ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

286'86

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

«ВИЩА ШКОЛА»

УДК 519.1

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

О НЕКОТОРЫХ СУММАХ С ЧИСЛАМИ СТИРЛИНГА И БЕРНУЛЛИ

Числа Стирлинга и Бернулли находят применение в различных разделах математики: в классическом анализе, в теории чисел, теории вероятностей, комбинаторике и т. д. Получению тождеств с этими числами посвящена значительная литература (см. [1—7] и цитируемые там источники). Для их доказательства употребляются разнообразные средства от рутинной алгебраической и комбинаторной техники до весьма изощренных приемов, таких как например комплексно-аналитический подход, развиваемый в [2]. У автора настоящей статьи тождества с числами Стирлинга и Бернулли возникли в процессе занятий теорией p-адического интегрирования. Так, соотношение (II) первоначально появилось как равенство между степенными моментами мер из примеров 1, 3 работы [8]. Использованный при этом метод содержал комбинаторную основу, которую удалось освободить от p-адической оболочки. Выработанный прием используется в первой части статьи для получения более общих тождеств (мы не касаемся обратного вопроса об интерпретации полученных результатов как соотношений для подходящих p-адических мер). В принципе наш подход является разновидностью метода производящих функций. Вместе с тем он наследует идею «регуляризации» от p-адического варианта метода. Там ее назначение состояло в преобразовании неограниченной меры в ограниченную [9]. В исчислении производящих функций эта идея может быть реализована по-разному. Так, в доказательстве теоремы 2 регуляризация проявляется в действии разностного оператора $F(X) \to F(X) - F(rX)$, что в итоге позволяет избавиться от нежелательного множителя $\log(1+X)$ (имеющего в p-адической метрике неограниченные коэффициенты). Дальнейшая часть статьи посвящена получению следствий и обобщений исходных результатов.

Напомним, что числа Бернулли B_n определяются разложением $\frac{X}{e^X - 1} = \sum\limits_{n \geqslant 0} B_n \frac{X^n}{n!}$. Числа Стирлинга первого рода $s(n, k)$ определяются соотношениями $(X)_n = \sum\limits_{k=0}^{n} s(n, k) X^k$ $(k \geqslant 0)$, где $(X)_n = X(X-1)\ldots(X-n+1)$ $(n \geqslant 1)$, $(X)_0 = 1$, и характеризуются тождествами $\frac{1}{k!}\log^k(1+X) = \sum\limits_{n \geqslant k} s(n, k)\frac{X^n}{n!}$ $(k \geqslant 0)$, где $\log(1+X) = \sum\limits_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} \in K[[X]]$. Двойственным образом задаются числа Стирлинга второго рода $S(n, k)$. Пусть D — оператор дифференцирования в пространстве формальных степенных рядов $K[[X]]$, $\binom{X}{n} = \frac{(X)_n}{n!}$, ε-первообразный корень из единицы r в поле K нулевой характеристики.

Теорема 1. *Имеют место равенства*

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n} = \frac{1}{n!}\left\{\sum_{j=0}^{n} s(n, j)\frac{(-1)^{j+1}}{j+1} + \frac{1}{2}(-1)^n rn! + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n} \frac{B_k}{k} r^k \sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k+1}\binom{j}{k-1} s(n, j)\right\} \quad (n \geqslant 0). \tag{1}$$

Доказательство. Производящая функция левых частей равенств (I) имеет вид:

$$\sum_{n\geqslant 0} X^n \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n} = \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{\varepsilon^i X}{1-\varepsilon^i}\right)^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{r-1} \frac{1}{1-\frac{\varepsilon^i X}{1-\varepsilon^i}} = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varepsilon^{rk}}{(x+1)-\varepsilon^k} - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varepsilon^k}{(x+1)-\varepsilon^k} = \tag{2}$$

$$= r\,\frac{(x+1)^{r-1}-1}{(x+1)^r-1}.$$

На последнем шаге мы воспользовались формулами разложения на простейшие дроби. Имея в виду правую часть тождества (2), рассмотрим следующее выражение

