

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ В.Н. КАРАЗИНА**

(повне найменування вищого навчального закладу)

**НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ  
ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

(назва факультету)

**КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЇ ФІЗИКИ ТА ФІЗИКИ ПЛАЗМИ**

(повна назва кафедри)

**Пояснювальна записка**

до дипломного проекту (роботи)

**МАГІСТРА**

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему

укр. ФОКУСУВАННЯ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЕЛЕКТРОННИХ ЗГУСТКІВ У  
ПЛАЗМІ У НЕЛІНІЙНОМУ РЕЖИМІ

англ. RELATIVISTIC ELECTRON BUNCH FOCUSING IN PLASMA IN  
BLOWOUT REGIME

Виконав: студент 2 курсу навчання

за ОНП магістр

спеціальності 105 Прикладна фізика та наноматеріали

освітня програма: Експериментальна ядерна фізика та

фізика плазми

Горбатюк Т.М.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Керівник д.ф.-м.н., проф. Маслов В.І.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Керівник к.ф.-м.н., доцентка Афанасьєва І.О.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Рецензент к.ф.-м.н., Ковальчук І.К.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Харків – 2024 рік

## АНОТАЦІЯ

Ця магістерська робота зосереджується на дослідженні фокусування релятивістських електронних згустків за допомогою плазмового кільватерного поля, що має важливе значення для ефективного багатосекційного прискорення. Основним інструментом дослідження є числове моделювання нелінійного кільватерного поля, створеного згустком-провісником, що забезпечує мінімальний обмін енергією основного згустку з полем та формує однорідне фокусує поле. Важливою частиною роботи є аналіз впливу форми основного згустку на фокусує властивості та на зменшення його енергетичного розкиду. Зокрема, дослідження показує, що адаптація форми згустку може оптимізувати процеси фокусування та значно зменшити його енергетичний розкид. Встановлено умови для одночасного фокусування та зменшення енергетичного розкиду в неоднорідних згустках, зокрема в гаусоподібних і трикутноподібних згустках. Визначена ідеальна форма згустку для досягнення бажаного прискорення без зростання енергетичного розкиду, що відкриває нові перспективи для теоретичних та практичних застосувань у кільватерних прискорювачах. Ці результати можуть стати основою для подальших досліджень в області плазмових прискорювачів, забезпечуючи важливий внесок у розвиток технологій прискорення та фокусування пучків частинок.

## ABSTRACT

This master's thesis focuses on the study of focusing relativistic electron bunches using a plasma wakefield, which is crucial for effective multi-section acceleration. The main tool of the study is the numerical simulation of a nonlinear wakefield generated by a driver-precursor bunch, which ensures minimal energy exchange between the main bunch and the field and forms a uniform focusing field. An important part of the work is the analysis of the influence of the bunch shape on focusing properties and the reduction of energy spread. In particular, the research shows that adapting the shape of the bunch can optimize focusing processes and significantly reduce the energy spread. Conditions have been established for simultaneous focusing and reduction of energy spread in non-uniform bunches, particularly in Gaussian and triangular-shaped bunches. The defined ideal shape of the bunch for achieving desired acceleration without increasing energy spread opens new prospects for theoretical and practical applications in wakefield accelerators. These results can provide the foundation for further research in the field of plasma accelerators, providing an important contribution to the development of particle acceleration technologies.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> . . . . .	5
<b>РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД</b> . . . . .	8
1.1 Висновки до розділу 1 . . . . .	17
<b>РОЗДІЛ 2. ЧИСЛОВА МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ РЕЛЯ-</b> <b>ТИВІСТСЬКОГО ЕЛЕКТРОННОГО ЗГУСТУ З ПЛАЗМОЮ</b> .	18
2.1 Програма LCODE . . . . .	18
2.2 Модель пучка . . . . .	22
2.3 Кінетична плазмова модель . . . . .	23
2.4 Гідродинамічна модель плазми . . . . .	26
2.5 Висновки до розділу 2 . . . . .	30
<b>РОЗДІЛ 3. ФОКУСУВАННЯ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЕЛЕКТРОННИХ</b> <b>ЗГУСТКІВ У ПЛАЗМІ У НЕЛІНІЙНОМУ РЕЖИМІ</b> . . . . .	31
3.1 Вплив форми згустків на фокусуєчі властивості кільватерної пла- змової лінзи та енергетичний розкид згустку . . . . .	31
3.2 Аналіз кільватерної плазмової лінзи для однорідних згустків . . . . .	39
3.3 Висновки до розділу 3 . . . . .	43
<b>ВИСНОВКИ</b> . . . . .	44
<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ</b> . . . . .	46

## ВСТУП

Розвиток фізики високих енергій тісно пов'язаний із прогресом у технологіях прискорення частинок, оскільки для досягнення високих енергій та глибшого розуміння природи необхідні потужніші прискорювачі. Разом із технологічними досягненнями з'являються нові виклики та обмеження, серед яких обмеження максимальних полів у надпровідних магнітах адронних прискорювачів, втрати синхротронної потужності в лептонних прискорювачах, ризики електричного пробоя в радіочастотних порожнинах у лінійних прискорювачах, а також великі розміри та висока вартість таких установок [1].

Використання плазми як середовища для прискорення частинок є альтернативним підходом, який дозволяє подолати деякі обмеження традиційних прискорювачів. Плазма здатна створювати високі градієнти електричного поля, від 10 до 100 ГВ/м, на відносно коротких відстанях, у той час як звичайні радіочастотні прискорювачі вимагають кілька кілометрів довжини для досягнення аналогічних величин. Ці високі поля утворюються завдяки колективному руху електронів у плазмі, які формують збурення просторового заряду, який рухається зі швидкістю трохи нижчою за швидкість світла у вакуумі [2]. Цей метод, відомий як прискорення плазмового кільватерного поля, відкриває можливості для створення компактніших та економічно вигідніших прискорювачів, які можуть знайти застосування у широкому спектрі наукових та промислових областей [2]. Плазмове кільватерне прискорення дозволяє не тільки прискорювати, а й фокусувати електронні згустки [3]. Цей метод використовує високі електричні поля, створені колективним рухом електронів у плазмі, є ключовим для ефективного багатосекційного прискорення та має значний потенціал для подальшого розвитку [3].

У лабораторних умовах, де плазма часто буває нестационарною, збудження

кільватерних полів зазвичай проводиться за допомогою лазерних імпульсів або згустків електронів у нелінійному режим. Цей режим сприяє збільшенню амплітуди поля прискорення, але також ускладнює дослідження через непередбачуваність нелінійних ефектів. Цей режим також називають режимом "вибуху" в якому під час плазмово-хвильовому або лазерно-хвильовому прискоренні електрони радіально виштовхуються з центру плазми [4]. Це формує сильне електричне поле, придатне для прискорення частинок. Режим "вибуху" не можна аналізувати за допомогою традиційних теорій рідини або одновимірної теорії, тому використовуються більш складні методи аналізу, такі як числове моделювання, яке допомагає глибше зрозуміти ці процеси, оптимізувати управління згустками та досягати результатів з меншими ресурсними витратами.

У контексті розробки перспективних технологій у фізиці високих енергій, таких як запуск проекту EuPRAXIA [5] і розробка та вдосконалення міжнародного експериментального термоядерного реактора ITER [6], числове моделювання виступає не тільки як допоміжний інструмент, а як основа для розробки та оптимізації новітніх технологій. Важливість таких методів постійно зростає, оскільки вони дозволяють заздалегідь оцінити ефективність та безпеку складних і високоенергетичних процесів, що відбуваються в умовах, недоступних для безпосереднього експериментування.

В рамках статті [7], розглянуто механізм фокусування за допомогою плазмового кільватерного поля, яке забезпечує однакове та однорідне фокусування електронних пучків. Ця магістерська робота розширює цей аналіз, застосовуючи числове моделювання для вивчення цієї плазмової лінзи в нелінійному режимі, використовуючи релятивістські електронні пучки. Двовимірне моделювання дозволяє детально вивчити взаємодію між згустками та плазмою, що є ключовим для розробки ефективних методів фокусування. Особлива увага приділяється техніці згустка-провісника, яка мінімізує енергетичний обмін і сприяє стабільності

плазмового поля. Дослідження оцінює вплив довжини та профілю згустків на фокусування та розподіл енергії, виявляючи умови для забезпечення одночасного фокусування та мінімізації енергетичного розкиду. Робота також пропонує ідеальну форму електронного згустка, яка мінімізує енергетичний розкид під час прискорення, відкриваючи нові можливості для теоретичних та експериментальних досліджень, які можуть значно покращити прискорювальні технології. В роботі аналізується значний потенціал кільватерних методів і належність подальших досліджень для глибшого розуміння та практичного застосування у цій області.

## РОЗДІЛ 1. АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

Відповідаючи на виклики традиційних методів прискорення, у 1956 році на симпозіумі у європейській організації з ядерних досліджень (ЦЕРН) В.І. Векслер представив концепцію колективного прискорення частинок у плазмі [8]. Відмінно від традиційних методів, що залежать від зовнішніх електромагнітних полів, цей підхід використовує природну взаємодію численних частинок у плазмі для генерації потужних полів. Ці поля здатні прискорювати частинки до високих енергій, використовуючи колективні властивості плазми, де взаємодія частинок індукує електромагнітні поля, що взаємно прискорюють їх. Хоча такий підхід міг створювати комплексні нелінійні динаміки та потенційно хаотичні взаємодії, Векслер вважав, що контрольовані пучки та розвиток лазерних технологій можуть допомогти забезпечити більшу стабільність та когерентність у взаємодії частинок [9].

На цьому симпозіумі свої роботи представили і інші радянські вчені, зокрема Г.І. Будкер, який запропонував використання інтенсивних релятивістських кільцевих пучків для створення полів, які у багато разів перевищують ті, що можливі в традиційних прискорювачах. Він зазначив, що для створення таких полів необхідно використовувати інтенсивний пучок релятивістських електронів, заряд якого частково компенсований іонами. Основні труднощі полягали у великих величинах струму пучка релятивістських електронів, що вимагало нових технологічних рішень [10, 11]. Значний внесок у вивчення лінійних прискорювачів зробив Я.Б. Файнберг, який у своїй доповіді вперше висунув ідею використання плазмових хвиль, які створюються пучками частинок, для прискорення заряджених частинок [12]. Він також висунув пропозицію щодо впровадження методу змінно-фазового фокусування, який дозволяє одночасно забезпечити радіальну та фазову стабільність у лінійних прискорювачах [13].

Ці ранні дослідження поклали основу для подальшого розвитку технологій плазмового прискорення частинок. У 1979 році Таджіма та Доусон вперше запропонували, що завдяки впливу нелінійної пондеромоторної сили, ініційованої введенням лазерного імпульсу в плазму, можливе збудження плазмових осциляцій [14]. Ці осциляції призводять до формування областей з високою та низькою густиною електронів. Автори зазначили, що максимальна ефективність збудження кільватерного поля досягається, коли довжина хвильового пакету дорівнює половині довжини плазмової хвилі. Цей принцип, продемонстрований за допомогою комп'ютерного моделювання, показав, що використання потужних лазерів може індукувати енергії гігаелектронвольтів на сантиметр, відкриваючи нові можливості для конструкції прискорювачів. Основна ідея полягає у тому, що фотонний пакет, введений у розріджену плазму, збуджує електростатичне кільватерне поле, яке інтерує з подорожуючими електронами, надаючи їм значного прискорення. Групова швидкість такого пакету в плазмі визначається плазмовою частотою та частотою фотонів, дозволяючи електронам набирати значної енергії і збільшувати свою масу, при цьому залишаючись у фазі з хвилею на тривалий час. Максимальну величину електричного поля  $E_{\max}$ , що формується у кільватерному полі через взаємодію лазерного пучка з плазмою, можна оцінити за формулою:

$$E_{\max} \approx \frac{m_e \omega_p c}{e} \quad (1.1)$$

де  $m_e$  — маса електрона,  $c$  — швидкість світла,  $\omega_p$  — плазмова частота, обчислена залежно від щільності електронів у плазмі:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (1.2)$$

де  $n_e$  — щільність електронів у плазмі,  $e$  — елементарний заряд,  $\epsilon_0$  — діелектрична проникність вакууму. Завдяки цій взаємодії між лазерним пучком і плазмою,

колективне електричне поле може досягати значення до  $10^9$  В/см при електронній щільності  $n = 10^{18}$  см<sup>-3</sup>, створюючи умови для високоефективного прискорення частинок. Ідея Таджіми та Доусона була обмежена технічними можливостями того часу, оскільки ранні схеми плазмових прискорювачів базувалися на використанні довгоімпульсних лазерів. Ці лазери використовували механізм подвійної хвилі, де два лазерні промені з різницею частот, рівною плазмовій частоті, ініціювали формування великоамплітудних плазмових хвиль [14].

Значний прорив у використанні лазерних імпульсів стався у 1985 році, коли Донна Стрікленд та Жерар Муру розробили метод розтягнутого імпульсного підсилення [15]. Цей метод кардинально змінив парадигму застосування лазерів, дозволяючи розтягувати короткі імпульси низької енергії в часі через оптичне волокно за допомогою групової дисперсії та самофазної модуляції. Така техніка знижувала пікову потужність, запобігаючи пошкодженню обладнання. Важливо, що під час підсилення, розтягнуті імпульси зберігають лінійність, що дозволяє їх подальше стиснення до первісної або навіть меншої довжини при значно вищій енергії. Підсилення в неоднорідному середовищі додатково запобігає ефектам насичення зросту завдяки незалежному підсиленню різних частотних компонентів. Використовуючи цей метод, вдалося створювати лазерні імпульси, які є значно коротшими за плазмову довжину хвилі  $c/\omega_p$ .

