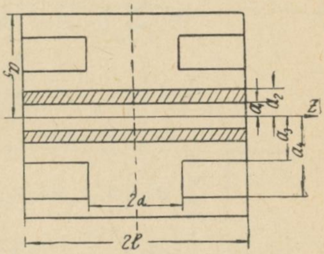
УДК 621.372.833

Э. Д. СИТНИКОВ

К РАСЧЕТУ СЛОЖНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ТРУБКОЙ

Интерес к цилиндрическим резонаторам сложной формы объясняется их широким применением в радиотехнической аппаратуре и ускорительной технике [1]. Обстоятельный обзор литературы по данному вопросу приведен в [2].



Рассмотрим резонатор сложной формы (см. рисунок) с диэлектрической трубкой, которая может, в частности, выполнять роль вакуумной камеры при использовании этого резонатора в электронике или ускорительной технике. Электромагнитное поле симметричного вида в каждой области пространства резонатора будем характеризовать потенциальными функциями следующего вида:

$$\Pi^{(1)}_{r,z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^{(1)}_n I_0(p_n r)\, e^{i\pi\frac{n}{l}z},$$

$$\Pi^{(2)}_{r,z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A^{(2)}_n I_0(\tilde{p}_n r) + B^{(2)}_n H^{(1)}_0(\tilde{p}_n r)\right] e^{i\pi\frac{n}{l}z},$$

$$\Pi^{(3)}_{r,z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A^{(3)}_n I_0(p_n r) + B^{(3)}_n H^{(1)}_0(p_n r)\right] e^{i\pi\frac{n}{l}z},$$

$$\Pi^{(4)}_{r,z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^{(4)}_n \left[I_0(p_n r) - \frac{I_0(p_n a_5)}{H^{(1)}_0(p_n a_5)} H^{(1)}_0(p_n r)\right] e^{i\pi\frac{n}{l}z},$$

$$\Pi^{(5)}_{r,z} = \sum_{m=0}^{\infty} \left[a_m I_0(q_m r) + b_m H^{(1)}_0(q_m r)\right] \cos\frac{\pi m}{2d}(z+d),$$

$$p_n^2 = k^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \quad \tilde{p}_n^2 = \varepsilon k^2 - \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2; \quad q_m^2 = k^2 - \left(\frac{\pi m}{2d}\right)^2.$$

Подчиняя компоненты электромагнитного поля соответствующим граничным условиям, получим связь между коэффициентами (1) и систему функциональных уравнений (2)

$$\tilde{p}_n^2\left[A^{(2)}_n I_0(\tilde{p}_n a_1) + B^{(2)}_n H^{(1)}_0(\tilde{p}_n a_1)\right] = p_n^2 A^{(1)}_n I_0(p_n a_1),$$

$$\varepsilon\tilde{p}_n^2\left[A^{(2)}_n I_0'(\tilde{p}_n a_1) + B^{(2)}_n H^{(1)\prime}_0(\tilde{p}_n a_3)\right] = p_n A^{(1)}_n I_0'(p_n a_1), \qquad (1)$$

$$\tilde{p}_n^2\left[A^{(2)}_n I_0(\tilde{p}_n a_2) + B^{(2)}_n H^{(1)}_0(\tilde{p}_n a_2)\right] = p_n^2\left[A^{(3)}_n I_0(p_n a_2) + B^{(3)}_n H^{(1)}_0(p_n a_2)\right],$$

$$\varepsilon\tilde{p}_n\left[A^{(2)}_n I_0(\tilde{p}_n a_2) + B^{(2)}_n H^{(1)\prime}_0(\tilde{p}_n a_2)\right] = p_n\left[A^{(3)}_n I_0'(p_n a_2) + B^{(3)}_n H^{(1)\prime}_0(p_n a_2)\right],$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^2 \left[A_n^{(3)} I_0(p_n a_3) + B_n^{(3)} H_0^{(1)}(p_n a_3)\right] e^{i\frac{\pi n}{l}z} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ на металле} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} q_m^2 \left[a_m I_0(q_m a_3) + q_m H_0^{(1)}(q_m a_3)\right] \cos\frac{\pi m}{2d}(z+d), \text{ на щели} \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n \left[A_n^{(3)} I_0'(p_n a_3) + B_n^{(3)} H_0^{(1)\prime}(p_n a_3)\right] e^{i\frac{\pi n}{l}z} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} q_m \left[a_m I_0'(q_m a_3) + b_m H_0^{(1)\prime}(q_m a_3)\right] \cos\frac{\pi m}{2d}(z+d), \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n^2 A_n^{(4)} Q_n(p_n a_4) e^{i\frac{\pi n}{l}z} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ на металле,} \\ \sum\limits_{m=0}^{\infty} q_m^2 \left[a_m I_0(q_m a_4) + b_m H_0^{(1)}(q_m a_4)\right] \cos\frac{\pi m}{2d}(z+d), \text{ на щели} \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n A_n^{(4)} Q_n'(p_n a_4) e^{i\frac{\pi n}{l}z} = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \left[a_m I_0'(q_m a_4) + b_m H_0^{(1)}(q_m a_4)\right] \times$$

$$\times \cos\frac{\pi m}{2d}(z+d), |z| < d, \tag{2.2}$$

Пользуясь полнотой функций на соответствующих интервалах [3], получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(4)} \frac{K_{ns}}{\Delta(q_s a_4)} \left[\frac{H_0^{(1)\prime}(q_s a_4)}{q_s^2} p_n^2 Q_n(p_n a_4) - \frac{H_0^{(1)}(q_s a_4)}{q_s} p_n Q_n'(p_n a_4)\right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{K_{ns}}{\Delta(q_s a_3)\Delta(p_n a_2)} \left\{\left[\frac{H_0^{(1)\prime}(q_s a_3)}{q_s^2} p_n^2 I_0(p_n a_3) - \frac{H_0^{(1)}(q_s a_3)}{q_s} \times\right.\right.$$

$$\left.\times\, p_n I_0(p_n a_3)\right] \left[C_n H_0^{(1)\prime}(p_n a_2) - D_n H_0^{(1)}(p_n a_2)\right] + \left[\frac{H_0^{(1)\prime}(q_s a_3)}{q_s^2} \times\right.$$

$$\left.\times\, p_n^2 H_0^{(1)}(p_n a_3) - \frac{H_0^{(1)}(q_s a_3)}{q_s} p_n H_0^{(1)\prime}(p_n a_3)\right] \times$$

$$\left.\times \left[D_n I_0(p_n a_2) - C_n I_0'(p_n a_2)\right]\right\}, \tag{3}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(4)} \frac{K_{ns}}{\Delta(q_s a_4)} \left[\frac{I_0(q_s a_4)}{q_s} p_n Q_n'(p_n a_4) - \frac{I_0(q_s a_4)}{q_s^2} p_n^2 Q_n(p_n a_4)\right] =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(1)} \frac{K_{ns}}{\Delta(q_s a_3)\Delta(p_n a_2)} \left\{\left[\frac{I_0(q_s a_3)}{q_s} p_n I_0(p_n a_3) - \frac{I_0'(q_s a_3)}{q_s^2} \times\right.\right.$$

$$\times\, p_n^2 I_0(p_n a_3)\Big] \cdot \left[C_n H_0^{(1)}(p_n a_2) - D_n H_0^{(1)}(p_n a_2)\right] + \left[\frac{I_0(q_s a_3)}{q_s}\, p_n H_0^{(1)'}(p_n a_3) - \right.$$

$$\left. - \frac{I_0(q_s a_3)}{q_s^2}\, p_n^2 H_0^{(1)}(p_n a_3)\right] \cdot \left[D_n I_0(p_n a_2) - C_n I_0'(p_n a_2)\right]\Big\},$$

где

$$C_n = \left(\frac{\tilde{p}_n}{p_n}\right)^2 \frac{\left[\left(\frac{p_n}{\tilde{p}_n}\right)^2 I_0(p_n a_1)\, H_0^{(1)'}(\tilde{p}_n a_1) - \frac{p_n}{\varepsilon \tilde{p}_n} I_0'(p_n a_1)\, H_0^{(1)}(\tilde{p}_n a_1)\right] I_0(p_n a_2)}{\Delta(\tilde{p}_n a_1)} +$$

$$+ \left(\frac{\tilde{p}_n}{p_n}\right)^2 \frac{\left[\frac{p_n}{\varepsilon \tilde{p}_n} I_0'(p_n a_1)\, I_0'(p_n a_1) - \left(\frac{p_n}{\tilde{p}_n}\right)^2 I_0(p_n a_1)\, I_0'(\tilde{p}_n a_1)\right] H_0^{(1)}(\tilde{p}_n a_2)}{\Delta(\tilde{p}_n a_1)},$$

$$D_n = \frac{\varepsilon \tilde{p}_n}{p_n} \frac{\left[\left(\frac{p_n}{\tilde{p}_n}\right)^2 I_0(p_n a_1)\, H_0^{(1)'}(\tilde{p}_n a_1) - \frac{p_n}{\varepsilon \tilde{p}_n} I_0'(p_n a_1)\, H_0^{(1)}(\tilde{p}_n a_1)\right] I_0'(\tilde{p}_n a_2)}{\Delta(\tilde{p}_n a_1)} +$$

$$+ \frac{\varepsilon \tilde{p}_n}{p_n} \frac{\left[\frac{p_n}{\varepsilon \tilde{p}_n} I_0'(p_n a_1)\, I_0(\tilde{p}_n a_1) - \left(\frac{p_n}{\tilde{p}_n}\right)^2 I_0(p_n a_1)\, I_0'(\tilde{p}_n a_1)\right] H_0^{(1)'}(\tilde{p}_n a_2)}{\Delta(\tilde{p}_n a_1)},$$

$$Q_n(p_n r) = I_0(p_n r) - \frac{I_0(p_n a_5)}{H_0^{(1)}(p_n a_5)} H_0^{(1)}(p_n r),$$

$$K_{ns} = \int_{-d}^{d} e^{i\frac{\pi n}{l}z} \cos\frac{\pi s}{2d}(z+d)\, dz.$$

Приравнивая нулю определитель бесконечной однородной системы линейных алгебраических уравнений (3), получаем уравнение для определения собственных частот резонатора, решение которого может быть получено численными методами.

Следует отметить, что для получения данной системы никаких упрощающих предположений не вводилось и, следовательно, эта система является строгим решением рассматриваемой граничной электродинамической задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вальднер О. А, Шальнов А. В., Диденко А. Н. Ускоряющие волноводы. М., Атомиздат, 1973. 214 с.
2. Шинкаренко В. Ф. Автореф. дис. на соиск. учен. степени канд. физ.-мат. наук. Харьков, 1974. 15 с.
3. Чумаченко В. С. К теории распространения Электромагнитных волн в периодических волноводах с узкими щелями. Харьков. Препринт № 38. ИРЭ АН УССР. 30 с.

Поступила 13. IX 1975 г.

УДК 532.135

И. Г. АЛЬПЕРИН, канд. физ.-мат. наук

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ. II.

Ниже приводится доказательство теоремы, сформулированной в части первой [8]. Соответствующяя нумерация продолжается.

3. Доказательство теоремы.

1. Доказательство утверждения «а».

Мы существенно используем неравенство (17) (вытекающее из неравенства Корна), из которого очевидным образом следует, что для всякой функции $v \in W^1_{2N}(\Omega)$ и любого числа $\tau \geqslant 0$ (см. (14) и (19))

$$L_\tau(v,\ v) = [v]^2_\nu - \tau S(v,\ v) \geqslant p_0(\nu)\,|v|^2_1 - \tau S(v,\ v) \geqslant (p_0 - \tau)\,|v|^2_1. \quad (20)$$

Мы используем также более общее неравенство [5], справедливое уже на всем пространстве $W^1_2(\Omega)$ и для всех τ:

$$0 < \tau \leqslant \tau_1 < \frac{1}{4}, \quad [v]^2_\nu - \tau\,|v|^2_1 \geqslant C_1(\tau_1)\,|v|^2_1 - C_2(\tau_1)\,\|v\|^2_{L_2(\Omega)},$$

где $C_1(\tau_1) > 0$ и $C_2(\tau_1)$ — числа, зависящие еще только от ν и Ω. Из этого последнего следует, что для тех же τ и всех $v \in W^1_2(\Omega)$ также

$$L_\tau,\ (v,\ v) \geqslant C_1(\tau_1)\,|v|^2_1 - C_2(\tau_1)\,\|v\|^2_{L_2(\Omega)}. \quad (21)$$

Теперь очевидно, что форма

$$M_\tau(v,\ v) = L_\tau(v,\ v) + [C_2(\tau_1) + 1]\,\|v\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant C_1(\tau_1)\,|v|^2_1 + \|v\|^2_{L_2(\Omega)} \quad (22)$$

будет положительно-определенной на всем пространстве $W^1_2(\Omega)$ и для всех значений $\tau : \tau \leqslant \tau_1 < \frac{1}{4}$.

Такую форму можно принять за новую норму на $W^1_2(\Omega)$ и из неравенства (21) легко следует, что эта новая норма эквивалентна старой

$$\|v\|^2_{W^1_2(\Omega)} = |v|^2_1 + \|v\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Теперь мы можем поставить следующую задачу: на пространстве $W^1_{2p}(\Omega) \in W^1_2(\Omega)$ найти минимум функционала

$$\frac{M_\tau(v,\ v)}{\|v\|^2_{L_2(\Omega)}}.$$

Очевидно, что речь идет о хорошо изученной задаче о нахождении наименьшего собственного числа положительно-определенного функционала при условии, что пространство, на котором оно разыскивается и норма которого наводится самим функционалом, вложено вполне непрерывным оператором в $L_2(\Omega)$. Поэтому мы можем привести окончательный результат.

Предварительно, однако, заметим следующее. Допустим, что (см. (21))

$$\min_{v \in W^1_{2P}(\Omega)} \frac{M_\tau(v, v)}{\|v\|^2} = l(\tau) > 1$$

достигается на функции v_τ. Тогда очевидно, что

$$\min_{v \in W^1_{2P}(\Omega)} \frac{L_\tau(v, v)}{\|v\|^2} = \min_{v \in W^1_{2P}(\Omega)} \left\{ \frac{M_\tau(v, v)}{\|v\|^2} - [1 + C_2(\tau_1)] \right\} =$$

$$= l(\tau) - (1 + C_2) = \lambda(\tau).$$

и этот минимум достигается на той же функции v_τ.

Введем еще следующее обозначение

$$L_\tau(v, u) = \int_{(\Omega)} (\nu' v_{ll} u_{ll} + v_{ik} u_{ik} - \tau S_{\alpha k} v_{i,\alpha} v_{i,k})\, d\Omega \tag{23}$$

и сформулируем следующий результат.

Лемма 3. *Для каждого числа* $\tau: 0 < \tau < \frac{1}{4}$, *существует функция* $v_\tau \in W^1_{2P}(\Omega)$, $\|v_\tau\| = 1$ *и вещественное число* $\lambda(\tau)$, *такие, что для всякой функции* $u \in W^1_{2P}(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$L_\tau(v_\tau, u) = \lambda(\tau)(v_\tau, u). \tag{24}$$

Эта функция v_τ обращает в минимум функционал

$$\frac{L_\tau(v, v)}{\|v\|^2} \geqslant \lambda(\tau) \tag{24'}$$

рассматриваемый на функциях $v \in W^1_{2P}(\Omega)$ и очевидно, что

$$L_\tau(v_\tau, v_\tau) = \lambda(\tau)\|v_\tau\|^2. \tag{24''}$$

Относительно числа $\lambda(\tau)$ легко заметить, что $\lambda(0) > 0$ и что оно непрерывно по τ на любом интервале $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 < \frac{1}{4}$. Но весьма важно следующее утверждение.

Лемма 4. $\lambda(\tau_0) = 0$.

Доказательство. Согласно неравенству (18)

$$\sup_{v \in W^1_{2P}(\Omega)} \frac{S(v, v)}{[v]^2_\nu} = \frac{1}{\tau_0} \leqslant \frac{1}{p_0}.$$

Поэтому существует максимизирующая последовательность

$$\{v_n\} \subset W^1_{2P}(\Omega),$$

т. е. такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S(v_n, v_n)}{[v_n]^2_\nu} = \frac{1}{\tau_0}. \tag{25}$$

Допустим, что $\lambda(\tau_0) \neq 0$. Но согласно (24″) и тому обстоятельству, что $\frac{1}{\tau_0} = \sup \frac{S(v, v)}{[v]_\nu^2}$, $(v_{\tau_0} \equiv v_0)$ находим, что

$$\lambda(\tau_0) = \frac{L_{\tau_0}(v_0, v_0)}{\|v_0\|^2} = \frac{[v_0]_\nu^2 - \tau_0 S(v_0, v_0)}{\|v_0\|^2} =$$

$$= \frac{[v_0]_\nu^2 \tau_0}{\|v_0\|^2} \left\{ \frac{1}{\tau_0} - \frac{S(v_0, v_0)}{[v_0]_\nu^2} \right\} \geqslant 0.$$

Поэтому $\lambda(\tau_0) > 0$. Так как, согласно (24′),

$$\frac{[v_n]_\nu^2 - \tau_0 S(v_n, v_n)}{\|v_n\|^2} = \frac{L_{\tau_0}(v_n, v_n)}{\|v_n\|^2} \geqslant \lambda(\tau_0),$$

то из (25) следует, что $S(v_n, v_n) > 0$ для всех n, начиная с некоторого !)

$$\lambda(\tau_0) \frac{\|v_n\|^2}{S(v_n, v_n)} \leqslant \frac{[v_n]_\nu^2}{S'(v_n, v_n)} - \tau_0 \to 0/n \to \infty$$

Но это означало бы $(\lambda(\tau_0) > 0!)$, что

$$\frac{\|v_n\|^2}{S(v_n, v_n)} \to 0.$$

Пусть теперь $\tau : \tau_0 < \tau < \frac{1}{4}$ — некоторое число. Имеем (см. (24′))

$$\tau_0 - \tau = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{[v_n]_\nu^2}{S(v_n, v_n)} - \tau \right\} = \lim_{n \to \infty} \frac{[v_n]_\nu^2 - \tau S(v_n, v_n)}{S(v_n, v_n)} \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi(\tau) \|v_n\|^2}{S(v_n, v_n)} = 0,$$

что противоречит условию.

Теперь можно утверждать следующее

Лемма 5. *Существует функция $v_0 \equiv v_{\tau_0} \in W_{2P}^1(\Omega)$ и такая, что $v_0 \|_{L_2(\Omega)} = 1$ и*

$$L_{\tau_0}(v_0, u) = 0 \tag{26}$$

для всех $u \in W_{2P}^1(\Omega)$.

Эта функция обращает в максимум, равный $\frac{1}{\tau_0}$, функционал $F(v)$, рассматриваемый на пространстве функций $W_{2P}^1(\Omega)$ или, что то же, удовлетворяет соотношению

$$L_{\tau_0}(v_0, v_0) = [v_0]_\nu^2 - \tau_0 S(v_0, v_0) = 0. \tag{27}$$

По поводу соотношения (26) сделаем одно, важное для дальнейшего, замечание.

Пусть $v \in W_{2P}^1(\Omega)$ и $u \in W_{2P}^1(\Omega)$ — две произвольные функции. Согласно лемме 1, последнюю можно представить в виде

$$u_i = u_i' + \omega_{ik} x_k + c_i,$$

где

$$u_i' \in W^1_{2P}(\Omega).$$

Пусть, далее, τ — произвольное число.

Имеем (см. (23))

$$L_\tau(v, u) = \int_{(\Omega)} (\nu' v_{il} u_{il}' + v_{ik} u_{i,k}' - \tau S_{\alpha k} v_{i,k} u_{i,k}')\, d\Omega -$$

$$- \tau \int_{(\Omega)} S_{\alpha k} v_{i,\alpha} \omega_{ik} d\Omega = L_\tau(v, u') - \tau \frac{\omega_{ik}}{2} \int_{(\Omega)} (S_{\alpha k} v_{i,\alpha} -$$

$$- S_{\alpha i} v_{k,\alpha})\, d\Omega = L_\tau(v, u'),$$

так как $v \in W^1_{2P}(\Omega)$.

Поэтому соотношение (26) справедливо на более широком множестве функций u, а именно для всех $u \in W^1_2(\Omega)$. На этом доказательство утверждения «*а*» теоремы заканчивается.

. . .

2. Доказательство утверждения «б».

Для этой цели мы воспользуемся приемом, принадлежащим Л. Ниренбергу [6].

Если ограничиться случаем минимальной гладкости поверхности $\partial\Omega$, при которой можно уже провести это доказательство — $l = 2$, то доказательство будет совсем простым. Мы так и поступим.

Сперва докажем следующее

Лемма 6. *Пусть Ω' и Ω'' две области $\overline{\Omega}' \subset \Omega''$, целиком лежащие внутри $\Omega : \overline{\Omega}'' \subset \Omega$, а во всем остальном произвольные.*

Тогда функция $v_0 \in W^2_2(\Omega')$, и в каждой точке $x \in \Omega'$ она удовлетворяет системе дифференциальных уравнений (8).

Доказательство. Введем скалярную функцию $\zeta(x) \in C^\infty(\Omega)$, равную нулю в области $\Omega - \Omega''$ и единице в Ω'. Чтобы доказать, что $v_0 \in W^2_2(\Omega')$, достаточно, очевидно, доказать, что $\zeta v_0 \in W^2_2(\Omega)$.

Исходным в последнем доказательстве будет соотношение (26)

$$L_{\tau_0}(v_0, u) = 0,$$

справедливое, как мы выяснили выше, для всех $u \in W^1_2(\Omega)$.

Легко проверяется, что (см. 23))

$$L_\tau(v, u) = \int_{(\Omega)} \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (a^{ik}_{\alpha\beta} u_k)\, d\Omega = D_\alpha v,\ D_\beta \text{ и } u_{\alpha\beta}) =$$

$$= \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta} (a^{ik}_{\alpha\beta} u_k)\, d\Omega = (D_\alpha v,\ D_\beta u_{\alpha\beta})_\tau; \tag{28}$$

здесь вектор $u_{\alpha\beta}$ дается формулой: $u^i_{\alpha\beta} = a^{ik}_{\alpha\beta} u_k$, где

$$a^{ik}_{\alpha\beta} = \nu' \delta_{i\alpha} \delta_{k\beta} + \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{k\alpha}) - \tau S_{\alpha\beta}\delta_{ik} - i,\ k\text{-ый}$$

элемент $n \times n$-матрицы $a_{\alpha\beta}$.

Это равенство (28) справедливо только потому, что

$$D_\beta a^{ik}_{\alpha\beta} = -\tau \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} \delta_{ik} = 0,$$

так как $S_{\alpha\beta}$ удовлетворяет условиям равновесия (10).

