

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра фундаментальної математики

Кваліфікаційна робота

освітньо-кваліфікаційний рівень: *магістр*

на тему *«Узагальнений оператор зсуву і
лінійне операторне рівняння у кільці
формальних степеневих рядів з цілими
коефіцієнтами»*

Виконав: студент групи М162 VI курсу
(другий магістерський рівень),
спеціальності 111
“Математика”
освітньо-професійної програми
“Математика”

Шапран М.В.

Керівник: викладач кафедри
фундаментальної математики
Гончарук А.Б.

Рецензент:

Харків — 2023 рік

Анотації

Шапран М.В. Про узагальнений оператор зсуву і лінійне операторне рівняння у кільці формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами.

Робота присвячена узагальненню методу пошуку розв'язків лінійних різницьових та диференціальних рівнянь вищих степенів з цілими коефіцієнтами. Розглядається лінійне операторне рівняння у кільці формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами, де оператором виступає узагальнений оператор зсуву. Лінійне диференціальне рівняння та лінійне неоднорідне неявне різницеве рівняння є частковими випадками операторного рівняння. Для знаходження розв'язків застосовується метод схожий на спосіб пошуку часткового розв'язку диференціального рівняння, який використав У.Броджі [2, §5, 22.1]. В роботі досліджуються достатні умови існування та єдиності розв'язку операторного рівняння у вигляді формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами. Для цього вводиться спеціальна $\bar{q}$ -адична метрика на цілих числах, розглядається також спеціальне кільце $\bar{q}$ -адичних цілих чисел, що є поповненням кільця цілих чисел за цією метрикою. Сформульовані достатні умови існування та єдиності розв'язку в кільці формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з кільця $\bar{q}$ -адичних цілих чисел.

Shapran M.V. The generalized shift operator and the linear operator equation in the ring of formal power series with integer coefficients.

The work is dedicated to the generalization of the method for finding solutions to linear implicit difference difference and differential equations of higher powers with integer coefficients. Considers a linear operator equation in the ring of formal power series with integer coefficients, where the operator is a generalized shift operator. The linear differential equation and the linear nonhomogeneous implicit difference equation are special cases of the operator equation. The method used to find solutions is similar to the approach of finding a particular solution to a differential equation used by U. Broggi. The paper investigates sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions to the operator equation in the form of formal power series with integer coefficients. For this purpose, a special $\bar{q}$ -adic metric is introduced on integers, and a special ring of $\bar{q}$ -adic integers, which is a completion of the ring of integers with respect to this metric, is considered. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of solutions on the ring of formal power series with coefficients from the ring of $\bar{q}$ -adic integers are formulated.

Зміст

Анотації	2
Вступ	5
1. Постановка задачі	7
2. Пошук розв’язків	9
3. Випадок нефінітної неоднорідності	12
Висновки	23

Вступ

Як зазначено у [6], лінійні різницеві рівняння виду

$$a_m w_{n+m} + a_{m-1} w_{n+m-1} + \dots + a_1 w_{n+1} + a_0 w_n = f_n$$

є добре вивченими над полями, оскільки у цьому випадку можна поділити на a_m і виразити рекурентну формулу для w_{n+m} . Такі рівняння завжди мають нескінчену кількість розв'язків по одному для кожної початкової умови $(w_0, \dots, w_{m-1})$, які можна знайти за допомогою рекурентних формул.

$$w_{n+m} = -a_m^{-1}(f_n - a_{m-1}w_{n+m-1} + \dots + a_1w_{n+1} + a_0w_n).$$

Більш цікавим є випадок, коли рівняння розглядається на кільцях, оскільки a_m може бути оборотним. В цьому випадку рівняння може мати нескінченно багато розв'язків, або один, або жодного.

Для диференціальних рівнянь виду

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \dots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x),$$

питання існування та пошук розв'язків теж є досить вивченим. Розглянемо це рівняння, коли a_i цілі і $f(x)$ – формальний степеневий ряд з цілими коефіцієнтами. Метод невизначених коефіцієнтів призведе до рекурентних рівнянь, схожих на різницеві рівняння описані вище. Цікавимосся розв'язками, які є формальними степеневими рядами з цілими коефіцієнтами. Ці диференціальні рівняння також мають або нескінченно багато розв'язків, або один, або жодного. Це відрізняє такі нашу ситуацію від звичайної теорії диференціальних рівнянь, в якій такі рівняння мають нескінченно багато

розв'язків.

Для диференціальних рівнянь питання існування та кількості розв'язків у вигляді формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами вивчалось у [3], де були сформовані достатні умови існування та єдиності розв'язку в кільці формальних степеневих рядів з коефіцієнтами з цілця нормування неархімедового поля. Також у [4] та [6, §4] розглядалось застосування операторного рівняння першого порядку з оператором зсуву, для узагальнення пошуку розв'язків для деяких різницевих та диференціальних рівнянь першого порядку над кільцями цілих чисел.

