно записать в виде

$$y_j(x, \lambda) = w_1^{-\frac{1}{2}}(x, \lambda)(1 + \varepsilon_j(x, \lambda)) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} w_j(t, \lambda)\, dt\right\}, \tag{1.25'}$$

$$y_j'(x, \lambda) = w_1^{\frac{1}{2}}(x, \lambda)((-1)^{j-1} + \tilde{\varepsilon}_j(x, \lambda)) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} w_j(t, \lambda)\, dt\right\}, \tag{1.25''}$$

где $\varepsilon_j(x, \lambda)$ и $\tilde{\varepsilon}_j(x, \lambda)$ стремятся к нулю при $\operatorname{Re}\lambda \to +\infty$ равномерно относительно x в областях, описанных в условиях 1 и 2 леммы 1.2. Очевидно, $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ линейно независимы.

Лемма 1.3. *Пусть* $y(x, \lambda)$ — *решение уравнения (1.1);* $y(b, \lambda)$, $y'(b, \lambda)$ — *значения* $y(x, \lambda)$ *и* $y'(x, \lambda)$ *в некоторой точке* $x = b$. *Тогда справедлива оценка*

$$|y(x, \lambda)| \leqslant A(x, \lambda) \exp\{|x - b| \sqrt{v(x, \lambda)}\}, \tag{1.26}$$

где $-\infty < x < \infty$,

$$A(x, \lambda) = \sup_{t \in [b, x]} |y(b, \lambda) + y'(b, \lambda)(t - b)|,$$

$$v(x, \lambda) = \sup_{t \in [b, x]} |a^{-1}(\lambda - q(t))|.$$

Доказательство. Функция $y(x, \lambda)$, будучи решением уравнения (1.1), удовлетворяет тождеству

$$y(x, \lambda) = y(b, \lambda) + y'(b, \lambda)(x - b) + a^{-1}\int_{b}^{x} (x - t)(\lambda - q(t))\, y(t, \lambda)\, dt. \tag{1.27}$$

Решая (1.27) методом последовательных приближений, получим

$$y(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, \lambda),$$

где

$$y_0(x, \lambda) = y(b, \lambda) + y'(b, \lambda)(x - b),$$

$$y_n(x, \lambda) = a^{-1}\int_{b}^{x} (x - t)(\lambda - q(t))\, y_{n-1}(t, \lambda)\, dt.$$

Легко проверить по индукции, что

$$|y_n(x, \lambda)| \leqslant A(x, \lambda) \cdot c_1^n |x - b|^{2n} v^n(x, \lambda)\, \Gamma^{-1}(2n + 1),$$

откуда и вытекает оценка (1.26).

Для дальнейшего нам понадобятся оценки величины $\operatorname{Re} w_1(x, \lambda)$.

Лемма 1.4. *Имеет место оценка*

$$\operatorname{Re} w_1(x, \lambda) \geqslant c_0 |w_1|, \quad c_0 > 0. \tag{1.28}$$

при $-\infty < x < \infty$, $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$ (σ_0 — *достаточно велико*) *и*

1) $0 < \arg a < \pi$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$;
2) $-\pi < \arg a < 0$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant 0$;
3) $\arg a = 0$, λ — *любое, если* $q(x) \leqslant q_1 < \infty$;
4) $\arg a = \pi$, $|\arg\lambda| \geqslant \psi > 0$, *если* $q(x) \to +\infty$ *при* $|x| \to \infty$.

Постоянная c_0 *в (1.28) зависит от* $\arg a$ *в случаях 1) и 2) и от* ψ — *в случае 4).*

Доказательство леммы 1.4 легко вытекает из рассмотрения $\arg w_1(x, \lambda) = \arg \sqrt{a^{-1}(\lambda - q(x))}$.

§ 2. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1.1) ПРИ УСЛОВИЯХ

$$\int_{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = \infty \text{ и } \int^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = \infty.$$

Пусть $h(x) > 0$ — четная, монотонная функция, удовлетворяющая условию

$$\int^{\infty} \frac{dx}{h(x)} = \infty, \tag{2.1}$$

и пусть выполнены условия

$$\int_{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = \infty \text{ и } \int^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = \infty. \tag{2.2}$$

Мы потребуем также (несущественно сузив класс рассматриваемых функций $q(x)$) выполнения при всех x, $-\infty < x < \infty$ условия

в) $|q(x)| < A \exp\{A_1 Q(|x|)\}$ $A_1 > 0$,

где $Q(x)$ — монотонно возрастает и $\int^{\infty} x^{-3} Q(x)\,dx < \infty$.

Иногда вместо условия в) нам придется использовать более сильное требование:

в′) существует монотонная при $x > 0$ функция $\tilde{h}(x)$, удовлетворяющая условию (2.1) и такая, что при всех x, $-\infty < x < \infty$

$$\sqrt{|q(x)|} < A_2 \tilde{h}(|x|) + A_3;\quad A_2,\ A_3 \geqslant 0.$$

Теорема 2.1. *Пусть функция* $q(x)$ *удовлетворяет условиям а), б) § 1 и условию в), которое заменяется условием в′ и (2.2) в случаях* $q(x) \to +\infty$, $\arg a = 0$ *и* $q(x) < q_1$, $\arg a = \sqrt{\pi}$, *а функция* $h(x)$ *удовлетворяет условию (2.1).*

Тогда всякое решение $y(x, \lambda)$ *уравнения (1.1), аналитическое в некоторой правой полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$ *и удовлетворяющее при каком-либо* $c > 0$ *условию*

$$\sup_x |y(x, \lambda)| \exp\left\{-\left|\int_0^x h(t)\,dt\right|\right\} < c, \tag{2.3}$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условию (2.3), и пусть $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — те решения уравнения (1.1), асимптотика которых определяется формулами (1.25′) и (1.25″). Представив $y(x, \lambda)$ в виде $y(x, \lambda) = c_1(\lambda)\, y_1(x, \lambda) + c_2(\lambda)\, y_2(x, \lambda)$, оценим $c_1(\lambda)$ и $c_2(\lambda)$ на вертикальной прямой $\lambda = \sigma_1 + i\tau$ при достаточно большом σ_1.

Из асимптотики (1.25) следует, что

$$\left|\frac{y_2(x, \sigma_1 + i\tau)}{y_1(x, \sigma_1 + i\tau)}\right| = [1 + \tilde{\varepsilon}(x, \sigma_1 + i\tau)] \exp\left\{-2\int_{x_0}^{x} w_1(t, \lambda)\, dt\right\}, \tag{2.4}$$

где $|\tilde{\varepsilon}(x, \sigma_1 + i\tau)| < \varepsilon$ при достаточно большом σ_1, $-\infty < x < \infty$ и $|\tau| > \tau_0 > 0$.

Оставим пока в стороне случаи $\arg a = 0$, если $q(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$ и $\arg a = \pi$, если $q(x) \leqslant q_1$, $-\infty < x < \infty$, тогда в этих условиях возможно применение леммы 1.4. Пусть сначала выполнено любое из условий 1), 3) или 4) этой леммы. Ограничимся тогда рассмотрением значений $\tau \geqslant \tau_0$.

Из (2.4) вытекает существование такого $x_1 > 0$, что при $x \geqslant x_1$, $\lambda = \sigma_1 + i\tau$, $\tau \geqslant \tau_0$ имеет место оценка

$$\left|\frac{y_2(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)}\right| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{2.5}$$

поскольку, во-первых, справедливо (1,28), а во-вторых, из условия б) следует [14], что $\int\limits_0^\infty \sqrt{|q(x)|}\, dx = \infty$, $\int\limits_{-\infty}^0 \sqrt{|q(x)|}\, dx = \infty$.

Пусть в выбранной точке $\lambda (\operatorname{Re}\lambda = \sigma_1;\ \tau \geqslant \tau_0)$ справедливо неравенство

$$|c_1(\lambda)| \geqslant |c_2(\lambda)|. \tag{2.6}$$

Используя (2.5) и (2.6), получим при $x \geqslant x_1$

$$|y(x, \lambda)| = |c_1(\lambda)\, y_1(x, \lambda)| \cdot \left|1 + \frac{c_2(\lambda)\, y_2(x, \lambda)}{c_1(\lambda)\, y_1(x, \lambda)}\right| \geqslant \frac{1}{2} |c_1(\lambda)\, y_1(x, \lambda)|. \tag{2.7}$$

Тогда из (2.3) и (1.25) получим при $x \geqslant x_1$

$$c \geqslant \frac{1}{2} |c_1(\lambda) y_1(x, \lambda)| \exp\left\{-\int_0^x h(t)\, dt\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} |c_1(\lambda)| \cdot |w_1(x, \lambda)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{\int_0^x [\operatorname{Re} w_1(t, \lambda) - h(t)]\, dt\right\}. \tag{2.8}$$

Определим теперь функцию $x = g(\tau)$ из условия

$$\sqrt{\tau} = \delta h(g(\tau))^*, \tag{2.9}$$

где $g(\tau) > x_1$, $\delta > c_0^{-1} |a|^{\frac{1}{2}}$ (c_0 из (1.28)).