Заметим еще, что введенный вектор

$$u_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} u \in W^1_2(\Omega) \tag{29}$$

вместе с вектором $u \in W^1_2(\Omega)$ и тензором $S_{\alpha\beta} \in W^1_2$ (см. ограничение II).

Пусть теперь расстояние от введенной выше области Ω'' до границы $\partial\Omega$ области Ω равно $h_0 > 0$. Введем еще область $G \supset \overline{\Omega}$, расстояние которой до Ω также равно h_0. Пусть, далее, u — некоторая функция, а h, $|h| \leqslant \frac{h_0}{2}$ — любое число. Образуем разность

$$u^h = \frac{1}{h}\{u(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - u(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_1)\},$$

где $i \leqslant n$ — произвольный индекс.

Очевидно, что такая разность вполне определена для функции ζv_0 на всей области Ω и что $(\zeta v_0)^h$ продолжает принадлежность пространству $W^1_2(\Omega)$ и обращается в нуль на $\partial\Omega$ (пространство функций, принадлежащих $W^1_2(\Omega)$ и обращающихся в нуль на границе области, обычно обозначают через $W^1_2(\Omega)$).

Более того, введенная разность вполне определена на ζv_0 и для любой функции из $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, если только условиться всякую такую функцию продолжить нулем в область G. Последняя, однако, будет принадлежать, вообще говоря, пространству $\overset{\circ}{W}{}^1_2(G)$.

Выясняется (см., например, [7], стр. 352), что, если $v \in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)$, то при любом h, $|h| \leqslant \frac{h_0}{2}$:

$$v^h \in W^1_2(\Omega); \ \|v^h\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|v\|_{W'_2(\Omega)}; \ \ \|v^h - D_i v\|_{L_2(\Omega)} \to 0/h \to 0. \tag{30}$$

Если, к этому, множество $\{v^h\}$ равномерно по h ограничено, т. е., если

$$\|v^h\|_{W^1_2(\Omega)} \leqslant K, \tag{31}$$

то постоянная $K > 0$ — не зависит от h, то $D_i v_0 \in W^1_2(\Omega)$.

Теперь очевидно, что для того, чтобы доказать, что $\zeta v_0 \in W^2_2(\Omega)$, достаточно доказать справедливость неравенства (31) для этой функции.

С этой целью докажем сперва, что для всех $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ (см. (28))

$$|L_{\tau_0}((\zeta v_0)^h, u)| = |(D_\alpha(\zeta v_0)^h, D_\beta u_{\alpha\beta})_{\tau_0}| \leqslant K\|u\|_{W^1_2(\Omega)}. \tag{32}$$

Действительно,

$$(D_\alpha(\zeta v_0)^h,\ D_\beta u_{\alpha\beta})_{\tau_0} = ((v_0 D_\alpha\zeta)^h,\ D_\beta u_{\alpha\beta})_{\tau_0} + (D_\alpha v_0,\ \zeta D_\beta u_{\alpha\beta}^{-h})_{\tau_0} =$$

$$= ((v_0 D_\alpha\zeta)^h,\ D_\beta u_{\alpha\beta})_{\tau_0} + (D_\alpha v_0,\ D_\beta \zeta u_{\alpha\beta}^{-h})_{\tau_0} - (D_\alpha v_0,\ u_{\alpha\beta}^{-h} D_\beta\zeta)_{\tau_0} =$$

$$= ((v_0 D_\alpha\zeta)^h,\ D_\beta u_{\alpha\beta})_{\tau_0} - (D_\alpha v_0,\ u_{\alpha\beta}^{-h} D_\beta\zeta)_{\tau_0}, \tag{33}$$

так как функция $\zeta u_{\alpha\beta}^{-h} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и, согласно (28) и (26), с замечанием к нему

$$(D_\alpha v_0,\ D_\beta(\zeta u_{\alpha\beta}^{-h}))_{\tau_0} = L_{\tau_0}(v_0,\ \zeta u_{\alpha\beta}^{-h}) = 0.$$

Если учесть теперь неравенство (30), то из (33) легко найдем неравенство (32). Из неравенств (32) и (16), примененных к функции $(\zeta v_0)^h \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, следует, что при $\tau_0 < \frac{1}{4}$

$$K\,\|(\zeta v_0)^h\|_{W_2^1(\Omega)} \geqslant |L_{\tau_0}((\zeta v_0)^h,\ (\zeta v_0)^h)| =$$

$$= |[(\zeta v_0)^h]_\tau^2 - \tau_0 S((\zeta v_0)^h,\ (\zeta v_0)^h)| \geqslant \left(\frac{1}{2} - \tau_0\right) |(\zeta v_0)^h|_1^2 \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\,|(\zeta v_0)^h|_1^2 \geqslant C\,\|(\zeta v_0)^h\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \tag{34}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая только от Ω.

Последнее неравенство вытекает из известного неравенства Фридрихса для функции $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leqslant C\,|u|_1^2.$$

Из (34), если учесть то обстоятельство, что ни C, ни K от h не зависят, и вытекает неравенство (31) для функции ζv_0 и этим доказано, что $v_0 \in W_2^2(\Omega')$.

Пусть теперь $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — произвольная функция. Интегрируя левую часть (26) по частям, мы найдем, что v_0 в каждой точке внутри Ω удовлетворяет уравнению (8). На этом заканчивается доказательство леммы 6. Остается доказать вторую часть утверждения «б».

Лемма 7. *Пусть класс поверхности $\partial\Omega$ — $l \geqslant 2$. Тогда $v_0 \in W_2^2(\Omega)$ и на границе удовлетворяет условиям*

$$(Bv_0)_i|_{\partial\Omega} = (\nu' v_{0ll}\delta_{ik} + v_{0ik} - \tau_0 S_{\alpha k} v_{0i,\alpha}) N_k|_{\partial\Omega} = 0.$$

Очевидно, что, если доказать следующее: для каждой точки $M \in \partial\Omega$ существует достаточно малая n-окрестность $\Theta(M)$, такая, что $v_0 \in W_2^2(\Theta \cap \overline{\Omega})$, то отсюда (и из леммы 6) будет следовать, что $v_0 \in W_2^2(\Omega)$.

Чтобы упростить доказательство, мы предположим сперва, что кусок поверхности $\partial\Omega$ вблизи точки M — плоский, т. е., что полушар Σ_δ достаточно малого радиуса δ с центром в точке M принадлежит области Ω и своей диаметральной границей целиком лежит на поверхности $\partial\Omega$.

Пусть теперь начало координат $-x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1', x_n) = 0$ совмещено с точкой M, плоскость $x_n = 0$ — с куском поверхности $\partial\Omega \cap \Sigma_\delta$, а ось x_n направлена внутрь полушара Σ_δ.

Введем, наконец, функцию $\zeta(x) \in C^\infty(\Sigma_\delta)$, такую, что в полушаре $\Sigma_{\frac{\delta}{2}} : x'^2 + x_n^2 \leqslant \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$, $x_n \geqslant 0$, $-\zeta \equiv 1$, а в области:

$$\left(\frac{3}{4}\delta\right)^2 \leqslant x'^2 + x_n^2 \leqslant \delta^2,\ x_n \geqslant 0,\ -\zeta \equiv 0.$$

Очевидно, что теперь достаточно доказать, что $v_0 \in W_2^2\left(\Sigma_{\frac{\delta}{2}}\right)$.

Доказательство леммы 7 распадается на две части. Сперва доказывается, что производная функция ζv_0, взятая в любом направлении, параллельном плоскости $x_n = 0 - D_{x'}(\zeta v_0)$, принадлежит $W_2^2\left(\Sigma_{\frac{\delta}{2}}\right)$.

Но почти очевидно, что для этой цели достаточно повторить рассуждения, которые были проведены для доказательства дифференцируемости функции v_0 внутри Ω. Поэтому мы будем считать эту часть утверждения доказанной.

Это означает, что любая производная второго порядка от функции v_0, за возможным исключением только $\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_n^2}$, принадлежит $L_2\left(\Sigma_{\frac{\delta}{2}}\right)$. Нам остается доказать, что также

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_n^2} \in L_2\left(\Sigma_{\frac{\delta}{2}}\right).$$

Для этой цели заметим, что систему уравнений (8), которой удовлетворяет V_0, можно записать так:

$$a_{nn}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_n^2} = L_1 v_0, \tag{35}$$

где a_{nn} — $n \times n$ — диагональная матрица с элементами

$$a_{nn}^{ik} = \left(\frac{1}{2} - \tau_0 S_{nn}\right)\delta_{ik},\ i + k < 2n;\ a_{nn}^{nn} = 1 + \nu' - \tau_0 S_{nn},$$

а оператор L_1 не содержит второй производной по x_n.

Так как $\tau_0 < \frac{1}{4}$ и $S_{nn} \leqslant 1$, то все диагональные элементы матрицы — положительные и непрерывные в $\overline{\Omega}$ функции (см. ограничение II). Обратная матрица обладает теми же свойствами.

По доказанному, правая часть (35) принадлежит $L_2\left(\sum\frac{\delta}{2}\right)$. Она сохранит это свойство, если ее умножить на матрицу a_{nn}, а это означает, что $\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_n^2} \in L_2\left(\sum\frac{\delta}{2}\right)$, что и требовалось.

На этом доказательство дифференцируемости функции в окрестности точки M, принадлежащей плоской части границы, заканчивается.

В общем случае необходимо сперва элемент границы, содержащий точку M, уплостить. Определение класса C^l поверхности $\partial\Omega$ гарантирует наличие l раз непрерывно дифференцируемого преобразования, которое осуществляет такое уплощение.

В результате такого преобразования коэффициенты формы L_{τ_0} и левой части уравнений (35) становятся функциями из $C^{l-1}(\sum_\delta)$, а коэффициенты правой части (35) — $C^{l-2}(\sum_\delta)$. Если $l \geqslant 2$, то существенных изменений не происходит, а лишь несколько усложняется техника доказательства и мы не будем на этом останавливаться. Мы будем считать, что гладкость V_0 в окрестности точки M вплоть до границы доказана и, следовательно, доказано, что

$$V_0 = \in W_2^2(\Omega).$$

Но тогда, интегрированием по частям, мы получим из (26), что для всякой функции

$$0 = L_{\tau_0}(v_0,\ u) = \int\limits_{(\Omega)} (\nu' v_{0ll}\delta_{ik} + v_{0ik} - \tau_0 S_{\alpha k} v_{0i,\,\alpha})\, u_{i,\,k} d\Omega =$$

$$= \int\limits_{(\partial\Omega)} (\nu' v_{0ll}\delta_{ik} + v_{0ik} - \tau_0 S_{\alpha k} v_{0i,\,\alpha})\, N_k u_i ds - \int\limits_{\Omega} (L_{\tau_0}(v_0,\ u)\, d\Omega =$$

$$= \int\limits_{(\partial\Omega)} (Bv_0)_i u_i ds, \tag{36}$$

так как $L_{\tau_0} v_0 = 0$. Но $Bv_0 |_{\partial\Omega}$ — это граничное значение функции $Bv_0 \in W_2^1(\Omega)$. Ввиду произвольности функции $u \in W_2^1(\Omega)$ приходим к заключению, что

$$Bv_0 |_{\partial\Omega} = 0,$$

чем и заканчивается доказательство леммы 7. Вместе с этим мы также закончили доказательство теоремы при $l = 2$.

Нам остается добавить следующее. Если $l > 2$, то мы можем повторить рассуждения для функции $D_j v_0$. Мы найдем, что $D_{ij} v_0 \in W_2^1(\Omega)$, т. е., что $v_0 \in W_2^1(\Omega)$. Так можно будет продолжать $l-2$ раза и прийти к заключению, что $V_0 \in W_2^1(\overline{\Omega})$.

Дальше, однако, двигаться нельзя по следующим причинам. По условию теоремы $S_{\alpha k} \in C^{l-1}(\Omega)$. Если они более гладкие, то порядок дифференцирования V_0 внутри Ω можно поднять. Но для дифференцирования вплоть до границы это не поможет.

Действительно, при уплощении элемента поверхности, класс которой, по условию, l, измененные коэффициенты дифференциальных уравнений (8) нельзя будет дифференцировать более, чем l—2 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Green A. E., Lerna W. Theoretical Elasticity. Oxford, 1954. 454 г.
2. Pearson C. E. Feneral theory of elastic stability. — «Quart. Appl. Math.» 1956, № 14, p. 133—144.
3. Hill R. Stability of rigid-plastic solids. — «I. Mech. and Phys. solids». 1957, № 1, p. 1—8.
4. Михлин С. Г. Проблема минимум квадратичного функционала. М., Гос.изд-во техн.-теорет. лит., 1952. 216 с.
5. Альперин И. Г. Некоторые неравенства, имеющие место в теории упругости. «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1972, вып. 37, с. 8—10.
6. Nirenberg L. Remarcs of strongly elliptic partiae differential eguations. — «Comm. Pure Appl. Math». 8. 1955, p. 648—674.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. М., «Мир», 1968. 427 с.
8. Альперин И. Г. Об устойчивости равновесия упругой среды. I. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1976, вып. 41, с. 44—53.

Поступила 10. VI 1973 г.

У К 517.946

И. И. АНТЫПКО, канд. физ.-мат. наук

О ВЫРОЖДЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ В СЛОЕ

Ряд работ последних лет, [1—3], посвящен краевым задачам в бесконечном слое для линейных уравнений в частных производных. В этих работах, в частности, изучался вопрос о единственности решения соответствующих задач. Хорошо известно [4], что классы единственности решения задачи Коши

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = 0 \\ u_t^1(x,0) = 0, \end{cases} \qquad x \in R^m$$

определяются приведенным порядком P_0 уравнения (1). Здесь $P(s)$ и $Q(s)$ — полиномы с постоянными коэффициентами относительно $s \in C^m$. Рассмотрим для уравнения (1) краевую задачу в слое $R^m \times \times [0, T]$ с краевыми условиями

$$A_1 U_0(x) + A_2 U_T(x) = 0 \tag{2}$$

где $U_0(x) = \{u(x,0), u_t^1(x,0)\}$, $U_T(x) = \{u(x,T)\}, u_t^1(x,T)\}$, A_1 и A_2 — квадратные матрицы, ранг матрицы $A = (A_1 A_2)$ равен 2. Как следует из работ [1, 2], классы единственности решения задачи (1)—(2) характеризуются не только приведенным порядком уравнения (1), но и зависит от расположения по отношению к вещественному пространству многообразия нулей целой функции

$$\Delta(s) = \det\begin{pmatrix} I & -\exp TB(-is) \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где I — единичная матрица,

$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(s) & -P(s) \end{pmatrix}.$$

При этом, если $\Delta(s)$ не имеет нулей (такая задача называется краевой задачей бесконечного типа), то задача (1)—(2) имеет только тривиальное решение в классах функций, растущих при $\|x\| \to \infty$ экспоненциально с порядком, большим единицы. Если $\Delta(s)$ имеет нули, то задача (1)—(2) имеет нетривиальное решение, растущее при $\|x\| \to \infty$ не быстрее, чем $\exp\{a\|x\|\}$ при некотором $a > 0$. В частности, если $\Delta(s)$ имеет вещественные нули, то единственность решения краевой задачи (1)—(2) нарушается в классе ограниченных функций. Когда $\Delta(s) \equiv 0$, задача называется в ы р о ж д е н н о й; в этом случае имеются экспоненциально убывающие решения задачи (1)—(2). В качестве примера задачи с $\Delta(s) \equiv 0$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} \tag{4}$$

при краевых условиях

$$\begin{cases} u(x, 0) + u(x, T) = 0 \\ u_t'(x, 0) - u_t'(x, T) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Нетрудно проверить, что решением задачи (4)—(5) является функция

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi t}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x-\xi}{4t}\right\} \cdot u_0(\xi)\, d\xi - \frac{1}{2\pi\sqrt{T-t}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4(T-t)}\right\} \times$$
$$\times u_0(\xi)\, d\xi,$$

где $u_0(x)$ — произвольная функция, для которой имеют смысл указанные интегралы. Если $u_0(x)$ удовлетворяет оценке

$$|u_0(x)| \leqslant \exp\{-Cx^2\},$$

$C > 0$, то решение задачи (4)—(5) убывает при всех $t \in (0, T)$, как $\exp\{-C_1 x^2)$ при некотором $C_1 > 0$.

Настоящая работа посвящена получению (в терминах краевых условий) необходимых и достаточных условий вырожденности краевой задачи (1)—(2). Эти условия, как и в случае задачи бесконечного типа (см. работу [5], в которой получены необходимые и достаточные условия того, чтобы задача (1)—(2) имела бесконечный тип) зависят от соотношений между числами $p = \deg P(s)$, $q = \deg Q(s)$ и r, где $2r = \deg D^2(s)$, $D^2(s) \equiv P^2(s) - 4Q(s)$, а в случае $p = q$ и от того, является ли функция $D(s)$ полиномом или нет.

Теорема 1. *Если имеет место один из случаев:* $1°\ 0 < r$; $2°\ 0 \leqslant q < p$, но $Q(s) \not\equiv 0$; $3°\ p = g$ и $D(s)$ — *не полином*; $4°\ p = r$ и $p < q \leqslant 2p$; $5°\ 0 < r < p$; $6°\ r = 0$ и $D(s) \equiv \mathrm{const} \neq \frac{2k\pi i}{T}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$; — *то краевая задача* (1)—(2) *не может быть вырожденной.*

Теорема 1 не охватывает случаи: $7°\ P(s) = \mathrm{const} = P$; $8°\ Q(s) \equiv 0$; $9°\ p = q$ и $D(s)$ — полином; $10°\ D(s) \equiv \frac{2k\pi i}{T}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Теорема 2. *Если имеет место один из случаев* 7°—10°, *то краевая задача* (1)—(2) *является вырожденной тогда и только тогда, когда краевые условия* (2) *могут быть приведены к виду*:*

а) *в случае* 7°

$$\begin{cases} \pm \exp\left\{-\frac{TP}{2}\right\} \cdot u(x, 0) + u(x, T) = 0 \\ Pu(x, 0) + u_t'(x, 0) \mp \exp\left\{\frac{TP}{2}\right\} \cdot u_t^1(x, T) = 0; \end{cases}$$

в) *в случае* 8°

$$\begin{cases} a[u(x, 0) - u(x, T)] + bu_t'(x, 0) = 0 \\ c[u(x, 0) - u(x, T)] + du_t'(x, T) = 0, \end{cases}$$

где a, b, c, d — *произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям* $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$, $b^2 + d^2 \neq 0$;

с) *в случае* 9°

$$\begin{cases} w(x) + \frac{b}{a} v(x, T) = 0 \\ \hat{w}(x) + cv(x, T) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{b}{a} v(x, 0) - \exp\left\{-\frac{T}{a}\right\} w(x) = 0 \\ cv(x, 0) - \exp\left\{-\frac{T}{a}\right\} \hat{w}(x) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} v(x, 0) + b \exp\left\{-\frac{T}{a}\right\} w(x) = 0 \\ cw(x) + v(x, T) = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} v(x, 0) + b \exp\left\{-\frac{T}{a}\right\} \hat{w}(x) = 0 \\ c\hat{w}(x) + v(x, T) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} v(x, 0) + b \exp\left\{-\frac{T}{a}\right\} z(x) = 0 \\ cz(x) + v(x, T) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} v(x, 0) + b \exp\left\{-\frac{T}{a}\right\} \hat{z}(x) = 0 \\ c\hat{z}(x) + v(x, T) = 0, \end{cases}$$

---

* Мы говорим, что краевые условия (2) с матрицей A могут быть приведены к такому же виду с матрицей $B = (B_1 B_2)$, если существует невырожденная квадратная матрица C такая, что $B = CA$ или $B = C(A_2 A_1)$.

где

$$v(x, t) = u(x, t) + au_t'(x, t), \; w(x) = u(x, 0) - \exp\left\{\frac{T}{a}\right\} \cdot u(x, T), \; \widehat{w}(x) =$$

$$= u_t'(x, 0) - \exp\left\{\frac{T}{a}\right\} u_t'(x, T), \; z(x) = \exp\left\{\frac{T}{a}\right\} u(x, T) + au_t'(x, 0),$$

$$\widehat{z}(x) = u(x, 0) + a\exp\left\{\frac{T}{a}\right\} u_t'(x, T),$$

b и c — произвольные постоянные, $a \neq 0$ и такое, что

$$P(s) \equiv aQ(s) + \frac{1}{a};$$

д) *в случае* 10°

$$\begin{cases} au(x, 0) + bu_t'(x, 0) = 0 \\ au(x, T) + bu_t'(x, T) = 0. \end{cases}$$

где a *и* b *— произвольные постоянные, удовлетворяющие условию* $a^2 + b^2 \neq 0$.

Доказательство теорем 1 и 2 в случае $m = 1$ основано на исследовании поведения при $s \to \infty$ некоторых аналитических и алгебраических функций, с помощью которых определяется функция $\Delta(s)$. Для перехода к случаю $m > 1$ доказывается (так же, как и в [5] возможность выбора $s^0 \in C^m$ так, чтобы полиномы $P_1(z) = P(s^0 z)$, $Q_1(z) = Q(s^0 z)$ и $D_1^2(z) = D^2(s^0 z)$, $z \in C^1$ имели соответственно p, g, $2r$, и $D_1(z)$ был или не был полином одновременно с $D(s)$; этим рассмотрения сводятся к $m = 1$.

Приведем доказательство для одного из случаев теорем 1 и 2, например, для случая 7° теоремы 2. В силу (3) и вырожденности задачи имеем

$$M_1(s) \cdot D(s) \equiv -\frac{1}{2}\exp\{-TD(s)\} \cdot M_2(s) \cdot D(s) - \exp\left\{-\frac{TD(s)}{2}\right\} \times$$

$$\times \left[A^{12}\exp\left\{\frac{TP}{2}\right\} + A^{34}\exp\left\{-\frac{TP}{2}\right\}\right] \cdot D(s), \tag{6}$$

где

$$M_k(s) = A^{14} - A^{23} + (-1)^{k+1}\frac{2A^{13} + 2A^{24}Q(s) - (A^{14} + A^{23})P}{D(s)},$$

$k = 1, 2$; A^{jk}, $1 \leqslant j < k \leqslant 4$, — миноры матрицы A.