В цій роботі узагальнюються ці результати для операторних рівнянь вищих порядків з цілими коефіцієнтами.

В розділі 1 розглядаємо операторне рівняння в кільці формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами $\mathbb{Z}[[x]]$, та пояснюємо його зв'язок з лінійними неоднорідними диференціальними та лінійними різницевиими рівняннями. У розділі 2 застосовуємо схему У.Броджі для знаходження розв'язку цього рівняння у вигляді формального степеневих ряду, коли формальний степеневий ряд $f(x)$ є поліномом. У розділі 3 для знаходження розв'язку, коли формальний степеневий ряд $f(x)$ не є поліномом, розглядається $\bar{q}$ -адична топологія, над кільцем цілих чисел формулюються теореми про існування та єдиність розв'язку та наводяться приклади.

Розділ 1

Постановка задачі

Постановка задачі аналогічна до такої в [6, §4], [6].

Нехай $q = (q_1, q_2, q_3, \dots)$ - послідовність додатніх цілих чисел, для яких виконуються такі умови:

1. нескінченна кількість q_i більше за 1
2. для кожного простого p , або жоден з q_i не ділиться на p або існує нескінченна кількість q_i , що діляться на p

Розглянемо оператор A на кільці формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами. Це буде оператор зсуву з вагою q

$$A(w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots) = q_1w_1 + q_2w_2x + q_3w_3x^2 + \dots$$

Розглянемо рівняння

$$a_m(A^mw)(x) + a_{m-1}(A^{m-1}w)(x) + \dots + a_1Aw(x) + a_0w(x) = f(x), \quad (1.1)$$

де $a_i \in \mathbb{Z}$, $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots \in \mathbb{Z}[[x]]$ - формальний степневий ряд з цілими коефіцієнтами, f_i - відомі цілі числа.

Побачимо, що якщо $q = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$, для якого обидві умови на q виконуються, оператор A є оператором диференціювання

$$A(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$$

тоді рівняння (1.1) буде мати вигляд

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \dots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x),$$

і буде звичайним лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Для $q = (d, d, d, d, d, d, \dots)$, $d \neq 1$ умови на послідовність також виконуються. У такому випадку рівняння (1.1) породить різницеве рівняння

$$a_m d^m w_{n+m} + a_{m-1} d^{m-1} w_{n+m-1} + \dots + a_1 d w_{n+1} + a_0 w_n = f_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином деякі лінійні неоднорідні диференціальні рівняння та неявні лінійні різницеви будуть частковими випадками рівняння (1.1). Будемо шукати розв'язки w у кільці формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами.

У розділі 2 буде описаний спосіб пошуку формального розв'язку, який явно знаходиться у випадку, коли $f(x)$ поліном, а в іншому випадку існування розв'язку буде досліджуватись у розділі 3. Для дослідження випадку, коли $f(x)$ не поліном, ми введемо повне кільце цілих $\bar{q}$ -адичних чисел $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$ з неархімедовою метрикою. Це кільце буде мати підкільце, ізоморфне до кільця цілих чисел $\mathbb{Z}$. Тоді будуть доведені дві теореми про достатність та єдиність розв'язку у вигляді формального степеневого ряду з коефіцієнтами з кільця $\bar{q}$ -адичних цілих чисел $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$, та продемонстровано, що за цих умов формальний розв'язок знайдений у розділі 2 буде єдиним можливим розв'язком для поставленої задачі.

Розділ 2

Пошук розв'язків

Для пошуку розв'язку рівняння (1.1) у вигляді формального степеневому ряду застосуємо схему, яку використовував У.Броджі [2, §5, 22.1].

Нехай спочатку $f(x)$ – поліном з цілими коефіцієнтами.

Розглянемо $P(s) = a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0$, тоді рівняння (1.1) можна записати у вигляді

$$P(A)w = f,$$

де $P(A)$ - це оператор. Тоді формально розв'язок дорівнюватиме

$$w = (P(A))^{-1}f. \quad (2.1)$$

Так як $P(s)$ поліном, то можна знайти формальний степеневий ряд, обернений до нього, коефіцієнти c_i якого знаходяться з такої рівності

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0)^{-1} = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots,$$

тобто

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0)(c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots) = 1.$$