Перші експерименти з використанням цієї технології були проведені трьома незалежними групами дослідників у 2004 році [16, 17, 18]. Вони продемонстрували можливість кільватерного прискорення електронів за допомогою лазера, отримавши моноенергетичні електронні пучки з високим емітансом, використовуючи короткі лазерні імпульси. Це значно сприяло розвитку прискорювачів на базі лазерного кільватера. При цьому кільватерні поля прийняли більш бульбашкову форму з одним-двома періодами замість нечіткої зміни щільності, яка спостерігалася при багатьох періодах [2]. Цей технологічний прорив сприяв стрімкому

розвитку технології лазерного прискорення в плазмі, що призвело до значних досягнень, включаючи прискорення електронів до енергії 7,8 GeV [19]. В таблиці 1.1 представлені результати експериментів з лазерного кільватерного прискорення електронів, проведені різними дослідницькими групами з 2004 по 2019 рік, що демонструють загальний розвиток у цій галузі. Також важливо зазначити, що завдяки збільшенню енергії імпульсів та скороченню їхньої тривалості, наукові установи по всьому світу активно розвивають ультраінтенсивні лазерні системи, внаслідок чого було розроблено кілька петаватних лазерних систем [20].

Таблиця 1.1.  
Дані експериментів з лазерного кільватерного прискорення.

<b>Експеримент</b>	<b>Досягнута енергія (GeV)</b>	<b>Градiєнт прискорення (GeV/м)</b>
Faure, J. та ін. (2004) [16]	0.17	57
Leemans, W. P. та ін. (2006) [21]	1	30
Karsch, S. та ін. (2007) [22]	1	66
Hafz, N. A. M. та ін. (2008) [23]	1.5	300
Froula, D. H. та ін. (2009) [24]	0.72	90
Clayton, C. E. та ін. (2010) [25]	1.45	111
Lu, H. та ін. (2011) [26]	1.8	45
Kim, H. T. та ін. (2013) [27]	3	300
BELLA (2014) [28]	4.2	46
Kim, H. T. та ін. (2017) [29]	2.3	230
BELLA (2019) [19]	7.8	86

У 1985 році, паралельно з розвитком технології розтягнутого імпульсного підсилення, Пізен Чен та його колеги запропонували новий метод прискорення електронів, що не вимагав використання лазерів [30]. Цей метод базувався на взаємодії пучка релятивістських електронів з холодною плазмою, використовуючи принцип нестабільності двох потоків, де рухомі електрони передають енергію плазмі, викликаючи кільватерні хвилі. Якщо наступний згусток електронів потрапляє в цю хвилю в оптимальній фазі, він здатен набрати енергію завдяки поздовжньому

електричному полю хвилі. Теоретичні дослідження підтвердили можливість прискорення електронів до значно вищих енергій, ніж у традиційних прискорювачах, з градієнтами прискорення понад 1 GeV на метр.

Початкові концепції фокусувались на малих збуреннях густини плазми, які сьогодні відомі як лінійний режим [31]. Згодом, Розенцвейг та колеги [32] виявили, що застосування сильніших збурень у так званому нелінійному або вибуховому режимі створює кращі умови для ефективного та якісного прискорення електронів. Центральну роль у цьому процесі відіграє драйвер, такий як інтенсивний лазерний промінь або пучок частинок, який генерує значні збурення в плазмі, індукуючи плазмові хвилі. Ці хвилі радіально відштовхують плазмові електрони, формуючи оболонку у вигляді бульбашки, яка огортає порожнину, заповнену виключно плазмовими іонами. Іони, будучи рівномірно розподілені та відносно нерухомі, залучають плазмові електрони назад до осі, сприяючи стабілізації процесу. Цей рух електронів оболонки індукує поздовжнє електричне поле, яке може прискорювати електрони. Також, виявлений заряд іонів створює поперечне електричне поле, зміна якого лінійно залежить від поперечного відступу, що сприяє фокусуванню електронних пучків, при цьому зберігаючи їх область у поперечному фазовому просторі [33]. Прискорення забирає енергію з вейкфілду, що призводить до зменшення його амплітуди [34]. Це може бути використано для формування прискорювального поля, завдяки чому всі частки прискорюються рівномірно [35], забезпечуючи енергоефективне прискорення з мінімальним розподілом енергії [36].

В сильно нелінійному вибуховому режимі радіальна сила кільватеру є однорідною всередині бульбашки, і сила фокусування  $F_r(z)$  в цьому контексті є константою. Аналітичні дослідження також вказують на те, що нестабільність пучка значно зменшується, коли  $F_r(z)$  є неоднорідною всередині бульбашки [37, 38]. Ці висновки допомагають виявити важливі параметри для оптимізації плазмо-

вих прискорювачів, що може призвести до підвищення стабільності прискорення електронних пучків. Зокрема, розробка та оптимізація плазмових профілів, які можуть допомогти управляти радіальними силами всередині бульбашки, що може відіграти ключову роль у зниженні нестабільності та збільшенні ефективності прискорення. Також, модифікація умов запуску пучків або застосування неоднорідних мод у плазмових колонах може додатково сприяти стабілізації процесів, обмежуючи вплив нестабільностей.

Концепція Пізена Чена про прискорення заряджених частинок у плазмі була вперше експериментально підтверджена в 1988 році в Аргонській національній лабораторії, де для генерації потужних кільватерних полів у плазмі використовувався інтенсивний пучок електронів [39]. У експерименті використовувалися два згустки електронів: драйвер (провісник) з енергією 21 МеВ для збудження хвилі та свідок (основний згусток) з енергією 15 МеВ, який проходив через хвилю з затримкою, зазнаючи прискорення або сповільнення в залежності від часу затримки. Результати дослідження підтвердили здатність цих полів створювати значні прискорюючі градієнти, досягнувши максимального градієнта прискорення 1,6 МеВ/м. Цей метод також був застосований у багатьох інших дослідженнях (див. таблицю 1.2), включаючи експеримент 2007 року в Стенфордському лінійно-му прискорювачі центрі (SLAC), де використання електронних пучків з енергією 42 ГеВ у плазмі дозволило подвоїти енергію електронів і досягти прискорюючого градієнта приблизно 52 ГеВ/м [40]. В 2009 році Ален Колдвелл і команда запропонували використовувати протонні пучки в якості драйвера [41]. Числові симуляції та експериментальні результати показали, що протони, завдяки своїй вищій масі та енергії, можуть створювати більш стабільні та потужні кільватерні хвилі, значно підвищуючи ефективність одноетапного прискорення частинок. У 2018 році метод з протонними пучками дозволив прискорити електрони до 2 ГеВ, підтверджуючи високий потенціал методу для досягнення тераелектронвольтних енергій

у майбутньому [42].

Таблиця 1.2.

Дані експериментів з променево приводного прискорення плазмового кільватерного поля.

Експеримент	Приріст Енергії (ГеВ)	Градiєнт Прискорення (ГеВ/м)	Тип Драйверу	Енергія Драйверу (ГеВ)
Blue, В. Е. та ін. (2003) [43]	0.08	0.056	позитрон	28.5
Muggli, Р. та ін. (2004) [44]	0.28	0.2	електрон	28.5
Hogan, М. J. та ін. (2005) [45]	2.7	27	електрон	28.5
Blumenfeld, I. та ін. (2007) [40]	42	52	електрон	42
Muggli, Р. та ін. (2010) [46]	14	36	електрон	28.5
Litos, М. та ін. (2014) [47]	1.6	4.4	електрон	28.5
Corde, S. та ін. (2015) [48]	5	1.3	позитрон	20.35
Corde, S. та ін. (2016) [49]	27	150	електрон	20.35
Adli, E. та ін. (2018) [42]	2	0.2	протон	400

Однією з основних проблем у прискоренні на кільватерних хвилях є обмеження на кількість енергії, яку можна передати від ведучого пучка до наступного [50]. Це обмеження визначається за допомогою трансформаційного коефіцієнта ( $R$ ), який є співвідношенням між максимальним прискорювальним електричним полем за ведучим пучком і максимальним гальмуючим полем всередині нього. Згідно з фундаментальною теоремою про навантаження пучка, відомою як теорема Вільсона [51], максимальне збільшення енергії в прискорювальній частині пучка не може перевищувати вдвічі величину енергії, що втрачають гальмуючі частинки,  $R \leq 2$ . Однак, це стосується випадків з симетричним розподілом заряду в пучку, який перетинає порожнину, що підтримує один режим.

У контексті кільватерного плазмового прискорення використання асиметричних розподілів струму в пучку, як показали дослідження Пізена Чена та інших, дозволяє подолати це обмеження [50]. Використання асиметричних розподілів,

таких як "трикутний" і "пороговий", де густина заряду змінюється вздовж пучка, сприяє підвищенню максимального прискорювального поля в порівнянні з гальмівним полем, що дозволяє перевищити обмеження трансформаційного коефіцієнта. Комп'ютерні симуляції, проведені командою Чена, підтверджують, що такі асиметричні розподіли можуть значно покращити трансформаційний коефіцієнт і тим самим ефективність передачі енергії. Водночас, існують практичні обмеження, як-от двопотокова нестабільність та зміщення фаз між ведучим і наступним пучками, які можуть знижувати кінцевий приріст енергії [50].

Дослідження Дж. Б. Розенцвейга демонструють, що при співвідношенні щільності заряду ведучого згустку до плазми,  $n_b = n_p/2$ , створюються оптимальні умови для прискорення [52]. Це співвідношення сприяє резонансному збудженню плазмових хвиль, які забезпечують значні градієнти прискорення без необхідності складного профілювання форми ведучого пучка. Також, використання послідовностей згустків з наростаючою амплітудою здатне ефективно збуджувати резонансні плазмові хвилі, що дозволяє досягнути аналогічного результату [53]. Автори виявили, що трансформаційний коефіцієнт критично залежить від форми згустка та співвідношення щільностей, при цьому теоретичне обмеження у 2 для трансформаційного коефіцієнта одного симетричного згустка може бути перевищене використовуючи асиметричні згустки в лінійному режимі, а також симетричні згустки в нелінійному режимі.

Окрім розвитку методів кільватерного лазерного прискорення та прискорення за допомогою згустків частинок, значна увага приділяється розробці плазмових лінз, які значно покращують фокусування пучків завдяки зниженню їхнього емітансу та енергетичного розсіювання. Виділяють два основні типи плазмових лінз: пасивні та активні.

Пасивні плазмові лінзи використовують природні властивості плазми для автоматичного фокусування без зовнішніх джерел енергії. Цей процес самофоку-

сування відбувається через реорганізацію плазми, що забезпечує електричну нейтральність після проходження через пучок частинок [54]. У роботі [55] досліджено ефективність використання електростатичної плазмової лінзи для керування потоками важких іонів високої інтенсивності на помірній енергії, що має значення для високодозової іонної імплантації. Виявлено, що при дуже слабких магнітних полях іонно-оптичні властивості плазмової лінзи значно покращуються, що відкриває можливості для створення нових типів економічних і компактних лінз на базі постійних магнітів. Окреме дослідження [56], яке використовувало чисельне моделювання та аналітичні розрахунки, зосередилося на вивченні плазмових кільватерних лінз. В рамках цього дослідження було встановлено, що всі короткі релятивістські електронні згустки у послідовності фокусуються однаково і рівномірно. Це дослідження дозволило визначити необхідні параметри для двох типів плазмових лінз, спрямованих на фокусування релятивістських електронних згустків.

Водночас, активні плазмові лінзи (АПЛ) збільшують можливості маніпулювання пучками через використання зовнішніх джерел енергії для генерування магнітних полів, що забезпечує точніший контроль над параметрами пучків. Згідно з дослідженнями [57], АПЛ можуть досягати високих градієнтів фокусування (до 3.6 кТ/м), значно перевищуючи можливості традиційних квадрупольних магнітів. Активні лінзи також відзначаються високою повторюваністю результатів, що є критично важливим для забезпечення однорідності поля по всій діафрагмі лінзи, а також для стабільності і контрольованих умов фокусування частинок. У іншій роботі [58] було досліджено використання АПЛ для фокусування протонних пучків з енергією від 1 до 100 MeV, прискорених лазером. Встановлено, що густина протонного згустку залежить від налаштувань зовнішнього магнітного поля, що впливає на стабільність фокусування. Двовимірне моделювання частинок в просторі (2D PIC) показало, що за певних умов у плазмі можливо ефективно управ-

ляти енергетичними втратами протонів, розподілом поперечного струму та стисненням плазми, зумовленим ефектом Z-pinch. Результати дослідження свідчать про високу ефективність АПЛ у фокусуванні протонних пучків, що зберігають їх якість і роблять цю технологію обіцяючою для широкого спектра застосувань у різних галузях.

## 1.1 Висновки до розділу 1

У цьому розділі розглянуто історичний розвиток і сучасні аспекти технологій плазмового прискорення, що почали розвиватися з середини ХХ століття. Ці технології мають значні переваги порівняно з традиційними методами, особливо завдяки здатності генерувати високі градієнти електричного поля на коротких відстанях. Було відзначено, що використання плазмових кільватерних полів може значно підвищити ефективність прискорювачів та забезпечити фокусування електронних згустків за допомогою плазмових лінз. Також було представлено останні досягнення в розвитку цих технологій, включно з таблицями, що демонструють досягнуті градієнти прискорення. Дослідження взаємодії пучків частинок з плазмою в нестационарних умовах відкрило нові можливості для оптимізації прискорювальних процесів, зменшення енергетичних втрат та підвищення когерентності та стабільності пучків. Розглядалися можливості прискорення частинок у сильно нелінійному режимі, його вплив на формування кільватерних полів, а також контроль та маніпулювання умовами прискорення. Все це підкреслює важливість подальших числових моделювань та експериментальних перевірок для точного налаштування параметрів прискорення, що може сприяти подальшому удосконаленню технологій плазмових прискорювачів та зниженню їх вартості та розмірів.

## РОЗДІЛ 2. ЧИСЛОВА МОДЕЛЬ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОДІЇ РЕЛЯТИВІСТСЬКОГО ЕЛЕКТРОННОГО ЗГУСТУ З ПЛАЗМОЮ

### 2.1 Програма LCODE

Аналітичне моделювання реальних експериментальних умов для створення кільватерної хвилі в плазмі за допомогою електронних скупчень, а також аналіз їхньої взаємодії, є вкрай складним завданням. Ця складність стає особливо очевидною в умовах, коли щільність плазми еквівалентна щільності електронного пучка, оскільки аналітичний опис впливу драйвера на пучок електронів сталої форми в таких умовах виявляється надзвичайно складним. Враховуючи цю складність, чисельне моделювання виступає як незамінний і ефективний засіб не лише для глибокого дослідження зазначеної взаємодії, але й для верифікації теоретичних припущень та аналізу експериментальних даних.