Поскольку $r > 0$, а $D(s) = \gamma s^r(1 + o(1))$, при $|s| \to \infty$, всегда можно выбрать направление $\widehat{s} = \rho e^{i\varphi_0}$, такое, что при $\rho \to \infty$ $D(\widehat{s}) \to +\infty$ (рассматривается та ветвь $D(s)$, на которой $\operatorname{Re} D(s) \geqslant 0$ для всех s). Тогда, как следует из (6),

$$|M_1(\widehat{s}) \cdot D(\widehat{s})| \leqslant C_1 \exp\{-C_2\rho^r\},$$

$C_1 > 0$, $C_2 > 0$, откуда, в силу вида $M_1(\widehat{s}) \cdot D(\widehat{s})$, следует, что $M_1(\widehat{s}) \cdot D(\widehat{s}) \equiv 0$, и в силу аналитичности функция $M_1(s) \cdot D(s) \equiv 0$.

Сравнивая степени s, получаем, что

$$A^{24} = 0;\ A^{14} = A^{23};\ A^{13} = A^{14}P. \tag{7}$$

Учитывая (6) и (7), для миноров A^{12} и A^{34} получаем соотношение

$$A^{12} \exp\left\{\frac{TP}{2}\right\} + A^{34} \exp\left\{-\frac{TP}{2}\right\} = 0. \tag{7'}$$

Таким образом, необходимые условия вырожденности краевой задачи (1)—(2) в случае 7° описываются соотношениями (7) и (7′).

Легко проверить, что выполнения (7) и (7′) достаточно для вырожденности краевой задачи (1)—(2) в случае 7°.

Для получения вида краевых условий, указанного в теореме 2, нужно рассмотреть всевозможные положения базисного минора матрицы A.

Доказательства для случаев 1°—6° теоремы 1 и 8°—10° теоремы 2 проводятся аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений. — «Мат. сб.», 1969, т. 79 (121), с. 293—304.
2. Антыпко И. И. О краевой задаче в бесконечном слое для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1971, вып. 36, с. 62—72.
3. Віленць І. Л. Класи єдиності розв'язку загальної крайової задачі в шарі для систем лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних. — «Доп. АН УРСР, сер. А», 1974, т. 3, с. 195—197.
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. (Обобщенные функции. вып. 3) М., Физматгиз, 1958. 274 с.
5. Антыпко И. И. О краевой задаче бесконечного типа. — «Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика», 1963, вып. 38, с. 44—52.

Поступила 15. VI 1975 г.

УДК 517.91/943

О. М. ДОЛЬБЕРГ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Работа посвящена построению матрицы Грина обыкновенного обобщенного дифференциального оператора и исследованию некоторых свойств этой матрицы.

Пусть $u(x)$ — произвольная функция, заданная на интервале $[0, 1]$, непрерывная со своими $n-1$ первыми производными, интегрируемой квадратом n-й производной. Каждой функции этого класса поставим в соответствие n-мерный вектор $U(x) = (u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x))$.

Если $a_0(x) > 0$ — кусочно-непрерывная функция на интервале

$[0, 1]$, функции $\{a_{0i}\}_{i=1}^{n}$ принадлежат $L_2[0, 1]$, а функции $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ абсолютно интегрируемы и таковы, что квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$ положительна при каждом $x \in (0, 1]$, то каждым двум вектор-функциям $U(x)$ и $V(x)$ поставим в соответствие число

$$L(U, V) = \int\limits_0^1 \left\{a_0\left(u^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}u^{(n-i)}\right)\left(v^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}v^{(n-i)}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u^{(n-i)}v^{(n-j)}\right\} dx. \tag{1}$$

$L(U, V)$ обладает всеми свойствами скалярного произведения на линейном многообразии векторов $\{V(x)\}$ и поэтому можно ввести в рассмотрение пространство Гильберта H со скалярным произведением $L(U, V)$. Очевидно, это пространство будет полным. Будем разыскивать вектор $W \in H$, удовлетворяющий уравнению

$$L(W, U) = \int\limits_0^1 U(x)\, dQ(x) \tag{2}$$

при всех $U(x) \in H$, где $Q(x) = (Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x))$ — вектор, проекции которого — функции ограниченной вариации.

Для этого выделим из пространства H подпространство H_0 векторов равных нулю в точке нуль и построим пространство $\overline{H}_0$ ортогональное ему. Тогда, если $U(x) \in H$, то $U(x) = U_0(x) + \overline{U}_0(x)$, где $U_0(x) \in H_0$ и $\overline{U}_0(x) \in \overline{H}_0$. Покажем, что пространство $\overline{H}_0$ является линейной оболочкой n вектор-функций.

В самом деле, пусть $\{U_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — векторы из H такие, что $u_i^{(j)}(0) = \delta_{ij+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ и пусть $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — проекции этих векторов на подпространство $\overline{H}_0$. Очевидно, векторы $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ линейно независимы. Далее, пусть $\psi_{n+1}(x)$ — некоторый вектор из $\overline{H}_0$. Тогда построим вектор

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\psi_i(x) + \psi_{n+1}(x)$$

Можно подобрать так постоянные $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, чтобы $\psi(0) = 0$, а это значит, что вектор $\psi(x)$ одновременно принадлежит пространствам H_0 и $\overline{H}_0$, поэтому он равен нулю. Отсюда следует, что вектор $\psi_{n+1}(x)$ является линейной комбинацией векторов $\{\psi_i\}_{i=1}^{n}$. Итак, любой вектор из пространства $\overline{H}_0$ является линейной комбинацией n линейно-независимых векторов.

Решение уравнения (2) в пространстве H, как легко видеть, есть сумма решений этого уравнения на подпространствах H_0 и $\overline{H}_0$. Можно непосредственно проверить, что единственным решением уравнения (2) на подпространстве $\overline{H}_0$ является вектор-функция

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n}\left[\int\limits_0^1 \overline{\psi}_i(x)\, dQ(x)\right]\overline{\psi}_i(x),$$

где $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ — векторы пространства H_0, ортонормированные в том смысле, что $L(\overline{\psi_i}, \overline{\psi_j}) = \delta_{ij}$.

Докажем теперь существование решения уравнения (2) на подпространстве H_0.

Лемма 1. Решение уравнения (2) существует и единственно.

Доказательство. В самом деле, можно показать, что решение дифференциального уравнения

$$lu(x) = u^{(n)}(x) + a_{01}(x)\, u^{n-1}(x) + \ldots + a_{0n}(x)\, u(x) = q(x)$$

при условиях $u(0) = u'(0) = \ldots = u^{(n-1)}(0) = 0$ и $q(x) \in L_2[0,1]$ существует и представимо в виде

$$u(x) = \int_0^x \Gamma(x, s)\, q(s)\, ds,$$

где $\Gamma(x, s)$ — непрерывная по обеим переменным функция с непрерывными по обеим переменным производными $\frac{\partial^i \Gamma(x, s)}{\partial x^i}$* $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Тогда

$$u^i(x) = \int_0^x \frac{\partial^i \Gamma(x, s)}{\partial x^i}\, q(s)\, ds = \int_0^x \frac{\partial^i \Gamma(x, s)}{\partial x^i}\, lu(s)\, ds.$$

Поэтому существует такая константа C, что

$$|u^{(i)}(x)| \leqslant C \left[\int_0^1 a_0 (lu)^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant C \| U \|_н.$$

Отсюда следует, что для любого вектора $U(x) \in H_0$.

$$\left| \int_0^1 U(x)\, dQ(x) \right| \leqslant C \| U \|_н \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} |dQ_i| \leqslant C_0 \| U \|_н.$$

Таким образом, правая часть уравнения (2) является линейным функционалом в полном гильбертовом пространстве H_0 и, следовательно, согласно теореме Рисса уравнение (2) имеет решение в пространстве H_0, а значит и в H.

Отметим, что в случае, когда коэффициенты, входящие в функционал (1), и функции $Q_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеют необходимое число производных, решением уравнения (2) является решение дифференциального уравнения $2n$-го порядка при неособенных граничных условиях. А поскольку уравнение (2) имеет единственное решение, при сделанных предложениях другого решения, кроме указанного, уравнение (2) не имеет.

Решение уравнения (2) имеет вид [2]

$$W(x) = \int_0^1 G(x, s)\, dQ(s),$$

---

* Этот результат может быть получен с помощью перехода от дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерра и простому исследованию его резольвенты.

где $G(x, s)$ — матрица с элементами $g_{ij}(x, s) = \frac{\partial^{i+j} g_{00}(x, s)}{\partial x^i \partial s^j}$, которую мы в дальнейшем будем называть матрицей Грина.

Можно показать, что матрица Грина непрерывна по обеим переменным. Приведем некоторые свойства этой матрицы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Исходя из условий, наложенных на функционал, нетрудно доказать, что:

1) матрица-ядро $G(x, s)$, положительно определенная в том смысле, что при произвольном векторе $Q(x)$ из рассматриваемого класса

$$\int_0^1\int_0^1 G(x, s)\, dQ(x)\, dQ(s) > 0;$$

2) $G(x, s)$ — замкнутая матрица-ядро, т. е. из равенства

$$\int_0^1 G(x, s)\, dQ(s) \equiv 0 \tag{3}$$

следует, что $dQ(s) \equiv 0$, $s \in [0, 1]$;

3) если E — множество всех точек, на которых $dQ(x) \neq 0$, то интеграл, входящий в равенство (3), не равен тождественно нулю на множестве E. Кроме того,

4) уравнение

$$G(x, s)\, p = 0 \tag{4}$$

при любом векторе $p \neq 0$ не имеет решения.

Доказательство будем вести от противного.

Пусть x_0 (для определенности примем $x_0 < s$) является решением уравнения (4) таким, что в интервале (x_0, s) других корней уравнение (4) не имеет. Очевидно, что из сделанного предположения вытекает существование такого корня, так как в противном случае точка s была бы точкой сгущения корней уравнения (4) и в силу непрерывности матрицы $G(x, s)$ точка $x = s$ была бы корнем уравнения, что в силу свойства 3 невозможно.

Приведем сужение пространства H, подчинив векторы этого пространства условию $U(t) = 0$, где t — произвольная фиксированная точка интервала (x_0, s). Рассмотрим задачу (2) на суженном пространстве. Как известно [2], элементы матрицы Грина $G'(x, s)$ — $g'_{ij}(x, s)$ для новой задачи связаны с элементами матрицы Грина исходной задачи равенствами

$$g'_{ij}(x, s) = \frac{1}{D(t)} \left| \begin{array}{c|c} g_{ij}(x, s) & g_{i0}(x, t) \; \ldots \; g_{in-1}(x, t) \\ \hline g_{j0}(s, t) & \\ \ldots & g_{kl}(t, t) \\ g_{jn-1}(s, t) & \end{array} \right|, \tag{4'}$$

$i, j, k, l = 0, 1, \ldots, n-1$, где $D(t) = \mathrm{Det}\, \| g_{ij}(t, t) \|_{i, j=0}^{n-1}$ ($D(t) \neq 0$ в силу свойства 3).

Можно непосредственно проверить, исходя из уравнения (2), что при любом $t \in (x_0, s)$, $G'(x_0, s) = 0$.

Отсюда следует, что

$$g_{ij}(x_0, s) = -\frac{1}{D(t)} \left| \begin{array}{c|c} 0 & g_{i0}(x_0, t) \ldots g_{in-1}(x_0, t) \\ \hline g_{j0}(s, t) & \\ \ldots\ldots & g_{kl}(t, t) \\ g_{jn-1}(s, t) & \end{array} \right|.$$

Тогда из равенства (4) вытекает:

$$\left| \begin{array}{c|c} 0 & g_{i0}(x_0, t)\, g_{i1}(x_0, t) \ldots g_{in-1}(x_0, t) \\ \hline \alpha_0 & \\ \ldots & g_{ki}(t, t) \\ \alpha_{n-1} & \end{array} \right| = 0, \qquad (5)$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1, \quad \alpha_k = \sum_{i=0}^{n-1} g_{ik}(t, s)\, p_i, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Таким образом, получена однородная линейная система уравнений относительно чисел α_k. Поскольку равенство нулю всех α_k приводит к равенству

$$G(t, s)\, p = 0,$$

что исключается, приходим к выводу, что определитель системы (5) равен нулю при любом t из интервала (x_0, s). С другой стороны, поскольку этот определитель является непрерывной функцией от t, он равен нулю и при $t = x_0$. При $t = x_0$ коэффициент при α_j в i-м уравнении системы (5) равен нулю при $j \neq i$ и равен $\pm D(x_0)$ при $i = j$. Поэтому рассматриваемый определитель системы (5) в точке x_0 равен $\pm D^n(x_0) \neq 0$. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

Перейдем к решению уравнения (2) в пространстве H_0. Разобьем пространство H_0 на два ортогональных подпространства H_t и $\overline{H}_t$ аналогично тому, как это делает М. И. Вишик в работе [1]

$$H_t = \{U_t(x) \in H_0 : U_t(x) \equiv 0, \ x \in [0, t] \subset [0, 1]\}.$$

Покажем, что каждый вектор $U(x) \in \overline{H}_t$ на интервале $[t, 1]$ является линейной комбинацией векторов $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$, принадлежащих $\overline{H}_0$. Первоначально отметим, что поскольку каждый вектор пространства $\overline{H}_0$ при $x = 0$ отличен от нуля, то вронскиан, построенный на векторах базиса при $x = 0$, тоже отличен от нуля. Далее, можно подобрать вектор P такой, что каждая вектор-функция $\Psi(x) \in \overline{H}_0$ представима в виде $\Psi(x) = G(x, 0)\, p$ при $x \in [0,1]$. Действительно, найдем вектор p из уравнения

$$\Psi(0) = G(0, 0)\, p,$$

которые в силу свойств матрицы $G(x, s)$ имеет решение $p \neq 0$.

Построим вектор $\chi(x) = \Psi(x) - G(x, 0)\, p$, который, очевидно, принадлежит H_0, но с другой стороны, он принадлежит и $\overline{H}_0$, так как оба вектора $\Psi(x)$ и $G(x, 0)p$ принадлежат $\overline{H}_0$. Следовательно $\chi(x) \equiv 0$, что и доказывает утверждение.

Каждому вектору базиса $\Psi_i(x)$ пространства $\overline{H}_0$ поставим в соответствие вектор P_i по указанному правилу. Тогда векторы $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ являются линейно независимыми, так как в противном случае существовала бы такая линейная комбинация векторов $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$, которая обращалась бы в нуль при $x=0$. Вследствие этого векторы $\{G(x, 0)p_i\}_{i=0}^{n}$ линейно независимы на интервале $[0, 1]$. Более того, в силу свойства 4 матрицы $G(x, s)$ никакая линейная комбинация этих векторов не обращается в нуль на интервале $[0, 1]$. А это значит, что никакая линейная комбинация векторов $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ не обращается в нуль ни в одной точке указанного интервала, что влечет за собой неравенство нулю вронскиана, построенного на векторах базиса, в каждой точке интервала $[0, 1]$. Из этого следует, что векторы $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ является линейно независимыми на любом подынтервале $[t, 1]$.

Остановимся на одном свойстве векторов пространства $\overline{H}_t$, которое нам понадобится в дальнейшем. Если $\Psi(x)$ — вектор пространства $\overline{H}_0$ и $U_{t-\Delta t}(x) \in H_{t-\Delta t}$, то

$$L_{t-\Delta t}(\Psi, U_{t-\Delta t}) = 0, \quad t-\Delta t > 0. \tag{6}$$

Под L_t мы понимаем функционал вида (1), в котором интеграл берется по интервалу $[t, 1]$.

Подставим в (6) специальный вектор $U_{t-\Delta t}$, определив его следующим образом: на интервале $[t-\Delta t, t]$

$$u_{t-\Delta t} = \frac{(x-t+\Delta t)^n (x-t)^{n-1}}{(n-1)!\,(\Delta t)^n},$$

на интервале $[t, 1]$ вектор $U_{t-\Delta t}(x)$ произволен, но он непрерывен в точке t и принадлежит H. $u_{t-\Delta t}(t) = u'_{t-\Delta t}(t) = \ldots u^{(n-2)}_{t-\Delta t}(t) = 0$ и $u^{(n-1)}_{t-\Delta t}(t) = 1$. Запишем равенство (6) в виде

$$L_{t-\Delta t}(\Psi, U_{t-\Delta t}) + L_t(\Psi, U_{t-\Delta t}) - L_t(\Psi, U_{t-\Delta t}) = 0$$

и сделаем предельный переход при $\Delta t \to 0$. Тогда почти для всех t получим

$$L_t(\Psi, U) = -a_0(t)\left(\psi^{(n)}(t) + a_{01}\psi^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{0n}\psi(t)\right), \tag{7}$$

где $U(x)$ — произвольный вектор из H, первые $n-1$-проекции которого в точке t равны нулю, а n-я равна единице.

После этого замечания перейдем к построению матрицы Грина в пространстве H_0.

Так как каждое решение уравнения (2) в пространстве H_0 равно сумме решений этого уравнения в подпространствах H_t и $\overline{H}_t$, матрица Грина $K(x, s)$ задачи (2) в пространстве H_0 равна сумме матриц Грина задачи (2) в подпространствах H_t и $\overline{H}_t$. Если $x \in [t, 1]$, то по доказанному решение уравнения (2) на подпространстве

$\overline{H}_t$ есть линейная комбинация векторов $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^n$. Если $k_{ij}(x, s, t)$ — элемент матрицы Грина, отвечающий подпространству H_t, то

$$k_{ij}(x, s) = k_{ij}(x, s, t) + \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \psi_k^{(i)}(x), \tag{8}$$

$i, j = 0, 1, \ldots, n-1$. Заметив, что $k_{ij}(t, s, t) = 0$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, получим систему линейных уравнений относительно $\{c_{kj}\}_{k=1}^n$

$$k_{ij}(t, s) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} \psi_k^{(i)}(t), \quad i, j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Откуда

$$c_{kj} = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \ldots & \psi_{k-1}(t) & k_{0j}(t, s) & \psi_{k+1}(t) & \ldots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \ldots & \psi_{k-1}'(t) & k_{1j}(t, s) & \psi_{k+1}'(t) & \ldots & \psi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \psi_{k-1}^{(n-1)}(t) & k_{n-1j}(t, s) & \psi_{k+1}^{(n-1)}(t) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}, \tag{9}$$

где $\Delta(t) = \operatorname{Det} \| \psi_i^{(j-1)}(t) \|_{i, j=1}^n$.

Если ввести точку $x > t' > t$ и пространство H_t разбить на сумму ортогональных подпространств $H_{t'}$ и $\overline{H}_{t'}$, то элементы матрицы Грина $K(x, s, t)$ при $s > t$ можно представить суммой, аналогичной сумме в равенстве (8), при этом функции $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^n$ остаются прежними. Повторяя этот процесс N раз, приходим к заключению, что если $x < s$ и $0 < t_1 < \ldots < t_N < x$, то

$$k_{ij}(x, s) = k_{ij}(x, s, t_N) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{N} c_{kj}(t_m, s) \psi_k^{(i)}(x), \tag{10}$$

$i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, где значения $c_{kj}(t_m, s)$ вычисляются по формуле (9), если заменить в ней t на t_m и $k_{ij}(t, s)$ на $k_{i,j}(t_m, s, t_{m-1})$.

Сделав в равенстве (10) формальный предельный переход при $N \to \infty$ и оставляя в стороне вопросы, связанные с его обоснованием, получим

$$k_{ij}(x, s) = \int_0^x k_{nj}(t, s, t) \varphi_{i0}(x, t)\, dt, \tag{11}$$

где

$$\varphi_{i0}(x, t) = (-1)^{n-1} \frac{\omega_{i0}(x, t)}{\omega_{n-10}(t, t)}; \tag{12}$$

$$\omega_{i0}(x, t) = (-1)^n \begin{vmatrix} \psi_1^{(i)}(x) & \ldots & \psi_n^{(i)}(x) \\ \psi_1(t) & \ldots & \psi_n(t) \\ \psi_1'(t) & \ldots & \psi_n'(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_1^{(n-2)}(t) & \ldots & \psi_n^{(n-2)}(t) \end{vmatrix}.$$

Отметим, что вектор $\Phi(x, t) = (\varphi_{00}(x, t), \varphi_{10}(x, t), \ldots, \varphi_{n-10}(x, t))$ при фиксированном t удовлетворяет уравнению

$$L_t(\Phi(x, t), U_t) = 0 \tag{13}$$

и

$$\varphi_{i0}(t, t) = 0, \ i = 0, 1, \ldots, n-2; \ \varphi_{n-10}(t, t) = 1. \tag{14}$$

Понятно, что уравнение (13) и условие (14) определяют вектор $\Phi(x, t)$ единственным образом.

Опуская выкладки, заметим, что вектор $a_0(t) K_n(x, t, t)$ при фиксированном t также удовлетворяет уравнению (13) и условиям (14), поэтому

$$k_{jn}(x, t, t) = \frac{1}{a_0(t)} \varphi_{j0}(x, t).$$

Согласно (11), учитывая «симметрию» матрицы $G(x, s)$ $(G(x, s) = G^*(s, x))$ окончательно получим

$$k_{ij}(x, s) = \begin{cases} \int\limits_0^x \varphi_{i0}(x, t)\, \varphi_{j0}(s, t) \dfrac{dt}{a_0(r)}, & x \leqslant s \\ \int\limits_0^s \varphi_{i0}(x, t)\, \varphi_{j0}(s, t) \dfrac{dt}{a_0(t)}, & x \geqslant s \end{cases} \tag{15}$$

$i, j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Ввиду того, что предельный переход в формуле (10) не был обоснован, нужно проверить, что $k_{ij}(x, s)$ $(i, j = 0, 1, \ldots, n-1)$, определяемые по формулам (15), действительно являются элементами матрицы Грина.