Розкриваючи дужки та прирівнюючі коефіцієнти при x^n отримаємо систему

лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 c_0 = 1 \\ a_0 c_1 + a_1 c_0 = 0 \\ a_0 c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 = 0 \\ \dots \\ a_0 c_m + a_1 c_{m-1} + \dots + a_m c_0 = 0 \\ a_0 c_{m+1} + a_1 c_m + \dots + a_m c_1 = 0 \\ \dots \end{array} \right. . \quad (2.2)$$

Якщо a_0 оборотний, то з системи (2.2) можна єдиним чином знайти коефіцієнти c_i

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = a_0^{-1} \\ c_1 = a_0^{-1}(-a_1 c_0) \\ c_2 = a_0^{-1}(-a_1 c_1 - a_2 c_0) \\ \dots \end{array} \right. .$$

Отримуємо

$$(P(A))^{-1} = c_0 + c_1 A + c_2 A^2 + \dots,$$

тоді з (2.1) маємо розв'язок

$$w = (P(A))^{-1} f = c_0 f + c_1 A f + c_2 A^2 f + \dots . \quad (2.3)$$

Оскільки $f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \dots + f_k x^k$ поліном, то доданки у розв'язку

(2.3) виглядають так:

$$\begin{aligned}
 c_0 f &= c_0 f_0 + c_0 f_1 x + c_0 f_2 x^2 + \dots \\
 c_1 A f &= c_1 q_1 f_1 + c_1 q_2 f_2 x + c_1 q_3 f_3 x^2 + \dots \\
 c_2 A^2 f &= c_2 q_1 q_2 f_2 + c_2 q_2 q_3 f_3 x + c_2 q_3 q_4 f_4 x^2 + \dots \\
 &\dots \\
 A^{k+1} f &= A^{k+2} f = \dots = 0.
 \end{aligned}$$

Тоді, якщо

$$w(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots$$

для коефіцієнтів w_n при x^n отримуємо

$$w_n = c_0 f_n + \sum_{i=1}^{k-n} c_i q_{n+1} \dots q_{n+i} f_{n+i}. \quad (2.4)$$

Якщо $f(x)$ поліном, то формальний степеневий ряд $w(x)$ з коефіцієнтами w_n буде розв'язком рівняння (1.1), також він буде єдиним розв'язком цього рівняння у цілих числах (див Теорему 3.9). Якщо тепер застосувати схему Броджі, коли формальний степеневий ряд $f(x)$ не поліном, то формально отримуємо такий вид коефіцієнтів

$$w_n = c_0 f_n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i q_{n+1} \dots q_{n+i} f_{n+i}. \quad (2.5)$$

Ряд у цьому рівнянні є сумою цілих чисел, він, взагалі кажучи не є збіжним. Цей випадок розглядатиметься у наступному розділі.

Розділ 3

Випадок нефінітної неоднорідності

Для випадку, коли формальний степеневий ряд $f(x)$ не є поліномом, пропонується ввести топологію, для якої ряд у рівнянні (2.5) коефіцієнтів формального степеневого ряду $w(x)$ буде збігатись. Розглянемо топологію, описану в [1, §2, 10].

Розглянемо таку послідовність $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots)$ - це буде послідовність q з виключенням усіх $q_i = 1$ (наприклад для $q = (3, 1, 2, 5, 1, 12, 6, \dots)$ отримаємо $\bar{q} = (3, 2, 5, 12, 6, \dots)$). Помітимо, що для $\bar{q}$ досі виконуються ті самі умови, що і для послідовність q , а саме:

1. нескінченна кількість $\bar{q}_i$ більше за 1;
2. для кожного простого p , або жодна $\bar{q}_i$ не ділиться на p або існує нескінченна кількість $\bar{q}_i$, що діляться на p .

Тоді кожне додатне ціле число z можна однозначно записати як

$$z = z_1 + q_1 z_2 + q_1 q_2 z_3 + \dots + q_1 \dots q_k z_k,$$

де z_i остатки при послідовному діленні на елементи $\bar{q} = (q_1, q_2, q_3, \dots)$. Для додатних цілих чисел цей процес буде скінченним, адже $q_i > 1$ і значить, частка буде спадати. Тоді z можна представити як скінченну послідовність $(z_1, z_2, \dots, z_k)$, де $z_i \in \{0, 1, \dots, q_i - 1\}$. Позначимо множину усіх послідовностей виду $(z_1, z_2, \dots, z_k, \dots)$, де $z_i \in \{0, 1, \dots, q_i - 1\}$, як $\Delta_{\bar{q}}$.

Означення 3.1. [1, §2, 10.2] Розглядаємо множину нескінчених в обидві

сторони послідовностей $(\dots, z_{-n}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots)$, позначимо її $\Omega_{\bar{q}}$. Множина $\Delta_{\bar{q}}$ буде підмножиною $\Omega_{\bar{q}}$, оскільки можна продовжити усі послідовності $(z_1, z_2, z_3, \dots)$ до $(\dots, z_{-n}, \dots, z_{-1}, z_0, z_1, z_2, \dots)$ так, що $z_i = 0$ для $i \leq 0$.