* Разумеется, не уменьшая общности, функцию $h(x)$ можно считать непрерывной и даже гладкой.

Очевидно, (2.9) определяет функцию $g(\tau)$ однозначно при достаточно больших τ, причем при $\tau\to\infty$ также $g(\tau)\to\infty$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $\frac{x}{h(x)}\to 0$ при $|x|\to\infty$. Отсюда и из (2.9) следует, что при достаточно больших τ справедлива оценка

$$g(\tau)\leqslant\delta^{-1}\sqrt{\tau}. \tag{2.10}$$

Полагая в правой части (2.8) $x=g(\tau)$ и используя (1.28), получим

$$|c_1(\lambda)|\leqslant 4c\sqrt{|w_1(g(\tau),\ \lambda)|}\exp\left\{\int\limits_0^{g(\tau)}[h(t)-c_0\cdot|w_1|]\,dt\right\}. \tag{2.11}$$

Используя условие в) и оценку (2.10), получим

$$|w_1(g(\tau),\ \lambda)|\leqslant(\sigma_1+|\tau|)^{\frac{1}{2}}+|q(g(\tau))|^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant(\sigma_1+|\tau|)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{A}\exp\left\{\frac{1}{2}A_1Q(\delta^{-1}\sqrt{\tau})\right\}\equiv\nu(\tau), \tag{2.12}$$

причем в силу в)

$$\int^{\infty}\tau^{-2}\ln\nu(\tau)\,d\tau<\infty. \tag{2.13}$$

Из (2.9) заключаем, что при $0\leqslant t\leqslant g(\tau)$

$$h(t)-c_0|w_1|\leqslant h(g(\tau))-c_0|a|^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\tau}=-c_1\sqrt{\tau},$$

где $c_1=-\delta^{-1}+c_0|a|^{-\frac{1}{2}}>0$. Тогда из (2.11) с учетом (2.12) получим

$$|c_1(\lambda)|\leqslant 4c\sqrt{\nu(\tau)}\exp\{-c_1\sqrt{\tau}g(\tau)\}=4c\exp\{-\psi(\tau)\}, \tag{2.14}$$

где $\psi(\tau)=c_1\sqrt{\tau}g(\tau)-\ln\sqrt{\nu(\tau)}$.

Из (2.6) вытекает справедливость оценки (2.14) и для функции $c_2(\lambda)$.

Если в рассматриваемой точке λ вместо (2.6) имеет место неравенство

$$|c_2(\lambda)|>|c_1(\lambda)|, \tag{2.15}$$

то, используя (2.4), найдем σ_2 и x_2 такие, что (при $\operatorname{Re}\lambda=\sigma_2$, $\tau\geqslant\tau_0$ и $x\leqslant x_2$) $\left|\frac{y_1(x,\ \lambda)}{y_2(x,\ \lambda)}\right|\leqslant\frac{1}{2}$, откуда (при $x\leqslant x_2$) $|y(x,\ \lambda)|\geqslant\frac{1}{2}|c_2(\lambda)y_2(x,\ \lambda)|$. Выбирая $\tilde{g}(\tau)=-g(\tau)$ и проводя аналогичные рассуждения, придем к оценке (2.14) для $c_2(\lambda)$, а в силу (2.15) и для $c_1(\lambda)$. Итак, при достаточно большом σ_1 и $\tau\geqslant\tau_0$ на полупрямой $\operatorname{Re}\lambda=\sigma_1$ обе функции $c_1(\lambda)$ и $c_2(\lambda)$ удовлетворяют оценке (2.14).

Из (2.9) следует

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\frac{g(\tau)}{\tau^{\frac{3}{2}}}\,d\tau=\frac{2}{\delta}\int\limits_{g(\tau_0)}^{\infty}\frac{yh'(y)\,dy}{h^2(y)}=\frac{2}{\delta}\left[-\frac{y}{h(y)}\Bigg|_{g(\tau_0)}^{\infty}+\int\limits_{g(\tau_0)}^{\infty}\frac{dy}{h(y)}\right]=\infty$$

в силу (2.1) и того, что $\frac{y}{h(y)}\to 0$ при $|y|\to\infty$. Отсюда и из (2.13) вытекает, что $\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\tau^{-2}\psi(\tau)\,d\tau=\infty$.

Далее, из асимптотики (1.25) при любом фиксированном значении x и $\operatorname{Re}\lambda = \sigma_1$, $\tau \geqslant \tau_0$ вытекает справедливость оценки

$$|y_j(x, \lambda)| < A(x)\exp[B(x)\sqrt{\tau}] \quad j = 1,2. \tag{1.16}$$

Используя (2.14) и (2.16), получим при указанных значениях x и λ оценку

$$|y(x, \lambda)| \leqslant A_4 \exp[-\psi_1(\tau)], \tag{2.17}$$

где

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}\psi_1(\tau)\,d\tau = \infty. \tag{2.18}$$

Ограниченность аналитической функции $y(x, \lambda)$ при каждом фиксированном x в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1$, очевидно, вытекает из (2.3). Отсюда и из (2.17) и (2.18) следует, в силу известной теоремы из теории аналитических функций [16], что $y(x, \lambda) \equiv 0$.

При выполнении условия 2) леммы 1.4 нужно лишь вместо рассмотрения $y(x, \lambda)$ при $\operatorname{Re}\lambda = \sigma_1$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant \tau_0$ оценить ее при $\operatorname{Re}\lambda = \sigma_1$, $\operatorname{Im}\lambda \leqslant -\tau_0$.

Итак, для завершения доказательства нам осталось разобрать два случая: $\arg a = 0$, $q(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$ и $\arg a = \pi$, $q(x) < q_1$, $-\infty < x < \infty$.

Поскольку эти случаи аналогичны, рассмотрим лишь первый из них. В этом случае имеем

$$\operatorname{Re}\omega_1 = \begin{cases} |w_1|\cos\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\tau}{\delta_1 - q(x)} & \text{при } q(x) \leqslant \sigma_1, \\ |w_1|\sin\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{\tau}{\sigma_1 - q(x)}\right| & \text{при } q(x) \geqslant \sigma_1, \end{cases} \tag{2.19}$$

$$\lambda = \sigma_1 + i\tau, \quad |\tau| \geqslant \tau_0 > 0.$$

Отсюда при достаточно больших значениях $|x|$ (таких, что $q(x) > \sigma + \tau_0$) можно получить:

$$\operatorname{Re}w_1 \geqslant |w_1|\sin\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|\frac{\tau}{\delta_1 - q}\right| \geqslant \frac{1}{8}\frac{\tau}{\sqrt{|\delta_1 - q|}}.$$

Из последнего неравенства, в силу условий (2.2) и (2.4), вытекает оценка (2.5). Выбирая вновь $g(\tau)$ из условия (2.9) с другим значением δ, получим при $\tau \geqslant \tau_0$ оценку $\sin\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left|\frac{\tau}{\sigma_1 - q}\right| \geqslant A_5 > 0$ (A_5 зависит от постоянных A_2 и A_3 в условии в′), справедливую, в силу этого условия на отрезке $0 \leqslant t \leqslant g(\tau)$. Действительно, на этом отрезке

$$\left|\frac{\tau}{\sigma_1 - q(t)}\right| \geqslant \frac{|\tau|}{\sigma_1 + |q(t)|} \geqslant \frac{|\tau|}{\sigma_1 + (A_2\tilde{h}(t) + A_3)^2} \geqslant \frac{|\tau|}{\sigma_1 + (A_2 h(t) + A_3)^2} \geqslant A_5',$$

так как, не уменьшая общности, можно считать $h(x) \geqslant \tilde{h}(x)$.

Поэтому при $\lambda = \sigma_1 + i\tau$, $\tau \geqslant \tau_0$, $0 \leqslant x \leqslant g(\tau)$ $\operatorname{Re}w_1$ удовлетворяет оценке (1.28). Проводя далее оценки, аналогичные предыдущим, придем к (2.17) и (2.18), что, как и выше, заканчивает доказательство теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть $H(x)$ — четная, монотонная функция, удовлетворяющая условиям*

$$\int^{\infty} \frac{dx}{H(x)} < \infty, \quad xH(x) \leqslant B_0 \int_0^x H(t)\,dt, \tag{2.20}$$

где $B_0 > 0$ — какая-либо постоянная, $0 \leqslant x < \infty$, а функция $q(x)$ такова, что для любой $H(x)$ удовлетворяющей условиям (2.20), справедливо соотношение *

$$\sqrt{|q(x)|} = o(H(x)) \text{ при } |x| \to \infty. \tag{2.21}$$

Тогда существует аналитическое в некоторой правой полуплоскости $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$ решение $y(x,\lambda)$ уравнения (1.1), отличное от тождественного нуля и удовлетворяющее при некотором $c > 0$ и $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ условию

$$\sup_x |y(x, \lambda)| \exp\left\{-\left|\int_0^x H(t)\,dt\right|\right\} \leqslant c. \tag{2.22}$$

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение (1.1), удовлетворяющее условиям $y(0,\lambda) = 1$, $y'(0,\lambda) = 0$. Очевидно, $y(x,\lambda)$ — аналитическая при $\mathrm{Re}\lambda \geqslant \sigma_0$ функция.