Из (15) имеем

$$k_{nj}(x, s) = \begin{cases} \int\limits_0^x \varphi_{n0}(x, t)\, \varphi_{j0}(s, t) \dfrac{dt}{a_0(t)} + \dfrac{\varphi_{j0}(s, t)}{a_0(x)}, & x \leqslant s \\ \int\limits_0^s \varphi_{n0}(x, t)\, \varphi_{j0}(s, t) \dfrac{dt}{a_0(t)}, & x \geqslant s. \end{cases} \tag{16}$$

Подставив значения $\{k_{ij}(x, s)\}_{i=0}^{n}$ при фиксированных j и s в левую часть уравнения (2), после перемены порядка интегрирования получим

$$L(K_j, U) = \int\limits_0^s dt \varphi_{j0}(s, t) \left[u^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(t)\, u^{(n-i)}(t) + \frac{1}{a_0(t)} \times \right.$$

$$\times \int\limits_t^1 \{a_0(x) (\varphi_{n0}(x, t) + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(x)\, \varphi_{n-i0}(x, t)\, (u^{(n)}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(x)\, u^{n-i}(x) + \sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x)\, u^{(n-i)}(x)\, \varphi_{n-k0}(x, t)\}\, dx.$$

Далее, так как каждый вектор $U(x) \in H_0$ равен сумме векторов $U_t(x)$ и $\overline{U}_t(x)$, то

$$L_t(U, \Phi) = L_t(U_t, \Phi) + L_t(\overline{U}_t, \Phi)$$

и вследствие (7), (13) и (14)

$$L_t(U, \Phi) = -a_0(t) (\bar{u}_t^{(n)}(t) + a_{01} \bar{u}_t^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{0n} \bar{u}_t(t)).$$

Поскольку $U_t(t) = 0$, то $U(t) = \overline{U}_t(t)$ и, следовательно,

$$L_t(U, \Phi) = -a_0(t)\left(\overline{u}_t^{(n)}(t) + a_{01}u^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{0n}u(t)\right).$$

Так как каждый вектор $\overline{U}_t \in \overline{H}_t$ на интервале $[t, 1]$ имеет вид

$$\overline{U}_t(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Psi_i(x),$$

то при $x \in [t, 1]$

$$U(x) = U_t(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \Psi_i(x).$$

Если вектор $U(x)$ задан, то постоянные $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ являются решениями системы уравнений

$$u^{(j)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i^{(j)}(t), j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Откуда

$$\overline{u}_t^{(n)}(t) = -\frac{1}{w_{n-10}(t, t)} \begin{vmatrix} 0 & \psi_1^{(n)}(t) & \ldots \psi_n^{(n)}(t) \\ u(t) & \psi_1(t) & \ldots \psi_n(t) \\ u'(t) & \psi_1'(t) & \ldots \psi_n'(t) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ u^{(n-1)}(t) & \psi_1^{(n-1)}(t) & \ldots \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$L(K_j, U) = \int_0^s \varphi_{j0}(s, t)\, lu(t)\, dt,$$

где

$$lu(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{w_{n-10}(t, t)} \begin{vmatrix} u(t) & \psi_1(t) & \ldots & \psi_n(t) \\ u'(t) & \psi_1'(t) & \ldots & \psi_n'(t) \\ \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot \\ u^{(n)}(t) & \psi_1^{(n)}(t) & \ldots & \psi_n^{(n)}(t) \end{vmatrix}.$$

Функции $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ являются решением уравнения $lu(x) = 0$. Поэтому функция $\varphi_{00}(s, t)$ является функцией Коши для оператора lu, вследствие чего на любой функции $u(x)$, равной нулю вместе со своими первыми производными в точке нуль

$$\int_0^s \varphi_{j0}(s, t)\, lu(t)\, dt = u^{(j)}(s).$$

Этот результат и доказывает утверждение. Итак, доказана

Теорема 1. *Элементы матрицы Грина задачи* (2) *в пространстве имеют вид*

$$g_{ij}(x, s) = \begin{cases} \int_0^x \varphi_{i0}(x, t)\, \varphi_{j0}(s, t) \frac{dt}{a_0(t)}, & x \leqslant s \\ \int_0^s \varphi_{i0}(x, t)\, \varphi_{j0}(s, t) \frac{dt}{a_0(t)}, & x \geqslant s \end{cases} + \sum_{k=1}^{n} \psi_k^{(i)}(x)\, \psi_k^{(j)}(s), \qquad (17)$$

$i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, *где векторы* $\Psi_k(x) = (\psi_k(x), \ldots, \psi_k^{(n-1)}(x))$ *и* $L(\Psi_i, \Psi_j) = \delta_{ij}$.

Пусть теперь в функционале типа (1) по-прежнему $a_0(x) > 0$ и кусочно-непрерывна, $\{a_{0j}(x)\}_{j=1}^n \in L_2[0, 1]$, $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n \in L[0, 1]$ и никаких других условий на коэффициенты не накладывается, т. е. функционал $L(U, V)$ не обязательно положительный. Кроме того, пусть известно, что задача (2) имеет решение в H для любой вектор-функции $Q(x)$ из допустимого класса. Тогда справедлива

Теорема 2. *Если определитель матрицы Грина не равен нулю при* $x = s$ $(x \in [0, 1])$ *и квадратичная форма* $\sum_{i,j=1}^{n-1} g_{ij}(0, 0)\xi_i\xi_j$ *положительна, то матрица Грина будет позитивной матрицей-ядром.*

Доказательство. Покажем, что в условиях теоремы элементы матрицы Грина вычисляются по формулам (17). Вывод этих формул будем проводить, доказывая последовательно все промежуточные утверждения теоремы 1, основываясь на том, что уравнение

$$Z(W, U) = \int_0^1 U(x)\,dQ(x) \tag{18}$$

имеет решение для любой функции $U(x) \in H$ и $\operatorname{Det} G(x, x) \neq 0$ по условию теоремы.

Докажем сначала, что однородное уравнение $Z(P, U) = 0$ имеет только тривиальное решение $P(x) \equiv 0$.

В самом деле, пусть $P(x) \not\equiv 0$, тогда если W — любое решение неоднородного уравнения, то

$$Z(W, P) = \int_0^1 P(x)\,dQ(x) = 0$$

для любой функции $Q(x)$, а это значит, что $P(x) \equiv 0$.

Выделим теперь в пространстве H линейное многообразие векторов M_0 равных нулю в точке нуль, и обозначим через $\overline{M}_0$ линейное многообразие векторов, ортогональных к нему в том смысле, что $Z(U_0, \overline{U}_0) = 0$, $U_0 \in M_0$, $\overline{U}_0 \in \overline{M}_0$.

Множества M_0 и $\overline{M}_0$ не пересекаются. В самом деле, пусть $\Psi(0) = 0$ и $\Psi \in \overline{M}_0$, тогда $Z(\Psi, U_0) = 0$ на любом векторе $U_0 \in M_0$, и $Z(\Psi, \overline{U}_0) = 0$ на любом векторе $\overline{U}_0 \in \overline{M}_0$. Так как уравнение

$$Z(W_0, U_0) = \int_0^1 U_0(x)\,dQ(x)$$

имеет решение на M_0 для любой вектор-функции $Q(x)$ (можно выписать матрицу Грина этой задачи, если в равенстве (4′) заменить t на 0), то $Z(W_0, \Psi) = \int_0^1 \Psi(x)\,dQ(x) = 0$ для любой вектор-функции $Q(x)$, а следовательно $\Psi(x) = 0$.

Элементами $\overline{M}_0$ являются, например, вектор-функции $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^n$ — столбцы матрицы Грина $G(x, 0)$. Эти вектор-функции линейно независимы, так как линейная система $\sum_{i=1}^{n} c_i \Psi_i(x) = 0$ имеет только тривиальное решение, поскольку $\operatorname{Det} G(0, 0) > 0$. Каждый вектор $\overline{U}_0 \in \overline{M}_0$ является линейной комбинацией векторов $\{\Psi_i\}_{i=1}^{n}$. Если предположить противное, т. е. допустить существование вектора $\Psi(x) \not\equiv 0$, $\Psi(x) \in \overline{M}_0$ такого, что

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \Psi_i(x) + \Psi_{n+1}(x),$$

где $\Psi_{n+1}(x) \in \overline{M}_0$, то можно подбором $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ обеспечить равенство $\Psi(0) = 0$. Это значит, что $\Psi(x) \in M_0$ и $\Psi(x) \in \overline{M}_0$, т. е. $\Psi(x) \equiv 0$.

Следовательно $\overline{M}_0$ является линейной оболочкой вектор-функции $\{\Psi_i(x)\}_{i=1}^{n}$. Матрица Грина $G(x, s)$ обладает свойствами матрицы Грина задачи (2) за исключением свойств 2 и 3. Если учесть сделанные в начале доказательства замечания, то дальнейший ход рассуждений ничем не отличается от изложенного в теореме 1. Итак, матрица Грина задачи (18) является позитивной матрицей-ядром, т. е. $Z(W, W) > 0$, если $W(x)$ есть решение задачи (18).

Из представления элементов матрицы Грина (17) следует

Теорема 3. *Матрица Грина в квадрате* $0 \leqslant x, s \leqslant 1$ *однозначно определяется значениями своих диагональных элементов при* $x = s$ *и функцией* $a_0(x)$.

Доказательство. Первоначально отметим, что по значениям элементов $g_{ii}(x, x)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ можно найти матрицу $G(x, x)$. Действительно, пусть вычислены элементы $g_{ij}(x, x)$ когда $i, j \leqslant k < n-1$. Тогда

$$g_{k+1j}(x, x) = \frac{d}{dx} g_{kj}(x, x) - g_{kj+1}(x, x), \quad j < k,$$

$$g_{k+1k}(x, x) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx} g_{kk}(x, x). \tag{19}$$

Таким образом, поскольку $g_{k+1k+1}(x, x)$ предполагается известным и матрица $G(x, x)$ симметрична, то определены все $g_{ij}(x, x)$ при $i, j \leqslant k+1$. Для дальнейшего нам также понадобится вычислить $g_{nj}(x, x)$. Из формул (16) и (17) имеем

$$g_{nj}(x-0, x) - g_{nj}(x+0, x) = \frac{1}{a_0(x)} \delta_{n-1, j},$$

где $\delta_{n-1, j}$ — символ Кронекера. В силу этих равенств получим

$$g_{nj}(x, x) = \frac{d}{dx} g_{n-1j}(x, x) - g_{n-1j+1}(x, x), \quad j < n-1,$$

$$g_{nn-1}(x+0, x) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx} g_{n-1n-1}(x, x) - \frac{1}{a_0(x)}\right). \tag{20}$$

Из (17) следует, что

$$l g_{00}(x, s) = 0, \quad x \geqslant s;$$

$$l g_{0j}(x, s)\big|_{s=x-0} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{21}$$

Поскольку коэффициент при n-й производной в операторе lu не обращается в нуль ни в одной точке, то из системы (21) следует, что функция $g_{00}(x, s)$ при $x \geqslant s$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix} g_{00}(x, s) \, g_{00}(x, x) \, g_{01}(x, x) \dots g_{0\,n-1}(x, x) \\ g_{10}(x, s) \, g_{10}(x, x) \, g_{11}(x, x) \dots g_{1\,n-1}(x, x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_{n0}(x, s) \, g_{n0}(x, x) \, g_{n1}(x, x) \dots g_{nn-1}(x, x) \end{vmatrix} = 0 \qquad (22)$$

и начальным условиям $g_{j0}(x, s)|_{x=s} = g_{j0}(s, s)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Теорема доказана.

Пусть заданы n функций $F_1(x)$, $F_2(x), \dots, F_n(x)$ на сегменте $[0, 1]$. Будем предполагать, что функция $F_i(x)$ имеет $n-i+1$ производных. Обозначим $g_{ii}(x, x) = F_{i+1}(x)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ и вычислим по формулам (19), (20) функции $g_{ij}(x, x)$ $(i, j = 0, 1, \dots, n-1)$. Справедлива

Теорема 4. *Если матрица $G(x, x)$ неособенная в каждой точке интервала $[0, 1]$ и матрица $G(0, 0)$ положительно определенная, то функциям $\{F_i(x)\}_{i=1}^n$, $a_0(x) > 0$ можно поставить в соответствие позитивный функционал $Z(U, V)$ в пространстве H, для которого матрица $G(x, s)$ является матрицей Грина.*

Доказательство. Покажем, что функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \dots$, $\psi_n(x)$, с помощью которых строится функция $\varphi_{00}(x, t)$, входящая в формулы (17), могут быть вычислены по значениям элементов матрицы Грина $G(x, s)$ при $x = s$. Пусть $x \leqslant s$, тогда из вида функции $g_{00}(x, s)$ (17) имеем

$$\begin{vmatrix} g_{00}(x, s) & \psi_1(x) & \psi_2(x) \dots \psi_n(x) \\ g_{10}(x, s) & \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \dots \psi_n'(x) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ g_{n0}(x, s) - \dfrac{\varphi_{00}(s, x)}{a_0(x)} & \psi_1^{(n)}(x) & \psi_2^{(n)}(x) \dots \psi_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда

$$\frac{\varphi_{00}(s, x)}{a_0(x)} = \frac{1}{w_{n-10}(x, x)} \left(w_{n-10}(x, x) \, g_{n0}(x, s) - w_{n0}(x, x) \, g_{n-10}(x, s) + \right.$$
$$\left. + w_{n1}(x, x) \, g_{n-20}(x, s) - \dots + (-1)^n w_{nn-1}(x, x) \, g_{00}(x, s) \right),$$

где $w_{ni} = \left. \dfrac{\partial^i w_{n0}(x, s)}{\partial s^i} \right|_{s=x}$. Продифференцируем обе части этого уравнения по s k раз $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, тогда при $s \to x + 0$ в силу (14) получим линейную неоднородную систему уравнений относительно $w_{n0}(x, x)$, $w_{n1}(x, x), \dots, w_{nn-1}(x, x)$. Решение этой системы легко найти, если заметить, что $w_{n0}(x, x) = [w_{n-10}(x, x)]_x'$. Тогда можно получить дифференциальное уравнение относительно $w_{n-10} \times$ $\times (x, x)$:

$$\frac{[w_{n-10}(x, x)]_x'}{w_{n-10}(x, x)} = \frac{1}{D(x)} \left[M(x) - \frac{M_{n-1n-1}(x)}{a_0(x)} \right],$$

где $M_{n-1n-1}(x)$ — минор элемента $g_{n-1n-1}(x, x)$ в определителе $D(x)$ и

$$M(x) = \begin{vmatrix} g_{00}(x, x) \dots g_{n-20}(x, x)\, g_{n0}(x, x) \\ g_{01}(x, x) \dots g_{n-21}(x, x)\, g_{n1}(x, x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ g_{0n-1}(x, x) \dots g_{n-2n-1}(x, x)\, g_{nn-1}(x, x+0) \end{vmatrix}$$

Поскольку

$$D'_x(x) = 2M(x) - \frac{1}{a_0(x)} M_{n-1n-1}(x),$$

то

$$\frac{[w_{n-10}(x, x)]'_x}{w_{n-10}(x, x)} = \frac{D'_x(x) - \frac{1}{a_0(x)} M_{n-1n-1}(x)}{2D(x)}.$$

Откуда

$$\ln w_{n-10}(x, x) = \frac{1}{2} \ln D(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{M_{n-1n-1}(x)}{a_0(x)\, D(x)}\, dx.$$

После чего из указанной системы определяются $w_{n0}(x, x)$, $w_{n1}(x, x), \dots, w_{nn-1}(x, x)$. Так как функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ являются фундаментальными решениями уравнения $lu(x) = 0$, а коэффициентами этого уравнения являются функции $w_{n-10}(x, x)$, $w_{n0}(x, x)\, w_{n1}(x, x), \dots, w_{nn-1}(x, x)$, то наше утверждение доказано.

Предложим теперь один из возможных способов построения позитивного функционала по функции Грина.

Пусть вектор-функции $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ не обязательно ортонормированы и $\psi_{i+1}^{(j)}(0) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots, n-1$. Определим

$$g_{kl}(x, s) = \int_0^x \varphi_{k0}(x, t)\, \varphi_{l0}(s, t) \frac{dt}{a_0(t)} + \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} \psi_i^{(k)}(x)\, \psi_j^{(l)}(s). \qquad (23)$$

Из свойства (14) функции $\varphi_{00}(x, t)$ получим

$$g_{kl}(0, 0) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} \psi_i^{(k)}(0)\, \psi_j^{(l)}(0) = c_{kl} \qquad (24)$$

и, следовательно, $\| c_{kl} \|_{k, l=1}^{n} = \| g_{ij}(0, 0) \|_{i, j=0}^{n-1}$. Таким образом,

$$\sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} (\psi_i, q)(\psi_j, q) = (G(0, 0)\, Q, Q) > 0,$$

где $Q = \{(\Psi_1, q), (\Psi_2, q), \dots (\Psi_n, q)\}$ и матрица-ядро, построенная по формулам (23), позитивна. Рассмотрим вектор-функцию $U(x)$

$$U(x) = \int_0^x \Phi(x, t)\, p(t) \frac{dt}{a_0(t)} + \sum_{i=1}^{n} u^{(i-1)}(0)\, \Psi_i(x),$$

где $p(t) = a_0(t)\, lu(t)$.

Построим функционал над пространством H:

$$Z(U, V) = \int_0^1 a_0(x)\, lu(x)\, lv(x)\, dx + (G^{-1}(0, 0)\, U(0), V(0)),$$

где $G^{-1}(0,\ 0)$ — матрица, обратная к матрице с элементами $\{g_{ij}(0,\ 0)\}_{i,\ j=1}^{n}$. Проверим, что матрица, построенная по формулам (23), (24) является матрицей Грина для уравнения

$$Z(U,\ V)=\int_0^1 U(x)\,dQ(x) \tag{25}$$

в пространстве H.

Пусть $U(x)\in H$ и $g_j(x,\ s)=(g_{0j}(x,\ s),\ g_{1j}(x,\ s),\ldots,\ g_{n-1j}(x,\ s))$. Тогда

$$Z(g_j,\ U)=\int_0^1 a_0 lg_{0j} ludx+(G^{-1}(0,\ 0)\,g_j(0,\ s),\ U(0))=$$

$$=\int_0^s \varphi_{j0}(s,\ x)\,ludx+\sum_{i=1}^{n} u^{(i-1)}(0)\,\psi_i^{(j)}(s)=u^{(j)}(s),$$

и, таким образом, матрица $G(x,\ s)$, построенная по формулам (23), (24), является матрицей Грина для уравнения (25). Теорема доказана.

Если компоненты допустимого вектора подчинены независимым граничным условиям вида

$$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}u^{(i-1)}(0)=0,\quad j=0,\ 1,\ldots,\ k,\quad k\leqslant n-1,$$

то и в этом случае справедливы теоремы 1 и 3. Для справедливости теоремы 2 ее условия должны быть несколько изменены. Возможность восстановления матрицы Грина по значениям ее диагональных элементов при $x=s$ (теорема 4) требует специального рассмотрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик М. И. Метод ортогональных проекций для самосопряженных дифференциальных уравнений — «ДАН СССР, сер. матем.», 1947, т. 56, № 2, с. 115—118.
2. Дольберг М. Д. Общий метод решения задач равновесия и колебаний упругих систем в равномерно сходящихся рядах. — Автореф. дис. на соиск. учен. степени д-ра физ.-мат. наук. Л., 1965. 24 с.

Поступила 8. I 1975 г.

УДК 517.934.1

В. И. КОРОБОВ, канд. физ.-мат. наук, *В. Е. ЧУПРИНА*

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ УПРАВЛЯЕМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ПРОИЗВОЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{1}$$

где A и B — постоянные вещественные матрицы размеров $n\times n$ и $n\times r$ соответственно, вектор $x\in E_n$, вектор $u\in E_r$. Наряду с системой (1) будем рассматривать систему

$$\dot{x}=Ax. \tag{2}$$

Предварительно приведем некоторые определения [1] и обозначения.

Система (1) называется управляемой за свободное время из точки x_0 на произвольное множество $G \subset E_n$, если существует время $T = T(x_0)$ и существует измеримое управление $u(t, x_0)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ такие, что траектория системы (1) при $u = u(t, x_0)$, начинающаяся в точке x_0 при $t = 0$, в момент T попадет на G, то есть $x(T) \in G$.

Система (1) называется управляемой за свободное время на множество G из произвольного множества $F \subset E_n$, если эта система управляема за свободное время из любой точки $x_0 \in F$ на множество G.

Множество $G \subset E_n$ назовем достижимым за свободное время из точки x_0 в силу системы (2), если траектория $x(t)$ этой системы, выходящая из точки x_0 при $t = 0$ в некоторый момент времени $T = T(x_0)$ достигнет множества G, т. е. $x(T) \in G$.

Если множество G достижимо за свободное время из каждой точки множества F в силу системы (2), то будем говорить, что множество G достижимо за свободное время из множества F в силу системы (2).

Будем говорить, что комплексный n-мерный вектор $w = w^1 + iw^2$ «принадлежит» вещественному подпространству $M \subset E_n$, если $w^1 \in M$, $w^2 \in M$, и комплексный n-мерный вектор $w = w^1 + iw^2$ «не принадлежит» вещественному подпространству M, если выполняется хотя бы одно из соотношений: $w^1 \overline{\in} M$, $w^2 \overline{\in} M$.

В работе [1] показано, что задача управляемости из произвольного множества $F \subset E_n$ на произвольное множество $G \subset E_n$ за свободное (фиксированное) время эквивалентна задаче достижимости множества $L + G$ из множества F за свободное (фиксированное) время согласно системе (2), где $L = Z(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ — линейная оболочка, натянутая на вектор-столбцы матрицы управляемости.

Если нуль является внутренней точкой множества G (тогда существует n-мерный шар $V_n(0, \varepsilon) \subset G$) и корневые векторы матрицы A, отвечающие собственным значениям λ с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$, «принадлежат» L, тогда система (1) стабилизируема в нуль [2], т. е. существует управление вида $u = Qx$ такое, что нулевое решение системы $\dot{x} = (A + BQ)x$ асимптотически устойчиво. Следовательно, из любой точки $x_0 \in E_n$ можно попасть за конечное время $T(x_0)$ в наперед заданную окрестность начала координат $V_n(0, \varepsilon)$, следовательно, система (1) управляема на множество G за свободное время.

Ниже мы рассмотрим достаточные условия управляемости за свободное время на множество G из всех точек E_n, ослабив то требование, что точка нуль является внутренней в G.

Введем некоторые обозначения.

Пусть $\varphi(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)$ — минимальный полином матрицы A, где полином $\varphi_1(\lambda)$ соответствует корням λ с $\operatorname{Re}\lambda < 0$, а полином $\varphi_2(\lambda)$ соответствует корням λ с $\operatorname{Re}\lambda \geqslant 0$. Пусть $\varphi_1(\lambda) = \overset{1}{\varphi_1}(\lambda)\overset{2}{\varphi_1}(\lambda)$, $\varphi_2(\lambda) = \overset{1}{\varphi_2}(\lambda)\overset{2}{\varphi_2}(\lambda)$, где $\overset{1}{\varphi_1}(\lambda)$, $\overset{1}{\varphi_2}(\lambda)$ соответствуют вещественным корням, а $\overset{2}{\varphi_1}(\lambda)$, $\overset{2}{\varphi_2}(\lambda)$ — соответствуют комплексным корням.

Если соответствующих корней нет, то полином полагаем равным единице. Тогда

$$K^- = \{x : \varphi_1(A)x = 0\}, \quad K^+ = \{x : \varphi_2(A)x = 0\}$$

$$K_1^- = \{x : \varphi_1^1(A)\,x = 0\}, \quad K_2^- = \{x : \varphi_1^2(A)\,x = 0\}$$

есть инвариантные подпространства относительно оператора, причем $K^- \dot{+} K^+ = E_n$, $K^- = K_1^- \dot{+} K_2^-$.