Означення 3.2. На множині нескінченних послідовностей $\Omega_{\bar{q}}$ та $\Delta_{\bar{q}}$ можна перенести операції додавання та множення (див. [1, §2, 10.2, 10.7, 10.8]). Множина нескінченних в обидві сторони послідовностей $\Omega_{\bar{q}}$ з операцією додавання і множення називається $\bar{q}$ -адичними числами, а множина $\Delta_{\bar{q}}$ з операцією додавання і множення - цілими $\bar{q}$ -адичними числами.

Теорема 3.3. ([1, §2, 10]) Відносно операції додавання та множення $\Delta_{\bar{q}}$ буде кільцем та матиме підкільце, ізоморфне кільцю $\mathbb{Z}$.

Означення 3.4. ([1, §2, 10.4]) Для елементів $m \neq n \in \Omega_{\bar{q}}$ позначимо $\delta(n, m) = 2^{-t}$, де t - найменше число таке, що $m_t \neq n_t$ та $\delta(m, m) = 0$

Теорема 3.5. ([1, §2, 10.5]) Функція δ є метрикою та породжує топологію на $\Delta_{\bar{q}}$. Ця метрика δ є неархімедовою, тобто задовольняє такій нерівності:

$$\delta(m + n, 0) \leq \max(\delta(m, 0), \delta(n, 0)),$$

відповідно ця метрика породжує неархімедове нормування $|m|_{\bar{q}} = \delta(m, 0)$

Твердження 3.6. ([1, §2, 10]) Кільце $\bar{q}$ -адичних чисел $\Delta_{\bar{q}}$ є повним

Будемо надалі позначати повне кільце $\Delta_{\bar{q}}$ як $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$

Теорема 3.7. ([7, 1.1.8, Proposition 1]) Для повного кільця K з неархімедовою топологією σ , ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ збігається за цією топологією тоді і тільки тоді, коли x_i прямує до нуля при $i \rightarrow \infty$.

Лема 3.8. Нехай $q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k}$, $n \in \mathbb{N}$ - добуток послідовних елементів з $\bar{q}$. Тоді, при $k \rightarrow \infty$ норма $|q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k}|_{\bar{q}}$ прямує до нуля.

Доведення. Нехай число $q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k} = x$ у $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$ представлено послідовністю $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, тобто $x = x_1 + q_1(x_2 + q_2(x_3 + q_4(\dots)))$. Те, що норма $|x|_{\bar{q}}$ прямує до нуля, означає, що індекс першого x_i , який не дорівнює нулю, буде зростати з ростом k . Тобто, що добуток $q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k}$ буде ділитись на всю більшу і більшу кількість послідовних q_i починаючи з q_1 .

Покажемо, що існує k таке, що добуток $S_k = q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k}$ ділиться на добуток $C_n = q_1 q_2 q_3 \dots q_{n-1}$. Розглянемо C_n , нехай для якогось k добуток S_k не ділиться на C_n . Це значить, що існує просте число p , що є дільником C_n , і добуток S_k не ділиться на деяку степінь p . Скористаємось умовою (2) для $\bar{q}$, яка гарантує, що існує незлічена кількість q_i , що діляться на p . Тому, збільшуючи k , ми обов'язково колись додамо до добутку S_k достатню кількість елементів q_i , що діляться на p . Отже, для достатньо великого k , S_k буде ділитись на достатню кількість p . Повторивши це для кожного простого дільника C_n , ми отримаємо таке k_n , що S_{k_n} буде ділитись на C_n . Тобто отримали такий добуток S_{k_n} , який ділиться на $q_1 \dots q_{k+n}$.

Таким чином, для кожного натурального n існує k_n , що $S_{k_n} = q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k_n}$ ділиться на $q_1, \dots, q_{n+k_n}$. А значить добуток S_{k_n} у $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$ буде мати щонайменше $n + k_n$ нулів на початку послідовності. Очевидно при збільшенні k_n у добуток S_{k_n} додасться q_{k_n+1} , що гарантує нуль на $n + k_n + 1$ -шій позиції. Отже, при зростанні k_n добуток $S_{k_n} = q_n q_{n+1} q_{n+2} \dots q_{n+k_n}$ буде ділитись на все більшу кількість послідовних q_i . $\square$

Також цікаво зазначити, що у випадку, коли $\bar{q} = (p, p, p, p, p, \dots)$, де p - просте число, $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$ буде кільцем цілих p -адичних чисел.

