Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 519.2 № 514, 2001, с. 142–155

Построение асимптотических оценок собственных значений оператора Штурма-Лиувилля с произвольной точностью

В. А. Чернятин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Россия
Щецинский университет, Польша

Данная работа посвящена построению новых асимптотических оценок собственных значений классической краевой задачи Штурма-Лиувилля. На основе элементарных средств анализа последовательных приближений трансцендентного уравнения, определяющего собственные значения, установлена принципиальная возможность получения их асимптотических оценок с точностью до величин произвольного порядка малости.
2000 Mathematics Subject Classification 34B24, 34L20.

1. Введение

Рассматривается простейшая краевая задача Штурма-Лиувилля о собственных значениях в классической постановке

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \omega^2 y(x), \quad \forall\, x \in [0, \pi], \tag{1}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \tag{2}$$

с вещественным потенциалом

$$q(x) \in \mathbf{C}[0, \pi]. \tag{3}$$

Известно [1, с. 44], что все ее собственные значения ω простые и, за исключением конечного числа, действительные, а их множество $\mathbf{\Omega}$ ограничено снизу, не более чем счетно и не имеет конечной предельной точки. Ниже будет показано, что оно является бесконечным, а значит счетным множеством $\mathbf{\Omega} = \{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$, то-есть $\omega_n \to +\infty$ при $n \to \infty$. Сам по себе этот факт хорошо известен, однако предлагаемая процедура его установления составляет органическую часть развитого далее нетрадиционного подхода для построения асимптотических оценок собственных значений ω_n произвольного порядка точности при $n \to \infty$, что и является основным содержанием настоящей статьи.

Из многих известных результатов укажем три наиболее характерных и ставших уже классическими в области построения точных асимптотик собственных значений ω_n оператора Штурма-Лиувилля. Первые весьма существенные результаты в этом направлении были найдены Г. Боргом [2], который на основе установленной им связи между спектром оператора Штурма-Лиувилля и коэффициентами Фурье потенциала $q(x)$ вывел асимптотическую оценку

$$\omega_n = n + Cn^{-1} + a_n n^{-1} + \mathrm{o}\left(n^{-2}\right), \tag{4}$$

где, в отличие от константы C, бесконечно малая величина a_n, будучи четным косинус-коэффициентом Фурье непрерывной функции, имеет порядок малости α_n при $n \to \infty$. В рамках подобного подхода В.А. Марченко [3, с. 71] принципиально уточнил эту оценку, найдя однозначную зависимость ее порядка точности от степени гладкости потенциала $q(x)$, и распространил ее на случай обобщенного потенциала из пространства Соболева $\mathrm{W}_2^n(0,\pi)$ и общих однородных граничных условий на $y(x)$.

Другой подход к построению таких оценок, предложенный Ф. Трикоми [4, с. 217], базируется на одной его теореме об оценке нулей трансцендентной функции с заданным асимптотическим представлением. Впоследствии автору удалось [5] путем весьма тонкой модификации этой теоремы повысить на порядок точность асимптотической оценки (4), а именно, установить

$$\omega_n = n + Cn^{-1} + a_n n^{-1} + b_n n^{-2} + c_n n^{-2} + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right), \tag{5}$$

не выходя, тем не менее, за рамки требований (3), где бесконечно малые b_n и c_n имеют порядки малости α_n и β_n соответственно.

Настоящая работа, прежде всего, дает положительный ответ на главный вопрос, возникающий при исследовании асимптотики спектра оператора Штурма-Лиувилля, можно ли построить асимптотические оценки собственных значений высших порядков, не накладывая на потенциал $q(x)$ никаких требований, кроме его непрерывности. Затем, на основе элементарного исследования последовательных приближений трансцендентного уравнения, определяющего собственные значения ω_n, предлагается конструктивный метод отыскания их асимптотических оценок произвольного порядка точности. Наконец, получена в явном виде новая асимптотическая оценка собственных значений ω_n с точностью до величины порядка $\mathrm{O}\left(n^{-4}\right)$. Следует отметить, что хотя принципиальных трудностей при выводе очередной по порядку точности асимптотической оценки не существует, технические трудности, связанные с громоздкими выкладками и даже выписывание самих формул в общем виде, налицо. По-видимому, многие из таких выражений существенно упростятся, если будет задан конкретный вид потенциала $q(x)$.