Обозначим $\dim K^- = p$, $\dim K^+ = q$, $\dim K_1^- = p_1$, $\dim K_2^- = p_2$, тогда $p + q = n$, $p_1 + p_2 = p$. Пусть $V_n(0,\ R)$ — n-мерный замкнутый шар с центром в нуле радиуса R, пусть $V_m(0,\ R) = V_n(0,\ R) \cap M$, где M — m-мерное подпространство. Пусть $\rho(x,\ D)$ есть расстояние между точкой x и множеством D.

Приведем формулировку и доказательство теоремы из [1].

Теорема 1. *Для того, чтобы система (1) была управляема из произвольного множества $F \subset E_n$ на произвольное множество $G \subset E_n$ за свободное (фиксированное) время, необходимо и достаточно, чтобы множество $L + G$ было достижимо из множества F в силу системы (2) за свободное (фиксированное) время.*

Необходимость. Для любой точки $x_0 \in F$ существует управление $u(t,\ x_0)$ и время $T = T(x_0) \geqslant 0$ (если время фиксировано, то $T(x_0) \equiv T$ для всех $x_0 \in F$) такое, что $x(T) \in G$, где

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau,\ x_0)\,d\tau.$$

Вектор $\int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau,\ x_0)\,d\tau$ принадлежит L. Поэтому $e^{AT}x_0 \in (L + G)$, следовательно, множество $(L + G)$ достижимо из любой точки $x_0 \in F$ в силу системы (2).

Достаточность. Пусть для любой точки $x_0 \in F$ существует время $T = T(x_0)$, ($T(x_0) \equiv T$ если время управляемости фиксировано) такое, что вектор $e^{AT}x_0 \in (L + G)$, тогда $e^{AT}x_0 = l + g$, где $l \in L$, $g \in G$. Система (1) в подпространстве L полностью управляема [3], поэтому существует управление $u(t)$, приводящее точку 0 в точку $(-l)$ за время $T(x_0)$ (или за фиксированное время T). Тогда имеем

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau = l + g - l = g,$$

т. е. $x(T) \in G$. Теорема доказана.

Отсюда следует [1], что если $L + G = E_n$, то система (1) управляема из всех точек пространства E_n на множество G за свободное (фиксированное) время.

В дальнейшем будем считать, что $L + G \neq E_n$.

Теорема. *Для того, чтобы система (1) была управляема из всех точек E_n на множество $G \subset E_n$ за свободное время достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) $K^+ \subset L$. 2) *Если* $K_1^- = K^-$, *то существует шар* $V_p(0,\ \varepsilon) \subset (L + G) \cap K^-$, *а если* $K_2^- \neq 0$, *то существует шар* $V_{p-1}(0,\ \varepsilon) \subset (L + G) \cap K^-$ *такой, что шар* $V_{p_1}(0,\ \varepsilon) \subset V_{p-1}(0,\ \varepsilon) \cap K_1^-$, *где* $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in E_n$, тогда $x_0 = x_1 + x_2$, где $x_1 \in K^-$, $x_2 \in K^+$. Решение системы (2) с начальным условием $x(0)=x_0$ имеет вид $x(t)=e^{At}x_1+e^{At}x_2$. Так как K^-, K^+ инвариантные относительно оператора A подпространства, то $e^{At}x_1\in K^-$, $e^{At}x_2\in K^+$ при всех $t\geqslant 0$. А так как $K^+\subset L$, то для того, чтобы доказать, что в некоторый момент времени $T\geqslant 0$ выполняется включение $x(T)\in(L+G)$ достаточно установить, что $e^{AT}x_1\in(L+G)$.

В подпространстве K^- система (2) устойчива в целом, тогда из точки $x_1\in K^-$ траектория $x(t)=e^{At}x_1$ попадает в шар $V_p(0,\varepsilon)\subset K^-$ за конечное время $T(x_1)\geqslant 0$. Следовательно, если $K_1^-=K^-$, то из любой точки $x_0\in E_n$ траектория $x(t)=e^{At}x_0$ попадает на множество $L+G$ за время $T(x_0)\geqslant 0$.

Пусть теперь $K_2^-\neq 0$. Не ограничивая общности, будем считать, что точка x_1 принадлежит такому шару $V_p(0,\varepsilon_1)\subset K^-$, что соответствующее решение системы (2) не покинет шар $V_p(0,\varepsilon)\subset K^-$ при всех $t\geqslant 0$.

В подпространстве K^- возьмем единичный вектор f, ортогональный шару $V_{p-1}(0,\varepsilon)$. Возьмем произвольную точку $x_1\in V_p(0,\varepsilon_1)\subset K^-$. Тогда $x_1=x_1^1+x_1^2$, где $x_1^1\in K_1^-$, $x_1^2\in K_2^-$. Следовательно, $x(t)=e^{At}x_1=$ $=e^{At}x_1^2+e^{At}x_1^1$ и $e^{At}x_1^1\in K_1^-$, $e^{At}x_1^2\in K_2^-$ при всех $t\geqslant 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\gamma(t)=(e^{At}x_1,\ f)$. Тогда $\gamma(t)=(e^{At}x_1^2,\ f)$. Таким образом $e^{A\bar{t}}x_1\in V_{p-1}(0,\ \varepsilon)$ тогда и только тогда, когда $\gamma(\bar{t})=0$. Обозначим $V_{p_2-1}(0,\ \varepsilon)=V_{p-1}(0,\ \varepsilon)\cap K_2^-$, $V_{p_2}(0,\ \varepsilon_1)=V_p(0,\ \varepsilon_1)\cap K_2^-$. В дальнейшем будем рассматривать подпространство K_2^- и точки $x_1^2\in V_{p_2}(0,\ \varepsilon_1)$.

Рассмотрим произвольную точку $x_1^2\in V_{p_2}(0,\varepsilon_1)\setminus V_{p_2-1}(0,\varepsilon_1)$, если $x_1^2\in V_{p_2-1}(0,\ \varepsilon_1)$, то $x_1^2\in(L+G)$, причем $(x_1^2,\ f)=0$; тогда $(x_1^2,\ f)\neq$ $\neq 0$. Следовательно, $\gamma(t)\not\equiv 0$ на интервале $[0,\ \infty)$.

Обозначим P_k, $k=1,\ 2,\dots,\ \omega$ — корневые подпространства [4], отвечающие собственным значениям $\lambda_k=\mu_k+i\nu_k$ при $\nu_k\neq 0$ и $\mu_k<0$ матрицы A, $\dim P_k=s_k$.

Тогда $x_1^2=\sum\limits_{k\in I}\eta_k^0$, где η_k^0 k-я составляющая вектора x_1^2 по подпространству P_k, $I=\{k:\eta_k^0\neq 0\}$.

Обозначим вектор $\eta_k^j=(A-\lambda_k E)^j\eta_k^0=\eta_k^{1j}+i\eta_k^{2j}$, $j=0,\ 1,\ 2,\dots,$ s_k. Тогда

$$\gamma(t)=\sum_{k\in I}e^{\mu_k t}\sum_{j=0}^{s_k}\frac{t^j}{j!}\left[(\eta_k^{1j},\ f)\cos\nu_k t-(\eta_k^{2j},\ f)\sin\nu_k t\right]=$$

$$=\sum_{k\in I'}e^{\mu_{k_0}t}\sum_{j=0}^{s_k}\frac{t^j}{j!}\left[(\eta_k^{1j},\ f)\cos\nu_k t-(\eta_k^{2j},\ f)\sin\nu_k t\right]+R_1(t),$$

где $\mu_{k_0}=\max\limits_{k\in I}\mu_k$ и такие, что соответствующие коэффициенты при $e^{\mu_{k_0}t}$ отличны от нуля, $I'=\{k:k\in I,\ \mu_k=\mu_{k_0}\}$. Далее

$$\gamma(t)=e^{\mu_{k_0}t}\frac{t^{s_0}}{s_0!}\sum_{k\in I''}\left[(\eta_k^{1j},\ f)\cos\nu_k t-(\eta_k^{2j},\ f)\sin\nu_k t\right]+R(t),$$

где

$$s_0 = \max_{k \in I} s_k, \quad I'' = \{k : k \in I', \ s_k = s_0\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\beta(t) = \sum_{k \in I''} \left[(\eta_k^{1s_0}, f) \cos \nu_k t - (\eta_k^{2s_0}, f) \sin \nu_k t \right].$$

По построению $\beta(t) \not\equiv 0$ на интервале $[0, \infty)$, $\beta(t)$ — почти периодическая функция со средним значением на интервале $[0, \infty]$, равным нулю.

Тогда существуют две неограниченно возрастающие последовательности моментов времени $t_1, t_2, \ldots$ и $\tau_1, \tau_2, \ldots$, и существует число $\delta > 0$ такое, что $\beta(t_i) > \delta$ и $\beta(\tau_i) < -\delta$.

Выбрав номер i_0 настолько большим, что $|e^{-\mu_{k_0} t_i} t_i^{-s_0} s_0! \, R(t_i)| < < \delta/2$ и $|e^{-\mu_{k_0} \tau_i} \tau_i^{-s_0} s_0! \, R(\tau_i)| < \delta/2$ при $i \geqslant i_0$, получим что $e^{-\mu_{k_0} t_i} t_i^{-s_0} s_0! \, \gamma(t_i) > \delta/2$ и $e^{-\mu_{k_0} \tau_i} \tau_i^{-s_0} s_0! \, \gamma(\tau_i) < -\delta/2$ при $i \geqslant i_0$.

Тогда существуют моменты времени $\bar{t}_i$ такие, что $\gamma(\bar{t}_i) = 0$ при $i \geqslant i_0$.

Следовательно, существует момент времени $T = T(x_0)$ такой, что $x(T) \in (L + G)$. Тогда в силу теоремы 1 система (1) управляема из произвольной точки $x_0 \in E_n$ на множество G за свободное время.

Замечание. Если G — ограниченное множество, то условие $K^+ \subset L$ является необходимым условием управляемости из всех точек E_n на множество G за свободное время.

Доказательство. От противного. Пусть $K^+ \not\subset L$, а система (1) управляема из всех точек E_n на множество G. Тогда существует корневой вектор w^0, отвечающий собственному значению λ с $\operatorname{Re} \lambda \geqslant 0$ матрицы A (пусть его высота равна $l + 1$), «не принадлежащий» L, а корневые векторы $w^j = (A - \lambda E)^j w^0$, $j = 1, 2, \ldots, l$ «принадлежат» L. Возьмем шар $V_n(0, R) \supset G$.

Рассмотрим два случая: а) λ — вещественное собственное значение матрицы A, б) $\lambda = \mu + i\nu$ — комплексное собственное значение матрицы A ($\nu \neq 0$). В случае а) рассмотрим решение $x(t)$ системы (2) при начальном условии $x(0) = \alpha_0 w^0$:

$$x(t) = e^{At} \alpha_0 w^0 = \alpha_0 e^{\lambda t} \left[w^0 + w^1 t + \ldots + w^l \frac{t^l}{l!} \right],$$

где α_0 — некоторая положительная константа. Пусть $\alpha > 0$ произвольное фиксированное число. Выберем α_0 такое, что $\rho(\alpha_0 w^0, L + + V_n(0, R)) > \alpha$. Тогда $\rho(e^{\lambda t} \alpha_0 w^0, L + V_n(0, R)) > \alpha$ при всех $t \geqslant 0$. Так как $\left[w^1 t + \ldots + w^l \frac{t^l}{l!} \right] \in L$ при всех $t \geqslant 0$, то $\rho(x(t), L + V_n(0, R)) > \alpha$ при всех $t \geqslant 0$.

Следовательно, множество $L + G$ из точки $\alpha_0 w^0$ недостижимо в силу системы (2), следовательно, система (1) не является управляемой из всех точек E_n на множество G.

В случае б) пусть $w^0 = w^{10} + i w^{20}$. По условию w^0 «не принадлежит» L, т. е. выполнено хотя бы одно из соотношений: $w^{10} \bar{\in} L$,

$w^{20} \,\overline{\in}\, L$. Так как L — инвариантное относительно оператора A подпространство, то $w^{10} \,\overline{\in}\, L$, $w^{20} \,\overline{\in}\, L$.

Действительно, если это не так, например, $w^{10} \,\overline{\in}\, L$, $w^{20} \in L$, тогда из соотношения

$$e^{At} w^{20} = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{l} \frac{t^j}{j!} [w^{2j} \cos \nu t + w^{1j} \sin \nu t]$$

следует, что

$$e^{At} w^{20} = e^{\mu t} \sum_{j=1}^{l} \frac{t^j}{j!} [w^{2j} \cos \nu t + w^{1j} \sin \nu t] - e^{\mu t} \cos \nu t w^{20} = w^{10} e^{\mu t} \sin \nu t,$$

где $w^j = w^{1j} + i w^{2j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, l$ — корневые векторы высоты $l + 1 - j$ матрицы A, отвечающие собственному значению λ. Это равенство справедливо при всех $t \geqslant 0$. Левая часть равенства это вектор из L при всех $t \geqslant 0$, а правая часть равенства при $t \neq \pi k/\nu$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ вектор, не принадлежащий L. Следовательно, $w^{10} \,\overline{\in}\, L$, $w^{20} \,\overline{\in}\, L$. Тогда $L(w^{10}, w^{20}) \cap L = 0$, где $L(w^{10}, w^{20})$ — линейная оболочка, натянутая на векторы w^{10} и w^{20}.

Действительно, пусть $L(w^{10}, w^{20}) \cap L \neq 0$. Тогда существует вектор $z_0 = a w^{10} + b w^{20}$, принадлежащий L, где $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда

$$e^{At} z_0 = e^{\mu t} \sum_{j=0}^{l} \frac{t^j}{j!} [(b \sin \nu t + a \cos \nu t) w^{1j} + (b \cos \nu t - a \sin \nu t) w^{2j}].$$

Отсюда следует, что

$$e^{At} z_0 - e^{\mu t} \sum_{j=1}^{l} \frac{t^j}{j!} [(b \sin \nu t + a \cos \nu t) w^{1j} + (b \cos \nu t -$$

$$- a \sin \nu t) w^{2j}] = e^{\mu t} y(t),$$

где $y(t) = (b \sin \nu t + a \cos \nu t) w^{10} + (b \cos \nu t - a \sin \nu t) w^{20}$. Это равенство справедливо при всех $t \geqslant 0$. Левая часть равенства есть вектор из L при всех $t \geqslant 0$. Тогда вектор $y\left(\frac{\pi}{2\nu}\right) = b w^{10} - a w^{20}$ принадлежит L. Следовательно,

$$L\left(z_0,\ y\left(\frac{\pi}{2\nu}\right)\right) = L(w^{10}, w^{20}) \subset L.$$

Что противоречит тому, что $w^{10} \,\overline{\in}\, L$, $w^{20} \,\overline{\in}\, L$. Рассмотрим решение $x(t)$ системы (2) при начальном условии $x(0) = \beta_0 (w^{10} + w^{20})$:

$$x(t) = \beta_0 \sqrt{2} e^{\mu t} \sum_{j=0}^{l} \frac{t^j}{j!} \left(w^{1j} \cos\left(\nu t - \frac{\pi}{4}\right) + w^{2j} \cos\left(\nu t + \frac{\pi}{4}\right)\right),$$

где β_0 — некоторая положительная константа. Вектор-функция

$$z(t) = \sqrt{2} \left[w^{10} \cos\left(\nu t - \frac{\pi}{4}\right) + w^{20} \cos\left(\nu t + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

есть периодическая и в нуль при всех $t \geqslant 0$ не обращается. Тогда $\min\limits_{0 \leqslant t < \infty} \|z(t)\| = \min\limits_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi/\nu} \|z(t)\| = c > 0$, где $\|x\|$ — евклидова норма вектора x.

Пусть $\beta > 0$ произвольное фиксированное число.

В подпространстве $L(w^{10}, w^{20})$ выберем двумерную сферу $S_2(0, r_0)$ такую, что $\rho(x, L + V_n(0, R)) > \beta$ для всех $x \in S_2(0, r_0)$. Взяв $\beta_0 = r_0/c$, получим, что $\rho(\beta_0 e^{\mu t} z(t), L + V_n(0, R)) > \beta$ при всех $t \geqslant 0$. Так как

$$\beta_0 \sqrt{2} e^{\mu t} \sum_{j=1}^{l} \frac{t^j}{j!} \left[w^{1j} \cos\left(\nu t - \frac{\pi}{4}\right) + w^{2j} \cos\left(\nu t + \frac{\pi}{4}\right)\right] \in L$$

при всех $t \geqslant 0$, то $\rho(x(t), L + V_n(0, R)) > \beta$ при всех $t \geqslant 0$.

Таким образом траектория $x(t)$ не достигнет множества $L + G$ ни при каком $t \geqslant 0$. Следовательно, система (1) не является управляемой из точки $x_0 = \beta_0(w^{10}, w^{20})$ за свободное время.

Пример. Пусть $G = \{x : \|x\| = a,\ a > 0,\ x \in E_n\}$. Система (1) управляема из всех точек E_n на множество G за свободное время тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$1)\ K^{+} \subset L. \quad 2)\ L \neq 0.$$

Необходимость условия 1) доказана, а необходимость условия 2) следует из того, что система (1) неуправляема из нуля, достаточность следует из доказанной выше теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коробов В. И. Управляемость линейной автономной системы на произвольное множество фазового пространства. — «Дифференциальные уравнения», 1976, № 10, с. 10—21.
2. Гальперин Е. А., Красовский Н. Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем. — «Прикладная математика и механика», 1963, т. XXVII, вып. 6, с. 988—1004.
3. Ли Э. Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления, М., «Наука», 1972. 574 с.
4. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры, М., «Гос. изд-во физ-мат. лит.», 1963. 656 с.

Поступила 15. XII 1975 г.

УДК 538.3:532:538.4

И. Е. ТАРАПОВ, д-р физ.-мат. наук,
В. И. ЕРМАКОВ

ДВИЖЕНИЕ ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ

Явления, связанные со способностью жидкой среды поляризоваться и намагничиваться, описываются системой уравнений, приведенной в [1, 2]. В зависимости от соотношения времени релаксации электрического заряда $\tau_e = \varepsilon/\sigma$ и времени магнитной диффузии $\tau_m = \mu\sigma L^2$ обычно рассматривают одно из двух приближений общей системы — *МГД* или ЭГД. Здесь L — характерная длина, σ — проводимость, ε, μ — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. Если $\tau_e \gg \tau_m$, что зачастую имеет место в слабопроводящих средах (кроме так называемых искусственных феррожидкостей), то существенную роль в процессе играет электрическое поле, а магнитная индукция пренебрежимо мала [2, 3]. В этом случае получаем следующее электрогидродинамическое приближение общей системы:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla (p + \chi_\rho) + \rho_e \vec{E} + P \nabla E + \eta_1 \Delta \vec{v}; \tag{1, 2}$$

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} + T \frac{dt}{d} \int_0^E \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E dE = \lambda \Delta T + \sigma_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \sigma E^2; \tag{3}$$

$$\operatorname{div} (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_e; \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0; \tag{4, 5}$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} + \rho_e \vec{v}, \tag{6, 7}$$

где $\vec{P} = P(\rho, T, E)\, \vec{E}/E$ — известная функция поляризации, σ_{ik} — тензор вязких напряжений, ρ_e — объемная плотность свободного заряда, $\varkappa_\rho \equiv \int_0^E (P - \rho \partial P/\partial\rho)\, dE$; остальные обозначения общепринятые.

Уравнение 6 можно представить, исключая плотность тока из (7) и используя (1), (4), в виде

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \vec{v} \nabla \rho_e = -\frac{\rho_e}{\tau_\circ} + \frac{\sigma \vec{E} \nabla \tau_e}{\tau_e}, \tag{8}$$

где $\tau_e = (\varepsilon_0 + P/E)/\sigma \equiv \varepsilon/\delta$.

Отсюда, в частности, следует, что в однородной жидкости, находящейся в однородном электрическом поле, заряд диссипирует с характерным временем релаксации τ_e. Если же в некоторой области среда неоднородна, а поле таково, что $\vec{E} \nabla \tau_e \not\equiv 0$, то, как следует из (8), в этой области плотность свободного заряда ρ_e не равна тождественно нулю. Так что градиенты проводимости, температуры, неоднородность электрического поля способны вызвать локальное накопление электрических зарядов.

Рассмотрим стационарное движение несжимаемой вязкой жидкости с постоянной проводимостью σ в цилиндрическом канале произвольного поперечного сечения D (S — граница D). Будем считать, что функция поляризации линейно зависит от температуры. Систему координат $oxyz$ введем так, чтобы ось x-ов совпадала по направлению с образующей цилиндра. Предполагается, что стенки канала непроводящие, а внешнее электрическое поле направлено вдоль оси x-ов. Граничное условие для температуры следующее

$$T = A_0(M)\, x + B_0(M) \quad (M \in S) \tag{9}$$

Решение системы (1)—(7) отыскиваем в виде: $\vec{v}(U(y, z), 0, 0)$, $\vec{E}=(E_0, 0, 0)$, $\rho_e=\rho_e(y, z)$, $T=A(y, z)x+B(y, z)$. Уравнения (1), (5), (6) при этом удовлетворяются тождественно, а для определения скорости потока, температуры и плотности свободного заряда получаем

$$\Delta a = 0; \quad a(M) = a_0; \tag{10}$$

$$\Delta u - \alpha a + \gamma = 0; \quad u(M) = 0; \tag{11}$$

$$\Delta b + \beta\left(u_\eta'^2 + u_\zeta'^2\right) - \omega a u + \delta = 0; \; b(M) = b_0; \tag{12}$$

$$q = -a; \; (\Delta f \equiv f''_{\eta\eta} + f''_{\zeta\zeta}; \quad M \in S),$$

где $\xi = x/L$, $\eta = y/L$, $\zeta = z/L$, $u = U/v_0$, $\tau = T/T_0$, $q = -\rho_e L/P_T T_0$ — новые безразмерные переменные; $\alpha = -P_T E_0 T_0 L/\eta_1 v_0$, $\beta = \eta_1 v_0^2/\lambda T_0$, $\gamma = -p_0 L^2/\eta_1 v_0$, $\delta = \sigma E_0^2 L^2/\lambda T_0$, $\omega = \rho c_p v_0 L/\lambda$, $a = AL/T_0$, $b = B/T_0$ — безразмерные параметры задачи. Здесь T_0 — характерное значение температуры, $p_0 = \mathrm{const} \leqslant 0$ — градиент давления, $P_T \equiv \partial P(\rho, T_0, E_0)/\partial T$, v_0 — характерная скорость

$$v_0 = \begin{cases} -p_0 L^2/\eta_1, & \text{если } p_0 \neq 0 \\ -P_T E_0 T_0 L/\eta_1, & \text{если } p_0 = 0. \end{cases}$$

В зависимости от условий задачи параметр γ принимает два значения — 0 или 1. Когда задан внешний, отличный от нуля градиент давления, $\gamma = 1$. В отсутствие перепада давления $\gamma = 0$, а $\alpha = 1$.