У магістерській роботі числове моделювання збудження кільватерних полів у плазмі було виконано за допомогою програми LCODE, розробленої професором К.В.Лотовим для моделювання двовимірної динаміки релятивістських пучків у плазмі. Параметри цього моделювання були вибрані таким чином, щоб вони відповідали параметрам, використаним у експериментальних дослідженнях кільватерного прискорення заряджених частинок у плазмі. Програмне забезпечення LCODE є повністю електромагнітним та повністю релятивістським інструментом симуляції, яке може працювати як у декартовій так і в циліндричній геометрії [59]. У подальшому опис подається на його застосуванні в циліндричних координатах  $(r, \varphi, z)$ , де вікно симуляцій рухається зі швидкістю світла. Програма моделює пучки за допомогою повністю релятивістських макрочастинок та може використовувати кінетичний або гідродинамічний підхід для моделювання плазми.

Оскільки масштаб розвитку пучка зазвичай значно перевищує довжину са-

мого пучка, у кодї застосовується квазістатичне наближення [60]. Воно передбачає, що швидкі зміни умов в плазмі, спричинені присутністю пучка, можна вважати статичними на протязі часу просування пучка. Зокрема при розрахунку відповіді плазми ми розглядаємо пучок як "жорсткий". Поля, створені цим пучком, залежать від поздовжньої координати  $z$  та часу  $t$  в комбінації  $\xi = z - ct$  і можуть бути знайдені пошарово, починаючи від передньої частини пучка (дивись рисунки 2.1 та 2.2). Оскільки пучок не змінюється, всі частинки, які починають рух з деякої поперечної позиції  $r_0$ , копіюють рух одна одної і їхні параметри (поперечні координати та імпульси) можуть бути визначені як функції від  $\xi$ . Таким чином, макрочастинка плазми в квазістатичній моделі є не "великою" частинкою, а "частинковою трубкою", тобто групою частинок, що починають рух із заданим радіусом та із заданим початковим імпульсом [59]. Дані поля використовуються потім для коригування властивостей пучка на наступних етапах [61].

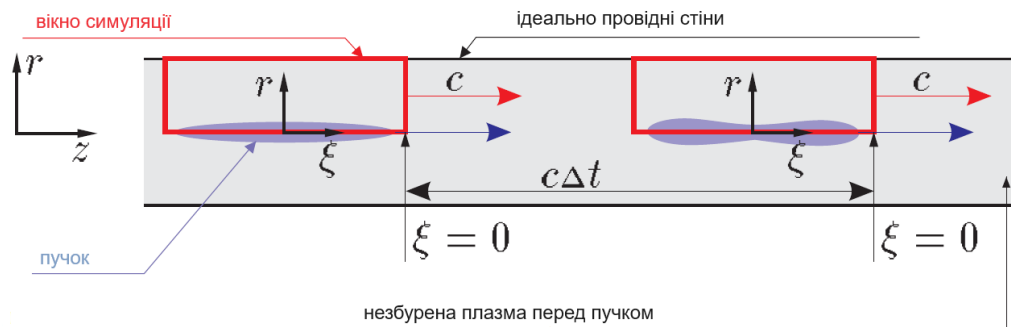


Рис. 2.1. Геометрія задачі. Фотографія отримана зі статті [59].

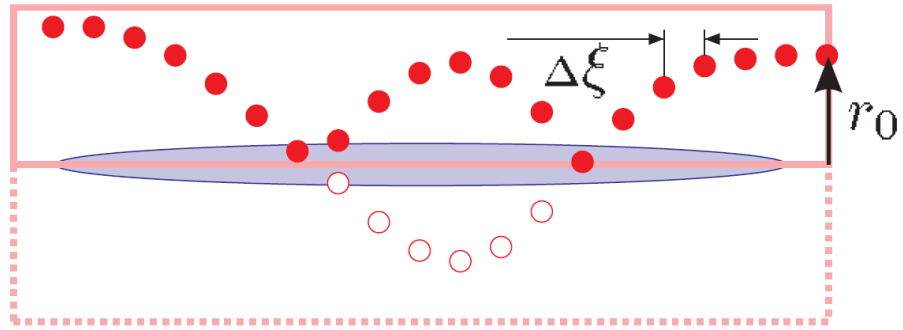


Рис. 2.2. Траєкторія руху макрочастинки плазми у вікні моделювання. Фотографія отримана зі статті [59].

У програмі LCODE розглядається можливість використання довільних початкових розподілів частинок уздовж осі моделювання. Один із зручних для моделювання початкових розподілів інтенсивності, призначений для відтворення локалізованих груп частинок, має такий вигляд [59]:

$$n_b = \frac{n_{b0}}{2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi\xi}{L}\right) \right], \quad -L < \xi < 0. \quad (2.1)$$

Тут  $\sigma_r$  позначає радіус групи частинок. Якщо розглядати область за межами скінченної довжини  $L$ , то інтенсивність стає рівною нулю, тому косинусоїдальний розподіл інтенсивності в залежності від  $\xi$  виявляється більш практичним для обчислень ніж гауссівський [59].

Коли  $L = 2\sqrt{2\pi}\sigma_z$  (де  $\sigma_z$  дорівнює половині довжини групи частинок), розподіл за формулою (2.1) дуже точно відповідає косинусоїдальному розподілу (2.2), що демонструється на рисунку 2.3 [59].

$$n_b = n_{b0} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{(\xi + L/2)^2}{2\sigma_z^2}\right). \quad (2.2)$$

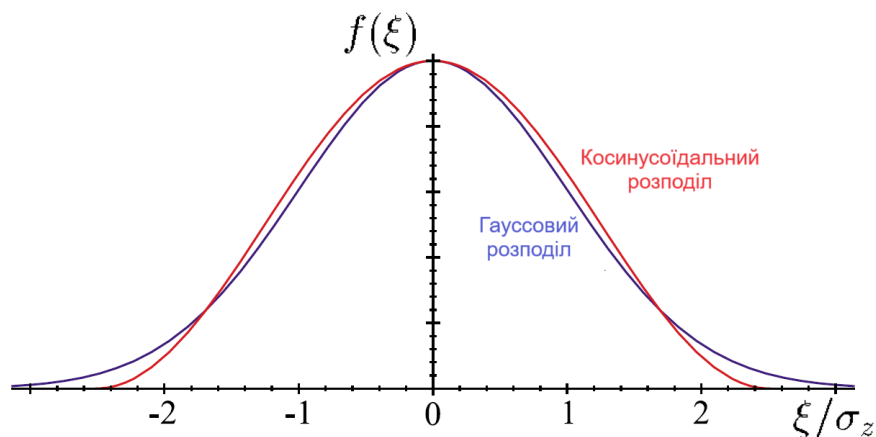


Рис. 2.3. Гауссівський та відповідний косинусоїдальний розподіли густини. Фотографія отримана зі статті [59].

Для представлення даних програма використовує безрозмірні величини, що дозволяє уніфікувати процеси і спростити математичні обчислення. Система вимірювань в цій програмі побудована на наступних основах: час нормується як  $\omega_p^{-1}$ , де  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m}$  є незбуреною частотою плазми, яка представляє собою природну частоту осциляцій електронів у плазмі, залежну від їх густини  $n_0$ , заряду  $e$  та маси  $m$ . Відстань нормується через  $c/\omega_p$ . Таке нормування дозволяє перевести відстань у природні масштаби, характерні для динаміки плазми. Густина плазми нормується на її початкову густину  $n_0$ , що забезпечує зручність відносних порівнянь густини в різних областях моделювання. Електромагнітні поля виражаються через одиниці  $\sqrt{4\pi n_0 m c^2}$ , потенціал кільватерного поля нормується на  $m c^2 / e$ , що представляє енергію, нормовану на заряд електрона, забезпечуючи таким чином зв'язок між електромагнітними полями і кінетичними характеристиками частинок. Імпульси пучка і плазми нормуються на  $m c$ , базуючись на фундаментальних властивостях маси та швидкості світла [62].

$$r_{new} = \frac{r\omega_p}{c}, \quad \xi_{new} = \frac{\xi\omega_p}{c}, \quad t_{new} = \omega_p t, \quad (2.3)$$

$$\vec{v}_{new} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \vec{p}_{new} = \frac{\vec{p}}{mc}, \quad \vec{j} = \frac{\vec{j}}{en_i c^2}, \quad (2.4)$$

$$\vec{B}_{new} = \frac{\vec{B}}{E_0}, \quad \vec{E}_{new} = \frac{\vec{E}}{E_0}, \quad E_0 = \sqrt{4\pi n_i m c^2}. \quad (2.5)$$

Для тестування програми LCODE було проведено порівняння з результатами числового моделювання програмами NOVOCOD [63], PEGASUS і OSIRIS [64, 65], а також проведено числове моделювання багатьох експериментів [39, 66, 67, 68], в тому числі експерименту E-157 в Стенфорді [69]. Це порівняння дозволило оцінити точність і надійність програми LCODE, зокрема її спроможність адекватно відтворювати фізичні процеси, які відбуваються під час взаємодії високоінтенсивних лазерних пучків з плазмою. Згадані програми, такі як NOVOCOD, PEGASUS та OSIRIS, мають різні обчислювальні підходи і алгоритми, що забезпечують різні переваги у моделюванні плазмодинамічних явищ. Результати експерименту E-157, проведеного у SLAC, були використані як референсні дані для верифікації результатів моделювання. Це експериментальне дослідження відоме своїми вимірами релятивістських ефектів у плазмі, що дало змогу глибше зрозуміти взаємодії високоенергетичних лазерів із високощільною плазмою. Результати, отримані за допомогою LCODE, показали добру узгодженість з експериментальними даними, підтверджуючи її здатність відтворювати реалістичні сценарії взаємодії пучків з плазмою [59].

## 2.2 Модель пучка

Моделювання пучка виконується через використання макрочастинок, кожна з яких визначається за радіальними ( $r$ ) та поздовжніми ( $\xi$ ) координатами ( $r_b$  та  $\xi_b$ ),

радіальним ( $p_{br}$ ) та поздовжнім ( $p_{bz}$ ) імпульсами, та моментом імпульсу ( $M_b$ ). Ці характеристики переглядаються та актуалізуються на кожному етапі симуляційного процесу. Заряди  $q_b$  та маси  $m_b$  є однаковими для всіх макрочастинок. Коли проводять обчислення щільності пучка  $n_b(r, \xi)$ , відбувається розподіл кожної частинки уздовж кола. Товщина цього кола, позначена як  $\Delta\xi$  (див. малюнок 2.2), визначається відповідно до кроку сітки у напрямку  $\xi$ . Ширина  $\Delta r_b$  є параметром, який можна налаштовувати. Початкові координати та імпульси частинок встановлюються у той момент часу, коли пучок цілком потрапляє в плазму, що дозволяє точно відобразити початкову конфігурацію пучка [62]. Для випадку відсутності зовнішнього магнітного поля  $B_z = 0$ , обчислювальні рівняння для опису пучка набувають наступного вигляду [59]:

$$\frac{dr_b}{dt} = v_{br}, \quad \frac{d\xi_b}{dt} = v_{bz} - c, \quad \frac{dM_b}{dt} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{dp_{br}}{dt} = q_b(E_r - B_\varphi), \quad \frac{dp_{bz}}{dt} = q_b E_z, \quad (2.7)$$

$$\vec{v}_b = \frac{c\vec{p}_b}{\sqrt{m_b^2 c^2 + p_{br}^2 + p_{bz}^2 + \frac{M_b^2}{r_b^2}}}. \quad (2.8)$$

### 2.3 Кінетична плазмова модель

Макрочастинковий підхід у моделюванні плазми, що використовується зокрема для аналізу нелінійного плазмового кільватерного прискорення, представляє плазму як ансамбль макрочастинок. Кожна макрочастинка у цій кінетичній моделі символізує значну кількість реальних частинок, що дозволяє оптимізувати обчислювальні витрати, зберігаючи при цьому достатній рівень деталізації для аналізу критичних процесів. Серед таких процесів розповсюдження хвиль, взаємодія частинок з електромагнітними полями та динаміка пучків в умовах

високої енергії. Вони є ключовими для розуміння роботи плазмових прискорювачів, процесів термоядерного синтезу та інших застосувань у фундаментальних і прикладних дослідженнях. Кожна макрочастинка в моделі визначається такими параметрами, як радіальна координата  $r$ , вектор імпульсу  $(p_r, p_\varphi, p_z)$ , маса  $M$  та заряд  $q$  [59]. Ці параметри дозволяють точно описати поведінку пучків у плазмі, враховуючи їхню взаємодію з електромагнітними полями та іншими частинками. В рамках квазістатичного наближення, властивості електронного пучка припускаються незмінними, що сприяє спрощенню процедури визначення відгуку плазми. Оскільки всі макрочастинки, що починають рух із радіальним положенням  $r_0$ , синхронізують свій рух, їх параметри можна визначити як функції від поздовжньої координати  $\xi$  [59].

Параметри макрочастинок плазми задаються на початку взаємодії з пучком (при  $\xi = 0$ ) і після цього визначаються послідовно для кожного окремого сегмента відповідно до наступних формул [59]:

$$\frac{d\vec{p}}{d\xi} = \frac{d\vec{p}}{dt} \frac{dt}{d\xi} = \frac{q}{v_z - c} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{B}] \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{dr}{d\xi} = \frac{v_r}{v_z - c}, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\sqrt{M^2 + p^2/c^2}}. \quad (2.10)$$

Плазмовий струм  $\vec{j}$  та густина заряду  $\rho$  визначаються шляхом сумування внесків макрочастинок плазми у певному радіальному діапазоні. Це сумування включає нормалізаційний фактор  $A$ , який є важливим, оскільки міра, до якої трубка частинок впливає на загальну густина та струм, залежить від швидкості макрочастинок відносно спостерігача у кадрі симуляції. Вирази для струму та густини наступні:

$$\vec{j} = A \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i}{c - v_{z,i}}, \quad \rho = A \sum_i \frac{q_i}{c - v_{z,i}}, \quad (2.11)$$

де  $q_i$  та  $\vec{v}_i$  представляють заряд та швидкість кожної макрочастинки, а  $v_{z,i}$  —

це компонента швидкості у поздовжньому напрямку [59].