Теорема 3.9. Нехай a_0 оборотне та $a_i \in \mathbb{Z}_{\bar{q}}$. Тоді рівняння (1.1) має не більше одного розв'язку у $\mathbb{Z}_{\bar{q}}[[x]]$.

Доведення. Для того, щоб показати, що рівняння (1.1) має не більше

одного розв'язку, достатньо показати, що однорідне рівняння

$$a_m(A^m v)(x) + a_{m-1}(A^{m-1}v)(x) + \dots + a_1 A v(x) + a_0 v(x) = 0 \quad (3.1)$$

має тільки тривіальний розв'язок. Нехай $v(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \dots$ - розв'язок рівняння (3.1). Тоді маємо

$$\begin{aligned} a_0 v &= a_0 v_0 + a_0 v_1 x + a_0 v_2 x^2 + \dots \\ a_1 A v &= a_1 q_1 v_1 + a_1 q_2 v_2 x + a_1 q_3 v_3 x^2 + \dots \\ a_2 A^2 v &= a_2 q_1 q_2 v_2 + a_2 q_2 q_3 v_3 x + a_2 q_3 q_4 v_4 x^2 + \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Якщо перенести у рівнянні (3.1) $v a_0$ у іншу частину та прирівняти коефіцієнти при x^n зліва та справа отримаємо наступну систему:

$$\left\{ \begin{aligned} -a_0 v_0 &= \sum_{i=1}^m a_i q_1 \dots q_i v_i \\ -a_0 v_1 &= \sum_{i=1}^m a_i q_2 \dots q_{i+1} v_{i+1} \\ -a_0 v_2 &= \sum_{i=1}^m a_i q_3 \dots q_{i+2} v_{i+2} \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Тобто,

$$v_n = -a_0^{-1} \sum_{i=1}^m a_i q_{n+1} \dots q_{n+i} v_{n+i}. \quad (3.2)$$

Розглянемо v_0 , підставивши $n = 0$ у (3.2)

$$v_0 = -a_0^{-1} \sum_{i_1=1}^m a_{i_1} q_1 \dots q_{i_1} v_{i_1}.$$

Застосовувавши (3.2) для кожного v_{i_1} отримаємо

$$\begin{aligned}
v_0 &= -a_0^{-1} \sum_{i_1=1}^m a_{i_1} q_1 \dots q_{i_1} v_{i_1} = \\
&= (-1)^2 a_0 \sum_{i_1=1}^m a_{i_1} q_1 \dots q_{i_1} \sum_{i_2=1}^m a_{i_2} q_{i_1+1} \dots q_{i_1+i_2} v_{i_1+i_2} = \\
&= (-1)^2 a_0 \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m a_{i_1} a_{i_2} q_1 \dots q_{i_1} q_{i_1+1} \dots q_{i_1+i_2} v_{i_1+i_2} = \\
&= (-1)^2 a_0 \sum_{i_1=1, i_2=1}^m a_{i_1} a_{i_2} q_1 \dots q_{i_1+i_2} v_{i_1+i_2} = \dots \\
&= (-1)^k a_0^{(-1)^k} \sum_{i_1=1, i_2=1, \dots, i_k=1}^m a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} q_1 \dots q_{i_1+i_2+\dots+i_k} v_{i_1+i_2+\dots+i_k}
\end{aligned}$$

Порахуємо норму v_0 . Так як метрика неархімедова, то

$$|v_0|_{\bar{q}} \leq \max_{i_1, i_2, \dots, i_k} (|a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} q_1 \dots q_{i_1+i_2+\dots+i_k} v_{i_1+i_2+\dots+i_k}|_{\bar{q}})$$

Оскільки $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} v_{i_1+i_2+\dots+i_k}$ ціле, то $|a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} v_{i_1+i_2+\dots+i_k}|_{\bar{q}} < 1$. За Лемою 3.8 норма добутка $q_1 \dots q_{i_1+i_2+\dots+i_k}$ прямує до нуля. Отримаємо, що права частина з ростом k прямує до 0. Але $|v_0|_{\bar{q}}$ не залежить від k , значить $v_0 = 0$. Аналогічно впливає, що і всі інші $v_n = 0$, так як для них цей добуток буде мати вигляд $q_{1+n} \dots q_{n+i_1+i_2+\dots+i_k}$, для якого норма теж за Лемою 3.8 прямує до нуля. Отже ми показали, що знайдений розв'язок тривіальний. $\square$

Теорема 3.10. Нехай a_0 оборотний та $a_i \in \mathbb{Z}_{\bar{q}}$. Тоді формальний степеневий ряд $w(x)$ з коефіцієнтами (2.5) буде єдиним розв'язком рівняння (1.1) у $\mathbb{Z}_{\bar{q}}[[x]]$.