В силу леммы (1.3)

$$|y(x, \lambda)| \leqslant \exp\{|a|^{-\frac{1}{2}} |x| \max_{t \in [0,x]} \sqrt{|\lambda - q(t)|}\} \tag{2.23}$$

Из (2.23) при $x > 0$ имеем

$$|y(x, \lambda)| \leqslant \exp\{|a|^{-\frac{1}{2}} x [\sqrt{r} + \max_{t\in[0,x[} \sqrt{|q(t)|}]\} \quad (r = |\lambda|) \tag{2.24}$$

Покажем, что при всех $x > 0$ и некотором $B > 0$ справедливо неравенство

$$x \max_{0<t\leqslant x} \sqrt{|q(t)|} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{|a|} \int_0^x H(t)\,dt + Bx. \tag{2.25}$$

Действительно, в силу (2.21) при любом $\varepsilon > 0$ и некотором $c(\varepsilon)$ имеет место оценка

$$\sqrt{|q(t)|} \leqslant \varepsilon H(t) + c(\varepsilon) \tag{2.26}$$

при $0 \leqslant t\ \infty$ и потому

$$\max_{0\leqslant t\leqslant x} \sqrt{|q(t)|} \leqslant \varepsilon H(x) + c(\varepsilon). \tag{2.27}$$

Из (2.20) и (2.27) вытекает справедливость оценки (2.25).

Из оценок (2.24) и (2.25) получаем при $x > 0$

$$|y(x, \lambda)| \leqslant \exp\left\{\sqrt{r}\,|a|^{-1} x + \frac{1}{2}\int_0^x H(t)\,dt + B|a|^{-\frac{1}{2}} x\right\}. \tag{2.28}$$

* Сравнивая (2.2) и (2.20), заметим, что условия (2.21) и (2.2) весьма близки

Аналогичная оценка с заменой x на $|x|$ справедлива также при $x<0$. Поэтому при всех x, $-\infty<x<\infty$, и $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\delta_0$ получим

$$|y(x,\lambda)|\leqslant\exp\left\{|x||a|^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{r}+B)+\frac{1}{2}\left|\int_0^x H(t)\,dt\right|\right\}, \tag{2.29}$$

из (2.28) получаем

$$\sup_{x\geqslant0}|y(x,\lambda)|\exp\left\{-\int_0^x H(t)\,dt\right\}\leqslant\sup_{x\geqslant0}\exp\left\{\int_0^x\left[\frac{B+\sqrt{r}}{\sqrt{|a|}}-\frac{1}{2}H(t)\right]dt\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{x\geqslant0}\exp\left\{\int_0^x\left[B_2\sqrt{r}-\frac{1}{2}H(t)\right]dt\right\}\equiv\exp\psi_+ r), \tag{2.30}$$

где $\psi_+(r)=\int_0^{g_1(r)}\left[B_2\sqrt{r}-\frac{1}{2}H(t)\right]dt$, а $g_1(r)>0$ определяется из соотношения

$$B_2\sqrt{r}\equiv\frac{1}{2}H(g_1(r)). \tag{2.31}$$

Очевидно, $g_1(r)>0$ однозначно определяется соотношением (2.31), причем $g_1(r)\to+\infty$ при $r\to\infty$.

Из определения $\psi_+(r)$ и $g_1(r)$ получаем

$$0<\int_{r_0}^{\infty}\frac{\psi_+(r)}{r^2}\,dr\leqslant\int_{r_0}^{\infty}B_2\sqrt{r}\,\frac{g_1(r)}{r^2}\,dr=B_3\int_{g(r_0)}^{\infty}\frac{yH'(y)}{H^2(y)}\,dy<\infty,$$

что видно, если проинтегрировать по частям, использовать условие (2.20) и вытекающее из него $yH^{-1}(y)\to0$ при $y\to\infty$.

Из (2.30) аналогично получаем

$$\sup_{x<0}|y(x,\lambda)|\exp\left\{-\left|\int_0^x H(t)\,dt\right|\right\}\leqslant\exp\{\psi_-(r)\}, \tag{2.32}$$

где $\int_{r_0}^{\infty}r^{-2}\psi_-(r)\,dr<\infty$.

Объединяя (2.30) и (2.32), приходим к оценке

$$\sup_x|y(x,\lambda)|\exp\left\{-\left|\int_0^x H(t)\,dt\right|\right\}\leqslant\exp\{\psi(r)\}, \tag{2.33}$$

$$\int_{r_0}^{\infty}\frac{\psi(r)}{r^2}\,dr<\infty. \tag{2.34}$$

Из (2.34), в силу известного условия Карлемана — Островского [16] следует существование функции $c(\lambda)\not\equiv0$, аналитической в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_0$ и удовлетворяющей оценке $|c(\lambda)|\leqslant\exp\{-\psi(r)\}$.

Тогда, в силу (2.22) функция $y_1(x,\lambda)=c(\lambda)\,y(x,\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Замечание 2.1. В теореме 2.2 условие (2.21) накладывает ограничение на поведение функции $q(x)$. Но из доказательства теоремы видно, что ее результат будет также справедлив для произвольной функции $q(x)$, если при этом функция $H(x)$ удовлетворяет условию (2.20), и, кроме того, (2.21).

§ 3. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ (1.1) ПРИ УСЛОВИЯХ

$$\int\limits_{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} < \infty, \quad \int\limits^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} < \infty.$$

В этом параграфе мы предполагаем, что $q(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$ или $q(x) \to -\infty$ при $|x| \to \infty$.

Обозначим

$$\mu = \begin{cases} |a|^{-\frac{1}{2}} \cos \frac{1}{2} \varphi \text{ при } q(x) \to -\infty, \\ |a|^{-\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{2} |\varphi| \text{ при } q(x) \to +\infty. \end{cases} \tag{3.1}$$

$$\varphi = \arg a, \quad -\pi < \varphi \leqslant \pi.$$

Случай $\varphi = \pi$, $q(x) \to +\infty$ будет рассмотрен в теореме 3.2. В остальных случаях имеет место.

Теорема 3.1. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям а) и б). Всякое решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее при любом λ из некоторой правой полуплоскости условию*

$$c_\lambda > \sup_x |y(x, \lambda)| \frac{\sqrt[4]{1 + |q(x)|}}{\alpha(x)} \exp\left\{-\mu \left|\int\limits_0^x \sqrt{|q(t)|}\, dt\right|\right\}, \tag{3.2}$$

где $\alpha(x) > 0$ — четная непрерывная функция, причем

$$\inf \alpha(x) = 0. \tag{3.3}$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda) \not\equiv 0$ — произвольное решение уравнения (1.1); представим его в виде $y(x, \lambda) = c_1(\lambda) y_1(x, \lambda) + c_2(\lambda) y_2(x, \lambda)$, где $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — решения уравнения (1.1), описанные в теореме 1.1.

Покажем, что если $y(x, \lambda) \not\equiv 0$, то на луче

$$\lambda = |\lambda| e^{i\gamma}, \text{ где } \begin{cases} 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \text{ при } \varphi > 0 \text{ или } \varphi = 0 \text{ и } q \to +\infty \\ -\frac{\pi}{2} < \gamma < 0 \text{ при } \varphi < 0 \\ \gamma = 0 \text{ при } \varphi = 0 \text{ и } q \to -\infty \end{cases} \tag{3.4}$$

не выполняется условие (3.2).

Пусть сначала в выбранной точке λ луча (3.4) имеет место неравенство

$$|c_1(\lambda)| \geqslant |c_2(\lambda)|. \tag{3.5}$$

Из асимптотики (1.24') с использованием леммы (1.4) (во всех случаях, кроме $\varphi=0$, $q(x)\to+\infty$ и $\varphi=\pi$, $q(x)\to-\infty$) при достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda$ вытекает оценка

$$\left|\frac{y_2(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}\right| < 2\exp\left\{-2\int_0^x |w_1(t,\lambda)|\cos\arg w_1 dt \leqslant 2\exp\left\{-2c\int_0^x |w_1(t,\lambda)|\,dt\right\}.$$

Отсюда видно, что при достаточно больших значениях $\operatorname{Re}\lambda$ и x

$$\left|\frac{y_2(x,\lambda)}{y_1(x,\lambda)}\right| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

При $\varphi=0$, $q(x)\to+\infty$, $\sigma>\sigma_1$ и при $\varphi=\pi$, $q(x)\to-\infty$, $\sigma>\sigma_1$, на отрезке $0\leqslant t\leqslant p(\sigma_1)$ имеем $\cos\arg w_1>c_1>0$, $|w_1|>\sqrt{\operatorname{tg}\gamma\cdot\sigma_1}$, следовательно, при $x\geqslant p(\sigma_1)$ $\int_0^x \operatorname{Re} w_1 dt \geqslant c_2\sqrt{\sigma_1}\,p(\sigma_1)$, что при достаточно большом σ_1 приводит снова к (3.6). Тогда имеет место оценка

$$|y(x,\lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|c_1(\lambda)||y_1(x,\lambda)|,\ \operatorname{Re}\lambda\geqslant\sigma_1\ x\geqslant x_1. \tag{3.7}$$

Следовательно,

$$\sup_x |y(x,\lambda)|\,\alpha^{-1}(x)\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\left|\int_0^x\sqrt{|q(t)|}\,dt\right|\right\}\geqslant$$

$$\geqslant |c_1(\lambda)|\sup_{x\geqslant x_1}\alpha^{-1}(x)|w_1|^{-\frac{1}{2}}\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{\int_0^x[\operatorname{Re} w_1-\mu\sqrt{|q|}]\,dt\right\}. \tag{3.8}$$

Поскольку $|w_1|^{-\frac{1}{2}}\sqrt[4]{1+|q|}\geqslant|\lambda|^{-\frac{1}{4}}|a|^{\frac{1}{4}}$ при $|\lambda|>1$ и при достаточно больших x и $q(x)\to-\infty$ имеем $|w_1|>\sqrt{|q|\cdot|a|^{-1}}$, $\cos\arg w_1\geqslant\geqslant\mu\sqrt{|a|}$, то, используя (3.3), придем к тому, что условие (3.2) не выполняется.