Взаємозв'язок між зміною полів у поздовжній координаті  $\xi$  та часом  $t$  описується частковим диференціальним рівнянням:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial(ct)}. \quad (2.12)$$

Обчислюючи  $\vec{j}$  та  $\rho$  у конкретному поздовжньому положенні  $\xi$ , та використовуючи рівняння Максвелла, ми можемо визначити електромагнітні поля у цій області:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r = 4\pi(\rho + \rho_b) - \frac{\partial E_z}{\partial \xi}, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r = -\frac{\partial B_z}{\partial \xi}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (E_r - B_\varphi) = \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c} j_r, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{4\pi}{c} j_\varphi, \quad E_\varphi = -B_r, \quad (2.16)$$

де  $\rho_b$  — це густина заряду пучка, а компоненти  $j_{br}$  та  $j_{b\varphi}$  струму пучка ми не беремо до уваги. Ці поля потім використовуються для оновлення умов плазми під час симуляції [59].

Для забезпечення стабільності обчислювального процесу, рівняння розв'язуються методом скінченних різниць. Це вимагає диференціювання рівнянь (2.13) та (2.14), та потім подальшу підстановку результатів рівнянь (2.15) та (2.16) у вихідні рівняння. Включення полів з тильдами чи без до обох частин рівнянь не призводить до зміни самих рівнянь, але впливає на результати лише на стадії переходу до кінцевих різниць. В результаті, рівняння (2.13) та (2.14)

трансформуються у наступний вигляд:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r E_r - \frac{\omega_p^2}{c^2} E_r = 4\pi \left( \frac{\partial(\rho + \rho_b)}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial j_r}{\partial \xi} \right) - \frac{\omega_p^2}{c^2} \tilde{E}_r, \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_r - \frac{\omega_p^2}{c^2} B_r = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial j_\varphi}{\partial \xi} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \tilde{B}_r, \quad (2.18)$$

де  $\tilde{E}_r$  та  $\tilde{B}_r$  це поля на попередньому шарі [59].

Граничні умови для рівнянь (2.15) - (2.18) відповідають ідеально провідній трубці з радіусом  $r_{max}$ :

$$E_r(0) = B_r(0) = B_\varphi(0) = 0, \quad E_z(r_{max}) = 0, \quad (2.19)$$

$$\int_0^{r_{max}} 2\pi r B_z dr = \pi r_{max}^2 B_0, \quad B_r(r_{max}) = 0, \quad (2.20)$$

де  $B_0$  є зовнішнім поздовжнім магнітним полем, якщо воно присутнє (наявність цього поля не змінює симетрію системи). Відповідь плазми розраховується шар за шаром у напрямку зменшення  $\xi$  [59].

## 2.4 Гідродинамічна модель плазми

Модель рідкої плазми дозволяє аналізувати поведінку заряджених частинок як неперервного середовища, що підкоряється законам гідродинаміки. Цей підхід дозволяє вивчати динамічні процеси у плазмі без необхідності прямого аналізу кінетичних рівнянь для кожної окремої частинки, тим самим значно спрощуючи обчислювальний процес. Замість детального розгляду кінетики кожної частинки, плазма моделюється як середовище з певними континуумними характеристиками, які описуються рівняннями руху, збереження маси та енергії.

У гідродинамічній моделі плазма розглядається як електронна рідина, що

забезпечує детальний механізм для опису її кінетики та взаємодії з електромагнітними полями через систему диференціальних рівнянь Максвелла та рівнянням для руху електронної рідини ((2.21) - (2.24)), які дозволяють ефективно аналізувати впливи і взаємодії на макроскопічному рівні, що є важливим у сфері плазмових досліджень [70]:

$$\text{rot}\vec{B} = \frac{4\pi}{c}(\vec{j}_b - en\vec{v}) + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}, \quad (2.21)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad (2.22)$$

$$\text{div}\vec{E} = 4\pi e(n_i - n - n_b), \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{p} = -e\vec{E} - \frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (2.24)$$

У розглянутих формулах,  $n$  позначає щільність електронів плазми, а  $\vec{v}$  їхню швидкість. Імпульс  $\vec{p}$  визначається як  $\gamma m\vec{v}$ , де  $\gamma = (\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}})^{-1}$  є Лоренц-фактором. Цей фактор враховує релятивістське збільшення маси заряджених частинок, які рухаються зі швидкістю, близькою до швидкості світла. Параметри  $n_b$  та  $\vec{j}_b$  характеризують щільність та струм електронного пучка відповідно. Незважаючи на те, що гідродинамічне наближення значно покращує швидкість обчислень, його застосування має обмеження, особливо при моделюванні пучків високої щільності, які можуть спричинити раптове розривання хвиль у плазмі. Таким чином, область застосування симуляцій обмежена сценаріями, де плазма не є надщільною ( $n_i \leq n_b$ ) [70]. Використання безрозмірних величин спрощує опис у цій моделі, тому рівняння від (2.21) до (2.24) разом із наступними рівняннями утворюють повну систему рівнянь, яка описує плазму у рамках гідродинамічної моделі [62]:

$$\vec{j} = -n_e e \vec{v}, \quad \rho = 1 - n_e, \quad \vec{v} = \frac{\vec{p}}{\gamma}, \quad \gamma = \sqrt{1 + p^2}. \quad (2.25)$$

Цей набір рівнянь включає дві константи руху. Перша визначає магнітне поле через швидкість та густину електронів плазми, в якому  $B_0$  це подовжнє магнітне поле, що розташоване перед пучком [62].

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{p} + n_e B_0 (\vec{e}_z - \vec{v}), \quad (2.26)$$

Інша константа, потенціал кільватерного поля  $\Phi$  виводиться з збереження узагальненого імпульсу:

$$\Phi = \gamma - p_z, \quad (2.27)$$

$$E_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}, \quad E_r - B_\varphi = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}. \quad (2.28)$$

Для спрощення обчислень зручніше користуватися величиною  $N = n_e(1 - v_z)$ , аніж безпосередньо густиною електронів  $n_e$ , і явно використовувати рівняння неперервності, що приймає наступну форму [62]:

$$\frac{\partial N}{\partial\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r N p_r. \quad (2.29)$$

Використовуючи нове нормування набір рівнянь переписується наступним чином [62]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -E_z, \quad \frac{\partial p_r}{\partial \xi} = \frac{\partial p_z}{\partial r} + B_\varphi + \frac{N p_\varphi B_0}{\Phi}, \quad (2.30)$$

$$N = 1 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r p_\varphi - \frac{N p_\varphi}{\Phi} = -B_0 \frac{\partial N}{\partial r}, \quad (2.31)$$

$$p_z = \frac{1 + p_r^2 + p_\varphi^2 - \Phi^2}{2\Phi}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\frac{N p_r}{\Phi}, \quad (2.32)$$

$$B_r = -E_\varphi = -\frac{N p_r B_0}{\Phi} - \frac{\partial p_\varphi}{\partial \xi}, \quad B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r p_\varphi + B_0 N, \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r B_\varphi - \frac{N}{\Phi} B_\varphi = \frac{\partial j_b}{\partial r} - p_z \frac{\partial}{\partial r} \frac{N}{\Phi} + \frac{p_r}{\Phi r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r N p_r}{\Phi} + \frac{N p_r E_z}{\Phi^2} + \frac{N^2 p_\varphi B_0}{\Phi^2}. \quad (2.34)$$

У цих рівняннях, тільки два параметри ( $\Phi$  та  $p_r$ ) вимагають оновлення для переходу до наступного рівня за змінною  $\xi$ , водночас інші можна визначити через  $\Phi$  та  $p_r$  у рамках даного шару. Початкові умови при  $\xi = 0$  визначені як  $\Phi = 1$  та  $p_r = 0$ , оскільки до проходження згустку збурень у плазмі немає. Необхідні граничні умови  $r = r_{\max}$  відповідають відсутності збурень на стінці [62]:

$$p_\varphi(0) = p_\varphi(r_{\max}) = 0, \quad B_\varphi(0) = E_z(r_{\max}) = 0, \quad \left. \frac{\partial(r B_\varphi)}{\partial r} \right|_{r=r_{\max}} = 0. \quad (2.35)$$

Використовуючи такий підхід, обчислені поля служать основою для визначення координат та імпульсів частинок згустку на наступному кроці моделювання. Цей процес є ітеративним, дозволяючи точно відслідковувати динаміку частинок у плазмі відповідно до змінних умов, викликаних їх взаємодією з електромагні-

тними полями та іншими частинками плазми. Розв'язок диференціальних рівнянь забезпечує узгодження поля з кінетикою частинок, враховуючи їхні заряди та маси, що збільшує точність моделювання плазмових взаємодій.

## 2.5 Висновки до розділу 2

У цьому розділі детально описано застосування програми LCODE для числового моделювання взаємодії релятивістських електронних згустів з плазмою. Ця програма відіграє ключову роль у магістерській роботі, оскільки дозволяє детально аналізувати взаємодії, які складно досліджувати експериментально. Основна мета LCODE полягає у забезпеченні точних та надійних результатів дослідження кільватерних хвиль і динаміки згустів у плазмі. Програма пропонує можливість роботи в двох режимах: кінетичному та гідродинамічному, що забезпечує гнучкість при моделюванні різних сценаріїв взаємодії. Основні теорії, які лягли в основу цих моделей, а також методи опису плазми і представлення пучків частинок, були детально описані у цьому розділі. Така універсальність робить LCODE незамінним інструментом для вивчення процесів, які неможливо дослідити безпосередньо через велику енергію чи недоступність умов. Використання LCODE в магістерській роботі підкреслює важливе значення числових методів у сучасних дослідженнях плазми та взаємодії високоенергійних згустів.

### РОЗДІЛ 3. ФОКУСУВАННЯ РЕЛЯТИВІСТСЬКИХ ЕЛЕКТРОННИХ ЗГУСТКІВ У ПЛАЗМІ У НЕЛІНІЙНОМУ РЕЖИМІ

Для аналізу впливу довжини та форми згустку на формування плазмових бульбашок та фокусування релятивістських електронних згустків у високо нелінійних умовах використовувалося числове моделювання з програмним забезпеченням LCODE. Цей інструмент дозволяє точно відтворювати плазмодинамічні процеси та аналізувати вплив змін параметрів пучка на динаміку електричних полів та розподіл частинок у плазмі. За допомогою числового моделювання було створено графіки поздовжнього поля, густини, фокусуєчої сили та інших параметрів, що дозволили візуально аналізувати вплив змін форми згустків на різних етапах дослідження. Програма надавала файли з обчислювальними даними, використані для візуалізації отриманих результатів та підтримки висновків дослідження. Результати фокусування та збудження кільватерного поля були зафіксовані на ранніх етапах після проходження згустка-провісника, зокрема у момент часу  $t = 38.15$ . Головною метою дослідження було не знаходження оптимальних параметрів фокусування, а аналіз впливу форми згустків на фокусуєчі властивості з метою зменшення енергетичного розкиду у сильно нелінійному режимі.

#### **3.1 Вплив форми згустків на фокусуєчі властивості кільватерної плазмової лінзи та енергетичний розкид згустку**

У цьому підрозділі представлено результати числового моделювання, які зосереджені на вивченні впливу різних профілів та довжин електронних згустків на фокусуєчі властивості кільватерної плазмової лінзи та на енергетичні розкиди згустків. У дослідженні були аналізовані два типи профілів згустків: гауссівський і трикутний. Трикутний профіль характеризується лінійним зростанням густини

від нуля до максимальної амплітуди, за яким слідує лінійне зниження до нуля, що дозволяє дослідити реакцію плазми на різкі зміни густини на межах згустка. Гауссівський профіль, у свою чергу, створений за косинусоїдальним принципом, забезпечує більш плавні переходи густини, які є типовими для традиційних експериментів з прискоренням. Параметри моделювання включали струм електронного згустка рівним 0.6 безрозмірних одиниць і крок поздовжньої сітки 0.05 у симуляційному вікні. Щоб запобігти обміну енергії згустка з кільватерним полем, у дослідженні використовувався згусток-провісник. Цей згусток збуджує нелінійне кільватерне поле та створює умови для однорідного поля фокусування. На рисунках 3.1 та 3.2 відображено просторовий розподіл густини короткого згустка-провісника, розташованого на краю симуляційного вікна при  $\xi = 17$ , та основного згустка-свідка, який знаходиться у центрі з візуально високою густиною. У зоні основного згустка формується кільватерна плазмова лінза, що сприяє ефективнішому фокусуванню та прискоренню згустків у сильно нелінійному режимі.

Коли інтенсивний згусток-провісник просувається крізь плазму, він радіально виштовхує електрони, створюючи оболонку з плазмових електронів, чітко видно на рисунку 3.2 як бульбашку, на рисунку вільні від електронів порожнини позначено чорним кольором. Витіснені електрони утворюють довкола бульбашок шар з підвищеною електронною густиною, на малюнку він відображається білими та жовтими кольорами. Яскравість та контрастність, ілюструють високу густину електронів в області згустків, що дає розуміння механізмів формування та динаміки плазмових бульбашок в рамках цього дослідження.