Таким образом, решение поставленной задачи сведено к нахождению гармонической функции $a(\eta, \zeta)$, а затем последовательно $u(\eta, \zeta)$ и $b(\eta, \zeta)$, удовлетворяющих уравнениям Пуассона (11) и (12).

Предварительно можно заметить, что, если температура не изменяется вдоль стенки канала ($a_0 = 0$), то электрическое поле не оказывает влияния на скорость движения жидкости и имеет место обычный пуазейлевский поток; плотность свободного заряда $q = 0$, а температура увеличивается за счет теплоты Джоуля — Ленца.

Если $a_0 = \mathrm{const} \neq 0$, то, как следует из (10), $a = a_0$ и картина течения, согласно (11), качественно совпадает с потоком в отсутствие поля, однако интенсивность его изменяется. Так, при $a < 0$, т. е. когда градиент температуры направлен противоположно электрическому полю, система работает в режиме электрогидродинамического насоса.

Если $0 < a_0 < \alpha^{-1}$, то скорость потока падает и при $a_0 > \alpha^{-1}$ имеем течение, направленное противоположно градиенту давления. В отсутствие перепада давления ($\gamma = 0$) жидкость движется всегда в сторону уменьшения температуры независимо от направления электрического поля.

В общем случае, когда $a_0 \neq \mathrm{const}$, распределение скорости в канале качественно отлично от пуазейлевского. В качестве примера рассмотрим плоское течение поляризующейся жидкости в полости между параллельными пластинами.

Распределение скорости, свободного заряда и температуры между плоскостями $\eta = 0$ и $\eta = 1$, когда температура вдоль стенок $\tau|_{\eta=0} = a_0\xi + b_0$, $\tau|_{\eta=1} = a_1\xi + b_1$, согласно (10)—(12), будет,

$$u = \frac{\gamma}{2}\eta(1-\eta) + \frac{\alpha}{6}\eta\{\eta^2(a_1 - a_0) + 3a_0\eta - a_1 - 2a_0\};$$

$$q = (a_0 - a_1)\eta - a_0;$$

$$\tau = F(\eta) + \{(a_1 - a_0)\xi + b_1 - b_0 - F(1)\}\eta + a_0\xi + b_0;$$

$$F(\eta) = \frac{1}{360}\{(a_1 - a_0)[\alpha(a_1 - a_0)2w - 3\alpha\beta)\eta + 3\alpha a_0 - 9(\alpha a_0 - \gamma)\cdot$$

$$\cdot(2\alpha\beta - w)]\eta^4 + 5[2(a_1 - a_0)(\alpha\beta - w)\eta + 3(wa_0 + 2\beta\gamma -$$

$$-2\alpha\beta a_0)(12\gamma - 3\gamma\eta - 5\alpha a_0 - 4\alpha a_1)]\eta^3 + (3\gamma - 2\alpha a_0 - \alpha a_1 - 36\delta)\eta^2\}.$$

Расход жидкости через поперечное сечение канала равен $Q = \int\limits_0^1 u d\eta = Q_\gamma + Q_\alpha$, где $Q_\gamma = \gamma/12$ — расход в отсутствие электрического поля, а $Q_\alpha = \alpha(a_0 + a_1)/24$ — дополнительный вклад в расход за счет неоднородности поляризации.

Из решения видно, что распределение скорости в потоке, вообще говоря, не симметрично относительно средины канала. При $\gamma = 0$ и $a_1 = -a_0$ профиль скорости представляет собой кубическую параболу, т. е. происходит конвективное течение. Если $\gamma = 0$, $a_1 = a_0$, $Q_\gamma = 0$, а $Q_\alpha = a_0/12$ и, как уже отмечалось, система работает в режиме ЭГД-насоса. Приведем для этого случая некоторые количественные оценки, когда в качестве рабочей среды взято трансформаторное масло ($\eta_1 = 2 \cdot 10^{-2}$ *н·сек/м*^{2}, $\varepsilon_T \equiv \partial\varepsilon/\partial T = 3 \cdot 10^{-13}$ *ф/м·град*). Если расстояние между пластинами $L = 5 \cdot 10^{-2}$ *м*, а падение температуры вдоль стенок канала $A \equiv \partial T/\partial x = 10^2$ *град/м*, тогда в электрическом поле $E_0 = 10^6$ *в/м* перепад давления на 1 *м* длины канала составит 30 *н/м* и средняя скорость течения масла в таком насосе будет 0,4 *м/сек*.

Распределение скорости и заряда в круглой трубе ($0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$) при граничном условии для температуры $\tau|_{r=1} = (a_0 + a_1 \sin\varphi)\xi + b$ будут, согласно (10), (11), $u = 0{,}25(\gamma - a_0\alpha - 0{,}5a_1\alpha\sin\varphi)(1 - r^2)$ $q = -(a_0 + a_1 r\sin\varphi)$, т. е. принципиально не отличается от выше рассмотренного примера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. — «Магнитная гидродинамика», 1972, № 1, с. 3—11.
2. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред. — «Теория функций, функц. анализ и их прилож.», 1973, вып. 17, с. 221—239.
3. Мелчер Дж. Р. Электрогидродинамика. — «Магнитная гидродинамика», 1974, № 2, с. 3—30.

Поступила 5. I 1976 г.

УДК 517.9

В. А. ЛЬВОВ, канд. физ. мат. наук

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ОБЛАСТИ С ГРАНИЦЕЙ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ПРОДЫРЯВЛЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В работе [1] была развита общая математическая теория, позволяющая исследовать решение большого числа конкретных краевых задач в областях со сложной или мелкозернистой границей. Наиболее полные результаты были получены в случае первой краевой задачи и в случае «поверхностного» распределения границы для второй краевой задачи.

В данной работе исследуется решение третьей краевой задачи для уравнения Гельмгольца в том частном случае «объемного» распределения границы области, когда она состоит из большого числа продырявленных гладких поверхностей, лежащих в некоторой фиксированной области пространства R_3.

Ранее было показано [2], что в отличие от случая первой краевой задачи, когда влияние сложной границы учитывалось введением в исходное уравнение некоторого дополнительного члена вида — $q(x)\,u(x)$ (эффективного потенциала), влияние массивности «объемно» расположенной границы, а также взаимной ориентации ее частей, в случае второй краевой задачи, приводит к изменению коэффициентов при старших производных в исходном уравнении.

Мы покажем, что в случае третьей краевой задачи влияние сложной, «объемно» расположенной границы учитывается как введением в исходное уравнение некоторого дополнительного члена — потенциала, так и изменением коэффициентов при старших производных в исходном уравнении.

Пусть в пространстве R_3 определено семейство замкнутых гладких поверхностей $\{\Gamma_k\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, образованное поверхностями уровня некоторой однозначной функции $F(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in R_3$. Положим, что каждая из поверхностей Γ_k определяется уравнением

$$F(x) = \alpha + hk \equiv d_k^h,\ h = \frac{1}{n}(\beta - \alpha),$$

где $0 < \alpha < \beta$ и фиксированы.

Удалив из каждой поверхности конечное число непересекающихся, связных кусков $S_{k,i}$, $(i = 1, \ldots, p_k)$, ограниченных гладкими кривыми, получим продырявленные поверхности Σ_k. Положим $\Sigma = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Sigma_k$.

Область, являющуюся дополнением Σ ко всему пространству R_3, обозначим через D.

В силу того, что граница Σ области D является двухсторонней, предельные значения функций и их нормальных производных с одной и с другой стороны отмечаем соответственно знаками $(+)$ и $(-)$. Нормаль ν к поверхности Γ_k направлена из области, отмеченной знаком $(+)$, в область, отмеченную знаком $(-)$.

В области D рассмотрим краевую задачу для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = f(x), \quad \operatorname{Im} k > 0, \; x \in D \tag{1}$$

с граничным условием на множестве Σ

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]^+ + \psi(x)\,[u(x)]^+ = 0, \\ -\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]^- + \psi(x)\,[u(x)]^- = 0, \end{aligned}\right\} \quad x \in \Sigma \tag{2}$$

и условием на бесконечности

$$u(x) \to 0, \text{ когда } |x| \to \infty. \tag{3}$$

Предположим, что $f(x) \in L_2(R_3)$ произвольная, финитная функция с носителем, расположенным в области, внутренней по отношению к поверхности Γ_0, а $\psi(x)$ некоторая гладкая, неотрицательная, определенная во всем пространстве функция, имеющая гладкие граничные значения на Σ.

Так как граница Σ имеет углы, то решением краевой задачи (1)—(3) будем называть функцию $u(x) \in W_2^1(D) \cap W_{2,\,\text{лок}}^2(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) и удовлетворяющую граничному значению (2) на Σ в следующем смысле.

Пусть Φ_ρ кусочно гладкие поверхности, лежащие в области D и охватывающие множество Σ, причем, при $\rho \to 0$ все точки Φ_ρ стремятся к Σ. Тогда для любой функции $\zeta(x) \in W_2^1(D)$.

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{\Phi_\rho} \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \zeta(x)\, ds = \int\limits_{\Sigma} \psi(x) \left\{[u(x)]^+ [\zeta(x)]^- \, [u(x)]^- [\zeta(x)]^-\right\} ds. \tag{3'}$$

Здесь ν — нормаль к Φ_ρ, имеющая направление к Σ.

Нетрудно показать, что решение такой задачи существует и единственное.

Исследуем асимптотическое поведение решения задачи (1)—(3), когда число поверхностей Σ_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и число дырок на каждой из поверхностей растет, а диаметры дырок $S_{k,\,i}$ и расстояния между соседними поверхностями стремятся к нулю. Для этого мы рассмотрим последовательность областей D^h с границами $\Sigma^h = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \Sigma_k^h$ и соответствующие им решения $u^h(x)$ краевых задач (1)—(3) при $h \to 0$ $(n \to \infty)$. При этом мы будем считать, что функция $\psi(x)$, входящая в граничное условие, изменяется с изменением параметра h. Будем считать также, что при стремлении h к нулю число поверхностей Σ_k^h стремится к бесконечности и, сближаясь, они заполняют слой B, заключенный между фиксированными поверхностями $\Gamma_\alpha = \Gamma_0$ и $\Gamma_\beta = \Gamma_n$, определяемыми уравнениями $F(x) = \alpha$ и $F(x) = \beta$.

Для характеристики величин дырок $S_{k,\,i}^h$ мы будем использовать ньютоновскую емкость C множеств $S_{k,\,i}^h$. Ньютоновская емкость множества $S^h_{k,i}$ равна $C^h_{k,i} = \int\limits_{S^h_{k,i}} \mu(\xi)\, ds$, где функция $\mu(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_{S^h_{k,i}} \frac{\mu(\xi)}{|x-\xi|}\, ds_\xi = 1, \quad x \in S^h_{k,i}.$$

Установлению соотношений между диаметрами удаляемых кусков, расстояниями между ними, расстояниями между соседними поверхностями и поведением функции $\psi^h(x)$, при которых существует предел последовательности решений $u^h(x)$ исходных задач (1)—(3), когда $h \to 0$, а также выяснению того, чем является этот предел, посвящена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть каждую из поверхностей Σ^h_k можно разбить на некоторое число кусков $\Gamma^h_{k,i}$ диаметра $S^h_{k,i}$ и таких, что:*

1. Внутри каждого куска $\Gamma^h_{k,i}$ расположена только одна дырка $S^h_{k,i}$, причем так, что расстояние от $S^h_{k,i}$ до границы $\Gamma^h_{k,i}$ больше, чем $c_1\delta$, где $\delta \leqslant \max\limits_{k,i} \delta^h_{k,i}$ и $c_1 > 0$.

2. Диаметры $\Gamma^h_{k,i}$ не превышают $c_2 h^{2+\varepsilon}$, т. е. $\delta \leqslant c_2 h^{2+\varepsilon}$, где $c_2 > 0$ и $\varepsilon > 0$.

3. Для любого куска $\Gamma^h_{k,i}$ выполнено условие

$$C^h_{k,i} = \int\limits_{\Gamma^h_{k,i}} \frac{ds}{h\cdot\varphi(x)} \left[1 + O\left(\frac{\delta}{h}\right)\right],$$

где $C^h_{k,i}$ — ньютоновская емкость множества $S^h_{k,i}$, а $\varphi(x)$ некоторая положительная гладкая функция, определенная в слое B.

А также выполнено следующее условие

$$\psi^h(x) = h\psi(x)\,[1 + o(1)],$$

где $\psi(x)$ некоторая гладкая, неотрицательная функция, равная нулю вне слоя B.

Тогда при $h \to 0$ последовательность $u^h(x)$ решений краевых задач (1)—(3) сходится в метрике пространства $L_2(R_3)$ к функции $u(x)$, удовлетворяющей всюду в R_3 уравнению

$$\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) + (k^2 - 2\psi(x))\,u(x) = f(x), \tag{4}$$

где

$$A_{ij}(x) = \begin{cases} \delta_{ij} - \dfrac{|\nabla F(x)|^{-1}\varphi(x)}{1 + |\nabla F(x)|\,\varphi(x)} \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_i}\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_j}, & x \in B. \\ \delta_{ij}, & x \in R_3 \setminus B \end{cases}$$

На поверхностях Γ_α и Γ_β, ограничивающих слой T, $u(x)$ удовлетворяет условиям сопряжения

$$[u(x)]^- = [u(x)]^+,$$

$$\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]^- = \left[\frac{1}{1+|\nabla F(x)|\,\varphi(x)}\,\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right]^+, \tag{5}$$

а на бесконечности стремится к нулю.

При этом, для всех точек x, находящихся на положительном расстоянии от слоя B, сходимость $u^h(x)$ к $u(x)$ равномерная.

Доказательство этой теоремы можно получить с помощью методов, изложенных в работах [2], [3], используя при этом результат работы [4].

В силу того, что доказательство этой теоремы весьма громоздко и не обладает достаточной общностью, мы приведем лишь его краткую схему.

I. Сначала строится функция $W^h(x)$, аппроксимирующая при малых h в метрике пространства $L_2(R_3)$ решение предельной краевой задачи (4)—(5), т. е.

$$\lim_{h\to 0} \| W^h(x) - u(x) \|_{L_2(R_3)} = 0.$$

Введение такой функции подсказано работами [2], [3].

Построенная функция $W^h(x)$ вне множества $\bigcup\limits_{k=0}^{n} \Gamma_k$ всюду удовлетворяет уравнению (1) с правой частью, близкой к функции $f(x)$, а на множестве $\bigcup\limits_{k=0}^{n} \Gamma_k$ выполняются граничные условия типа сопряжения, рассмотренные в работе [4].

II. Затем, по функции $W^h(x)$ строится функция $v^h(x)$, которая является «почти» решением краевой задачи (1)—(3), а именно: $v^h(x)$ удовлетворяет в D^h уравнению (1) с правой частью, близкой к $f(x)$; функция $v^h(x)$ на Σ^h имеет нулевую нормальную производную; при переходе через множество $S^h_{k,i}$, $v^h(x)$ имеет скачок, который, однако, при малых h, в силу свойств функции $W^h(x)$ оказывается малым; функция $v^h(x)$ близка к функции $W^h(x)$ в метрике пространства $L_2(R_3)$, т. е.

$$\lim_{h\to 0} \| W^h(x) - v^h(x) \|_{L_2(R_3)} = 0.$$

III. Вариационным способом производится построение функции

$$z^h(x) = u^h(x) - v^h(x).$$

Очевидно, функция $z^h(x)$ должна компенсировать скачки функции $v^h(x)$ на множестве $S^h_{k,i}$ и невязку в правой части уравнения.

Оказывается, что

$$\lim_{h\to 0} \| z^h(x) \|_{L_2(R_3)} = 0.$$

Отсюда и из I, II следует

$$\lim_{h\to 0} \| u(x) - u^h(x) \|_{L_2(R_3)} = 0,$$

что и доказывает теорему 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев, «Наукова думка», 1974. 278 с.
2. Львов В. А., Хруслов Е. Я. Исследование решения второй краевой задачи в областях с границей, состоящей из большого числа продырявленных поверхностей. — В кн.: «Математическая физика и функциональный анализ», 2. Харьков, Изд-во ФТИНТ АН УССР, 1971, с. 76—98.
3. Львов В. А. Предельное уравнение для решения одной краебой задачи многослойной области. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Изд-во ХГУ, 1971, вып. 14, с. 15—19.
4. Сузиков Г. В. Третья краевая задача в областях со сложной границей. — «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Изд-во ХГУ, 1966, вып. 3. с. 28—40.

Поступила 5. I 1976 г.

УДК 538.4

Э. Н. ТАТАРЧЕНКО

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ШВЕДОВА-БИНГАМА МЕЖДУ ДВУМЯ БЕСКОНЕЧНЫМИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛАСТИНАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТИ МЕЖДУ НИМИ И ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ

В работе [1] исследованы установившиеся течения типа Куэтта и типа Пуазейля между двумя бесконечными параллельными пластинами для тела Шведова-Бингама. Отличие течения типа Куэтта от соответствующего течения вязкой жидкости состоит в различии сдвиговых напряжений на величину предела текучести материала. Для течения типа Пуазейля в середине течения появляется квазитвердое ядро и профиль скоростей поперечного сечения уплощается. Существует минимальный перепад давления, при котором это течение возникает. С увеличением перепада давления толщина квазитвердого ядра уменьшается, а профиль скоростей приближается к профилю скоростей вязкой жидкости [2].

В настоящей работе рассматривается установившееся движение тела Шведова-Бингама с динамической вязкостью μ и пределом текучести τ_0 под действием заданного продольного перепада давления $\left(-\frac{dp}{dx}\right) > 0$ между двумя бесконечными параллельными пластинами, находящимися на расстоянии h одна от другой. Нижняя пластина неподвижна, верхняя движется в направлении оси x с заданной постоянной скоростью U. Выбор направления осей указан на рис. 1. Касательное напряжение τ связано со скоростью деформации реологическим соотношением Шведова-Бингама

$$\tau = \omega\tau_0 + \mu \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad \text{при } |\tau| > \tau_0,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \quad \text{при } |\tau| < \tau_0, \tag{1}$$

$$\omega = \operatorname{sign} \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad (i = 1, \ 3).$$

Здесь v_i скорости течения в соответствующих зонах в направлении оси x.

Рассмотрим вначале случай, когда между зонами вязкопластического течения (зоны I и III), имеющих соответственно толщины δ_1 и δ_3, возникает квазитвердое ядро толщиной δ_2 (зона II). Уравнения движения среды в вязкопластических зонах течения имеют вид

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}. \quad (i = 1,\ 3). \tag{2}$$

Из условия равномерного движения ядра и условий, что на его границах касательное напряжение сдвига равно пределу текучести материала, получаем уравнения для определения толщины ядра

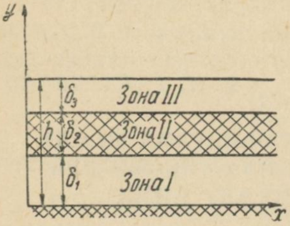


Рис. 1

$$\left(-\frac{dp}{dx}\right)\delta_2 = 2\tau_0. \tag{3}$$

Граничные условия задачи, учитывающие условия прилипания на пластинах, равенство касательных напряжений сдвига на границах ядра пределу текучести материала, а также требование непрерывности скорости на границах зон записываются в виде

$$\begin{gathered} v_1 = 0 \text{ при } y = 0; \quad v_3 = U \text{ при } y = h; \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \delta_1 \text{ и } y = h - \delta_3, \\ v_i = v_2 \text{ при } y = \delta_1 \text{ и } y = h - \delta_3, \end{gathered} \tag{4}$$

где v_2 — скорость ядра.

Задача сводится к нахождению профиля скоростей в зонах вязкопластического течения, скорости ядра и определению толщин трех зон. Решая уравнение (2) с учетом граничных условий (4) получаем формулу распределения скоростей в первой зоне

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\frac{y}{2}(2\delta_1 - y). \tag{5}$$

Для третьей зоны формула распределения скоростей получается из (5) путем замены y на $h - y$, δ_1 на δ_3 и добавлением слагаемого U

$$v_3 = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\cdot\frac{h-y}{2}[2\delta_3 - (h - y)] + U. \tag{6}$$

Условия непрерывности скорости на границах соседних зон приводят к условиям, связывающим толщины δ_1 и δ_3 со скоростью ядра v_2.

$$v_2 = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\frac{\delta_1^2}{2} = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\frac{\delta_3^2}{2} + U. \tag{7}$$

Еще одно условие, связывающее δ_1 и δ_3, имеет вид

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = h. \tag{8}$$

Введем два безразмерных параметра, характеризующих решение данной задачи,

$$S = \frac{h\tau_0}{\mu U}, \quad \alpha = \frac{2\tau_0}{h\left(-\frac{dp}{dx}\right)}. \tag{9}$$

Из уравнений (5), (7), (8) находим

$$\delta_1 = \frac{1}{2} h \left[(1-\alpha) + \frac{\alpha}{S} \cdot \frac{1}{1-\alpha}\right], \tag{10}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2} h \left[(1-\alpha) - \frac{\alpha}{S} \cdot \frac{1}{1-\alpha}\right], \tag{11}$$

$$\delta_2 = h\alpha, \text{ причем } 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{12}$$

Формулы распределения скоростей для трехзонного течения с учетом (9)—(12) запишутся следующим образом:

$$v_1 = U\left\{\frac{S}{\alpha}\bar{y}\,[(1-\alpha)-\bar{y}] + \frac{\bar{y}}{1-\alpha}\right\}, \tag{13}$$

$$v_3 = U\left\{\frac{s}{\alpha}(1-\bar{y})(\bar{y}-\alpha) + \frac{\bar{y}-\alpha}{1-\alpha}\right\}, \tag{14}$$

$$v_2 = \frac{1}{4}\frac{US}{\alpha}\left[(1-\alpha) + \frac{\alpha}{S} \cdot \frac{1}{1-\alpha}\right]^2, \tag{15}$$

где $\bar{y} = y/h$. В случае вязкой жидкости $\tau_0 = 0$, тогда $\alpha = 0$, а δ_1 и δ_2 определяют расстояние от пластин до линии тока с максимальной по величине скоростью течения.

Из приведенных решений следует, что $\delta_1 \geqslant \delta_3 > 0$ и $v_2 \geqslant U$. Равенство толщин вязкопластичных слоев имеет место при $U = 0$, это случай течения типа Пуазейля. Неравенство $\alpha < 1$ определяет условия его возникновения.