При $q(x)\to+\infty$ используем следующие неравенства, справедливые при достаточно больших x:

$$|w_1|\geqslant\sqrt{|a^{-1}q|}\left(1-\frac{\sigma}{q}\right) \text{ при } x>p(\sigma); \tag{3.9}$$

$$\cos\arg w_1=\sin\frac{|\varphi|}{2}+2\cos\left[\frac{|\varphi|}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{|\tau|}{q-\sigma}\right]\sin\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{|\tau|}{q-\sigma}\geqslant$$

$$\geqslant\mu|a|^{\frac{1}{2}}+\beta_1\frac{|\tau|}{q-\sigma},\ \text{где } \beta_1=\frac{1}{8}\cos\frac{\pi+|\varphi|}{4}. \tag{3.10}$$

(Последнее неравенство вытекает из оценок

$$\cos\frac{1}{2}\left[|\varphi|+\operatorname{arc\,tg}\frac{|\tau|}{q-\sigma}\right]\geqslant\cos\frac{\pi+|\varphi|}{4} \text{ при } x>p\left(\sigma+|\tau|\operatorname{ctg}\frac{\pi-|\varphi|}{2}\right),$$

$$\sin\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{|\tau|}{q-\sigma}\geqslant\frac{|\tau|}{16(q-\sigma)} \text{ при } x>p\left(\sigma+\frac{|\tau|}{x_0}\right),$$

а x_0 таково, что при $0<x<x_0$, $\sin x>\frac{x}{2}$ и $\operatorname{arc\,tg} x>\frac{x}{2}$), Из (3.9) и (3.10) получаем

$$\operatorname{Re} w_1 - \mu\sqrt{|q|} \geqslant \sqrt{\left|\frac{q}{a}\right|}\left[\frac{\beta\sigma}{q}\operatorname{tg}\gamma - \frac{\mu\sqrt{|a|}\,\sigma}{q} - \frac{\beta_1\sigma^2\operatorname{tg}\gamma}{q(q-\sigma)}\right] > 0$$

при достаточно большом γ и $x > x_1(\sigma)$. Тогда (3.8) вновь показывает, что (3.2) не имеет места.

Если вместо (3.5) выполнено противоположное неравенство, то, поскольку $|y_1(x,\lambda)\,y_2^{-1}(x,\lambda)| \leqslant \frac{1}{2}$ при достаточно больших значениях $\operatorname{Re}\lambda$ и $x \leqslant x_2$, как и выше, получаем

$$\sup_x |y(x,\lambda)|\,\alpha^{-1}(x)\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\left|\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right|\right\} \geqslant$$

$$\geqslant |c_2(\lambda)|\sup_{x\leqslant x_2}|y_2(x,\lambda)|\,\alpha^{-1}(x)\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\left|\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right|\right\} = \infty,$$

что заканчивает доказательство теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть* $\varphi = \pi$, $q(x) \to +\infty$, *удовлетворяет условиям а) и б) и*

$$\int_{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} < \infty, \qquad \int^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} < \infty. \tag{3.11}$$

Тогда справедлив результат теоремы 3.1.

Для доказательства заметим, что в этом случае $\mu = |a|^{-\frac{1}{2}}$ и на луче $\tau = 0$ при достаточно больших x $\cos\arg w_1 = 1$. Поэтому, используя (3.9), при $x > x_1$ имеем

$$\int_{x_1}^x (\operatorname{Re} w_1 - \sqrt{|a^{-1}q|})\,dt \geqslant -\int_{x_1}^x \sqrt{|a^{-1}q|}\cdot\frac{\sigma}{|q|}\,dt > -\infty$$

в силу условия (3.11) на $+\infty$. Отсюда видно, что при наличии (3.5) (3.8) снова приводит к невыполнению условия (3.2). Если неравенство (3.5) не выполнено, приходим к тому же результату, используя условие (3.11) на $-\infty$.

Теорема 3.3. *Пусть* $q(x)$ *удовлетворяет условиям а) и б)* $q'(x)$ *сохраняет знак при достаточно больших* $|x|$ *и*

$$\int_{-\infty} |q|^{-\frac{1}{2}}\ln|q|\,dx < \infty, \qquad \int^{\infty} |q|^{-\frac{1}{2}}\ln|q|\,dx < \infty. \tag{3.12}$$

Тогда существует решение $y(x,\lambda) \not\equiv 0$ уравнения (1.1), *аналитическое в некоторой правой полуплоскости и удовлетворяющее при всех* λ *из этой полуплоскости условию*

$$\sup_x |y(x,\lambda)|\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\left|\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right|\right\} < c. \tag{3.13}$$

Доказательство. Пусть $y(x,\lambda)$ — решение уравнения (1.1) при условиях $y(0,\lambda) = 1$, $y'(0,\lambda) = 0$. Как и в доказательстве теоремы 2.2

имеет место оценка (2.25), из которой при $\tilde{p}(2r) \leqslant x \leqslant p(2r)$ вытекает неравенство

$$|y(x, \lambda)| \leqslant \exp\{c_1|x||a|^{-\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}\}, \; r = |\lambda|. \tag{3.14}$$

В частности,

$$|y(p(2r), \lambda)| \leqslant \exp\{c_2 r^{\frac{1}{2}} p(2r)\}. \tag{3.15}$$

В силу тождества

$$y'(x, \lambda) \equiv \frac{1}{a}\int_0^x (\lambda - q(t)\, y(t, \lambda)\, dt,$$

учитывая (3.14), получим

$$|y'(p(2r), \lambda)| \leqslant c_3 \exp\{c_4 r^{\frac{1}{2}} p(2r)\}. \tag{3.16}$$

Аналогично

$$|y(\tilde{p}(2r), \lambda)| \leqslant \exp\{c_2 r^{\frac{1}{2}} |\tilde{p}(2r)|\} \tag{3.17}$$

и

$$|y'(\tilde{p}(2r), \lambda)| \leqslant c_5 \exp\{c_6 r^{\frac{1}{2}} |\tilde{p}(2r)|\}.$$

При $x \geqslant p(2r)$ представим $y(x, \lambda)$ в виде

$$y(x, \lambda) = c_1(\lambda)\, y_1(x, \lambda) + c_2(\lambda)\, y_2(x, \lambda),$$

где $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ — функции, описанные в теореме 1.1. Оценим $c_1(\lambda)$ и $c_2(\lambda)$, используя тождества

$$\begin{aligned} y(p(2r), \lambda) &= c_1(\lambda)\, y_1(p(2r), \lambda) + c_2(\lambda)\, y_2(p(2r), \lambda), \\ y'(p(2r), \lambda) &= c_1(\lambda)\, y_1'(p(2r), \lambda) + c_2(\lambda)\, y_2'(p(2r), \lambda). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Из асимптотик (1.25′) и (1.25″) видно, что при достаточно больших $\operatorname{Re}\lambda$ определитель Вронского D функций $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ удовлетворяет условию $|D| > 1$. Тогда из (3.18) с учетом (3.15), (3.16), (1.25′), (1.25″) получаем

$$|c_1(\lambda)|, \; |c_2(\lambda)| \leqslant c_7 \exp\{c_8 r^{\frac{1}{2}} p(2r)\}. \tag{3.19}$$