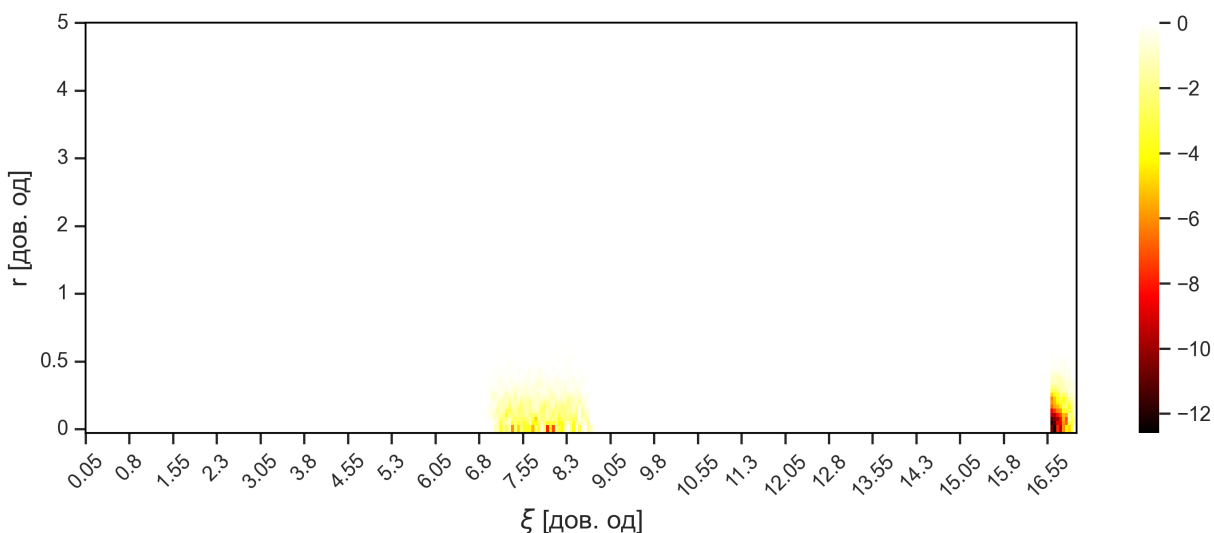


Рис. 3.1. Просторовий розподіл густини короткого профільованого згустка-провідника та основного згустка. Радіус  $r$  представлено у безрозмірних одиницях,  $\xi$  — поздовжня координата у системі покою провідника, також виражена у безрозмірних параметрах.

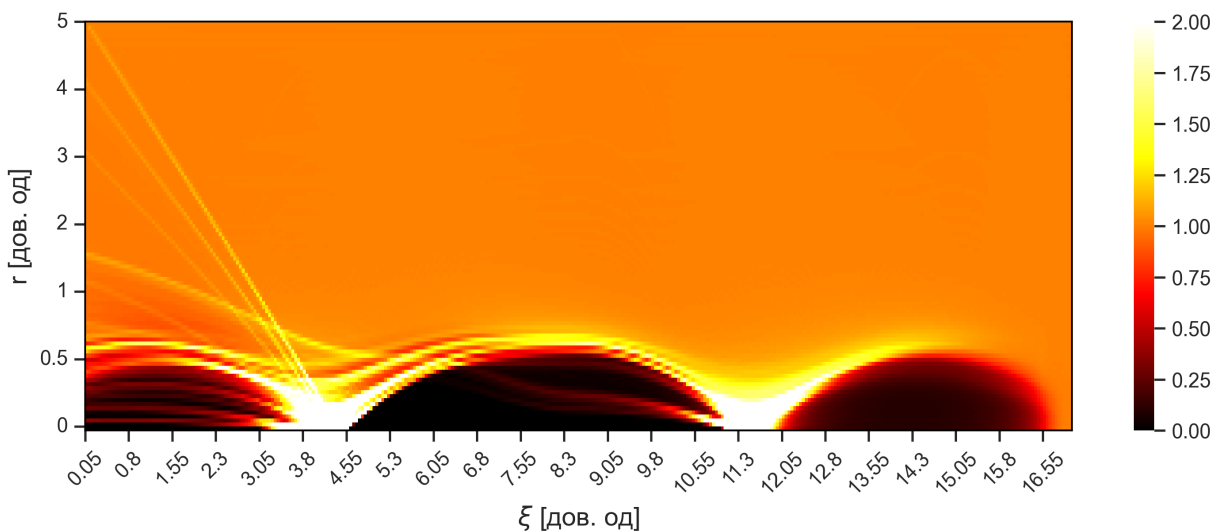


Рис. 3.2. Просторовий розподіл густини електронів плазми, збуджених профільованим згустком-провідником та основним згустком у сильно нелінійному режимі. На графіку густина відображена в логарифмічному масштабі.

Ця бульбашкова структура у плазмі, сформована дією інтенсивного згустка-провідника, діє як оптична лінза, ефективно фокусуючи та направляючи наступні згустки завдяки сформованому поздовжньому електричному полю. Основний

згусток, який розташований на відстані 7.25 довільних одиниць від провідника і має довжину рівну 2, опиняється у центрі цієї структури, де умови для його прискорення є оптимальними. Внутрішня частина бульбашки, яка багата на іони та вільна від електронів, формує сильне поздовжнє електричне поле. Це поле сприяє прискоренню частинок основного згустка. Іони, відносно нерухомі порівняно зі швидкими електронами, стабілізують це поле, що забезпечує стабільність та підсилює ефективність прискорення згустків у цій плазмовій бульбашці. Релаксація накопичених електронів до рівноважних позицій викликає плазмові осциляції, що можуть індукувати формування вторинних плазмових бульбашок, створюючи додаткові умови для прискорення наступних частинок у пучку.

Зміни в електронній густині породжують варіації в електричному полі, результати яких відображені на графіку 3.3. На цьому графіку представлено поздовжнє електричне поле на осі  $E_z$  (зелений колір) та його усереднене значення  $\langle E_z \rangle$  (червоний колір). Усереднене поздовжнє поле може бути визначено за наступною формулою:

$$\langle E_z \rangle = \frac{\int dr r n_b E_z(\xi, r)}{\int dr r n_b}, \quad (3.1)$$

де інтегрування враховує радіальний розподіл та густину частинок, дозволяючи обчислити зважене середнє поздовжнє поле вздовж осі. Цей підхід дозволяє глибше аналізувати, як геометричні характеристики згустка впливають на властивості поля. Відстань між згустком-провідником та згустком-свідком, а також довжина згустка у даній конфігурації залишається відповідною до раніше вказаних значень.

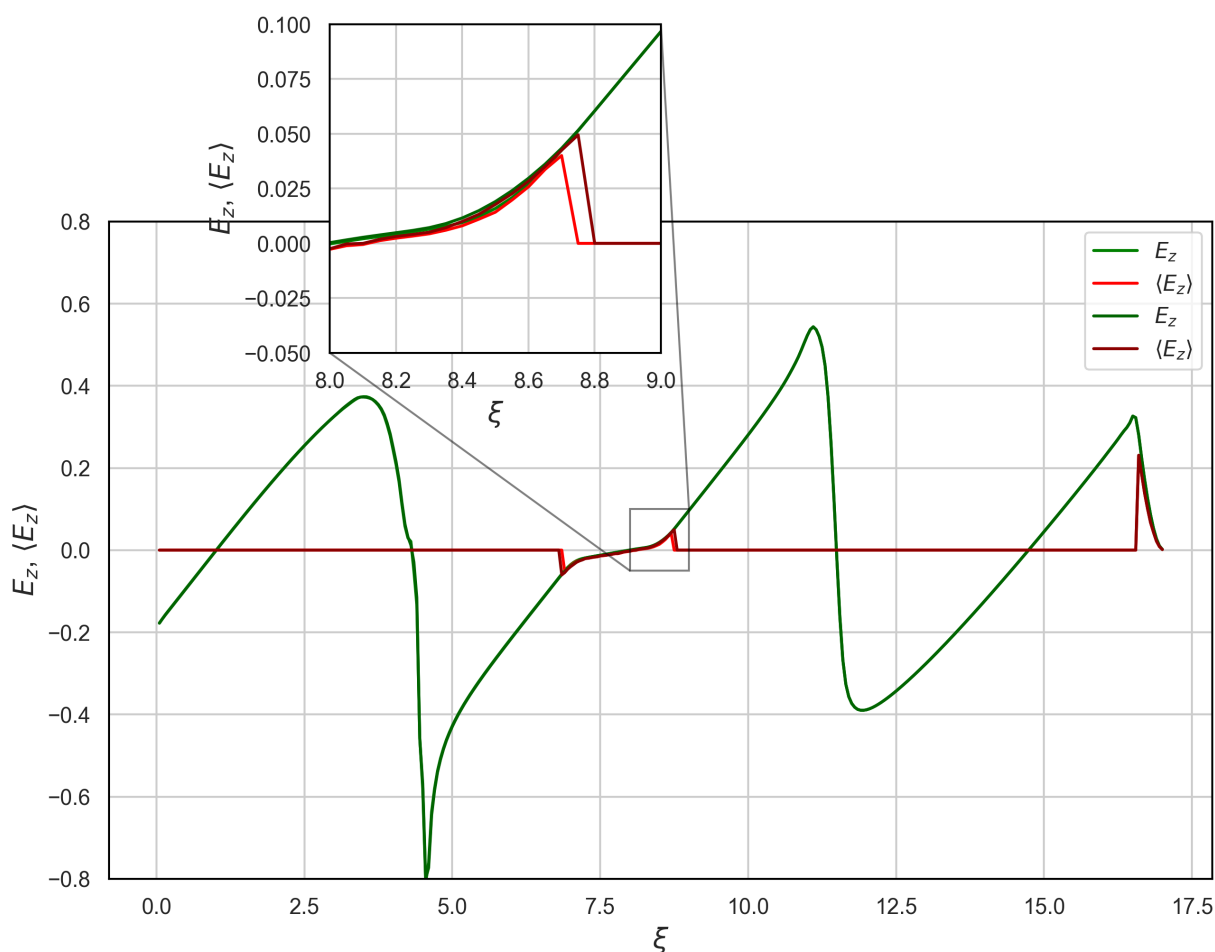


Рис. 3.3. Електричне поле на осі та усереднене по радіусу поздовжнє поле, що діє на згустки різних профілів в залежності від безрозмірної координати  $\xi$ . Електричне поле візуалізовано зеленим кольором, а середнє поздовжнє поле — червоним. Яскраво-червоний колір використано для усередненого по радіусу поздовжнього поля у випадку гауссоподібного профілю згустку, тоді як темно-червоний — для трикутного профілю. Основна частина згустка є однорідною, але фронти спочатку прискорюються, а потім сповільнюються. Відстань між згустком-провісником і основним згустком становить 7.25, довжина згустків 2.

З цього графіку можна відзначити, що амплітуда усередненого поздовжнього кільватерного поля для трикутної форми згустку, яка представлена темно-червоним кольором, перевищує амплітуду для гаусоподібної форми, яка зображена яскраво-червоним кольором. Формування цих профілів згустків виконане згідно з раніше описаним методом, де основна частина кожного згустку має однорідну структуру. Особливо важливою є динаміка на краях згустка, де

передня частина згустка зазнає гальмування через взаємодію з плазмою, тоді як задня частина отримує прискорення завдяки взаємодії зі слідуєчими частинами плазми. Ці взаємодії між згустками та плазмовим середовищем створюють оптимальні умови для фокусування згустків, що може бути використано для їх подальшого прискорення. Зокрема, на передній частині гауссоподібного згустку з вищою енергією діє легке гальмування, тоді як на задній частині, де енергія нижча, відбувається слабе прискорення, що сприяє ефективному фокусуванню згустка. Така динаміка сприяє зменшенню енергетичного розкиду, що є особливо важливим для забезпечення стабільності та однорідності згустка.

Продовжуючи аналіз впливу параметрів згустка на характеристики плазмових бульбашок, варто відмітити роль довжини згустка у формуванні електричного поля. На рисунку 3.4 демонструється, як зміна довжини основного згустка до величини, що дорівнює половині довжини хвилі ( $\lambda/2$ ), впливає на поведінку плазмових бульбашок. Ця зміна істотно відображається на динаміці електричних полів усередині бульбашок. В цьому випадку основний згусток, який відстає від провідника на 6.68 довільних одиниць, створює умови, за яких спостерігається збільшення амплітуди коливань поздовжнього електричного поля  $E_z$  порівняно з значеннями, отриманими для згустків меншої довжини (рис. 3.3). Трикутна форма має вищу амплітуду кільватерного поздовжнього поля, ніж гауссоподібна. У випадку трикутної форми поля є більшими по всій довжині, у випадку гауссоподібної — трохи меншими. При збільшенні довжини згустку спостерігається зростання амплітуд діючих електричних полів, що сприяє швидшому зниженню енергетичного розкиду серед частинок згустка. У передній частині згустка, де розташовані частинки з вищою енергією, відбувається їхнє поступове уповільнення до рівня енергії основної маси згустка. Якщо плазмова лінза має достатню довжину, то енергія частинок у передній частині згустка може вирівнятися з енергією частинок в основній частині згустка. Однак, якщо довжина плазмової лінзи надмірна,

може відбутися знову зростання енергетичного розкиду через динамічні взаємодії в згустку.

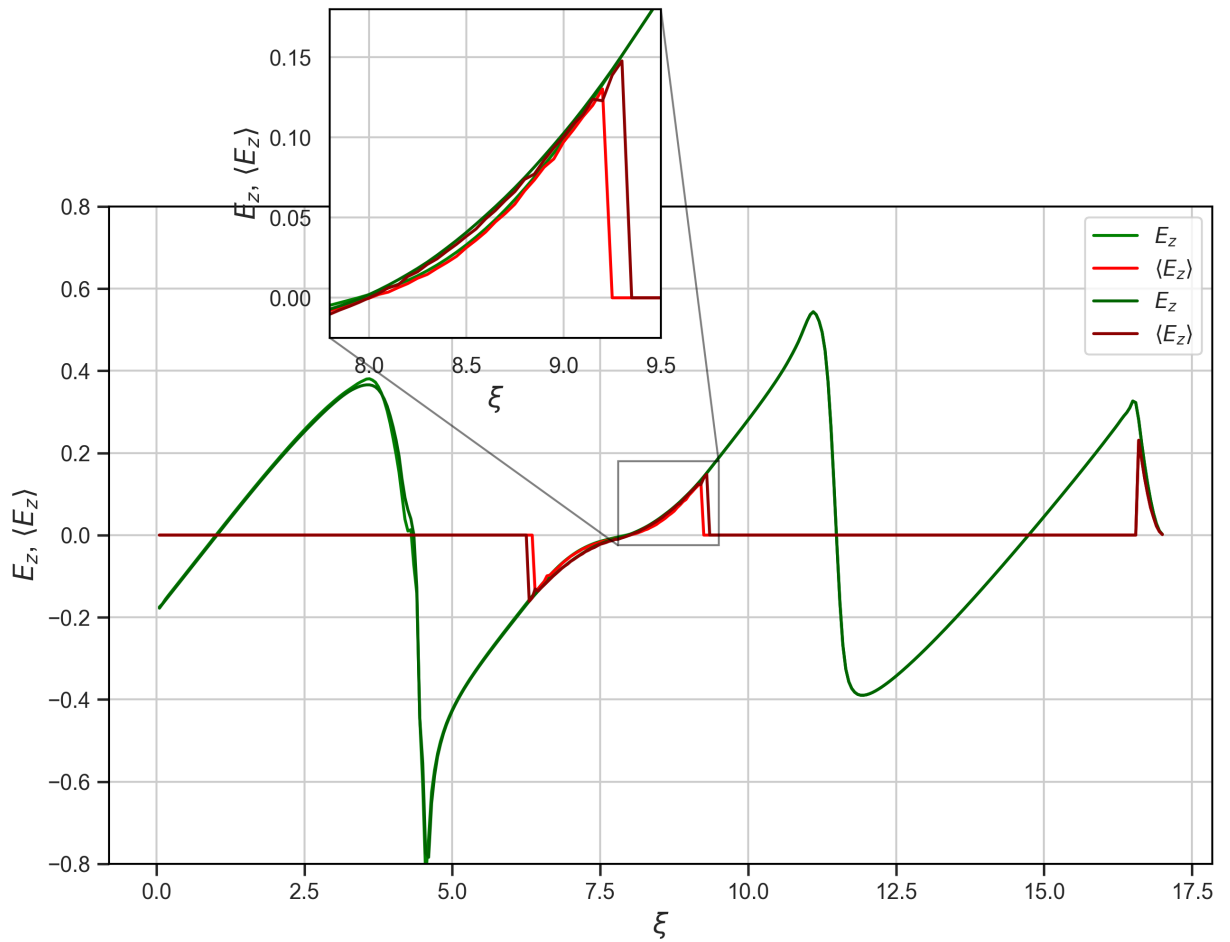


Рис. 3.4. Електричне поле на осі та усереднене по радіусу поздовжнє поле, що діє на згустки різних профілів залежно від безрозмірної координати  $\xi$ . Опис параметрів збігається з даними, вказаними для рисунку 3.3, за винятком відстані між згустком-провісником та основним згустком, яка тепер становить 6.68, довжина згустків складає  $\pi$  ( $\lambda/2$ ).