Ниже приводятся основные обозначения, используемые в статье:

$$\psi(\omega,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(s)\cos 2\omega s ds, \quad \varphi(\omega,x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(s)\sin 2\omega s ds,$$

$$T(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(s)ds, \quad g(\omega, x) = -T(x)\cos\omega x + \psi(\omega, x)\cos\omega x + \varphi(\omega, x)\sin\omega x,$$

$\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ – бесконечно малые, определяемые лишь условиями $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\beta_n|$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n|^{\frac{2}{3}} < +\infty, \quad g^*(\omega, x) = T(x)\sin\omega x + \psi(\omega, x)\sin\omega x - \varphi(\omega, x)\cos\omega x,$$

$$F(\omega, x) = -T^2(x) + \psi^2(\omega, x) + \varphi^2(\omega, x) + \int\limits_0^x q(s)g^*(\omega, s)\sin\omega s ds,$$

$$\Phi(\omega, x) = \int\limits_0^x q(s)g(\omega, s)\sin\omega s ds, \quad \overline{g}(n, x) = 2T(x)\sin nx - g^*(n, x),$$

$$\widetilde{g}(n, x) = -T(x)\cos 2nx + \psi(n, x)\cos 2nx + \varphi(n, x)\sin 2nx,$$

$$\widehat{g}(n, x) = 2T(x)\cos 2nx + \widetilde{g}(n, x), \quad \gamma(n, x) = \int\limits_0^x sq(s)\sin 2nsds,$$

$$\beta(n, x) = \int\limits_0^x sq(s)\cos 2nsds, \quad \alpha(n, x) = \int\limits_0^x s^2 q(s)\cos 2nsds,$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^x q(s)T(s)ds, \quad Q(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(s)T^2(s)ds, \quad C = \frac{1}{\pi}T(\pi),$$

$$\mu(n) = \pi\varphi(n, \pi) - \gamma(n, \pi), \quad \chi(n) = \frac{1}{\pi}\alpha(n, \pi) - \beta(n, \pi) + \frac{\pi}{2}\psi(n, \pi),$$

$$J(n) = \int\limits_0^\pi q(\tau)\sin n\tau\left[\beta(n, \tau)\sin n\tau - \gamma(n, \tau)\cos(n, \tau)\right]d\tau,$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\psi(n, \tau), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\Phi(n, \pi) - \frac{1}{\pi^2}T(\pi)\mu(n), \quad c_n = \frac{1}{\pi^2}\psi(n, \pi)\mu(n).$$

2. Трансцендентное уравнение для собственных значений

Пусть есть решение дифференциального уравнения (1) с одним начальным условием

$$y(x, \omega) = 0 \quad \forall\, \omega. \tag{6}$$

Имея в виду асимптотическое поведение собственных значений ω_n при $n \to \infty$ ниже будем рассматривать только значения параметра $\omega \in [\omega_0, +\infty)$ для

$\omega_0 > 0$. Из интегрального представления Коши решения вспомагательной однородной задачи (1), (6) следует, что ее общее решение с точностью до постоянного множителя определяется интегральным уравнением Вольтера второго рода

$$y(x,\omega) = \sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x q(x)\sin\omega(x-\tau)y(\tau,\omega)d\tau. \tag{7}$$

Как известно [6, с. 42], оно однозначно разрешимо, а кроме того, можно легко установить равномерную ограниченность его решения, то-есть

$$|y(x,\omega)| \le B \quad \forall\ x \in [0,\pi],\ \omega \in [\omega_0, +\infty). \tag{8}$$

В самом деле, как классическое решение дифференциального уравнения (1), оно непрерывно по x и ω [7, с. 298] на указанном в (8) множестве. Поэтому по теореме Вейерштрасса неограниченный рост функции $y(x,\omega)$ может наступить только при $\omega \to +\infty$. Если так, то для любых сколь угодно больших $A > 0$ и $N > 0$ найдется хотя бы одно значение параметра $\omega^* > N$, такое что

$$|y(x^*,\omega^*)| = \max_{x\in[0,\pi]} |y(x,\omega^*)| > A. \tag{9}$$

Но из (7) следует очевидная оценка

$$|y(x^*,\omega^*)| \le 1 + \frac{1}{\omega^*}\int\limits_0^\pi \overline{q}|y(\tau,\omega^*)|d\tau \le 1 + \frac{\pi\overline{q}}{N}|y(x^*,\omega^*)|,$$

где $\overline{q} = \max\limits_{x\in[0,\pi]} |q(x)|$. Отсюда $|y(x^*,\omega^*)| \le \dfrac{1}{1-\dfrac{\pi\overline{q}}{N}}$, что противоречит (9), а значит устанавливает искомое (8).