Оценим теперь $y_1(x, \lambda)$ и $y_2(x, \lambda)$ при $x \geqslant p(2r)$:

$$\sup_{x \geqslant p(2r)} |y_1(x, \lambda)| \sqrt[4]{1 + |q|} \exp\left\{-\mu \int_0^x \sqrt{|q|}\, dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \sup_{x \geqslant p(2r)} \exp\left\{\int_0^x [\sqrt{|a|^{-1}(r + |q|)} \cos\arg w_1 - \mu\sqrt{|q|}]\, dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A_1 \exp\left\{\int_{p(2r)}^{\infty}\left[\sqrt{r + |q|}\left(\mu + 2|a|^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2r}{q}\right) - \mu\sqrt{|q|}\right] dt +\right.$$

$$\left. + |a|^{-\frac{1}{2}} \int_0^{p(2r)} \sqrt{r + |q|}\, dt\right\} \equiv A_1 \exp\{\psi + (r)\}. \tag{3.20}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались справедливой при $x \geqslant p(2r)$ оценкой $\cos\arg w_1 \leqslant \mu|a|^{\frac{1}{2}} + 2\sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left|\frac{\tau}{\sigma - q}\right| \leqslant \mu|a|^{\frac{1}{2}} + 2\sin\frac{1}{4}\operatorname{acrtg}\frac{2r}{q}$. Для функции $y_2(x, \lambda)$ из асимптотики (1.25′) имеем

$$\sup_{x > p(2r)} |y_2(x, \lambda)|\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right\} \leqslant A_2. \tag{3.21}$$

Объединяя (3.19), (3.20) и (3.21), получим

$$\sup_{x > p(2r)} |y(x, \lambda)|\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right\} <$$
$$\leqslant A_3\exp\left\{\psi_+(r) + A_4 r^{\frac{1}{2}} p(2r)\right\}. \tag{3.22}$$

При $x < p(2r)$ представим $y(x, \lambda)$ в виде

$$y(x, \lambda) = \tilde{c}_1(\lambda)\tilde{y}_1(x, \lambda) + \tilde{c}_2(\lambda)\tilde{y}_2(x, \lambda),$$

где $\tilde{y}_1(x, \lambda)$ и $\tilde{y}_2(x, \lambda)$ — функции, также описанные в теореме 1.1. Для функций $\tilde{c}_1(\lambda)$ и $\tilde{c}_2(\lambda)$, как и в предыдущем случае, получается оценка типа (3.19) с заменой $p(2r)$ на $|\tilde{p}(2r)|$. Используя асимптотику (1.24) при $x \leqslant \tilde{p}(2r)$ и оценки $\tilde{c}_1(\lambda)$ и $\tilde{c}_2(\lambda)$, как и выше, получим

$$\sup_{x < \tilde{p}(2r)} |y(x, \lambda)|\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\left|\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right|\right\} <$$
$$< A_5\exp\{\psi_-(r) + A_6 r^{\frac{1}{2}}|\tilde{p}(2r)|\}, \tag{3.23}$$

где

$$\psi_-(r) = \int_{\tilde{p}(2r)}^{0} \sqrt{|a|^{-1}(r+|q|)}\,dt +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\tilde{p}(2r)} \left[\sqrt{r+|q|}\left(\mu + 2|a|^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2r}{|q|}\right) - \mu\sqrt{|q|}\right]dt.$$

Докажем сходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\psi_+(r)\,dr = \int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\int_0^{p(2r)} \sqrt{r+|q|}\,dt\,dr +$$
$$+ \int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\int_{p(2r)}^{\infty} \left[\sqrt{r+|q|}\left(\mu + 2|a|^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{2r}{|q|}\right) - \mu\sqrt{|q|}\right]dt \equiv I_1 + I_2:$$

$$I_1 \leqslant B_1\int_{r_0}^{\infty} \frac{r^{\frac{1}{2}}p(2r)}{r^2}\,dr = B_2\int_{p(2r_0)}^{\infty} \frac{q'(y)\,y\,dy}{|q^{\frac{3}{2}}(y)|} = B_3\left[-\frac{y}{\sqrt{|q|}}\Big|_{p(2r_0)}^{\infty} +\right.$$
$$\left. + \int_{p(2r_0)}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{|q|}}\right] < \infty$$

в силу условия (3.11), вытекающего из (3.12)

$$I_2 \leqslant \int_{r_0}^{\infty} r^{-2} \int_{p(2r)}^{\infty} \sqrt{|q|}\left[\sqrt{1+\frac{r}{|q|}}\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{|a|}}\sin\frac{r}{2|q|}\right)-\mu\right] dt\,dr =$$

$$= \int_{p(2r_0)}^{\infty} \sqrt{|q(t)|} \int_{r_0}^{\frac{1}{2}|q(t)|} r^{-2}\left[\sqrt{1+\frac{r}{|q|}}\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{|a|}}\sin\frac{r}{2|q|}\right)-\mu\right] dr\,dt =$$

$$= \int_{p(2r_0)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{|q(t)|}} \int_{r_0|q^{-1}(t)|}^{\frac{1}{2}} \rho^{-2}\left[\sqrt{1+\rho}\left(\mu+\frac{2}{\sqrt{|a|}}\sin\frac{1}{2}\rho\right)-\mu\right] d\rho\,dt < \infty$$

в силу условия (3.12).

Аналогично доказывается сходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\psi_-(r)\,dr.$$

Из оценки I_1, вытекает также сходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{r^{\frac{1}{2}}p(2r)}{r^2}\,dr.$$

Объединяя (3.14), (3.22) и (3.23), получим, наконец,

$$\sup_x |y(x,\lambda)|\sqrt[4]{1+|q|}\exp\left\{-\mu\left|\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right|\right\} \leqslant A_7\exp\{\psi(r)\},$$

где

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\psi(r)\,dr < \infty.$$

Доказательство теоремы 3.3 заканчивается так же, как и доказательство теоремы 2.2.

Теорема 3.4. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2 и $q'(x)$ сохраняет знак при достаточно больших значениях $|x|$. Тогда справедлив результат теоремы 3.3.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы. В изменениях нуждаются лишь оценки (3.20) и (3.23), а значит, и определение функций $\psi_+(r)$ и $\psi_-(r)$. Вместо (3.20) получаем:

$$\sup_{x>p(2r)} |y_1(x,\lambda)|\sqrt[4]{1+q}\exp\left\{-\mu\int_0^x \sqrt{|q|}\,dt\right\} \leqslant$$

$$\leqslant A_1\exp\mu\left\{\int_0^{p(2r)} \sqrt{r+|q|}\,dt + \int_{p(2r)}^{\infty}\left[\sqrt[4]{r^2+q^2}-\sqrt{q}\right]dt \equiv A_1\exp\{\psi_+(r)\}\right.$$

и аналогично

$$\psi_-(r) = \mu\left\{\int_{p(2r)}^{0} \sqrt{r+|q|}\,dt + \int_{-\infty}^{\tilde{p}(2r)} [\sqrt[4]{r^2+q^2}-\sqrt{q}]\,dt\right\}.$$

Сходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\psi_+(r)\,dr$$

вытекает из оценки I_1 в предыдущей теореме, а также (3.11) и

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\int_{p(2r)}^{\infty}[\sqrt[4]{r^2+q^2}-\sqrt{q}]\,dt=\int_{p(2r_0)}^{\infty}\sqrt{q}\int_{r_0}^{\frac{1}{2}q(t)} r^{-2}\left[\sqrt[4]{1+\frac{r^2}{q^2}}-1\right]drdt\leqslant$$

$$\leqslant\int_{p(2r_0)}^{\infty} q^{-\frac{1}{2}}(t)\,dt\int_0^{\frac{1}{2}}\rho^{-2}[\sqrt[4]{1+\rho^2}-1]\,d\rho<\infty.$$

Аналогично устанавливается сходимость интеграла

$$\int_{r_0}^{\infty} r^{-2}\psi_-(r)\,dr.$$

Теоремами 3.2 и 3.4 исчерпывается рассмотрение случая $\varphi=\pi$, $q(x)\to+\infty$ при выполнении (3.11).

Случай $\varphi=0$, $q(x)\to-\infty$ также является особым. В остальных случаях имеет место

Теорема 3.5. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям а) и б), условию (3.11). $q'(x)$ сохраняет знак при достаточно больших значениях $|x|$ и, кроме того,*

$$\int_{-\infty}|q|^{-\frac{1}{2}}\ln|q|\,dx=\infty\quad\text{и}\int^{\infty}|q|^{-\frac{1}{2}}\ln|q|\,dx=\infty,\tag{3.25}$$

и пусть $h(x)>0$ — четная, монотонная функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}|q|^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{|q|}}{h}\,dt=+\infty,\quad\int^{\infty}|q|^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{|q|}}{h}\,dt=+\infty.\tag{3.26}$$

Тогда всякое решение $y(x,\lambda)$ уравнения (1. 1), аналитическое в некоторой правой полуплоскости $Re\lambda\geqslant\sigma_0>0$ и удовлетворяющее при всех λ в этой полуплоскости и при каком-либо $c>0$ условию

$$\sup_x|y(x,\lambda)|\exp\left\{-\left|\int_0^x[h(t)+\mu\sqrt{|q(t)|}]\,dt\right|\right\}\leqslant c,\tag{3.27}$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы 2.1, придем к справедливости оценки (2.7) при условии (2.6) в точках прямой $\lambda=\sigma_1+i\tau$. Тогда, используя асимптотику (1.25′) и условие (3. 27), получим при $x>0$

$$c\geqslant\frac{1}{4}|\omega_1(x,\lambda)|^{-\frac{1}{2}}|c_1(\lambda)|\exp\left\{\int_{\psi}^{x}[\operatorname{Re}\omega_1(t,\lambda)-\mu\sqrt{|q|}-h]\,dt\right\}.\tag{3.28}$$