На графіку 3.5 представлена динаміка основних полів, що впливають на поведінку гауссоподібного профілю основного згустка, довжини якого визначені раніше. Показані поля включають середню фокусуючу силу  $F_r$  і поздовжнє електричне поле  $E_z$ , де коливання обох цих параметрів відображаються уздовж координати  $\xi$ . Фокусуюча сила  $F_r$  ілюструє значні зміни від позитивних до негативних значень, підкреслюючи високий рівень неоднорідності в плазмі. Такі коливання

є критичними для управління нестабільностями, що можуть призвести до радіальних коливань згустка, впливаючи на його прискорення та стабільність. Зони з підвищеною фокусувальною силою допомагають підтримувати згусток у централізованому стані, зменшуючи його схильність до бічних відхилень. Основний згусток, розташований у другій бульбашці, знаходиться в оптимальних умовах, що враховує фокусувальною неоднорідність, забезпечуючи стабілізацію його положення в плазмі. Радіальна кільватерна сила  $F_r$ , діюча на згусток, що фокусується, залишається приблизно стабільною вздовж осі згустка.

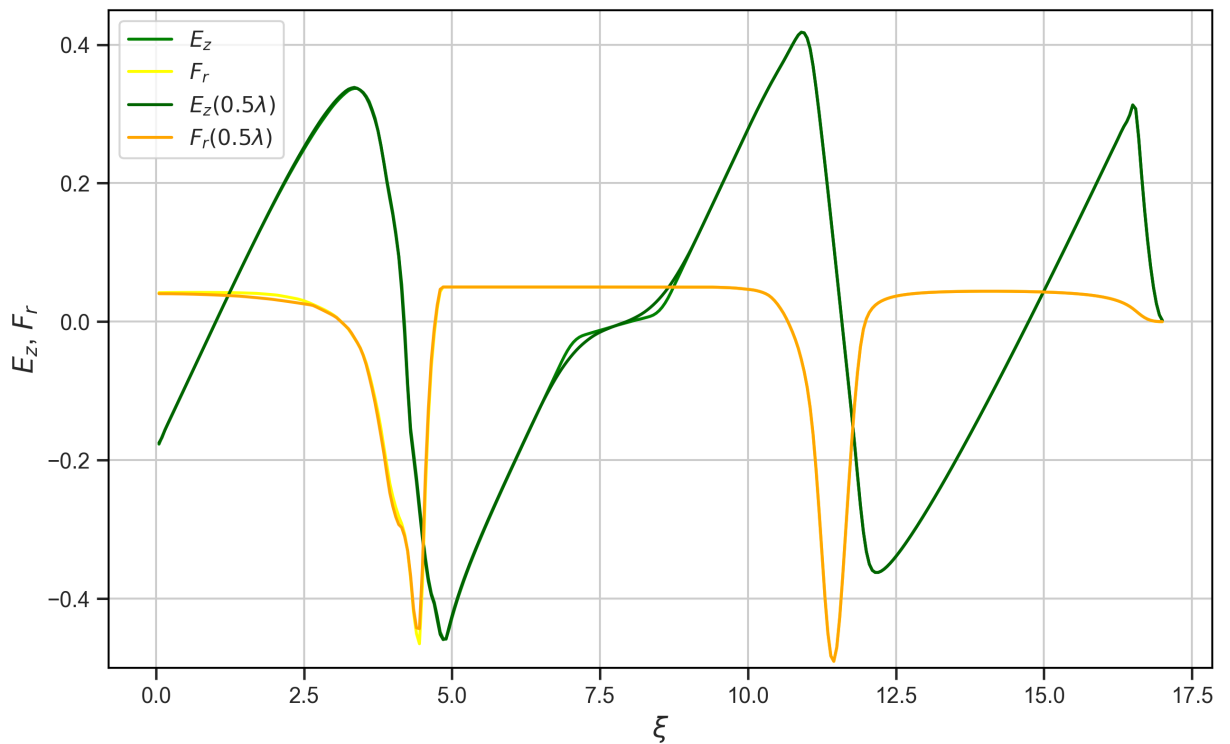


Рис. 3.5. Графік залежності поздовжнього електричного поля поза віссю  $E_z$  (зелені лінії) та середньої фокусувальної сили  $F_r$  (жовті лінії) від безрозмірної координати  $\xi$  в умовах сильно нелінійного режиму. Дані ілюструють поведінку полів для гаусоподібного профілю згустка з відстанями між провісником і основним згустком 7.25 (довжина згустку 2) та 6.68 (довжина згустку  $\lambda/2$ ).

Рівномірність радіальної сили  $F_r$  вздовж згустка сприяє його однорідному фокусуванню, що є критично важливим для підтримання стабільного руху згустка крізь плазмову бульбашку. Постійність цієї сили забезпечує уніфіковану взаємо-

дію кожної частинки згустка з плазмовим середовищем, мінімізуючи ризик неоднорідного руху та збоїв у фокусуванні. Радіальна сила  $F_r$ , яка змінюється вздовж згустка, ілюструє динаміку і неоднорідність взаємодії згустка з плазмою, впливаючи на його стабільність і прискорення. Наявність областей з різними рівнями фокусувальної сили в середині плазмової бульбашки сприяє адекватному контролю радіальних коливань згустка, що дозволяє зменшити побічні відхилення та оптимізувати його рух. Зони з вищим рівнем фокусувальної сили особливо важливі для збереження згустка в оптимальних умовах для прискорення, де стабільність і ефективність є ключовими параметрами.

### 3.2 Аналіз кільватерної плазмової лінзи для однорідних згустків

У фізиці високих енергій, форма згустків, які використовуються в прискорювачах, відіграє ключову роль для ефективності прискорення. Зазвичай згустки мають гаусоподібний профіль, який відповідає природним процесам їхнього формування. Проте, неоднорідний розподіл густини в гаусоподібних згустках веде до різних енергетичних рівнів у частинках, що ускладнює контроль енергетичного розкиду. Це особливо важливо для досліджень, де точність енергій частинок є критичною. Попередні результати моделювання (рис. 3.3) показали, що поздовжні кільватерні поля можуть пригальмувати частинки на передньому краї згустка і прискорити їх на задньому, ефективно зменшуючи енергетичний розкид. Ці поля з часом можуть наближатися до нуля, та за певних умов, вирівнюючи профіль згустка робити його ідеально прямокутним.

На рисунках 3.6 та 3.7 зображено просторовий розподіл густини електронів для короткого однорідного згустка-провісника та основного згустка. Для цього дослідження значення струму електронного згустка тепер складає 0.05 безрозмірних одиниць. Як показує рисунок 3.6 прямокутний профіль згустка дозволяє до-

сягти рівномірного розподілу густини по всій його довжині, що є оптимальним для формування ефективної плазмової лінзи.

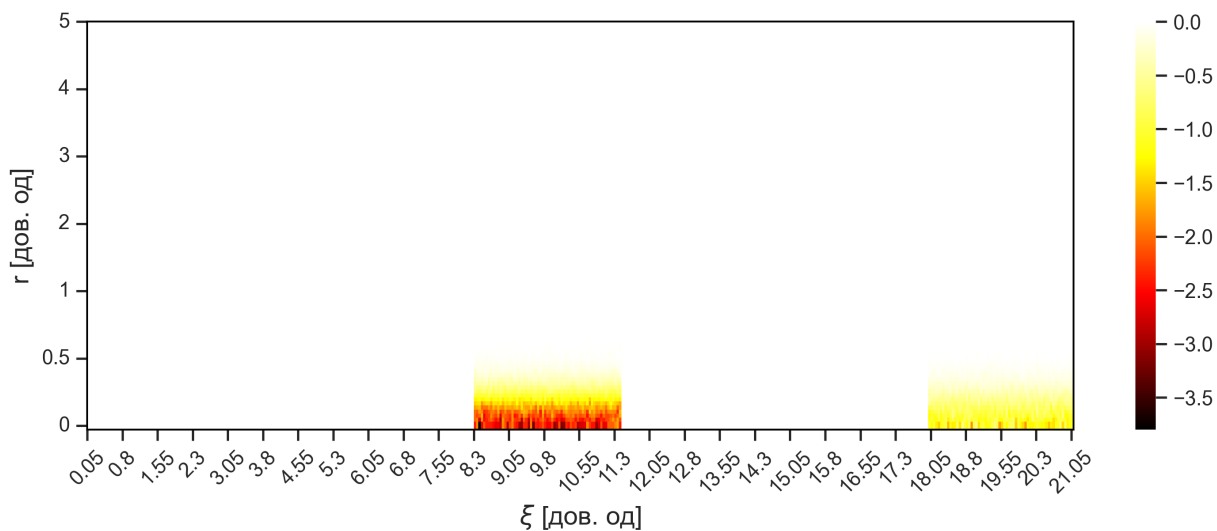


Рис. 3.6. Просторовий розподіл густини для короткого згустка-провісника та основного згустка в однорідному випадку. Параметри відповідають визначенням, наведеним у попередньому аналізі.

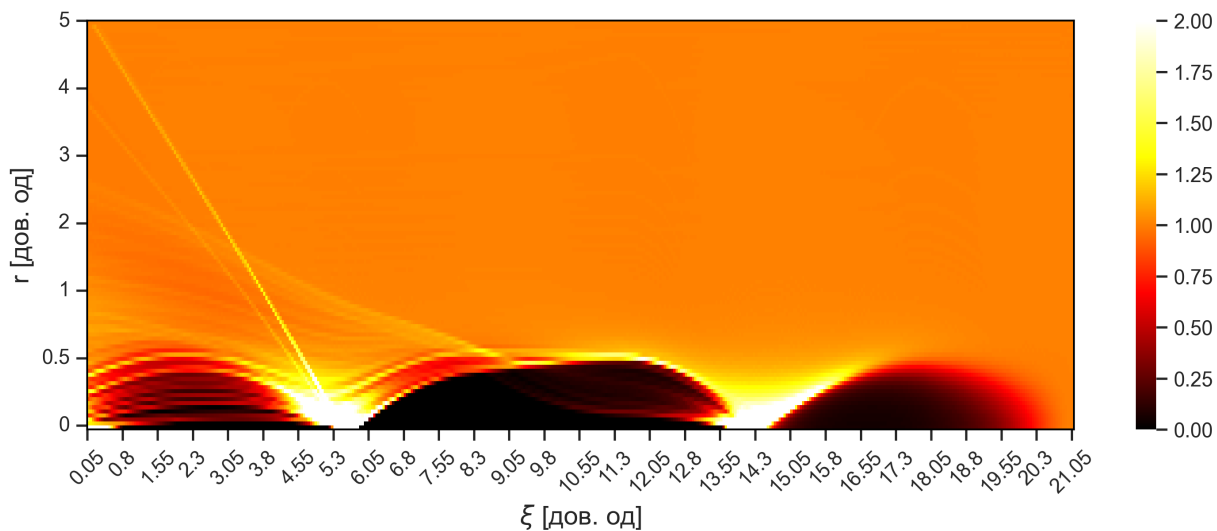


Рис. 3.7. Просторовий розподіл густини електронів плазми, збуджених профільованим згустком-провісником та основним згустком у сильно нелінійному режимі для однорідного випадку. На графіку густина відображена в логарифмічному масштабі.

Завдяки однорідності згустка, плазмова лінза забезпечує краще фокусування

та стабілізацію основного згустка в рамках плазми. Ефективність такого підходу може бути особливо важлива в плазмових прискорювачах, де управління густинами та електричними полями критично для забезпечення однорідного прискорення та мінімізації нестабільностей.

Доповнюючи аналіз, на рисунку 3.8 представлено розподіл поздовжнього електричного поля  $E_z$  у конфігурації, де поле стає рівним нулю на всій довжині згустка. Цей стан відсутності значущого поздовжнього поля може значно сприяти фокусуванню згустка, оскільки мінімізує ризик дестабілізації руху частинок. Наявність стабільних умов, без додаткових сил, які могли б зміщувати частинки в поздовжньому напрямку, сприяє підтримці однорідності та стабільності згустка під час його проходження через прискорювальний пристрій.