Из формул (10), (11) следует, что при уменьшении α от единицы до нуля, что соответствует возрастанию перепада давления от $\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{2\tau_0}{h}$ до $+\infty$, и при фиксированных остальных параметрах течения, δ_2 стремится к нулю, а δ_3 и δ_1 стремятся к $\frac{1}{2}h$. Таким образом, при очень больших перепадах давления течение совпадает с течением Пуазейля для вязкой жидкости.

Из формул (11), (12) следует, что трехзонное течение возникает при выполнении условий $\alpha < 1$ и $\delta_3 > 0$, критерий его существования можно записать в виде

$$S > \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}. \tag{16}$$

Область значений параметров S и α, для которых возможно трехзонное течение, указано на рис. 2 (область III).

При $S = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, $\delta_3 = 0$, течение состоит из двух зон: квазитвердого ядра, примыкающего к верхней пластине и движущегося со скоростью U, и вязкопластического течения.

Здесь v_i скорости течения в соответствующих зонах в направлении оси x.

Рассмотрим вначале случай, когда между зонами вязкопластического течения (зоны I и III), имеющих соответственно толщины δ_1 и δ_3, возникает квазитвердое ядро толщиной δ_2 (зона II). Уравнения движения среды в вязкопластических зонах течения имеют вид

$$\frac{dp}{dx} = \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2}. \quad (i = 1,\ 3). \tag{2}$$

Из условия равномерного движения ядра и условий, что на его границах касательное напряжение сдвига равно пределу текучести материала, получаем уравнения для определения толщины ядра

$$\left(-\frac{dp}{dx}\right) \delta_2 = 2\tau_0. \tag{3}$$

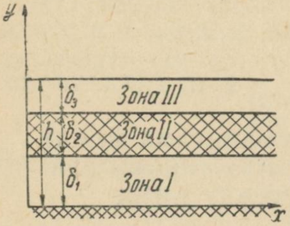


Рис. 1

Граничные условия задачи, учитывающие условия прилипания на пластинах, равенство касательных напряжений сдвига на границах ядра пределу текучести материала, а также требование непрерывности скорости на границах зон записываются в виде

$$\begin{gathered} v_1 = 0 \text{ при } y = 0; \quad v_3 = U \text{ при } y = h; \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \delta_1 \text{ и } y = h - \delta_3, \\ v_i = v_2 \text{ при } y = \delta_1 \text{ и } y = h - \delta_3, \end{gathered} \tag{4}$$

где v_2 — скорость ядра.

Задача сводится к нахождению профиля скоростей в зонах вязкопластического течения, скорости ядра и определению толщин трех зон. Решая уравнение (2) с учетом граничных условий (4) получаем формулу распределения скоростей в первой зоне

$$v_1 = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\frac{y}{2}(2\delta_1 - y). \tag{5}$$

Для третьей зоны формула распределения скоростей получается из (5) путем замены y на $h - y$, δ_1 на δ_3 и добавлением слагаемого U

$$v_3 = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\cdot\frac{h-y}{2}[2\delta_3 - (h - y)] + U. \tag{6}$$

Условия непрерывности скорости на границах соседних зон приводят к условиям, связывающим толщины δ_1 и δ_3 со скоростью ядра v_2.

$$v_2 = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\frac{\delta_1^2}{2} = \left(-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\right)\frac{\delta_3^2}{2} + U. \tag{7}$$

Еще одно условие, связывающее δ_1 и δ_3, имеет вид

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = h. \tag{8}$$

Введем два безразмерных параметра, характеризующих решение данной задачи,

$$S = \frac{h\tau_0}{\mu U}, \quad \alpha = \frac{2\tau_0}{h\left(-\frac{dp}{dx}\right)}. \tag{9}$$

Из уравнений (5), (7), (8) находим

$$\delta_1 = \frac{1}{2} h \left[(1-\alpha) + \frac{\alpha}{S} \cdot \frac{1}{1-\alpha}\right], \tag{10}$$

$$\delta_3 = \frac{1}{2} h \left[(1-\alpha) - \frac{\alpha}{S} \cdot \frac{1}{1-\alpha}\right], \tag{11}$$

$$\delta_2 = h\alpha, \text{ причем } 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{12}$$

Формулы распределения скоростей для трехзонного течения с учетом (9)—(12) запишутся следующим образом:

$$v_1 = U\left\{\frac{S}{\alpha}\bar{y}\,[(1-\alpha)-\bar{y}] + \frac{\bar{y}}{1-\alpha}\right\}, \tag{13}$$

$$v_3 = U\left\{\frac{s}{\alpha}(1-\bar{y})(\bar{y}-\alpha) + \frac{\bar{y}-\alpha}{1-\alpha}\right\}, \tag{14}$$

$$v_2 = \frac{1}{4}\frac{US}{\alpha}\left[(1-\alpha) + \frac{\alpha}{S} \cdot \frac{1}{1-\alpha}\right]^2, \tag{15}$$

где $\bar{y} = y/h$. В случае вязкой жидкости $\tau_0 = 0$, тогда $\alpha = 0$, а δ_1 и δ_2 определяют расстояние от пластин до линии тока с максимальной по величине скоростью течения.

Из приведенных решений следует, что $\delta_1 \geqslant \delta_3 > 0$ и $v_2 \geqslant U$. Равенство толщин вязкопластичных слоев имеет место при $U = 0$, это случай течения типа Пуазейля. Неравенство $\alpha < 1$ определяет условия его возникновения.

Из формул (10), (11) следует, что при уменьшении α от единицы до нуля, что соответствует возрастанию перепада давления от $\left(-\frac{dp}{dx}\right) = \frac{2\tau_0}{h}$ до $+\infty$, и при фиксированных остальных параметрах течения, δ_2 стремится к нулю, а δ_3 и δ_1 стремятся к $\frac{1}{2}h$. Таким образом, при очень больших перепадах давления течение совпадает с течением Пуазейля для вязкой жидкости.

Из формул (11), (12) следует, что трехзонное течение возникает при выполнении условий $\alpha < 1$ и $\delta_3 > 0$, критерий его существования можно записать в виде

$$S > \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}. \tag{16}$$

Область значений параметров S и α, для которых возможно трехзонное течение, указано на рис. 2 (область III).

При $S = \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$, $\delta_3 = 0$, течение состоит из двух зон: квазитвердого ядра, примыкающего к верхней пластине и движущегося со скоростью U, и вязкопластического течения.

В двухзонной области течения имеем

$$v_1 = U\sqrt{\frac{S}{\alpha}\bar{y}}\left(2-\sqrt{\frac{S}{\alpha}\bar{y}}\right); \quad v_2 = U; \tag{17}$$

$$\delta_1 = h\sqrt{\frac{\alpha}{S}}; \quad \delta_2 = h - \delta_1; \quad \delta_2 > 0.$$

Критерий его существования записывается неравенствами

$$\alpha < S \leqslant \frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{18}$$

Значения параметров S и α, удовлетворяющих неравенству (18), на рис. 2 представлены областью II. При $S = \alpha$, $\delta_2 = 0$ в квазитвердое ядро исчезает и при выполнении условия

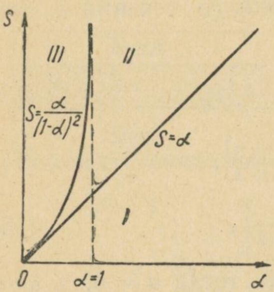


Рис. 2

$$S \leqslant \alpha \tag{19}$$

возникает однозонное течение, для которого $\frac{\partial v_1}{\partial y} \neq 0$ при $y = h$. Множество значений параметров S и α для однозонного течения располагаются ниже прямой $S = \alpha$ (см. рис. 2, область I). Распределение скоростей в этом случае совпадает с распределением скоростей вязкой жидкости

$$v_1 = U\left[\frac{S}{\alpha}\frac{\bar{y}}{2}(1-\bar{y}) + \bar{y}\right]. \tag{20}$$

Таким образом, для $\alpha < 1$ возможны три вида движения: трехзонное, двухзонное и однозонное. Исследуем, как изменяется характер течения при изменении скорости верхней пластины U от нуля до $+\infty$ при фиксированных остальных параметрах (S при этом изменяется от $+\infty$ до нуля, а α постоянно). Вначале возникает трехзонное течение с симметричным расположением ядра, затем ядро, не меняя своей толщины, перемещается к подвижной пластине; по достижении ядром верхней пластины возникает двухзонное течение с уменьшающимся по толщине ядром и, когда толщина ядра становится равной нулю, течение становится однозонным.

В случае малых перепадов давления $\left(-\frac{dp}{dx}\right)h < 2\tau_0$, ($\alpha > 1$), возможны только двухзонное и однозонное течения. Критерии существования таких течений по-прежнему определяются неравенствами (18) и (19), а распределение скоростей формулами (17), (20). Из формулы (20) следует, что при $\alpha \to \infty$ и фиксированном S течение переходит в течение типа Куэтта.

Для случая, когда имеется противодавление, $\frac{dp}{dx} > 0$, тоже возможны три вида течения: трехзонное, двухзонное и однозонное. Для трехзонного течения отличие от течения, рассмотренного выше, состоит в том, что $\delta_3 > \delta_1$ и скорость квазитвердого ядра по направлению противоположна скорости верхней пластины, причем

$$|v_2| < U, \quad \operatorname{sign} v_1 = -\operatorname{sign} U.$$

В третьей зоне имеются точки, скорость которых равняется нулю: они определяются соотношениями

$$y = h - \frac{2\tau_0}{\frac{dp}{dx}}. \tag{21}$$

Увеличение скорости верхней пластины приводит к тому, что квазитвердое ядро, не меняя своей толщины, смещается вниз, пока не достигнет нижней пластины. Течение становится двухзонным. Для него характерно, что по мере увеличения скорости толщина ядра уменьшается до нуля, и дальнейшее увеличение скорости приводит к появлению однозонного течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М., Изд-во иностр. лит., 1963. 311 с.
2. Седов Л. И. Механика сплошных сред. В 2-х т., т. 2. М., «Наука», 1973. 492 с.

Поступила 5. I 1976 г.

УДК 512.519:4

Л. Н. ЭЛЬКИН

К ВОПРОСУ О ПРОСТЫХ ПОЗИЦИОННЫХ ОПЕРАТИВАХ

Теорема Сушкевича-Риса-Клиффорда о строении вполне простых полугрупп (т. е. i-простых полугрупп, содержащих минимальные левые и правые идеалы) оказалась одним из фундаментальных результатов теории полугрупп, положивших начало ее систематическому развитию. Аналогичная теорема была доказана Л. М. Глускиным для полугруд, т. е. алгебр с одной тернарной операцией $[s_1s_2s_3] = s$, удовлетворяющих тождествам типа ассоциативности: $[[s_1s_2s_3]\, s_4s_5] = [s_1\, [s_4s_3s_2]\, s_5] = [s_1s_2\, [s_3s_4s_5]]$. Эта глубокая аналогия привела к созданию [2] основ теории позиционных оперативов — класса алгебр с одной n-арной операцией, удовлетворяющих тождествам (1).

Цель настоящей статьи — изучение i-простых P_{n1}-оперативов (п. 1). Основным ее результатом является теорема п. 8 о разложении i-простого P_{n1}-оператива в 0-объединение его (m, t)-идеалов. Она обобщает результаты статьи [3], доказанные при дополнительном ограничении $\rho_n = \varepsilon$ (п. 1). Все не приведенные в статье определения см. в [3].

1. Оперативом называется множество S с одной всюду определенной n-арной операцией: $s_1s_2 \ldots s_n = s$ $(s_i,\ s \in S)$. В дальнейшем считаем, что $n > 2$.

Оператив S, содержащий более одного элемента, называется i-простым, если он не содержит собственных идеалов и не изоморфен оперативу $V_n = \{0, a\}$, где 0 — нуль и $a^n = 0$.

Лемма. *Если S — i-простой оператив, то $S^n = S$.*

Доказательство леммы приведено в [3].

Всюду в дальнейшем через J_r будем обозначать отрезок натурального ряда $\{1, 2, \ldots, r\}$. Пусть $P = \{\rho_k\}_{k=1}^{n}$ — семейство подстановок множества J_{2n-1}, причем $\rho_1 = \varepsilon$ (ε — тождественная подстановка). Оператив S называется позиционным оперативом, ассоциированным с семейством P (или, короче, P-оперативом), если при любых $k \leqslant n$, $s_i \in S$

$$s_1 s_2 \ldots s_{k-1} (s_k s_{k+1} \ldots s_{k+n-1}) s_{k+n} \ldots s_{2n-1} = s_{\rho_k 1} s_{\rho_k 2} \ldots s_{\rho_k (2n-1)}. \tag{1}$$

P-оператив S назовем P_{n1}-оперативом, если $\rho_n \{1, 2, \ldots, n-1\} = \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Иначе говоря, для p_{n1}-оператива найдутся подстановки σ и π множества J_n такие, что $\sigma n = n$, и при любых x_i, $y_j \in S$

$$x_1 x_2 \ldots x_{n-1} (y_1 y_2 \ldots y_n) = x_{\sigma 1} x_{\sigma 2} \ldots x_{\sigma(n-1)} y_{\pi 1}) y_{\pi 2} \ldots y_{\pi n}. \tag{2}$$

2. Для любого непустого подмножества A P_{n1}-оператива S обозначим $(A)_k = S^{k-1} A S^{n-k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$; $(A)_{n+1} = S^{n-1} A S^{n-1}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $(\{a\})_k$ будем писать $(a)_k$.

Всюду в дальнейшем S — i-простой P_{n1}-оператив. Из (1) и $S^n = S$ при $2 \leqslant r \leqslant n-1$ вытекают следующие тождества:

$$S^{r-1} (S^{h-r} a S^{n-h+r-1}) S^{n-r} = S^{\rho_r^{-1} h - 1} a S^{2n - \rho_r^{-1} h - 1}; \tag{3}$$

$$S^{h-1} a S^{r-h-1} (S^n) S^{n-r} = S^{\rho_r^{-1} h - 1} a S^{2n - \rho_r^{-1} h - 1}; \tag{4}$$

$$S^{r-1} (S^n) S^{h-n-r} a S^{2n-1-h} = S^{\rho_r^{-1} h - 1} a S^{2n - \rho_r^{-1} h - 1}, \tag{5}$$

где в (3) $h = r, r+1, \ldots, r+n-1$; в (4) $h = 1, 2, \ldots, r-1$) в (5) $h = n+r, n+r+1, \ldots, 2n-1$. Обозначим (п. 1) $I_1 = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, $I_2 = \{2, 3, \ldots, n\}$, $I_0 = \{0, 1 \ldots, n\}$ $I^r = \{n+r, n+r+1, \ldots, 2n-1\}$, $K^r = \{r, r+1, \ldots, n+r-1\}$, $\rho_r \sigma^{-1} h = h_1$ $(h \in I_1)$, $\rho_r (h+n-1) = h_2$ $(h \in I_2)$. Введем следующие отображения θ_1, ξ_1 и θ_2, ξ_2 множеств I_1 и, соответственно, I_2 в I_0.

$$\theta_1 h = \begin{cases} h_1, & \text{если } h_1 \in J_{r-1}, \\ h_1 - (n-1), & \text{если } h_1 \in I^r, \\ 0, & \text{если } h_1 \in K^r. \end{cases}$$

$$\xi_1 h = \begin{cases} 0, & \text{если } \theta_1 h \neq 0; \\ h_1 - (r-1), & \text{если } \theta_1 h = 0. \end{cases} \tag{6}$$

$$\theta_2 h = \begin{cases} h_2, & \text{если } h_2 \in J_{r-1}, \\ h_2 - (n-1), & \text{если } h_2 \in I^r, \\ 0, & \text{если } h_2 \in K^r. \end{cases}$$

$$\xi_2 h = \begin{cases} \;, & \text{если } \theta_2 h \neq 0; \\ h_2 - (r-1), & \text{если } \theta_2 h = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Из равенств (3)—(5), тождества (2) и (6), (7) следует, что

$$(a)_h = \begin{cases} (a)_{\theta_1 h} & \text{при } \theta_1 h \neq 0, \\ ((a)_{\xi_1 h})_r & \text{при } \theta_1 h = 0, \end{cases} \quad h \in I_1; \tag{8}$$

$$(a)_h = \begin{cases} (a)_{\theta_2 h} & \text{при } \theta_2 h \neq 0, \\ ((a)_{\xi_2 h})_r & \text{при } \theta_2 h = 0, \end{cases} \quad h \in I_2. \tag{9}$$

3. Так как σ и ρ_r — подстановки соответственно множеств J_n и J_{2n-1}, то отображения θ_k (и аналогично ξ_k) частично взаимно-однозначны в следующем смысле: для любых x, $y \in I_k$ из $\theta_k x = \theta_k y \neq 0$ (соответственно, $\xi_k x = \xi_k y \neq 0$) следует $x = y$ ($k = 1, 2$). Кроме того, $\theta_1 I_1 \cap \theta_2 I_2 \setminus \{0\} = \varnothing$; $\xi_1 I_1 \cap \xi_2 I_2 \setminus \{0\} = \varnothing$.

4. **Лемма.** *Пусть a — фиксированный ненулевой элемент i-простого P_{n1}-оператива, S; $2 \leqslant r \leqslant n-1$, $h \in J_{n+1} \setminus \{1, n\}$* (п. 1). *Тогда существуют такие j p, $q \in J_n$, что $p \neq q$ и*

$$((a)_j)_r = (a)_h; \quad ((a)_p)_r = ((a)_q)_r = (a)_r. \tag{10}$$

Доказательство. В силу (6), (7) и п. 3 для любого $h \in I_1$ ($h \in I_2$) существует такое $l_h \in J_{n-1}$, ($m_h \in J_{n-1}$), что при $f \leqslant l_h - 1$ ($f \leqslant m_h - 1$) $\theta_1^f h \neq 0$ ($\theta_2^f h \neq 0$), и выполняется одно из соотношений

$$\text{а) } \theta_1^{l_h} h = 0; \quad \text{б) } \theta_1^{l_h} h = h; \quad \text{в) } \theta_1^{l_h} h = n; \tag{11}$$

$$\text{а) } \theta_2^{m_h} h = 0; \quad \text{б) } \theta_2^{m_h} h = h; \quad \text{в) } \theta_2^{m_h} h = 1). \tag{12}$$

В случаях (11а), (12а) обозначим $\xi_1 \theta_1^{l_h - 1} h = \bar{h}$, $\xi_2 \theta_2^{m_h - 1} h = \tilde{h}$ ($\bar{h}$, $\tilde{h} \in J_n$). Тогда из (8), (9) соответственно имеем

$$(a)_h = (a)_{\theta_1 h} = \ldots = ((a)_{\bar{h}})_r; \tag{13}$$

$$(a)_h = (a)_{\theta_2 h} = \ldots = ((a)_{\tilde{h}})_r. \tag{14}$$

В случаях (11в), (12в) из (8), (9) соответственно получаем

$$(a)_h = (a)_{\theta_1 h} = \ldots = (a)_n; \tag{15}$$

$$(a)_h = (a)_{\theta_2 h} = \ldots = (a)_1. \tag{16}$$

Допустим, что $\theta 1 = t \,\bar{\in}\, \{1, n\}$. Если для $h = 1$ имеет место (11 а), то вследствие (13), $(a_1) = ((a)_j)_r$, для $j = \bar{1} \in J_n$. Пусть при $h = 1$ верно (11 б). Тогда в силу п. 3 для $h = t$ выполняется (12 а). Из (8), (14) для некоторого $\tilde{t} \in J_n$ получим $(a)_1 = (a)_t = (a)_{\theta_2 t} = \ldots = \left((a)_{\tilde{t}}\right)_r$. Если для $h = 1$ имеет место (11 в), то, вследствие п. 3, при $h = n$ выполняются соотношения (12 а) или (12 в). В случае (12 а), как и выше, $(a)_1 = \left((a)_{\tilde{n}}\right)_r$. В случае (12 в), опять на основании п. 3, для $h = t$ справедливо (12 а). Отсюда аналогично предыдущему $(a)_1 = (a)_{\theta_1 1} = (a)_t = \ldots = \left((a)_{\tilde{t}}\right)_r$. Таким образом, при $\theta_1 1 = t \,\bar{\in}\, \{1, n\}$ доказано существование такого $j \in J_n$, что

$$(a)_1 = ((a)_j)_r. \tag{17}$$

Если $\theta n = p \overline{\in} \{1, n\}$, то, рассуждая аналогично, можно показать, что для некоторого $l \in J_n$

$$(a)_n = ((a)_l)_r. \tag{18}$$

Пусть теперь $2 \leqslant h \leqslant n-1$. В силу предыдущих рассмотрений (в частности п. 3) для h выполняется одно из соотношений (11 а), (12 а), (11 в), (12 в). Из равенств (13)—(18) вытекает тогда существование такого $j \in J_n$, что $((a)_j)_r = (a)_h$. Вследствие (3)—(5), $(a)_{n+1} = ((a)_j)_r$ или $(a)_{n+1} = (a)_h$ для некоторых h, $j \in J_n$. Отсюда, из (17), (18) и справедливости при $h \in J_{n-1} \diagdown \{1\}$ первого из равенств (10) следует, что $(a)_{n+1} = ((a)_j)_r$ для некоторого $j \in J_n$. Таким образом, первое из равенств (10) доказано.

В силу (6), (1) r не является образом никакого элемента при отображениях θ_1 и θ_2. Отсюда вытекает, что случаи (11 б) и (12 б) для $h = r$ не имеют места. Если для $h = r$ выполняются соотношения (11 а) и (12 а), то, вследствие (13), (14), $(a)_r = \left((a)_{\bar{r}}\right)_r = \left((a)_{\tilde{r}}\right)_r$.

Так как $\xi_1 I_1 \cap \xi_2 I_2 \diagdown \{0\} = \varnothing$ (п. 3), то $\bar{r} \neq \tilde{r}$. и второе утверждение леммы в этом случае доказано. Аналогично, учитывая п. 3 и равенства (13)—(16), проводится доказательство второго из равенств (10), когда имеет место комбинация случаев (11 а) или (11 в) и (12 а) или (12 в).

5. Всюду в дальнейшем через I будем обозначать множество $\{2, 3, \ldots, n-1, n+1\}$.