В случае $q(x) \to +\infty$ при значениях x таких, что $q(x) > \sigma_1$ (т. е. $x > p(\sigma_1)$ и $x < \tilde{p}(\sigma_1)$ имеем

$$\operatorname{Re} w_1 = |w_1| \left[|\mu| a|^{\frac{1}{2}} + 2 \sin \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left| \frac{\tau}{\sigma_1 - q} \right| \cos \left(\frac{|\varphi|}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left| \frac{\tau}{\sigma_1 - q} \right| \right) \right]. \tag{3.29}$$

Аналогично при $q(x) \to -\infty$ и достаточно большом σ_1

$$\operatorname{Re} w_1 = |w_1| \left[|\mu| a|^{\frac{1}{2}} + 2 \sin \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{\tau}{\sigma_1 - q} \right| \sin \left(\frac{|\varphi|}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left| \frac{\tau}{\sigma_1 - q} \right| \right) \right]. \tag{3.30}$$

Из (3.29) и (3.30) следует, поскольку не рассматриваются случаи $\varphi = \pi$, $q(x) \to +\infty$ и $\varphi = 0$ $q(x) \to -\infty$, существование таких постоянных $A_8 > 0$ и $A_9 > 0$, что

$$\cos \arg w_1 - \mu |a|^{\frac{1}{2}} \geqslant A_8 \sin \tfrac{1}{4} \operatorname{arctg} \left| \frac{\tau}{\sigma_1 - q} \right|, \tag{3.31}$$

если

$$|q(x) - \sigma_1| \geqslant A_9 |\tau|, \text{ т. е. } x \geqslant p_1(\tau) \text{ или } x \leqslant \tilde{p}_1(\tau).$$

Возвращаясь к (3.28), получим при $x \geqslant p_1(\tau)$

$$c \geqslant \frac{1}{4} |c_1(\lambda)| w_1(x, \lambda)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \int_{p_1(\tau)}^{x} [\operatorname{Re} w_1 - \mu \sqrt{|q|} - \right.$$

$$\left. - h] \, dt \right\} \exp \left\{ - \int_{0}^{p_1(r)} (B_1 \sqrt{|q|} + B_2) \, dt \right\}, \tag{3.32}$$

так как из соотношения

$$h(x) |q(x)|^{-\frac{1}{2}} \to 0 \text{ при } |x| \to \infty, \tag{3.33}$$

следующего из (3.11) и (3.26) при несущественном сужении класса рассматриваемых функций $h(x)$, вытекает, что

$$\mu \sqrt{|q|} + h \leqslant B_1 \sqrt{|q|} + B_2.$$

Определим теперь функцию $g(|\tau|)$ соотношением

$$|\tau| = h(g(|\tau|)) \sqrt{|q(g(|\tau|)) - \sigma_1|} \tag{3.34}$$

при условии

$$g(|\tau|) > p_1(\tau). \tag{3.35}$$

Из (3.34) очевидно, что $|g(|\tau|)| \to \infty$ при $|\tau| \to \infty$.

Чтобы показать возможность выбора $g(|\tau|)$, удовлетворяющей при больших значениях $|\tau|$ условию (3.35), достаточно в силу определения $p_1(\tau)$ проверить неравенство

$$|q(g(|\tau|) - \sigma_1| \geqslant A_9 |\tau|;$$

но это неравенство следует из того, что $|\tau| |q(g(|\tau|)) - \sigma_1|^{-1} \to 0$ при $|\tau| \to \infty$, что, в свою очередь, является следствием (3.33) и (3.34).

Полагая в (3.32) $x = g(|\tau|)$, получим

$$c \geqslant \frac{1}{4}|c_1(\lambda)|\,|w_1(g(|\tau|),\ \lambda)|^{-\frac{1}{2}} \exp\Big\{-\int\limits_0^{p_1(\tau)} (B_1\sqrt{|q|} + B_2)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} [\operatorname{Re} w_1(t,\ \lambda) - \mu\sqrt{|q(t)|} - h(t)]\,dt \equiv \frac{|c_1(\lambda)|}{4\sqrt{|w_1(g(|\tau|),\lambda)|}} \exp\{\psi(\tau)\},$$

где

$$\psi(\tau) = -\int\limits_0^{p_1(\tau)} (B_1\sqrt{|q|} + B_2)\,dt + \int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} [\operatorname{Re} w_1 - \mu\sqrt{|q|} - h]\,dt \equiv$$

$$\equiv -\psi_1(\tau) + \psi_2(\tau).$$

Тогда

$$|c_1(\lambda)| \leqslant 4c\sqrt{|w_1(g(|\tau|),\ \lambda)|} \exp\{\psi_1(\tau) - \psi_2(\tau)\}, \tag{3.36}$$

причем

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}\psi_1(\tau)\,d\tau = \int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}d\tau \int\limits_0^{p_1(\tau)} (B_1\sqrt{|q(t)|} + B_2)\,dt < \infty, \tag{3.37}$$

что вытекает из (3.11) и определения $p_1(\tau)$;

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}\psi_2(\tau)\,d\tau = \int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}\Big\{\mu \int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} [\sqrt[4]{(\sigma_1 - q)^2 + \tau^2} - \sqrt{|q|}]\,dt +$$

$$+ \int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} A_8\sqrt[4]{(\sigma_1 - q)^2 + \tau^2} \sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left|\frac{\tau}{\sigma_1 - q}\right| dt - \int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} h(t)\,dt\Big\}\,d\tau \equiv$$

$$\equiv I_1 + I_2 - I_3. \tag{3.38}$$

Здесь было использовано неравенство (3.31), справедливое при $t \geqslant p_1(\tau)$. Рассмотрим каждый из получившихся интегралов. При $q(x) \to -\infty$, очевидно, $I_1 > 0$. При $q(x) \to +\infty$ внутренний интеграл в I_1 можно оценить следующим образом:

$$\int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} [\sqrt[4]{(\sigma_1 - q)^2 + \tau^2} - \sqrt{q}]\,dt \geqslant \int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} (\sqrt{g(t) - \sigma_1} - \sqrt{q})\,dt > -B_3 > -\infty$$

в силу (3.11). Следовательно, для I_1 всегда справедлива оценка

$$I_1 > -B_4\tau_0^{-1}\mu. \tag{3.39}$$

Докажем теперь сходимость интеграла I_3:

$$I_3 = \int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}d\tau \int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)} h(t)\,dt \leqslant \int\limits_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}d\tau \int\limits_{p(2\sigma_1)}^{g(|\tau|)} h(t)\,dt \leqslant$$

$$< \int\limits_{p(2\sigma_1)}^{\infty} h(t) \int\limits_{h(t)\sqrt{|q(t)-\sigma_1|}}^{\infty} \tau^{-2}d\tau\,dt = \int\limits_{p(2\sigma_1)}^{\infty} |q(t) - \sigma_1|^{-\frac{1}{2}}dt < \infty, \tag{3.40}$$

Покажем, наконец, что интеграл I_2 расходится:

$$I_2 = A_8\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\tau^{-2}d\tau\int\limits_{p_1(\tau)}^{g(|\tau|)}\sqrt[4]{(\sigma_1-q)^2+\tau^2}\sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left|\frac{\tau}{\sigma_1-q}\right|dt =$$

$$= A_8\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\tau^{-2}d\tau\left[\int\limits_{p_1(\tau_0)}^{g(\tau_0)}+\int\limits_{g(\tau_0)}^{g(|\tau|)}-\int\limits_{p_1(\tau_0)}^{p_1(\tau)}\right]\equiv I_4+I_5-I_6.$$

Очевидно, $I_4>0$. Интеграл I_6 сходится:

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\tau^{-2}d\tau\int\limits_{p_1(\tau_0)}^{p_1(\tau)}\sqrt[4]{(\sigma_1-q)^2+\tau^2}\sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left|\frac{\tau}{\sigma_1-q}\right|dt =$$

$$= \int\limits_{p_1(\tau_0)}^{\infty}|q(t)-\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}dt\int\limits_{A_9}^{\infty}\sqrt[4]{1+\rho^2}\sin\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\rho\cdot\frac{d\rho}{\rho^2}<\infty,$$

так как $A_2>0$ и в силу (3.11).

И, наконец, интеграл I_5 в силу (3.26) расходится.

$$I_5 = A_8\int\limits_{g(\tau_0)}^{\infty}|q(t)-\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}dt\int\limits_{h(t)|q(t)-\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}}^{\infty}\sqrt[4]{1+\rho^2}\sin\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\rho\cdot\frac{d\rho}{\rho^2}\geqslant$$

$$\geqslant B_5\int\limits_{g(\tau_0)}^{\infty}|q(t)-\sigma_1|^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{|q(t)-\sigma_1|}}{h(t)}dt=+\infty.$$

Тогда из (3.38), (3.39) и (3.40) вытекает расходимость интеграла $\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\tau^{-2}\psi_2(\tau)\,d\tau$. Учитывая легко получаемую оценку $\sqrt{|w_1(g(|\tau|),\lambda)|}<$ $<B_6\sqrt{|\tau|}$ и оценку (3.37), из (3.36) получим при $|\tau|>\tau_0$

$$|c_1(\lambda)|<B_7\sqrt{|\tau|}\exp\{-\psi(\tau)\}, \tag{3.41}$$

где

$$\int\limits_{\tau_0}^{\infty}\tau^{-2}\psi(\tau)\,d\tau=+\infty. \tag{3.42}$$

Доказательство теоремы 3.5 может быть закончено аналогично доказательству теоремы 2.1.