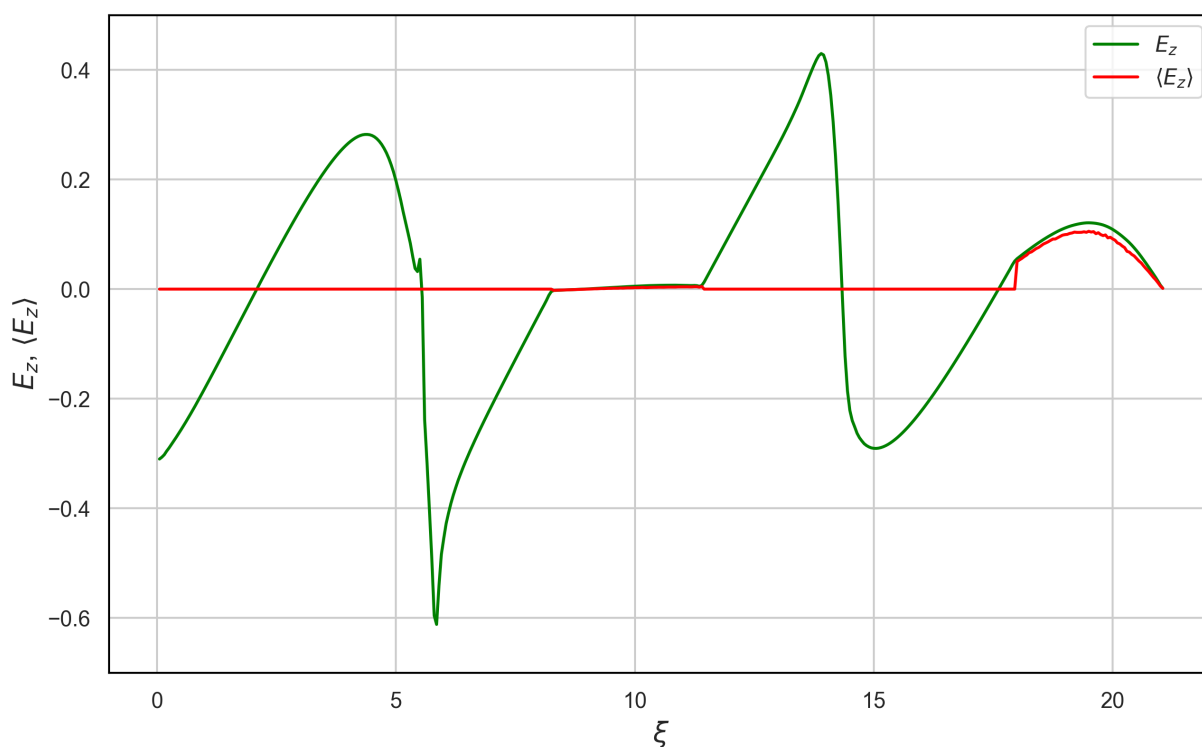


Рис. 3.8. Електричне поле на осі та усереднене по радіусу поздовжнє поле, що діє на згустки різних профілів в залежності від безрозмірної координати  $\xi$ . Електричне поздовжнє поле візуалізовано зеленим кольором, а середнє поле — червоним. Основна частина згустка є однорідною. Відстань між згустком-провісником і основним згустком становить 6.52.

Це зменшує розкид швидкостей та енергій серед частинок, що покращує загальну ефективність прискорення.

Аналіз даних з рисунку 3.9, що ілюструє розподіл фокусуєчої сили  $F_r$  для згустка з прямокутним профілем, де поздовжнє електричне поле  $E_z = 0$  є сталою величиною на протязі всієї довжини згустка, демонструє однорідність фокусуєчої сили. Це мінімізує ризик відхилень окремих частин згустка та підтримує їхній синхронний рух, сприяючи однорідності енергетичного профілю. Завдяки цьому досягається більш рівномірне прискорення по всій довжині згустка, оптимізуючи процес досягнення потрібної енергії частинок. Таким чином зберігаючи однакові властивості уздовж усієї довжини згустка, можна створити ідеальне прискорювальне поле без додаткового збільшення енергетичного розкиду.

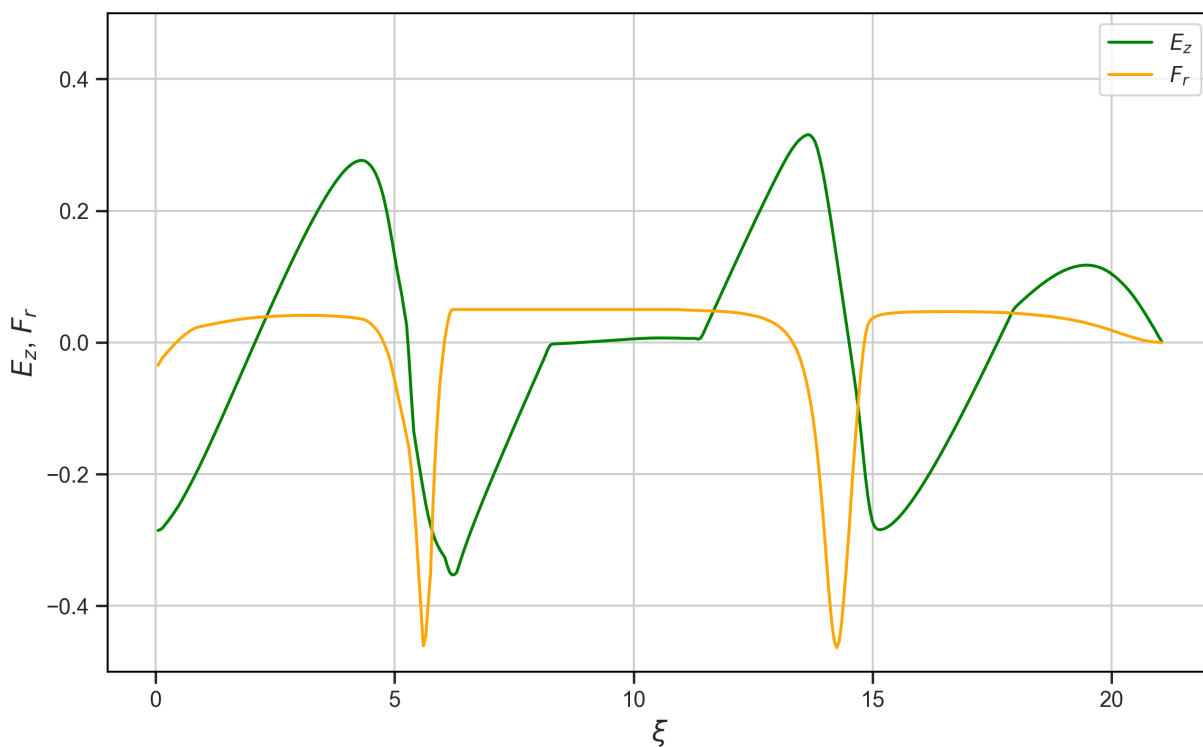


Рис. 3.9. Залежність електричного поля  $E_z$  поза віссю та середньої фокусуєчої сили  $F_r$  від безрозмірної координати  $\xi$  у сильно нелінійному режимі. Середнє фокусуєоче поле зображено помаранчевим кольором, а поздовжнє електричне поле — зеленим.

### 3.3 Висновки до розділу 3

У даному розділі представлено результати дослідження впливу різних параметрів на процес фокусування згустків. Було виявлено, що довжина та форма згустку мають значний вплив на фокусуєчі властивості плазмової лінзи, яка формується за рахунок кільватерних полів у плазмі. Сформульовано умови для одночасного фокусування і зменшення енергетичного розкиду прискорювальних згустків, включаючи гаусоподібні та трикутні форми, які одночасно фокусуються та демонструють зниження енергетичного розкиду. Пропонується можливість трансформації згустків до ідеальних форм, що сприяє оптимальному прискоренню.

Особлива увага зосереджена на прямокутних згустках, які забезпечують створення більш однорідних фокусуєчих полів, значно знижуючи енергетичний розкид і покращуючи якість прискорених пучків. Важливість плазмової лінзи підкреслюється її здатністю рівномірно впливати на частинки у згустку на всій їхній довжині, що є критичним для запобігання втрати енергії та підвищення ефективності прискорювачів. Ці висновки вимагають подальших чисельних та експериментальних досліджень для оптимізації зазначених параметрів та досягнення кращих результатів у майбутньому.

## ВИСНОВКИ

У рамках магістерської роботи було проведено числове моделювання кільватерної плазмової лінзи у нелінійному режимі для релятивістських електронних згустків. Дослідження зосереджувалося на вивченні впливу форм згустків на їхні фокусуючі властивості та зменшення енергетичного розкиду під час проходження через плазму. Аналіз сучасних тенденцій у галузі прискорення та фокусування заряджених частинок показує значний попит на інноваційні методи, здатні розширювати можливості застосування цих технологій. Важливість нових підходів до прискорення, особливо кільватерних методів, підкреслюється разом із необхідністю адаптації конфігурацій лазерних імпульсів та електронних згустків, зокрема профілюванню, що може призводити до значних градієнтів прискорення. Числові методи моделювання виявилися важливими у фізиці високих енергій, оскільки вони дозволяють детально досліджувати складні процеси, які важко або дорого реалізувати експериментально. Це сприяло підтвердженню теорій і внесло вклад у науковий розвиток. Дослідження впливу профілів згустків на плазмову лінзу включало аналіз трикутних та гаусоподібних форм. Для мінімізації обміну енергією згустку з кільватерним полем використовувався згусток-провісник. Було виявлено, що трикутна форма згустку демонструє вищу амплітуду поздовжнього кільватерного поля порівняно з гаусоподібною. Дослідження демонструє, як адаптація форми згустків може сприяти зменшенню енергетичного розкиду у фокусованих згустках. Зокрема, для гаусоподібного згустку виявлено, що на його передню частину з вищою енергією діє слабке гальмівне поле, тоді як на задню частину з меншою енергією — слабке прискорювальне поле. Крім того радіальна кільватерна сила  $F_r$  в області фокусування згустку залишалася приблизно сталою вздовж всього згустку. Таким чином створювались умови для одночасного фоку-

сування і зменшення енергетичного розкиду прискорювального згустку у випадку неоднорідного згустку. У даній роботі аналізувався також вплив зміни довжини згустку на його фокусування та енергетичний розкид. Було виявлено, що зі збільшенням довжини згустку амплітуди активних полів також зростають, що сприяє прискоренню досягнення нульового енергетичного розкиду.

Окрім цього, досліджувались можливості використання плазмової лінзи не тільки для фокусування згустку, але й для його перетворення в однорідний стан із нульовим енергетичним розкидом. У нелінійній плазмовій лінзі спостерігається зменшення енергетичного розкиду гаусоподібного згустку. За певних умов згусток із гаусоподібної форми буде трансформуватися до прямокутної форми. У прямокутному стані, поля на фронтах як прискорювальні, так і гальмівні зникають, перетворюючи згусток в ідеальний стан, оскільки його енергетичний розкид стає нульовим. Відповідно, згусток перестає обмінюватися енергією з плазмою, оскільки поздовжнє поле в його області також набуває нульового значення. Це мінімізувало б зростання емітансу згустку і зробило його стабільнішим та більш відповідальним вимогам застосувань: компактним колайдерам та джерелам рентгеновського випромінювання, яке необхідне для рентгеновських мікроскопів. В однорідному згустку, який характеризується однаковими властивостями уздовж усієї його довжини, можна створити ідеальне прискорювальне поле у вигляді плато, що діє однаково на всі частини згустку, сприяючи його прискоренню без додаткового збільшення енергетичного розкиду. У підсумку, методи, представлені в цій магістерській роботі, відкривають широкі перспективи для подальших досліджень та потребують ретельної експериментальної перевірки та уточнення. Реалізація та додаткове розширення цих досліджень можуть сприяти поліпшенню існуючих технологій фокусування частинок у сильно нелінійних умовах та допомогти у розробці нових підходів для ефективного контролю динаміки згустків у прискорювачах.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] M. Ferrario та R. Assmann. *Advanced Accelerator Concepts*. 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2103.10843. URL: <https://arxiv.org/abs/2103.10843>.
- [2] R. Bingham та R. Trines. "Introduction to Plasma Accelerators: the Basics". en. В: *CERN Yellow Reports* (2016), Vol 1 (2016): Proceedings of the 2014 CAS—CERN Accelerator School: Plasma Wake Acceleration. DOI: 10.5170/CERN-2016-001.67. URL: <https://e-publishing.cern.ch/index.php/CYR/article/view/214>.
- [3] V. Yakimenko та ін. "Cohesive Acceleration and Focusing of Relativistic Electrons in Overdense Plasma". В: *Physical Review Letters* 91.1 (лип. 2003). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.91.014802. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.014802>.
- [4] W. Lu та ін. "Nonlinear Theory for Relativistic Plasma Wakefields in the Blowout Regime". В: *Physical Review Letters* 96.16 (квіт. 2006). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.96.165002. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.165002>.
- [5] RW Assmann та ін. "EuPRAXIA conceptual design report". В: *The European Physical Journal Special Topics* 229.24 (2020), с. 3675—4284.
- [6] EDA ITER та ін. "Plasma confinement and transport". В: *Nuclear Fusion* 39.12 ITER physics basis (1999), с. 2175—2249.
- [7] I.P.Yarovaya V.I.Maslov I.N.Onishchenko. "Plasma Wakefield Excitation, Possessing of Homogeneous Focusing of Electron Bunches". В: *Problems of Atomic Science and Technology* 1 (2013), с. 134—136.
- [8] V I Veksler. *Coherent principle of acceleration of charged particles*. en. 1956. DOI: 10.5170/CERN-1956-025.80. URL: <http://cds.cern.ch/record/1241563>.