По определению, те значения параметра ω, для которых $y(\pi,\omega) = 0$, являются собственными значениями ω_n краевой задачи (1) – (3). В диапазоне $[\omega_0, +\infty)$ их можно определить, согласно (7), как решение трансцендентного уравнения

$$\sin\omega_n\pi + \frac{1}{\omega_n}\int\limits_0^\pi q(\tau)\sin\omega_n(\pi-\tau)y(\tau,\omega_n)d\tau = 0. \tag{10}$$

Все известные подходы к построению грубых и точных асимптотик собственных значений оператора Штурма-Лиувилля так или иначе связаны с исследованием решений этого уравнения. В частности, в подходе Ф. Трикоми решение интегрального уравнения (7) вначале представляется в виде ряда Неймана по отрицательным степеням параметра ω, а затем оцениваются нули соответствующей функции с заданным асимптотическим представлением.

Сущность настоящего подхода, в отличие от указанных выше, состоит в построении последовательных приближений трансцендентного уравнения (10) первого, второго и т.д. порядков и в выводе из каждого такого приближения искомой асимптотической оценки собственных значений ω_n с точностью до соответсвующего порядка малости относительно n^{-1}.

3. Вспомогательные утверждения

Следующее утверждение, по-существу, устанавливает бесконечность множества Ω собственных значений.

Лемма 1. *Для любого достаточно большого натурального n существует только одно собственное значение ω_n в интервале $\left(n-\frac{1}{2},\ n+\frac{1}{2}\right)$.*

Доказательство. Будем искать его в виде

$$\omega_n = n + \delta_n, \quad |\delta_n| < \frac{1}{2}. \tag{11}$$

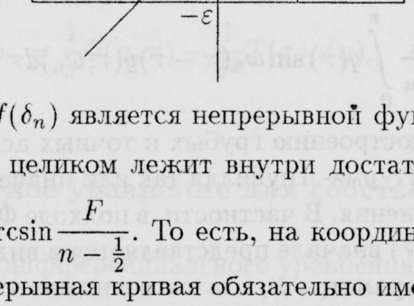
Подставляя это выражение в (10), получим после элементарных упрощений

$$\delta_n = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{(-1)^{n+1}I(\delta_n)}{n+\delta_n}, \tag{12}$$

где интеграл

$$I(\delta_n) = \int\limits_0^\pi q(\tau)y(\tau, n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)(\pi-\tau)d\tau \tag{13}$$

ограничен в силу условий (3) и (8) некоторой константой $F > 0$. Исследуем (12) как трансцендентное уравнение относительно δ_n.



Его правая часть $f(\delta_n)$ является непрерывной функцией переменной δ_n в интервале $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ и целиком лежит внутри достаточно узкой полосы шириной 2ε, где $\varepsilon = \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{F}{n-\frac{1}{2}}$. То есть, на координатной плоскости (z, δ_n) прямая $z = \delta_n$ и непрерывная кривая обязательно имеют хотя бы одну точку пересечения с абсциссой $\delta_n^* \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, которая является решением уравнения (12).

Покажем, что такая точка единственная в указанном интервале. Действительно, если бы таких точек оказалось две или более, то нашлась бы точка

$\delta_n^0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, такая что $f'(\delta_n^0) = 1$ для любых достаточно больших номеров n. Оказывается, это невозможно. В самом деле, дифференцируя $f(\delta_n)$ из (12) с учетом (13), имеем

$$f'(\delta_n) = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\sqrt{(n+\delta_n)^2 - I^2(\delta_n)}} \left\{ \int_0^\pi q(\tau) \left[(\pi-\tau) y(\tau, n+\delta_n) \cos(n+\delta_n)(\pi-\tau) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial y(\tau, n+\delta_n)}{\partial \omega} \sin(n+\delta_n)(\pi-\tau) \right] d\tau - \frac{I(\delta_n)}{n+\delta_n} \right\}. \tag{14}$$