Лемма. *Пусть S i-простой P_{n1}-оператив. Тогда для любых $k \leqslant n$, $h \in I$ существует такое $j \in I$ (зависящее, вообще говоря, от k и h), что $((a)_j)_k = (a)_h$.*

Доказательство. Допустим $k \leqslant n$ и $\rho_k^{-1}(k-1+n) = d \neq n$. Полагаем $r = \sigma d$, если $d < n$ (п. 1) и $r = d-(n-1)$, если $d > n$. Тогда из (1) и $S^n = S$ для $j \in J_n$ имеем

$$(((a)_j)_n)_k) = \begin{cases} ((a)_j)_1, \text{ если } r = 1, \\ ((a)_j)_n, \text{ если } r = n, \\ ((a)_j)_r, \text{ если } r \overline{\in} \{1, n\}. \end{cases} \tag{19}$$

В силу $S^n = S$ и тождества (2) $((a_j)_1 = (a)_{\sigma j}$, если $j \leqslant n-1$, $((a)_j)_1 = (a)_{n+1}$, если $j = n$; $((a)_j)_n = (a)_{\pi^{-1} j}$ при $j \neq \pi 1$, $((a)_j)_n = (a)_{n+1}$ при $j = \pi 1$. Тогда при $r = 1$ имеем

$$(a)_{\sigma j} = \begin{cases} ((a)_{\pi^{-1} j})_k, \text{ если } j \leqslant n-1,\ j \neq \pi 1; \\ ((a)_{n+1})_k, \text{ если } j \leqslant n-1,\ j = \pi 1; \end{cases} \tag{20}$$

$$(a)_{n+1} = \begin{cases} ((a)_{\pi^{-1} n})_k \text{ при } n \neq \pi 1; \\ ((a)_{n+1})_k \text{ при } n = \pi 1. \end{cases}$$

Пусть для некоторого $j \in J_n$ $\pi^{-1} j = n$. Вследствие $r = 1$, (19) и (20) $((a)_{\pi^{-1} j})_k = ((a_n))_k = (a)_1 = (a)_{\sigma j}$. Если $\sigma j = 1$, то утверждение леммы вытекает из (20). Если же $\sigma j \neq 1$, то для некоторого $t \neq j$ $\sigma t = 1$, $\pi^{-1} t \neq n$, $((a)_{\pi^{-1} t})_k = (a)_{\sigma t} = (a)_1$ и, следовательно, $(a)_j = ((a)_{\pi^{-1} t})_k$. Отсюда и из равенств (20) снова вытекает утверждение леммы.

Если $r = n$, то из (19) получаем $((a)_{\pi^{-1}j})_k = (a)_{\pi^{-1}j}$ при $j \in J_n$, $j \neq \pi 1$; $((a)_{n+1})_k = (a)_{n+1}$, что и доказывает лемму.

При $r \overline{\in} \{1, n\}$, учитывая (19), имеем

$$((a)_{\pi^{-1}j})_k = ((a)_j)_r, \text{ если } j \in J_n,\ j \neq \pi 1, \qquad (21)$$
$$((a)_{n+1})_k = ((a)_{\pi 1})_r.$$

Из леммы п. 4 следует, что для любого $h \in I$ существует такое $j \in I_n$, что $(a)_h = ((a)_j)_r$, или в силу (21)

$$(a)_h = \begin{cases} ((a)_{\pi^{-1}j})_k & \text{при } j \neq \pi 1; \\ ((a)_{n+1})_k & \text{при } j = \pi 1. \end{cases} \qquad (22)$$

Если $\pi^{-1}p = n$, то по определению r $((a)_{\pi^{-1}p})_k = ((a)_n)_k = (a)_r$. Вследствие леммы п. 4 и (21), найдется такое $q \neq p$, что $(a)_r = ((a)_q)_r = ((a)_{\pi^{-1}q})_k$ при $q \neq \pi 1$, $(a)_r = ((a)_q)_r = ((a)_{n+1})_k$ при $q = \pi 1$, где $\pi^{-1}q \neq n$. Отсюда и из (22) следует справедливость леммы.

Если $\rho_k^{-1}(k + n - 1) = n$, то $\rho_k^{-1}k \neq n$. Полагаем $r = \sigma\rho_k^{-1}k$ при $\rho_k^{-1}k < n$, $r = \rho_k^{-1}k - (n - 1)$ при $\rho_k^{-1}k > n$ и рассматриваем равенства $(((a)_j)_1)_k = ((a)_j)_1$, если $r = 1$; $(((a)_j)_1)_k = ((a)_j)_n$, если $r = n$; $(((a)_j)_1)_k = ((a)_j)_r$, если $r \overline{\in} \{1, n\}$. Используя вместо (19) последние равенства и рассуждая аналогично предыдущему, снова получаем утверждение леммы.

6. Пусть γ_a — следующая эквивалентность на множестве

$$h\gamma_a j \longleftrightarrow (a)_h = (a)_j. \qquad (23)$$

Обозначим через $\overline{h}$ класс эквивалентности h, содержащий индекс $h \in J_{n+1}$; через $\overline{J}_a$ (соответственно, $\overline{I}_a$) — множество всех классов $\overline{h}$, где $h \in I_{n+1}$ (соответственно, $h \in I$ (п. 5)). Если $j \in \overline{h}$, то будем писать $(a)_j = (a)_{\overline{h}}$. Пусть далее $\overline{\omega}_a$ — тот из классов $\overline{h}$, для которого $(a)_{\overline{h}} = \{0\}$ и $\Gamma_a = \overline{I}_a \setminus \{\overline{\omega}_a\}$.

Ввиду $S^n = S$ и тождеств (1), (2) для любых $h \in J_{n+1}$, $k \in J_n$ найдется такое $r \in J_{n+1}$, что $((a)_h)_k = (a)_r$.

Теперь в силу (23) можно определить отображение $\overline{\eta}_k$ множества $\overline{J}_a$ в себя: $\overline{\eta}_k\overline{h} = \overline{r}$. Равенство $((a)_h)_k = (a)_r$ тогда примет вид

$$((a)_{\overline{h}})_k = (a)_{\overline{\eta}_k\overline{h}} \quad (h \in J_{n+1},\ k \in J_n). \qquad (24)$$

Лемма. *Каждое преобразование $\overline{\eta}_k$ взаимно-однозначно отображает множество I_a на себя, причем $\eta\Gamma_a = \Gamma_a$.*

Доказательство. Пусть S — i-простой P_{n1}-оператив. В силу леммы п. 5 для любых $k \in J_n$, $h \in I$ существуст такое $j \in I$, что $((a)_j)_k = (a)_h$. Отсюда получаем, что $\overline{\eta}_k\overline{I}_a \supseteq \overline{I}_a$. Так как количество элементов множества $\overline{I}_a$ конечно, то $\overline{\eta}_k$ — взаимно-однозначное отображение множества $\overline{I}_a$ на себя. Из взаимной однозначности преобразования $\overline{\eta}_k$ и $S^{k-1}\, 0\, S^{n-k} = \{0\}$ следует, что $\overline{\eta}_k\Gamma_a$ при $k = 1, 2, \ldots, n$).

7. Положим $\bar{\eta}_{n+1} = \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_n$ (п. 6). В силу леммы п. 6 $\bar{\eta}_{n+1}$ — взаимно-однозначное отображение множества $\bar{I}_a$ на себя, причем $\bar{\eta}_k \Gamma_a = \Gamma_a$. Из $S^n = S$, тождеств (1), (2) и равенства (24), как и в [3], следует, что при произвольных $k, j \in J_{n+1}$

$$\bar{\eta}_k \bar{\eta}_j = \bar{\eta}_{\varphi(k,\, j)}, \tag{25}$$

где φ — некоторое отображение множества $J_{n+1} \times J_{n+1}$ в J_{n+1}.

8. Обозначим $m = \pi n$ (п. 1). Определим следующие преобразования ξ_k множества J_n: при любых $k, h \in J_n$ $\xi_k h = \rho_m \rho_k^{-1}(h + k - 1)$, если $\rho_m \rho_k^{-1}(h + k - 1) \leqslant m - 1$; $\xi_k h = \rho_m \rho_k^{-1}(h + k - 1) - (m - 1)$, если $\rho_m \rho_k^{-1}(h + k - 1) \in J_{m-1+1} \setminus J_{m-1}$; $\xi_k h = \rho_m \rho_k^{-1}(h + k - 1) - (n - 1)$, если $\rho_m \rho_k^{-1}(h + k - 1) \in J_{2n-1} \setminus J_{m+n-1}$.

Множество A оперативна S, являющееся (k)-идеалом [2] при $k = m$ и $k = t$ $(t,\ m \leqslant n,\ t \neq m)$, назовем *$(m, t)$-идеалом*.

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некоторое семейство подмножеств оператива S, содержащих нуль (среди подмножеств A_j, могут быть равные). Будем говорить, что S является *0-объединением* этого семейства, если $S = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и $A_j \cap A_k = \{0\}$ при $A_j \neq A_k$.

Теорема. *Всякий i-простой P_{n1}-оператив S является при некотором t $(t \neq m)$ 0-объединением своих (m, t)-идеалов. При любом $k \in J_n$ $A_{\xi_k m} = A_{\xi_k t} = A_k$ и*

$$A_k = A_{\xi_k 1} A_{\xi_k 2} \ldots A_{\xi_k n}, \tag{26}$$

$$A_{k_1} A_{k_2} \ldots A_{k_n} = \{0\}, \text{ если } A_{k_h} \neq A_{\xi_k h}. \tag{27}$$

Для всякого элемента $a \in S \setminus \{0\}$ и произвольного $j \in I$ (п. 5) найдется такое l, что $A_j = (a)_l$.

Доказательство. По лемме п. 1 $S^{n-1} S S^{n-1} = S$, поэтому элемент a можно выбрать так, чтобы $(a)_{n+1} = S^{n-1} a S^{n-1} \neq \{0\}$, т. е. $\overline{n+1} \in \Gamma_a$ (п. 6). Для любого $j \in J_n$ обозначим через A_j такое множество $(a)_{\bar{h}}$, что $(a)_{\bar{\eta}_j \bar{h}} = (a)_{\overline{n+1}}$ (см. лемму п. 6). По теореме п. 2. 6 работы [3] (справедливой также для i-простых P_{n1}-оперативов) семейства $\{A_k\}_{k \in J_n}$ и $\{(a)_k\}_{k \in I}$ состоят из одних и тех же множеств.

Используя лемму п. 6, равенства (24), (25) и рассуждая как в [3], доказываем, что S — 0-объединение множеств A_j, и для любых $a, b \in S \setminus \{0\}$ $\{(a)_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \Gamma_a} = \{(b)_{\bar{k}}\}_{\bar{k} \in \Gamma_b}$.

Из тождества (2) для любого $k \in I$ (п. 5) вытекает равенство $S^{n-1}((a_k)_{\pi n} = S^{n-1}(a)_k$. Отсюда, вследствие леммы п. 6, $((a_k)_k)_m = (a)_k$. Таким образом, множества $(a)_k$, $k \in I$, а, следовательно, и A_h, $h \in J_n$, являются (m)-идеалами оператива S.

Теперь, как и в [3], для любото $k \in J_n$ можно получить равенства (26), (27) и $A_{\xi_k m} = A_k$.

В силу (26) для произвольных k, $h \in J_n$ имеем $A_k \subseteq S^{h-1} A_{\xi_k h} \times \times S^{n-h} = (A_{\xi_k h})_h$. Отсюда, вследствие $A_j \cap A_f = \{0\}$ при $A_j \neq A_f$, получаем, что $A_k = (A_{\xi_k h})_h$. Поэтому

$$A_h \neq A_s \to A_{\xi_k h} \neq A_{\xi_k s}, \tag{28}$$

где k, s, $h \in J_n$.

Обозначим через U множество, состоящее из всех различных (m) — идеалов A_j. Из $S = S^n$, $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, тождеств (1), (2) и формул (26)—(28) следует, что относительно операции $B = B_1 B_2 \ldots B_n$ $(B, B_i \in U)$ множество U является P_{n1}-оперативом; элемент S оператива U обратим [2]. Для P_{n1}-оператива U, содержащего такой элемент S, справедливо представление [5]: для любых $B_i \in U$

$$B_1 B_2 \ldots B_n = \psi_1 B_{\lambda 1} * \psi_2 B_{\lambda 2} * \ldots * \psi_{n-1} B_{\lambda(n-1)} * B * \psi_n B_{\lambda n}, \tag{29}$$

где λ — некоторая подстановка множества J_n, ψ_i — автоморфизмы или инверсные автоморфизмы [2] полугруппы $U(*)$, B — ее обратимый элемент. Существует такая подстановка φ множества J_n, что множество U относительно операции $[B_1 B_2 \ldots B_n] = B_{\varphi 1} B_{\varphi 2} \ldots B_{\varphi n}$ является π-оперативом [2].

Пусть E — единица полугруппы $U(*)$. Тогда из (29), (26), (27) и $S^n = S$ имеем $B = E^n = E$. Так как для π-оператива хотя бы два автоморфизм в (29) тождественны, то существуют такие t, $t' \in J_n$, что $\lambda t' = t \neq m$, $\psi_{t'}$ — тождественный автоморфизм.

Полагая в (29) $B_t = S$, остальные $B_i = E$, получаем $E^{t-1} S E^{n-t} = S$. Отсюда, из $S = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и (26), (27) вытекает, что $S = E$. Теперь, в силу (29), $S^{t-1} B S^{n-t} = B$ для любого $B \in U$. Это означает, что множества A_k $(k \in J_n)$ являются также (t)-идеалами оператива S. Пользуясь этим, как и в [3], получаем, что при любом $k \in J_n$ $A_{\xi_k t} = A_k$. Теорема доказана.

Отметим, что теорема п. 8 справедлива для i-простых оперативов, подобных [4] P_{n1}-оперативу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глускин Л. М. Вполне простые полугруды. — «Теория полугрупп и ее приложения». Изд-во Саратовск. ун-та, 1965. вып. 1, с. 179—197.
2. Глускин Л. М. Позиционные оперативы. — «Мат. сб.», 1965, 62 (110), № 3, с. 444—472.
3. Глускин Л. М. О простых оперативах. — «Вестн. Харьк. ун-та», сдр, мех.-мат., 1969, вып. 34, с. 38—51.
4. Глускин Л. М., Элькин Л. Н. Позиционные оперативы с обратимыми элементами. — «Мат. сб.», 1973, 92 (134), № 4, с. 419—428.
5. Элькин Л. Н. О приводимости позиционных оперативов. — «Тезисы сообщений XII Всес. алгебр. коллоквиума». Тетр. 2, Свердловск, 1973. 324. с.

Поступила 25.X 1975 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

№ 148

Прикладная математика
и механика

Выпуск 42

Редактор *А. Г. Роскопыт*
Художественный редактор *А. С. Романова*
Технический редактор *Л. Т. Момот*
Корректор *М. Ф. Чернуха*

Сдано в набор 18/VI 1976 г. Подписано в печать 15/X1976 г. Формат 60×90 1/16. Бумага типографская № 2. Усл.-печ. л. 7. Уч.-изд. л. 8. Тираж 1000. Изд. № 410. Заказ 6-250. БЦ 50224.
Цена 54 коп.

Издательство издательского объединения «Вища школа» при Харьковском государственном университете. 310003, Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц Харьковской книжной фабрики «Коммунист» республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР. Харьков, ул. Энгельса, 11 в Харьковской городской типографии № 16 Областного управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Харьков, Университетская, 16. Зак. 2221.

РЕФЕРАТЫ

УДК 517.91

Стабилизация линейной автономной системы относительно подпространства. II. Коробов В. И., Луценко А. В., Подольский Е. Н. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 3—11.

Для системы $\dot{x} = Ax + Bu$ с r-мерным управлением получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости относительно подпространства. Приведен алгоритм, позволяющий проверить возможность стабилизации и, если стабилизация возможна, построить стабилизирующее управление.

Список лит. 2 назв

УДК 681.3:519.21

Об одном классе алгоритмов динамического программирования в стохастических системах. Баранов В. В. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 11—19.

Рассматривается задача построения алгоритмов численного синтеза оптимальной стратегии в управляемых марковских процессах. Построен алгоритм из класса алгоритмов динамического программирования. Его существенной особенностью является использование рекуррентных соотношений при построении итерационного процесса. Это приводит к тому, что размерность задачи не играет существенной роли. Поэтому предложенный алгоритм позволяет решать задачи практически любой конечной размерности.

Список лит. 6 назв.

УДК 681.3:519.21

Оптимальные правила остановки в управляемых процессах. Баранов В. В. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 19—27.

Рассматривается задача оптимальной остановки обобщенных процессов. Устанавливаются достаточные условия существования оптимального момента остановки. Для его отыскания строится наименьшая эксцессивная мажоранта функции выигрыша и доказывается, что в классе обобщенных управляемых процессов оптимальный момент остановки является неслучайным. Для численного построения оптимального момента остановки предлагается простая вычислительная процедура.

Список лит. 3 назв.

УДК 517.934.1

Влияние зон нечувствительности, люфтов и запаздывания на работу автомата вождения самоходной машины. Вовна С. И., Кашурко А. С., Подольский Е. Н., Синяков В. А. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 27—36.

Рассматривается задача автоматического управления самоходной машиной при помощи автомата вождения, формирующего управление по информации о некоторой заданной (но заранее неизвестной) кривой $y = f(x)$. Строится и исследуется математическая модель системы «машина + автомат», позволяющая учесть реально существующие в системе зоны нечувствительности, люфты и временное запаздывание. Для случая $f = 0$ в явном виде найдены автоколебательные режимы работы системы. Приводится пример.

Ил. 3.

УДК 631.331.8:635.11

Теоретическое исследование закономерностей распределения растений сахарной свеклы. Кашурко А. С., Крутинь В. И., Подошва Л. Р., Скоропад В. М. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 36—47.

Определяются плотности вероятностей интервалов между семенами сахарной свеклы при посеве и интервалов между растениями после селективного прореживания. Список лит. 10 назв.

УДК 62-50

Задача Коши для системы дифференциальных уравнений Родрига-Гамильтона. Вахно Н. И., Гавриляко В. М. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с 47—55.

Рассмотрена структура фундаментальной матрицы решений линейной периодической системы уравнений Родрига—Гамильтона. Показано влияние на решение так называемой «квантованной» информации, а также рассмотрен вопрос о погрешности решения, возникающей за счет неортогональности базисной системы E. Список лит. 6 назв

УДК 621.372.833

К расчету сложного цилиндрического резонатора с диэлектрической трубкой. Ситников Э Д. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и маханика», 1977, вып. 42, с. 55—58.

Получено характеристическое уравнение для собственных частот резонатора сложной формы с диэлектрической трубкой на оси. Рассмотрен случай аксиально-симметричных колебаний электрического типа. Ил. 1. Список лит. 3 назв.

УДК 532.135

Об устойчивости равновесия упругой среды. II. Альперин И. Г. «Вестн Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42. с. 58—66.

Данная работа является продолжением работы, опубликованной в предыдущем выпуске данного вестника. Приводится доказательство теоремы, которая может быть использована для изучения устойчивости состояния равновесия упругой среды. Список лит. 8 назв.

УДК 517.946

О вырожденных краевых задачах в слое. Антыпко И. И. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 66—70.

Изучается краевая задача в слое $R^m \times [0, T]$ для линейного дифференциального уравнения второго порядка по t с постоянными коэффициентами при краевых условиях $A_1 u_0(x) + A_2 u_T(x) = 0$, где $u_0(x) = \{u(x, 0), u_t'(x, 0)\}$ $u_T(x) = \{u(x, T), u_t'(x, T)\}$. A_1, A_2 — квадратные матрицы, ранг матрицы $A = (A_1 A_2)$ равен 2.

Указываются необходимые и достаточные условия того, чтобы задача имела убывающие решения. Список лит. 5 назв.

УДК 517.91/943

Об одном свойстве функции Грина обыкновенного дифференциального уравнения. Дольберг О. М. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 70—83.

Исследуются свойства матрицы Грина обобщенного обыкновенного самосопряженного позитивного дифференциального оператора $2n$-го порядка на конечном интервале. Показано, что матрица Грина этого оператора восстанавливается по n фундаментальным решениям однородного уравнения, удовлетворяющих граничным условиям на одном из концов. Решена обратная задача восстановления дифференциального оператора по значениям диагональных элементов матрицы Грина $G(x, s)$ при $x = s$. Список лит. 2 назв.

УДК 517.934.1

Достаточные условия управляемости линейной автономной системы на произвольное множество. Коробов В. И., Чуприна В. Е. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 83—89.

Для автономной управляемой системы даются достаточные условия управляемости на произвольное множество G за свободное время. Список лит. 4 назв.

УДК 538.3:532:538.4

Движение поляризующейся жидкости в каналах. Тарапов И. Е., Ермаков В. И. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 89—92.

В предположении линейной зависимости функции поляризации от температуры рассмотрено течение слабопроводящей жидкости в длинном канале произвольного поперечного сечения в продольном электрическом поле. Задача сведена к последовательному решению трех краевых задач Дирихле для уравнения Пуассона в плоской области — сечении канала. Отмечается возможность использования течения в режиме насоса. Список лит. 3 назв.

УДК 517.9

Третья краевая задача для уравнения Гельмгольца в области с границей, состоящей из большого числа продырявленных поверхностей. Львов В. А. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», вып. 42, с. 93—97.

Исследовано асимптотическое поведение решения третьей краевой задачи в области, граница которой состоит из большого числа гладких продырявленных поверхностей. Показано, что в случае, когда число поверхностей и число дырок стремится к бесконечности, а расстояния между поверхностями и диаметры дырок к нулю, последовательность решений исходных краевых задач сходится в метрике пространства $L(R_3)$ к функции являющейся решением во всем пространстве дифференциального уравнения с измененной главной частью и измененным потенциалом. Список лит. 4. назв.

УДК 538.4

Установившееся движение тела Шведова-Бингама между двумя бесконечными параллельными пластинами при наличии относительной скорости между ними и перепада давления. Татарченко Э. Н. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 97—101.

Установлены критерии возникновения трех видов течения: трехзонного течения (когда между двумя зонами вязкопластического течения возникающими у пластин, образуется квазитвердое тело), двухзонного течения (когда имеется зона вязкопластического течения и квазитвердое ядро, примыкающее к подвижной пластине), однозонного течения (когда все пространство между пластинами заполнено вязкопластическим течением). Найдены размеры ядра и профили скоростей поперечных сечений в зонах вязкопластического течения. При нулевом пределе текучести материала квазитвердое ядро исчезает и течение совпадает с соответствующим течением вязкой жидкости.

Ил. 2. Список лит. 2 назв.

УДК 512.519:4

К вопросу о простых позиционных оперативах. Элькин Л. Н. «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 101—107.

Известные результаты о строении i-простых p-оперативов перенесены на более широкий класс позиционных оперативов (P_{H_1}-оперативы). Показано, что i-простой P_{n_1}-оператив можно разложить в объединение его (m, t)-идеалов, не имеющих отличных от нуля общих элементов.

Список лит. 5 назв.