Доведення. З Теорема 3.9 впливає, що розв'язків не більше одного. Покажемо, що формальний степеневий ряд $w(x)$ з коефіцієнтами (2.5) існує,

тобто що ряди у коефіцієнтах (2.5)

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i q_{n+1} \dots q_{n+i} f_{n+i}$$

збігаються в $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$. Дійсно, скористаємось Теоремою 3.7, тоді достатньо перевірити, що $c_i q_{n+1} \dots q_{n+i} f_{n+i}$ прямує до 0 при $i \rightarrow \infty$. Тобто, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists i > 0 : \forall j \geq i \mid c_i q_{n+1} \dots q_{n+i} f_{n+i} \mid_{\bar{q}} < \varepsilon.$$

За Лемою 3.8 $\mid q_{n+1} \dots q_{n+i} \mid_{\bar{q}}$ прямує до нуля, а значить ми зможемо підібрати таке i , щоб $\mid q_{n+1} \dots q_{n+i} \mid_{\bar{q}} < \varepsilon$. Позаяк $c_i f_{n+i}$ ціле число, тобто $\mid c_i f_{n+i} \mid_{\bar{q}} \leq 1$, а значить виконується нерівність

$$\mid c_i q_{n+1} \dots q_{n+i} f_{n+i} \mid_{\bar{q}} \leq \mid c_i f_{n+i} \mid_{\bar{q}} \mid q_{n+1} \dots q_{n+i} \mid_{\bar{q}} < \varepsilon$$

Значить ряди збігаються в $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$, а значить степеневий ряд

$$w(x) = w_0 + w_1 x + w_2 x^2 + \dots,$$

де w_i це коефіцієнти, отримані з рівняння (2.5), буде розв'язком рівняння (1.1) в $\mathbb{Z}_{\bar{q}}[[x]]$. □

Наслідок 3.11. Якщо у рівнянні (1.1) $a_i \in \mathbb{Z}$ та a_0 оборотний, то оскільки $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{\bar{q}}$, рівняння (1.1) має не більше одного розв'язку в $\mathbb{Z}[[x]]$.

Наслідок 3.12. Для випадку, коли $q = (1, 2, 3, 4, 5 \dots)$, тобто коли рівняння (1.1) стає диференціальним рівнянням

$$a_m w^{(m)}(x) + a_{m-1} w^{(m-1)}(x) + \dots + a_1 w'(x) + a_0 w(x) = f(x).$$

Отримаємо єдиний розв'язок $w(x)$ у вигляді формального степеневого ряду

з коефіцієнтами

$$w_n = c_0 f_n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \frac{(n+i+1)!}{(n+1)!} f_{n+i},$$

Доведемо лему, яка узагальнює лему у [4, §5,5.8].

Лема 3.13. Нехай усі прості дільники елементів $\bar{q} = (q_1, q_2, \dots)$ це $\bar{p} = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$, тоді для цілого числа s та послідовності цілих чисел $t = (t_n)$, наступні два твердження еквівалентні:

1. $t_n \rightarrow s \in \mathbb{Z}$ в кільці цілих $\bar{q}$ -адичних числах $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$
2. $t_n \rightarrow s \in \mathbb{Z}$ в кільці цілих p_i -адичних чисел $\mathbb{Z}_{p_i}$, для усіх $p_i \in \bar{p}$

Доведення. Покажемо, що з (1) випливає (2). Розглянемо будь-яке p_i . З (1) випливає $\delta(t_n, s)$ прямує до 0, тобто для любого k існує таке n_k , що $t_n - s$ ділитиметься на $q_1 \dots q_k$ для кожного $n > n_k$. Тоді для кожного m скориставшись другою властивістю послідовності $\bar{q}$, існує k_m , що $q_1 \dots q_{k_m}$ ділитиметься на p_i^m . Значить для кожного m існує k_m , для k_m існує n_{k_m} , що $t_n - s$ ділитиметься на $q_1 \dots q_{k_m}$, що ділиться на p_i^m , для усіх $n > n_{k_m}$. Це і означає, що $t_n \rightarrow s$ в кільці цілих p_i -адичних чисел $\mathbb{Z}_{p_i}$.