$$r\,\frac{e^{(r-1)X}-1}{e^{rX}-1} = re^{-X} + \frac{e^{-X}-1}{X}\cdot\frac{rX}{e^{rX}-1} =$$

$$= r\left(\sum_{j\geqslant 0}\frac{(-1)^j}{j!}X^j\right) + \left(\sum_{i\geqslant 0}\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}\cdot\frac{X^i}{i!}\right)\left(\sum_{k\geqslant 0} B_k r^k \frac{X^k}{k!}\right) =$$

$$= \sum_{j\geqslant 0}\left\{(-1)^j r + \sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k} B_k \frac{(-1)^{j-k+1}}{j-k+1} r^k\right\}\frac{X^j}{j!} = \sum_{j\geqslant 0} A_j \frac{X^j}{j!},$$

где

$$A_j = \frac{(-1)^{j+1}}{j+1} + \frac{1}{2}(-1)^j r + \sum_{k=2}^{j}(-1)^{j-k+1}\binom{j}{k-1}\frac{B_k}{k} r^k.$$

Положим здесь $X = \log(1+X)$. Тогда

$$r\,\frac{(X+1)^{r-1}-1}{(X+1)^r-1} = \sum_{j\geqslant 0} A_j \frac{\log^j(1+x)}{j!} = \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{j\geqslant 0}^{n} s(n, j) A_j\right)\frac{X^n}{n!}.$$

Приравнивая коэффициенты при X^n в последнем тождестве и в (2), получим соотношения (1).

Теорема 2. *Выполняются равенства*

$$\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n}=\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k s(n, k)(1-r^k)\frac{B_k}{k}.$$

Доказательство. Заметим вначале, что

$$\sum_{n\geqslant k}s(n, k)\frac{X^n}{(n-1)!}=XD\left(\sum_{n\geqslant k}s(n, k)\frac{X^n}{n!}\right)=$$

$$=XD\left(\frac{\log^k(1+X)}{k!}\right)=\frac{X}{1+X}\frac{k}{k!}\log^{k-1}(1+X)\quad(k\geqslant 1).$$

Следовательно,

$$\sum_{n\geqslant 1}X^n\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k s(n, k)(1-r^k)\frac{B_k}{k}=$$

$$=\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k(1-r^k)\frac{B_k}{k}\sum_{n\geqslant k}s(n, k)\frac{X^n}{(n-1)!}=$$

$$=\frac{X}{(1+x)\log(1+x)}\sum_{k\geqslant 1}(-1)^k(1-r^k)\log^k(1+x)\frac{B_k}{k!}=$$

$$=\frac{X}{(1+X)\log(1+x)}\left\{\sum_{k\geqslant 0}B_k\frac{(-\log(1+x))^k}{k!}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k\geqslant 0}B_k\frac{(-r\log(1+X))^k}{k!}\right\}=\frac{X}{(1+X)\log(1+X)}\times$$

$$\times\left\{\frac{-\log(1+X)}{\exp(-\log(1+X))-1}-\frac{-r\log(1+X)}{\exp(-r\log(1+X)-1}\right\}=$$

$$=\frac{X}{(1+X)}\left\{\frac{r(1+X)^r}{1-(1+X)^r}+\frac{1+X}{X}\right\}=r\frac{(X+1)^{r-1}-1}{(X+1)^r-1}-r+1=$$

$$=\sum_{n\geqslant 1}X^n\sum_{i=1}^{r-1}\frac{\varepsilon^{in}}{(1-\varepsilon^i)^n}.$$

На последнем шаге мы воспользовались тождеством (2). Остается приравнять коэффициенты при X^n $(n\geqslant 1)$.