- [9] T. Tajima, X. Q. Yan та T. Ebisuzaki. "Wakefield acceleration". В: *Reviews of Modern Plasma Physics* 4.1 (ТРАВ. 2020). ISSN: 2367-3192. DOI: 10.1007/s41614-020-0043-z. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/s41614-020-0043-z>.
- [10] G J Budker. *Relativistic stabilized electron beam: I. Physical principles and theory*. en. 1956. DOI: 10.5170/CERN-1956-025.68. URL: <http://cds.cern.ch/record/1241561>.
- [11] A A Naumov та G J Budker. *Relativistic stabilized electron beam: II. Brief review of experimental work*. en. 1956. DOI: 10.5170/CERN-1956-025.76. URL: <http://cds.cern.ch/record/1241562>.
- [12] Ia B Fainberg. *The use of plasma waveguides as accelerating structures in linear accelerators*. en. 1956. DOI: 10.5170/CERN-1956-025.84. URL: <http://cds.cern.ch/record/1241564>.
- [13] Ia B Fainberg. *Alternating phase focusing*. en. 1956. DOI: 10.5170/CERN-1956-025.91. URL: <http://cds.cern.ch/record/1241565>.
- [14] T. Tajima та J. M. Dawson. "Laser Electron Accelerator". В: *Physical Review Letters* 43.4 (ЛИП. 1979), с. 267—270. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/physrevlett.43.267. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.43.267>.
- [15] D Strickland та G Mourou. "Opt. Commun." В: *Opt. Commun* 56.219 (1985).
- [16] J. Faure та іН. "A laser-plasma accelerator producing monoenergetic electron beams". В: *Nature* 431.7008 (ВЕР. 2004), с. 541—544. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature02963. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature02963>.
- [17] C. G. R. Geddes та іН. "High-quality electron beams from a laser wakefield accelerator using plasma-channel guiding". В: *Nature* 431.7008 (ВЕР. 2004), с. 538—541. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature02900. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature02900>.

- [18] S. P. D. Mangles та ін. "Monoenergetic beams of relativistic electrons from intense laser–plasma interactions". В: *Nature* 431.7008 (вер. 2004), с. 535—538. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature02939. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature02939>.
- [19] A. J. Gonsalves та ін. "Petawatt Laser Guiding and Electron Beam Acceleration to 8 GeV in a Laser-Heated Capillary Discharge Waveguide". В: *Physical Review Letters* 122.8 (лют. 2019). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.122.084801. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.122.084801>.
- [20] Colin Danson та ін. "Petawatt class lasers worldwide". В: *High Power Laser Science and Engineering* 3 (2015). ISSN: 2052-3289. DOI: 10.1017/hpl.2014.52. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/hpl.2014.52>.
- [21] W. P. Leemans та ін. "GeV electron beams from a centimetre-scale accelerator". В: *Nature Physics* 2.10 (вер. 2006), с. 696—699. ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys418. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys418>.
- [22] S Karsch та ін. "GeV-scale electron acceleration in a gas-filled capillary discharge waveguide". В: *New Journal of Physics* 9.11 (листоп. 2007), с. 415—415. ISSN: 1367-2630. DOI: 10.1088/1367-2630/9/11/415. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/9/11/415>.
- [23] Nasr A. M. Hafz та ін. "Stable generation of GeV-class electron beams from self-guided laser–plasma channels". В: *Nature Photonics* 2.9 (серп. 2008), с. 571—577. ISSN: 1749-4893. DOI: 10.1038/nphoton.2008.155. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphoton.2008.155>.
- [24] D. H. Froula та ін. "Measurements of the Critical Power for Self-Injection of Electrons in a Laser Wakefield Accelerator". В: *Physical Review Letters* 103.21 (листоп. 2009). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.103.215006. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.103.215006>.

- [25] C. E. Clayton та ін. "Self-Guided Laser Wakefield Acceleration beyond 1 GeV Using Ionization-Induced Injection". В: *Physical Review Letters* 105.10 (вер. 2010). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.105.105003. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.105.105003>.
- [26] Haiyang Lu та ін. "Laser wakefield acceleration of electron beams beyond 1 GeV from an ablative capillary discharge waveguide". В: *Applied Physics Letters* 99.9 (серп. 2011). ISSN: 1077-3118. DOI: 10.1063/1.3626042. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.3626042>.
- [27] Hyung Taek Kim та ін. "Enhancement of Electron Energy to the Multi-GeV Regime by a Dual-Stage Laser-Wakefield Accelerator Pumped by Petawatt Laser Pulses". В: *Physical Review Letters* 111.16 (жовт. 2013). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.111.165002. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.111.165002>.
- [28] W. P. Leemans та ін. "Multi-GeV Electron Beams from Capillary-Discharge-Guided Subpetawatt Laser Pulses in the Self-Trapping Regime". В: *Physical Review Letters* 113.24 (груд. 2014). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.113.245002. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.113.245002>.
- [29] Hyung Taek Kim та ін. "Stable multi-GeV electron accelerator driven by waveform-controlled PW laser pulses". В: *Scientific Reports* 7.1 (серп. 2017). ISSN: 2045-2322. DOI: 10.1038/s41598-017-09267-1. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41598-017-09267-1>.
- [30] Pisin Chen та ін. "Acceleration of Electrons by the Interaction of a Bunched Electron Beam with a Plasma". В: *Phys. Rev. Lett.* 54 (7 ЛЮТ. 1985), с. 693—696. DOI: 10.1103/PhysRevLett.54.693. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.54.693>.

- [31] Rhon Keinigs та Michael E. Jones. "Two-dimensional dynamics of the plasma wakefield accelerator". В: *The Physics of Fluids* 30.1 (січ. 1987), с. 252—263. ISSN: 0031-9171. DOI: 10.1063/1.866183. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.866183>.
- [32] J. B. Rosenzweig та ін. "Acceleration and focusing of electrons in two-dimensional nonlinear plasma wake fields". В: *Physical Review A* 44.10 (листоп. 1991), R6189—R6192. ISSN: 1094-1622. DOI: 10.1103/physreva.44.r6189. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.44.R6189>.
- [33] Klaus Floettmann. "Some basic features of the beam emittance". В: *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams* 6.3 (бер. 2003). ISSN: 1098-4402. DOI: 10.1103/physrevstab.6.034202. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.6.034202>.
- [34] Thomas C. Katsouleas та ін. "Beam Loading in Plasma Accelerators". В: *Part. Accel.* 22 (1987), с. 81—99.
- [35] M. Tzoufras та ін. "Beam Loading in the Nonlinear Regime of Plasma-Based Acceleration". В: *Physical Review Letters* 101.14 (вер. 2008). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.101.145002. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.145002>.
- [36] G. J. Cao та ін. *Positron Acceleration in Plasma Wakefields*. 2023. DOI: 10.48550/ARXIV.2309.10495. URL: <https://arxiv.org/abs/2309.10495>.
- [37] S. Diederichs та ін. "Stable electron beam propagation in a plasma column". В: *Physics of Plasmas* 29.4 (квіт. 2022). ISSN: 1089-7674. DOI: 10.1063/5.0087807. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/5.0087807>.
- [38] T. J. Mehrling та ін. "Mitigation of the hose instability in plasma-wakefield accelerators". В: (2017). DOI: 10.48550/ARXIV.1704.02188. URL: <https://arxiv.org/abs/1704.02188>.

- [39] J. B. Rosenzweig та ін. "Experimental Observation of Plasma Wake-Field Acceleration". В: *Physical Review Letters* 61.1 (лип. 1988), с. 98—101. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/physrevlett.61.98. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.61.98>.
- [40] Ian Blumenfeld та ін. "Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator". В: *Nature* 445.7129 (лют. 2007), с. 741—744. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature05538. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature05538>.
- [41] Allen Caldwell та ін. "Proton-driven plasma-wakefield acceleration". В: *Nature Physics* 5.5 (квіт. 2009), с. 363—367. ISSN: 1745-2481. DOI: 10.1038/nphys1248. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nphys1248>.
- [42] E. Adli та ін. "Acceleration of electrons in the plasma wakefield of a proton bunch". В: *Nature* 561.7723 (серп. 2018), с. 363—367. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/s41586-018-0485-4. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/s41586-018-0485-4>.
- [43] B. E. Blue та ін. "Plasma-Wakefield Acceleration of an Intense Positron Beam". В: *Physical Review Letters* 90.21 (трав. 2003). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.90.214801. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.90.214801>.
- [44] P. Muggli та ін. "Meter-Scale Plasma-Wakefield Accelerator Driven by a Matched Electron Beam". В: *Physical Review Letters* 93.1 (черв. 2004). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.93.014802. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.93.014802>.
- [45] M. J. Hogan та ін. "Multi-GeV Energy Gain in a Plasma-Wakefield Accelerator". В: *Physical Review Letters* 95.5 (лип. 2005). ISSN: 1079-7114. DOI: 10.1103/physrevlett.95.054802. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.95.054802>.

- [46] P Muggli та ін. "Energy gain scaling with plasma length and density in the plasma wakefield accelerator". В: *New Journal of Physics* 12.4 (квіт. 2010), с. 045022. ISSN: 1367-2630. DOI: 10.1088/1367-2630/12/4/045022. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/12/4/045022>.
- [47] M. Litos та ін. "High-efficiency acceleration of an electron beam in a plasma wakefield accelerator". В: *Nature* 515.7525 (листоп. 2014), с. 92—95. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature13882. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature13882>.
- [48] S. Corde та ін. "Multi-gigaelectronvolt acceleration of positrons in a self-loaded plasma wakefield". В: *Nature* 524.7566 (серп. 2015), с. 442—445. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/nature14890. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/nature14890>.
- [49] S. Corde та ін. "High-field plasma acceleration in a high-ionization-potential gas". В: *Nature Communications* 7.1 (черв. 2016). ISSN: 2041-1723. DOI: 10.1038/ncomms11898. URL: <http://dx.doi.org/10.1038/ncomms11898>.
- [50] Pisin Chen та ін. "Energy Transfer in the Plasma Wake-Field Accelerator". В: *Physical Review Letters* 56.12 (бер. 1986), с. 1252—1255. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/physrevlett.56.1252. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.1252>.
- [51] Perry B. Wilson та James E. Griffin. "High energy electron linacs; application to storage ring RF systems and linear colliders". В: *AIP Conference Proceedings*. AIP, 1982. DOI: 10.1063/1.33620. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.33620>.
- [52] J. B. Rosenzweig. "Nonlinear plasma dynamics in the plasma wake-field accelerator". В: *Physical Review Letters* 58.6 (лют. 1987), с. 555—558. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/physrevlett.58.555. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/physrevlett.58.555>.

- [53] Francesco Massimo та ін. "Transformer ratio studies for single bunch plasma wakefield acceleration". В: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 740 (2014), с. 242—245.
- [54] E. Chiadroni та ін. "Overview of plasma lens experiments and recent results at SPARC\_LAB". В: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 909 (листоп. 2018), с. 16—20. ISSN: 0168-9002. DOI: 10.1016/j.nima.2018.02.014. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.nima.2018.02.014>.
- [55] A. Goncharov та ін. "The low-field permanent magnet electrostatic plasma lens". В: *Review of Scientific Instruments* 75.5 (трав. 2004), с. 1662—1664. ISSN: 1089-7623. DOI: 10.1063/1.1699450. URL: <http://dx.doi.org/10.1063/1.1699450>.
- [56] V. I. Maslov та ін. "Homogeneous Focusing Field for Short Relativistic Electron Bunches in Plasma". В: (2020). DOI: 10.48550/ARXIV.2007.12981. URL: <https://arxiv.org/abs/2007.12981>.
- [57] K. N. Sjobak та ін. "Strong focusing gradient in a linear active plasma lens". В: *Physical Review Accelerators and Beams* 24.12 (груд. 2021). ISSN: 2469-9888. DOI: 10.1103/physrevaccelbeams.24.121306. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.121306>.
- [58] Tong Yang та ін. "Designing of active plasma lens for focusing laser-plasma-accelerated pulsed proton beams". В: *Physical Review Accelerators and Beams* 24.3 (бер. 2021). ISSN: 2469-9888. DOI: 10.1103/physrevaccelbeams.24.031301. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevAccelBeams.24.031301>.
- [59] K. V. Lotov. "Fine wakefield structure in the blowout regime of plasma wakefield accelerators". В: *Physical Review Special Topics - Accelerators and Beams* 6.6

- (черв. 2003). ISSN: 1098-4402. DOI: 10.1103/physrevstab.6.061301. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevSTAB.6.061301>.
- [60] P. Sprangle, E. Esarey та A. Ting. "Nonlinear theory of intense laser-plasma interactions". В: *Physical Review Letters* 64.17 (квіт. 1990), с. 2011—2014. ISSN: 0031-9007. DOI: 10.1103/physrevlett.64.2011. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.2011>.
- [61] K. V. Lotov. "Blowout regimes of plasma wakefield acceleration". В: *Physical Review E* 69.4 (квіт. 2004). ISSN: 1550-2376. DOI: 10.1103/physreve.69.046405. URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.69.046405>.
- [62] KV Lotov та AP Sosedkin. "LCODE user manual". В: *Budker Institute of Nuclear Physics of SB RAS* (груд. 2023). URL: <https://lcode.info/>.
- [63] BN Breizman та ін. "Excitation of nonlinear wake field in a plasma for particle acceleration". В: *Research Trends in Physics: Coherent Radiation and Particle Acceleration* (1992), с. 263—287.
- [64] Seung Lee та ін. "Simulations of a meter-long plasma wakefield accelerator". В: *Physical Review E* 61.6 (2000), с. 7014.
- [65] RG Hemker та ін. "Dynamic effects in plasma wakefield excitation". В: *Physical Review Special Topics-Accelerators and Beams* 3.6 (2000), с. 061301.
- [66] IN Onishchenko. "Plasma wakefield for particles acceleration and Hf-generation". В: *Problems of atomic science and technology. Series: Plasma Physics* 3.3, 4 (1999), с. 200—205.
- [67] Atsushi Ogata. "Plasma lens and wake experiments in Japan". В: *AIP Conference Proceedings*. IOP INSTITUTE OF PHYSICS PUBLISHING LTD. 1992, с. 420—420.

- [68] Chandrashekar Joshi та ін. "High energy density plasma science with an ultrarelativistic electron beam". В: *Physics of Plasmas* 9.5 (2002), с. 1845—1855.
- [69] Mark J Hogan та ін. "E-157: A 1.4-m-long plasma wake field acceleration experiment using a 30 GeV electron beam from the Stanford Linear Accelerator Center Linac". В: *Physics of Plasmas* 7.5 (2000), с. 2241—2248.
- [70] K.V. Lotov. "Simulation of ultrarelativistic beam dynamics in the plasma wake-field accelerator". В: *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment* 410.3 (черв. 1998), с. 461—468. ISSN: 0168-9002. DOI: 10.1016/s0168-9002(98)00178-8. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/s0168-9002\(98\)00178-8](http://dx.doi.org/10.1016/s0168-9002(98)00178-8).