Входящая сюда производная по параметру ω от функции $y(x,\omega)$ представляется в силу (7) в виде решения интегрального уравнения Вольтерра

$$\frac{\partial y(x,\omega)}{\partial \omega} = x\cos\omega x - \frac{1}{\omega^2}\int_0^x q(\tau)\sin\omega(x-\tau) y(\tau,\omega) d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\omega}\int_0^x q(\tau)\left[(x-\tau)\cos\omega(x-\tau) y(\tau,\omega) + \sin\omega(x-\tau)\frac{\partial y(\tau,\omega)}{\partial\omega}\right] d\tau.$$

Отсюда, подобно доказательству неравенства (8), легко установить ограниченность производной $\dfrac{\partial y(x,\omega)}{\partial \omega}$ для любых значений параметра $\omega \in [\omega_0, +\infty)$. Теперь из (14) для достаточно больших n с учетом ограниченности интеграла $I(\delta_n)$ получим оценку $|f'(\delta_n)| \le \frac{G}{n+\delta_n}$ $\forall\ \delta_n \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ с некоторой константой $G > 0$, откуда следует, что $f'(\delta_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Это и завершает доказательство леммы.

Из представленного доказательства видно, что уравнение (12) при больших n имеет на интервале $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ единственное решение $\delta_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, причем $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда, согласно (11), следует самая грубая асимптотическая оценка собственных значений при $n \to \infty$

$$\delta_n = \mathrm{o}(1), \quad \omega_n = n + \mathrm{o}(1). \tag{15}$$

Эту оценку легко уточнить, для чего перепишем (12) в эквивалентной форме

$$\sin\delta_n\pi = \frac{1}{n}\left[(-1)^{n+1} I(\delta_n) + \delta_n \sin\delta_n\pi\right]. \tag{16}$$

Отсюда, в силу ограниченности интеграла (13), оценки δ_n из (15) и элементарной оценки функции

$$(1+x)^m = 1 + mx + \mathrm{O}(x^2) \quad \text{при} \quad x \to 0, \tag{17}$$

вытекающей из ее формулы Тейлора, получаем

$$\sin\delta_n\pi = \mathrm{O}(n^{-1}), \quad \cos\delta_n\pi = 1 + \mathrm{O}(n^{-2}). \tag{18}$$

С другой стороны, из формулы Тейлора имеем

$$\sin\delta_n\pi = \delta_n\pi - \frac{\sin\xi}{2}(\delta_n\pi)^2, \quad \text{где} \quad |\xi| \le \pi|\delta_n|,$$

или, с учетом (18),

$$\delta_n\pi\left(1 - \frac{\sin\xi}{2}\delta_n\pi\right) = \mathrm{O}(n^{-1}).$$

А так как, в силу (15), величина $\dfrac{\sin\xi}{2}\delta_n\pi \to 0$ при $n\to\infty$, то искомая асимптотическая оценка собственных значений (11) принимает вид

$$\delta_n = \mathrm{O}(n^{-1}), \quad \omega_n = n + \mathrm{O}(n^{-1}), \tag{19}$$

хорошо известный из любого элементарного анализа асимптотики спектра оператора Штурма-Лиувилля [1, с. 49], [4, с. 211].

4. Построение уточненных асимптотик собственных значений

Используя тождественные тригонометрические преобразования интеграла (13), представим соотношение (16) в виде

$$\sin\delta_n\pi = \frac{1}{n}\left[\cos\delta_n\pi\int_0^\pi q(\tau)y(\tau,n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\tau d\tau - \right.$$

$$\left. -\sin\delta_n\pi\int_0^\pi q(\tau)y(\tau,n+\delta_n)\cos(n+\delta_n)\tau d\tau - \delta_n\sin\delta_n\pi\right], \tag{20}$$

которое в дальнейшем будем называть основным трансцендентным уравнением для δ_n, а значит, в силу (11), и для собственных значений ω_n. Отсюда с учетом оценок (8) и (18) следует, что

$$\sin\delta_n\pi = \frac{1}{n}\int_0^\pi q(\tau)y(\tau,n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\tau d\tau + \mathrm{O}(n^{-2}). \tag{21}$$