Следствие 1. *Имеют место равенства*

$$\sum_{j=1}^{n}s(n, j)\frac{(-1)^{j+1}}{j+1}=n\sum_{k=1}^{n}(-1)^k s(n, k)\frac{B_k}{k}\quad(n\geqslant 1),\tag{4}$$

$$B_m=(-1)^m m\sum_{n=1}^{m}\frac{s(m, n)}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i+1}s(n, i).\tag{5}$$

Доказательство. Приравняем правые части соотношений (1) и (3), и будем рассматривать их как тождества по r при фиксированном n. Тогда (4) выражает совпадение свободных членов этих многочленов. Прямое доказательство равенства (4) можно провести, домножая его на $\frac{X^n}{n!}$ и суммируя по $n \geqslant 1$.

Соотношение (5) получается из (4) по формулам обращения Стирлинга.

Предложение 1.

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k-1} s(n, j) = ns(n, k). \qquad (6)$$

Равенства (6) означают совпадение коэффициентов при $r^k \frac{B_k}{k}$ (с точностью до множителя $(-1)^k$) в тождестве, рассматривавшимся в доказательстве следствия 1. Однако, приравнивание этих коэффициентов будет корректно только при четном k (в этом случае $(-1)^k = 1$), когда $B_k \neq 0$. Тем самым сравнение коэффициентов играет всего лишь эвристическую роль. Для доказательства (6) его нужно домножить на X^k и просуммировать по k от 1 до n. Аналогично можно доказать соотношение

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} \binom{j}{k} s(n, j) = s(n+1, k+1). \qquad (7)$$

Впрочем, с помощью рекуррентных формул для чисел Стирлинга можно показать, что (6) и (7) эквивалентны. Отметим также, что (6) эквивалентно равенству [6, f] из [7, p. 50].

Рассмотрим более общие суммы. Имеют место следующие утверждения, доказательства которых подобны предыдущим.

Теорема 3. *Для* $t \in \{1, 2, \ldots, r\}$ *выполняются равенства*

$$\sum_{j=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{it}}{(\varepsilon^i - 1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{s(n, k)}{k+1} \left(B_{k+1} - \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} B_j r^j (t-1)^{k+1-j} \right) \qquad (8)$$

или эквивалентные им равенства

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{it}}{(\varepsilon^i - 1)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n-1, k)}{k+1} (B_{k+1} - (t - 1^{k+1}) - \right.$$
$$\left. - \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j} r^j \sum_{k=j-1}^{n-1} s(n-1, k) \binom{k}{j-1} (t-1)^{k+1-j} \right]. \qquad (9)$$

Теорема 4. *Для* $t \in \{1, \ldots, r-1\}$ *справедливы равенства*

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{it}}{(\varepsilon^i - 1)^n} = -\frac{1}{n!}\Big[\sum_{k=0}^{n} s(n, k)\frac{t^{k+1} - (t-1)^{k+1}}{k+1} +$$

$$+\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j} r^j \sum_{k=j}^{n} s(n, k)\binom{k}{j-1}\left(t^{k+1-j} - (t-1)^{k+1-j}\right).\qquad (10)$$

Следствие 2.

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^i}{(\varepsilon^i - 1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} s(n, k)(1 - r^{k+1})\frac{B_{k+1}}{k+1}.\qquad (11)$$

Это равенство получается из (8) при $t = 1$. С помощью рекуррентных соотношений для чисел Стирлинга можно показать, что формулы (3) и (11) эквивалентны.

Для получения дальнейших следствий сравним правые части (9) и (10) как многочлены фиксированной степени n от r и $(t-1)$. Приравнивая коэффициенты при $r^0(t-1)^0$, получим

Следствие 3. *Выполняются равенства*

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{s(n, k)}{k+1} = n\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1, k)\frac{B_{k+1}}{k+1},\qquad (12)$$

$$B_m = -m\sum_{n=1}^{m} \frac{S(m-1, n-1)}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{s(n, k)}{k+1}.$$

Предложение 2. *Выполняются равенства*

$$\sum_{k=i}^{n} s(n, k)\binom{k}{i-1} = ns(n-1, i-1)\quad (n \geqslant i \geqslant 1),\qquad (13)$$

$$\sum_{k=i}^{n} s(n, k)\binom{k}{i} = s(n-1, i) + s(n-1, i-1).\qquad (14)$$

Для доказательства достаточно приравнять коэффициенты при $r^0(t-1)^i$. Равенство (13) можно также доказать, домножая его на X^{i-1} и суммируя по i от 1 до n. Легко видеть, что равенство (14) эквивалентно равенству (13).