Покажемо, що з (2) випливає (1). Тоді для кожного p_i виконується, що для кожного m існує n_m^i , що $t_n - s$ ділитиметься на p_i^m , для кожного $n > n_m^i$. Для кожного k добуток $q_1 q_2 \dots q_k = p_1^{m_k^1} p_2^{m_k^2} \dots p_i^{m_k^i} \dots$ скінченний. Тоді для кожного m_k^i існує відповідне $n_{m_k^i}$, що $t_n - s$ ділитиметься на $p_i^{m_k^i}$, для кожного $n > n_{m_k^i}$. Позначимо максимальне з таких $n_{m_k^i}$, як $\bar{n}_k$. Тоді $t_n - s$ буде ділитись на $p_1^{m_k^1} p_2^{m_k^2} \dots p_i^{m_k^i} \dots = q_1 q_2 \dots q_k$, для усіх $n > \bar{n}_k$. А це і значить, що $t_n \rightarrow s$ в кільці цілих $\bar{q}$ -адичних числах $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$ при $n \rightarrow \infty$. $\square$

Розглянемо таке різницеве рівняння першого порядку зі змінними коефіцієнтами

$$\alpha_{n+1} w_{n+1} + w_n = f_n, \quad (3.3)$$

де усі w_n, f_n, α_n цілі числа. Зазначимо, що рівняння (1.1), при $m = 1, a_i = 1, q = (q_1, q_2, q_3, q_4, \dots)$, де $q_i = \alpha_i$, породить різницеве рівняння (3.3). Нехай $p = \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$ - множина усіх простих дільників елементів з q . Нехай для послідовності $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ виконуються наступні умови:

1. нескінченна кількість α_i більше за 1;
2. для кожного простого p , або жодна α_i не ділиться на p або існує нескінченна кількість α_i , що діляться на p .

Тоді для неї теж можна застосувати схему Броджі, як у Розділі 2, і отримати розв'язок у вигляді формального степеневого ряду з коефіцієнтами з кільця цілих $\bar{q}$ -адичних чисел $w(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots$, де

$$w_n = c_0 f_n + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{n+1} \dots \alpha_{n+i} f_{n+i} \in \mathbb{Z}_{\bar{q}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

За Наслідком 3.11, якщо a_0 оборотний в $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$, то формальний степеневий ряд $w(x)$ з коефіцієнтами $w_n \in \mathbb{Z}_{\bar{q}}$ є розв'язок. За Лемою 3.13, якщо a_0 оборотний в усіх кільцях p_i -адичних чисел $\mathbb{Z}_{p_i}$, то можна перевірити чи належить розв'язок $w(x)$ кільцю формальних степеневих рядів з цілими коефіцієнтами. Аналогічно Теоремі 3.9, рівняння (1.1) буде мати не більше одного розв'язку у $\mathbb{Z}_{p_i}$, для кожного p_i . Тоді, якщо для кожного $p_i \in p$, ряди $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_{n+1} \dots \alpha_{n+i} f_{n+i} \in \mathbb{Z}_{\bar{q}} = w_n - c_0 f_n$ дорівнюють одному і тому самому цілому числу $s_n \in \mathbb{Z}$ у $\mathbb{Z}_{p_i}$, для кожного $n = 0, 1, 2, \dots$, то формальний степеневий ряд $w(x)$ з коефіцієнтами $w_n = s_n + c_0 f_n$ буде єдиним розв'язком в $\mathbb{Z}_{\bar{q}}$, оскільки $c_0, f_n, s_n \in \mathbb{Z}$. А значить отримаємо розв'язок рівняння (1.1) $w(x) \in \mathbb{Z}[[x]]$.

Приклад 3.14. Нехай $\alpha_n = 2$ для парних n , а $\alpha_n = 3$ для непарних n ,

тобто

$$3w_1 + w_0 = f_0$$

$$2w_2 + w_1 = f_1$$

$$3w_3 + w_2 = f_2$$

...

Тоді рівняння (1.1) при $m = 1, a_i = 1, q = (3, 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots)$, якщо $w(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots$, буде мати вигляд

$$Aw(x) + w(x) = f(x),$$

а саме

$$3w_1x + 2w_2x^2 + 3w_3x^3 + \dots + w_0 + w_1x + w_2x^2 + \dots = f_0 + f_1x + f_2x^2 + \dots,$$

і породить різницеве рівняння (3.3) з α_n , описаними вище. Тоді до такого вигляду рівняння можна застосувати схему Броджі, як це було зроблено у Розділі 2. $P(s) = a_1s + a_0$, тоді, якщо $(P(s)^{-1}) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ отримуємо формули для коефіцієнтів c_i

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0a_0 = 1 \\ c_1a_0 + c_0a_1 = 0 \\ c_2a_0 + c_1a_1 = 0 \\ c_3a_0 + c_2a_1 = 0 \\ \dots \\ c_na_0 + c_{n-1}a_1 = 0 \\ \dots \end{array} \right. ,$$

підставивши $a_i = 1$ знайдемо c_i

$$\left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ c_1 = -c_0 = -1 \\ c_2 = -c_1 = 1 \\ c_3 = -c_2 = -1 \\ \dots \\ c_n = -c_{n-1} = (-1)^n \\ \dots \end{array} \right. .$$