Следующая теорема имеет место во всех без исключений случаях в том числе при $\varphi=0$, $q(x)\to-\infty$ и при $\varphi=\pi$, $q(x)\to+\infty$. Однако в последнем из этих случаев теорема 3.4 дает лучший результат.

Теорема 3.6. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям а) и б), $q'(x)$ сохраняет знак при достаточно больших значениях $|x|$, выполнены условия (3.11) и (3.25') и пусть $h(x)$ — четная монотонная функция, удовлетворяющая условиям*

$$\int\limits_{-\infty}|q(t)|^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{|q|(t)|}}{h(t)}dt<\infty\quad\int^{\infty}|q(t)|^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{|q(t)|}}{h(t)}dt<\infty. \tag{3.43}$$

Тогда существует функция $y(x, \lambda) \not\equiv 0$, аналитическая в некоторой правой полуплоскости и удовлетворяющая при всех λ из этой полуплоскости и некотором $c > 0$ условию (3.27) и являющаяся решением уравнения (1.1).

Доказательство. Рассуждая, как в начале доказательства теоремы 3.3, придем к оценкам (3.19). При $x \gg p(2r)$, учитывая (3.29) и (3.30) имеем

$$\sup_{x \geqslant p(2r)} |y_1(x, \lambda)| \exp\{-\mu \int_0^x \sqrt{|q(t)|}\, dt - \int_0^x h(t)\, dt\} \leqslant$$

$$\leqslant A_8 r^{-\frac{1}{4}} \sup_{x \geqslant p(2r)} \exp\left\{\int_0^{p(2r)} \sqrt{|a|^{-1}(r + |q(t)|)}\, dt +\right.$$

$$+ \int_{p(2r)}^{x} \left[\sqrt{|a|^{-1}(r + |q(t)|)}\left(\mu \sqrt{|a|} + 2 \sin \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left|\frac{\tau}{\sigma - q}\right|\right) -\right.$$

$$\left.\left. - \mu \sqrt{|q|} - h(t)\right] dt\right\} \leqslant A_8 r^{-\frac{1}{4}} \exp\left\{\int_0^{p(2r)} \sqrt{|a|^{-1}(r + |q|)}\, dt +\right.$$

$$\left. + \int_{p(2r)}^{g(r)} \left[\mu (\sqrt{r + |q|} - \sqrt{|q|}) + 2\sqrt{|a|^{-1}(r + |q|)} \sin \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2r}{|q|}\right] dt\right\} \equiv$$

$$\equiv A_8 r^{-\frac{1}{4}} \exp\{\psi_1(r) + \psi_2(r)\}, \tag{3.44}$$

где $g(r)$ определяется из соотношения

$$\mu(\sqrt{r + |q|} - \sqrt{|q|}) + \frac{2}{\sqrt{|a|}} \sqrt{r + |q(g(r))|} \sin \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2r}{|q(g(r))|} =$$
$$= h(g(r)) \tag{3.45}$$

при условии $g(r) > p(2r)$.

Из (3.45) с учетом условия (3.33), которое в данном случае можно, не уменьшая общности, считать выполненным, вытекает

$$|g(r)| \to \infty \text{ при } r \to \infty \text{ и } \frac{r}{q(g(r))} \to 0 \text{ при } r \to \infty, \tag{3.46}$$

откуда следует, что $g(r) > p(2r)$.

Докажем сходимость интегралов $J_j = \int_{r_0}^{\infty} r^{-2} \psi_j(r)\, dr$, $j = 1,2$. Для интеграла J_1 это вытекает из (3.24). Для интеграла J_2 получаем

$$J_2 \leqslant \int_{r_0}^{\infty} r^{-2} \int_{p(2r)}^{g(r)} \left[2\sqrt{\frac{r + |q|}{|a|}} \sin \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2r}{|q|} + \mu(\sqrt{r + |q|} - \sqrt{|q|})\right] dt\, dr \leqslant$$

$$\leqslant \int_{p(2r_0)}^{\infty} |q(t)|^{-\frac{1}{2}} dt \int_{\frac{a(t)}{|q(t)|}}^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{1 + \rho}\left(\mu + \frac{2}{\sqrt{|a|}} \sin \frac{1}{4} \operatorname{arctg} 2\rho\right) - \mu\right] \frac{d\rho}{\rho^2} \leqslant$$

$$\leqslant B_8 \int_{p(2r_0)}^{\infty} |q(t)|^{-\frac{1}{2}} \ln \frac{|q(t)|}{a(t)}\, dt, \tag{3.47}$$

где $a(t)$ функция, обратная к $g(r)$. Из (3.46) и (3.45) видно, что при некотором $B_9 > 0$ функции $r|q(g(r))|^{-1}$ и $B_9 h(g(r))|q(g(r))|^{-\frac{1}{2}}$ эквивалентны при $r \to \infty$, следовательно, функция $a(t)|q(t)|^{-1}$ эквивалентна $B_9 h(t)|q(t)|^{-\frac{1}{2}}$. Тогда, учитывая (3.11) и (3.43) из (3.47), приходим к сходимости J_2.

Доказательство заканчивается, как и в теореме 3.3.

§ 4. КЛАССЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ И НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ (1) — (2)

В данном параграфе мы укажем необходимые и достаточные условия для единственности решений нормального типа* (в дальнейшем мы рассматриваем только такие решения) задачи Коши (1)—(2) в различных классах функций в зависимости от поведения функции $q(x)$. Все дальнейшие теоремы основаны на результатах § 2, 3 и известной теореме Хилла [13], в силу которой для единственности нормальных решений задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$, $u(x, 0) = u_0(x)$ с замкнутым оператором L в некотором банаховом пространстве необходимо и достаточно, чтобы не существовало нетривиального, голоморфного в некоторой правой полуплоскости решения уравнения $Lu = \lambda u$, норма которого ограничена равномерно по λ в этой полуплоскости.

Теорема 4.1. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условиям а) и б) § 1, условию в) § 2 (в случаях* $\arg a = 0$, $q(x) \to +\infty$ *при* $|x| \to \infty$ *и* $\arg a = \pi$, $q(x) \leqslant q_1$ *при* $-\infty < x < \infty$ *условие в) заменяется условием в′) и условием (2.2)*

Пусть $h(x) > 0$ — четная, монотонная функция.

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций

$$|f(x)| \leqslant A_f \exp\left|\int_0^x h(t)\, dt\right| \tag{4.1}$$

достаточно, чтобы функция $h(x)$ удовлетворяла условию (2.1).

Если функция $q(x)$ удовлетворяет условию (2.21), то условие (2.1) является необходимым для единственности решения задачи (1)—(2) в классе (4.1).

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство, состоящее из непрерывных при $-\infty < x < \infty$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f(x)\| = \sup_x |f(x)| \exp\left\{-\left|\int_0^x h(t)\, dt\right|\right\}. \tag{4.2}$$

---

* Решение $u(x, t)$ задачи Коши (1)—(2) называют решением нормального типа в классе функций G:

$$G: \{f(x);\ |f(x)| \leqslant A_f g(x)\}$$

($g(x) > 0$ — непрерывная функция), если при любом $t \geqslant 0$ $u(x, t) \in G$, причем

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \sup \frac{|u(x, t)|}{g(x)} < \infty.$$

Замкнутость оператора $Ly = ay'' + q(x)y$ в этом пространстве следует из того, что сходимость последовательности функций по норме (4.2) на каждом конечном отрезке равносильна равномерной сходимости этой последовательности.

В силу теоремы 2.1 из предположения о голоморфности функции $y(x, \lambda)$ решения уравнения $Ly = \lambda y$ — в некоторой правой полуплоскости и оценки $\| y(x, \lambda) \| < \kappa$ вытекает, что $y(x, \lambda) \equiv 0$. Применяя теорему Хилла, убеждаемся в справедливости первого утверждения теоремы. Аналогично второе утверждение есть следствие теоремы 2.2.

Замечание 4.1. Используя результат, сформулированный в замечании 2.1, отметим, что если функция $h(x)$ удовлетворяет условиям (2.20) п. (2.21), то в классе функций (4.1) единственность решения задачи Коши (1)—(2) нарушается.

Условие (2.2) ограничивает возможный рост $|q(x)|$ при $|x| \to \infty$. Оказывается, что более быстрый рост функции $q(x)$ для большинства уравнений вида [1] приводит к расширению классов единственности решения задачи Коши.

Точное описание этого «диссипативного» эффекта* дано в приводимых ниже теоремах, первая из которых (теорема 4.2), впрочем, справедлива вне зависимости от скорости роста $|q(x)|$.