Отметим, что сравнение коэффициентов при $r^j(t-1)^i$ дает формулы, совпадающие с (13) с точностью до обозначений.

Следствие 4. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{i=1}^{r-1} \frac{\varepsilon^{in}}{(\varepsilon^i - 1)^n} = \frac{1}{(n-1)!}\Bigg[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n-1, k)}{k+1}(B_{k+1} - (n-1)^{k+1}) -$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{j} r^j \sum_{k=j-1}^{n-1} s(n-1, k)\binom{k}{j-1}(n-1)^{k+1-j} \qquad (15)$$

Оно вытекает из (9) при $t = n$.

Следствие 5. *Выполняется равенство*

$$(-1)^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^j s(n, j)\frac{B_j}{j} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{s(n-1, k)}{k+1}(B_{k+1} - (n-1)^{k+1}). \qquad (16)$$

Для доказательства нужно приравнять коэффициенты при r^0 в соотношениях (3) и (15).

Следствие 6.

$$\sum_{j=0}^{n-1} s(n-1, j)\frac{(n-1)^{j+1}}{j+1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{s(n, i)}{i+1}[(-1)^{n-i} - 1].$$

Результат вытекает из формул (4), (12), (16).

Предложение 3.

$$\sum_{k=1}^{m} s(m,k)\binom{k}{i} m^{k-i} = (-1)^{m-i} s(m+1, i+1) \qquad (17)$$

Для $m = n-1$, $i = j-1$ и четных j это равенство является результатом приравнивания коэффициентов при r^j в (3) и (15). Приведем прямое доказательство:

$$\sum_{i=0}^{m} X^{i+1} \sum_{k=i}^{m} s(m,k)\binom{k}{i} m^{k-i} = X\sum_{k=0}^{m} s(n, k)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i} X^i m^{k-i} =$$

$$= X\sum_{k=0}^{m} s(n, k)(X+m)^k = (X+m)_m X = (-1)^{m+1}(-X)_{m+1} =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} s(m+1, i+1) X^{i+1}.$$

Следствие 7. *Выполняются равенства*

$$n\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} s(n, k)\frac{B_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} s(n, k)\frac{(n-1)^{k+1} - n^{k+1}}{k+1},$$

$$B_m = m\sum_{n=1}^{m} (-1)^{m-n} S(m, n)\sum_{k=1}^{n} s(n, k)\frac{(n-1)^{k+1} - n^{k+1}}{n(k+1)}$$

Для доказательства первого соотношения нужно приравнять свободные члены по r в (3) и равенстве, вытекающим из (10) при $t = n$.

Предложение 4. *Имеет место формула*

$$\sum_{k=j}^{n} s(n, k) \binom{k}{j-1} \left(n^{k+1-j} - (n-1)^{k+1-j}\right) = (-1)^{n-j} ns(n, j).$$

При четных j это равенство получается сравнением коэффициентов при r^j в тождестве, фигурировавшим в предыдущем доказательстве. Для непосредственного доказательства нужно домножить обе части равенства на x^j и просуммировать по j от 1 до n. Получится верное соотношение

$$(x+n)_n - (x+n-1)_n = n(x+n-1)_{n-1}.$$

Установим полиномиальное тождество, которое будет иметь точки соприкосновения с некоторыми из предыдущих равенств.

Теорема 5.

$$\sum_{j=k}^{n} \frac{s(j, k)}{k!} \binom{X}{n-j} = \sum_{j=k}^{n} \frac{s(n, j)}{n!} \binom{j}{k} X^{j-k}. \tag{18}$$

Для доказательства нужно приравнять коэффициенты при Y^k в соотношении

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{s(j, k)}{j!} \binom{X}{n-j} \right) Y^k = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{s(j, k)}{j!} Y^k \right) \binom{X}{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{X}{n-j} \binom{Y}{j} = \binom{X+Y}{n} = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} s(n, j) (X+Y)^j =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} s(n, j) \binom{j}{k} X^{j-k} \right) Y^k.$$

Отметим, что в третьем переходе мы воспользовались теоремой сложения Вандермонда [3, с. 120]. Заметим также, что при $X = 1$ тождество (18) содержит равенство (14).