Тоді $(P(s))^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. Тоді розв'язок (2.3) перетвориться на

$$w(x) = f(x) - (Af)(x) + (A^2f)(x) - \dots .$$

А значить коефіцієнти (2.5) матимуть вигляд

$$w_n = f_n + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i f_{n+i} 2^k 3^l, \quad (3.4)$$

де k це кількість парних чисел на проміжку $[n+1, n+i]$, а l це кількість непарних. Очевидно, що ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i f_{n+i} 2^k 3^l$, збіжний в $\mathbb{Z}_2$ та $\mathbb{Z}_3$. Тоді можна застосувати Лему 3.13, щоб перевірити існування розв'язків у вигляді формального степеневого ряду з цілими коефіцієнтами. Для цього потрібно перевірити, що для усіх $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i f_{n+i} 2^k 3^l = w_n - f_n$ дорівнює числу $s_n \in \mathbb{Z}$ у $\mathbb{Z}_2$, та дорівнює тому самому числу $s_n \in \mathbb{Z}$ у $\mathbb{Z}_3$. Оскільки $s_n, f_n \in \mathbb{Z}$, то $f_n + s_n = w_n \in \mathbb{Z}$. А значить формальний степеневий ряд $w(x)$ з коефіцієнтами $w_n \in \mathbb{Z}$ є єдиним розв'язком у $\mathbb{Z}$.

Зазначимо, що в цьому випадку можна розглянути окремо. Оскільки всі w_n збігаються в $\mathbb{Z}_2$, то $w(x)$ є розв'язком (1.1) в $\mathbb{Z}_2$. Так само, оскільки всі

w_n збігаються в $\mathbb{Z}_3$, то $w(x)$ є розв'язком (1.1) в $\mathbb{Z}_3$. Якщо в $\mathbb{Z}_2$ суми ряду (3.4) цілі, то ці w_n є цілими коефіцієнтами розв'язку рівняння (1.1). Тоді в $\mathbb{Z}_3$ ряди (3.4) також збігаються саме до цього розв'язку. Отже, в такому випадку, якщо всі w_n є цілими в $\mathbb{Z}_2$, то в $\mathbb{Z}_3$ вони також є тими самими цілими числами. І навпаки.

Висновки

У цій роботі досліджується існування розв'язків рівняння

$$a_m(A^m w)(x) + a_{m-1}(A^{m-1} w)(x) + \dots + a_1 A w(x) + a_0 w(x) = f(x)$$

з узагальненим оператором зсуву на кільці формальних степеневих рядів вищих степенів з цілими коефіцієнтами. Було розглянуто кільце $\bar{q}$ -адичних цілих чисел, яке є поповненням кільця цілих чисел за неархімедовою топологією, та доведені достатні умови існування та єдиності розв'язків з коефіцієнтами на кільці $\bar{q}$ -адичних цілих чисел. У результаті ми отримали, що на кільці $\bar{q}$ -адичних цілих чисел розв'язок завжди існує та знайшли його. Коефіцієнти знайденого розв'язку не завжди належать кільцю цілих чисел. У подальшому можна розглядати, за яких умов описаний розв'язок буде мати цілі коефіцієнти.

Список використаних джерел

- [1] Hewitt, E., Ross, K. A.: Abstract Harmonic Analysis, Volume I: Structure of Topological Groups Integration Theory Group Representations. Springer-Verlag, Berlin-Gottingen-Heidelberg (1963) DOI: 10.1007/978-1-4419-8638-2
- [2] Kamke, E.: Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen. Springer Vieweg Verlag (2013)
- [3] Hefter, S.L., Goncharuk, A.B.: Linear Differential Equation with Inhomogeneity in the Form of a Formal Power Series Over a Ring with Non-Archimedean Valuation. Ukr Math J **74**, 1463–1477 (2022)
- [4] Gefter, S., Goncharuk, A.: Generalized backward shift operators on the ring $\mathbb{Z}[[x]]$, Cramer’s rule for infinite linear systems, and p-adic integers. In: Böttcher, A., Potts, D., Stollmann, P., Wenzel, D. (eds) The Diversity and Beauty of Applied Operator Theory. Birkhäuser, Cham. pp. 247–259 (2018)
- [5] Goncharuk, A.: Implicit linear difference equation over a non-Archimedean ring. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Appl. Math. and Mech. **93**, 18–33 (2021)
- [6] Гончарук, А. Б.: Алгебраїчні конструкції в лінійних диференціальних рівняннях та в теорії неявних лінійних різницевих рівнянь: дисертація. доктора філософії: 111, Харків, 2023. 141 с.

- [7] Perez-Garcia, C., Schikhof, W.H.: Locally Convex Spaces over NonArchimedean Valued Fields. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press (2010)