Теорема 4.2. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условиям а) и б) § 1 и, кроме того, $q(x) \to +\infty$ или $q(x) \to -\infty$ при $|x| \to \infty$.*

Пусть $\arg a \neq \pi$ при $q(x) \to +\infty$ число μ определено по формулам (3.1) и $\alpha(x) > 0$ — четная непрерывная функция.

Тогда, если

$$\inf \alpha(x) = 0, \tag{4.3}$$

то решение задачи Коши [1, 2] единственно в классе функций

$$|f(x)| < B \cdot \frac{\alpha(x)}{\sqrt[4]{1 + |q(x)|}} \exp\left\{ \mu \left| \int_0^x \sqrt{|q(t)|}\, dt \right| \right\}. \tag{4.4}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.1 и вытекает из теоремы 3.1 и теоремы Хилла.

В теореме 4.2 не рассмотрен случай $\arg a = \pi$, $q(x) \to +\infty$. В этом случае имеет место

Теорема 4.3. *Пусть $\arg a = \pi$, функция $q(x)$ удовлетворяет условиям а), б) § 1, условию (3.11) и $q(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$.*

Тогда условие (4.3) является достаточным для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций (4.4). Если, кроме того, $q'(x)$ сохраняет знак при достаточно больших значениях $|x|$, то указанное условие является также и необходимым.

Доказательство теоремы 4.3 вытекает из результатов теорем 3.2 и 3.4 и теоремы Хилла.

Класс единственности (4.4) в ряде случаев может быть расширен, как показывает

---

* Указанный эффект имеет прозрачный физический смысл для уравнения теплопроводности $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u$, для которого условие $q(x) \to -\infty$ при $|x| \to \infty$ означает растущую теплоотдачу (диссипацию тепла). Ясно, что классы единственности решения задачи Коши при этом расширяются. В случае уравнения теплопроводности соответствующая теорема единственности была получена автором в [12].

Теорема 4.4. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условиям а), б) § 1; $q(x)\to+\infty$ или $q(x)\to-\infty$ при $|x|\to\infty$; $q'(x)$ сохраняет знак при достаточно больших значениях $|x|$ и выполнены условия (3.11) и (3.25).*

Пусть $\arg a\neq 0$ при $q(x)\to-\infty$ и $\arg a\neq\pi$ при $q(x)\to+\infty$; число μ определено формулами (3.1) и $h(x)>0$ — четная, монотонная функция.

Тогда, если функция $h(x)$ удовлетворяет условию (3.26), то задача Коши (1)—(2) имеет единственное решение в классе функций

$$|f(x)|\leqslant A\exp\left|\int_0^x\left(\mu\sqrt{|q(t)|}+h(t)\right)dt\right|. \tag{4.5}$$

Доказательство, аналогичное доказательству теоремы 4.1, вытекает из результата теоремы 3.5.

Теоремы неединственности решения задачи Коши (1)—(2), соответствующие теоремам 4.2 и 4.4, формулируются следующим образом.

Теорема 4.5. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.4 с заменой условий (3.11) и (3.25) условием (3.12).*

Тогда условие (4.3) является необходимым для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций (4.4).

Теорема 4.6. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4.4.*

Тогда, если функция $h(x)$ удовлетворяет условию (3.43), в классе функций (4.5) единственность решения задачи Коши (1)—(2) нарушается.

Доказательство теорем 4.5 и 4.6 сводится к использованию результатов теорем 3.3 и 3.6.

Отметим, что классы функций (4.4) и (4.5) при быстром росте $|q(x)|$ шире класса функций (4.1) и расширяются с увеличением роста $|q(x)|$, если только $\mu\neq 0$.

В случаях, когда $\mu=0$ ($\arg a=0$, $q(x)\to+\infty$ — уравнение теплопроводности и $\arg a=\pi$, $q(x)\to-\infty$ — уравнение обратной теплопроводности), наоборот классы (4.4) и (4.5) уже класса (4.1) и сужаются с увеличением роста $|q(x)|$. Это ясно для класса (4.4). В случае класса (4.5) положим при $x>0$ $h(x)=\dfrac{\sqrt{|q(x)|}}{\beta(x)}$. Тогда из (3.11) и (3.26) ясно, что $\beta(x)\to\infty$, а $\int^\infty[h(x)]^{-1}dx=\int^\infty\beta(x)|q|^{-\frac{1}{2}}dx$ расходится в силу расходимости интеграла $\int^\infty|q|^{-\frac{1}{2}}\ln\beta(x)\,dx$. С другой стороны, ясно, что функцию $\beta(x)$ можно выбрать так, чтобы были выполнены условия $\int^\infty|q(x)|^{-\frac{1}{2}}\ln\beta(x)\,dx<\infty$, а $\int^\infty\beta(x)|q(x)|^{-\frac{1}{2}}dx=\infty$.

Отметим теперь, что если функция $q(x)$ удовлетворяет несколько более ограничительным условиям, то из приведенных теорем вытекают следующие необходимые и достаточные условия единственности решения задачи Коши (1)—(2).

Теорема 4.7. *Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условиям а) и б) § 1, условию (2.21) (в случаях $\arg a=0$, $q(x)\to+\infty$ и $\arg a=\pi$, $q(x)\leqslant q_1$ функция $q(x)$ должна также удовлетворять условию (2.2) и в') *), а $h(x)>0$ — монотонная, четная функция.*

* Условие в) всегда является следствием предположения (2.21).

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций (4.1) необходимо и достаточно, чтобы интеграл $\int^{\infty}[h(x)]^{-1}\,dx$ *расходился.*

Теорема 4.8. *Пусть функция* $q(x)$ *удовлетворяет условиям а) и б) § 1;* $q(x)\to+\infty$ *или* $q(x)\to-\infty$ *при* $|x|\to\infty$, $q'(x)$ *сохраняет знак при достаточно больших значениях* $|x|$ *и выполнено условие (3.12).*

Пусть число μ *определено по формулам (3.1) и* $\alpha(x)>0$ *— четная непрерывная функция.*

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций (4.4) необходимо и достаточно, чтобы $\inf\alpha(x)=0$.

Теорема 4.9. *Пусть* $\arg a=\pi$, $q(x)\to+\infty$ *при* $|x|\to\infty$; $q(x)$ *удовлетворяет условиям а) и б) § 1 и* $q'(x)$ *сохраняет знак при достаточно больших значениях* $|x|$.

Тогда, если $q(x)$ *удовлетворяет условию (3.11), то справедлив результат предыдущей теоремы.*

Теорема 4.10. *Пусть выполнены все условия теоремы 4.4 и кроме того, при любой четной, монотонной функции* $h(x)>0$ *из какого-либо одного из двух условий (3.43) вытекает второе.*

Тогда для единственности решения задачи Коши (1)—(2) в классе функций (4.5) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\infty}|q(t)|^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{|q(t)|}}{h(t)}\,dt=+\infty \quad\text{и}\quad \int^{\infty}|q(t)|^{-\frac{1}{2}}\ln\frac{\sqrt{|q(t)|}}{h(t)}\,dt=+\infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов. Thèorèmes d'unicite pour l'équation de la chaleur. «Матем. сб.», 42, № 2, 1935.
2. О. А. Ладыженская. О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения. «Матем. сб.», 27 (69), № 2, 1950.
3. S. Täcklind. Sur les classes quasianalytiques des solutions des èquations aux derives partielles du type parabolique. Nord Acta Regial Sosietatis Scientiarum Upsaliensis (4), vol. 10, 1936.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности решения задачи Коши. «Усп. матем. наук», VIII, вып. 6 (58), 1953.
5. Г. Н. Золотарев. Об оценках сверху классов единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Научн. докл. высшей школы, № 2, 1958.
6. Н. Н. Чаус. О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. «Укр. матем. журнал», т. 17, № 1, 1965.
7. С. Д. Эйдельман. О фундаментальных решениях параболических систем. «Матем. сб.», 38 (80) : 1, 1956.
8. Г. Н. Золотарев. О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского. «Изв. вузов, Математика», № 2 (3), 1958.
9. Я. И. Житомирский. Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производных с растущими коэффициентами. «Изв. вузов, Математика», № 1 (8), 1959.
10. С. Д. Эйдельман. О фундаментальных решениях параболических систем, II. «Матем. сб.», 53 (95) : 1, 1961.
11. В. С. Рыжий. О единственности решения задачи Коши для параболических по И. Г. Петровскому систем с растущими коэффициентами. «Зап. мех.-матем. ф-та ХГУ и ХМО», т. XXIX, сер. 4, 1963.
12. Я. И. Житомирский. О задаче Коши для параболического уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. ДАН СССР, 116, № 6, 1957.

13. E. Hille. An abstract formulation of Cauchy's problem. Comtes Rendus du Dousilme Congress des Mathematiciens Scandinaves, Lund, 1953.

14. И. М. Раппопорт. О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Изд-во АН УССР, К., 1954.

15. М. А. Наймарк. Линейные дифференциальные операторы. Гостехиздат, М., 1954.

16. С. Мандельбройт. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения. Изд-во иностр. лит., М., 1955.

Поступила 18 марта 1966 г.