Следствие 8. $$\sum_{j=k}^{m} \frac{s(j, k)}{j!} \binom{m}{j} = \sum_{j=k}^{m} \frac{s(m, j)}{m!} \binom{j}{k} m^{j-k} \tag{19}$$

Эта формула вытекает из (18) при $X = n = m$.

Следствие 9. $$\sum_{j=k}^{m} \binom{m}{j} \frac{s(j, k)}{j!} = \frac{(-1)^{m-k} s(m+1, k+1)}{m!} \tag{20}$$

Равенство (20) следует из соотношений (19) и (17).

Следствие 10. *Справедливо равенство*

$$\sum_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\frac{s(j,k)}{j!}\binom{m+n-j-1}{n-j}=\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\frac{s(n,j)}{n!}\binom{j}{k}m^{j-k}.$$

Для доказательства положим $X=-m\,(m\in N)$ в (18).

Следствие 11. $\sum\limits_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\frac{s(j,k)}{j!}=\sum\limits_{j=k}^{n}(-1)^{j-k}\frac{s(n,j)}{n!}\binom{j}{k}.$

Данное равенство содержится при $m=1$ в предыдущем.

Следствие 12. $\sum\limits_{j=k}^{n}(-1)^{n-j}\frac{s(j,k)}{j!}=\frac{s(n+1,k+1)}{n!}.$

Требуемое равенство вытекает из следствия 11 и формулы (7).

Применим сейчас теорему 5 к выводу соотношения, двойственного равенству (2. 4. 9. п. ж) [2, с. 85].

Предложение 5. *Имеет место соотношение*

$$\sum_{j=k}^{n-i}\binom{n}{j}s(j,k)\,s(n-j,i)=\binom{k+i}{k}s(n,k+i).$$

Доказательство вытекает из тождества

$$\sum_{i=0}^{n-k}\frac{s(n,k+i)}{n!}\binom{k+i}{k}Y^{i}=\sum_{j=k}^{n}\frac{s(n,j)}{n!}\binom{j}{k}Y^{j-k}=$$

$$=\sum_{j=k}^{n}\frac{s(j,k)}{j!}\binom{Y}{n-j}=\sum_{j=k}^{n}\frac{s(j,k)}{j!}\sum_{i=0}^{n-j}\frac{s(n-j,i)}{(n-j)!}Y^{i}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{1}{n!}\left(\sum_{j=k}^{n-i}\binom{n}{j}s(j,k)\,s(n-j,i)\,Y^{i}\right),$$

в котором второй переход совершен на основании равенства (18).

Список литературы: 1. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. — М.: Наука, 1975. — 480 с. 2. *Егорычев Г. П.* Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. — Новосибирск: Наука, 1977. —286 с. 3. *Сачков Ю. В.* Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.— 320 с. 4. *Платонов М. Л.* Комбинаторные числа класса отображений и их приложения.— М.: Наука, 1979.— 152 с. 5. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества.— М.: Мир, 1982.— 256 с. 6. *Айгнер М.* Комбинаторная теория. — М.: Мир, 1982. — 558 с. 7. *Comtet L.* Analyse combinatoire — II. — Paris: PUF, 1970.— 190 p. 8. *Калюжный В. Н.* Степенная проблема моментов на *p*-адическом диске.— Теория функций, функцион. анализ и их приложения, вып 39. Харьков: Вища школа. 1983, с. 56—61. 9. *Коблиц Н.* *p*-адические числа, *p*-адический анализ и дзета-функции.—М.: Мир, 1982. — 192 с.

Поступила в редколлегию 13. 12. 83.