Полагая теперь в (7) $\omega = \omega_n = n + \delta_n$, получим в силу (19) простейшую асимптотическую оценку собственной функции

$$y(\tau, n+\delta_n) = \sin(n+\delta_n)\tau + \mathrm{O}(n^{-1}). \tag{22}$$

Кроме того, при любом x из формулы Тейлора на основании (19) легко установить две асимптотические оценки

$$\sin\delta_n x = \delta_n x + \mathrm{O}(n^{-3}), \quad \cos\delta_n x = 1 + \mathrm{O}(n^{-2}). \tag{23}$$

Тогда в результате элементарных тригонометрических преобразований имеем

$$\sin(n+\delta_n)\tau = \sin n\tau + \delta_n\tau\cos n\tau + \mathrm{O}(n^{-2}),\ \cos(n+\delta_n)\tau = \cos n\tau + \mathrm{O}(n^{-1}). \quad (24)$$

Наконец, компилируя соотношения (21), (22) и (24), находим

$$\sin\delta_n\pi = \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi q(\tau)\sin^2 n\tau d\tau + \mathrm{O}(n^{-2}),$$

или, в силу (23),

$$\delta_n\pi = \frac{1}{2n}\int\limits_0^\pi q(\tau)d\tau - \frac{1}{2n}\int\limits_0^\pi q(\tau)\cos 2n\tau d\tau + \mathrm{O}(n^{-2}).$$

Отсюда, в принятых обозначениях, получаем очередную по точности и близкую к (4) асимптотическую оценку собственных значений

$$\delta_n = Cn^{-1} + a_n n^{-1} + \mathrm{O}(n^{-2}). \quad (25)$$

Для дальнейшего уточнения асимптотики спектра представим основное трансцендентное уравнение (20) с учетом оценок (23) в виде

$$\delta_n\pi = \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi q(\tau)y(\tau,n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\tau d\tau -$$

$$-\frac{\delta_n\pi}{n}\int\limits_0^\pi q(\tau)y(\tau,n+\delta_n)\cos(n+\delta_n)\tau d\tau + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right).$$

Преобразуя здесь второй интеграл согласно оценкам (22) и (24), получим

$$\delta_n\pi = \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi q(\tau)y(\tau,n+\delta_n)\sin(n+\delta_n)\tau d\tau - \frac{\delta_n\pi}{n}\varphi(n,\pi) + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right). \quad (26)$$

Для более точной, чем (22), оценки собственной функции $y(\tau,n+\delta_n)$ воспользуемся представлением решения $y(x,\omega)$ интегрального уравнения (7) отрезком ряда Неймана [6, с. 42] с точностью до величины порядка ω^{-2} :

$$y(x,\omega) = \sin\omega x + \frac{1}{\omega}\int\limits_0^x q(\tau)\sin\omega(x-\tau)\sin\omega\tau d\tau + \mathrm{O}\left(n^{-2}\right).$$

При $\omega = n+\delta_n$ отсюда в результате элементарных преобразований вытекает искомая оценка собственной функции

$$y(\tau,n+\delta_n) = \sin(n+\delta_n)\tau + \frac{1}{n+\delta_n}g(n+\delta_n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-2}\right), \quad (27)$$

где согласно принятым обозначениям

$$g(n+\delta_n,\tau) = -T(\tau)\cos(n+\delta_n)\tau + \psi(n+\delta_n,\tau)\cos(n+\delta_n)\tau + \\ +\varphi(n+\delta_n,\tau)\sin(n+\delta_n)\tau. \tag{28}$$

Далее, с помощью тригонометрических тождеств и соотношений (19) и (23) легко установить оценки

$$\psi(n+\delta_n,\tau) = \psi(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-1}\right), \quad \varphi(n+\delta_n,\tau) = \varphi(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-1}\right),$$

учет которых вместе с (24) в выражении (28) приводит к оценке

$$g(n+\delta_n,\tau) = g(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-1}\right). \tag{29}$$

Кроме того, биномиальная оценка (17) при $m = k$ позволяет установить с учетом (19), что

$$\frac{1}{(n+\delta_n)^k} = \frac{1}{n^k\left(1+\frac{\delta_n}{n}\right)^k} = \frac{1}{n^k} + \mathrm{O}\left(n^{-(k+2)}\right), \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Наконец, компиляция соотношений (24), (27), (29) и (30) после элементарных упрощений дает

$$\sin(n+\delta_n)y(\tau, n+\delta_n) = \sin^2 n\tau + \delta_n\tau\sin 2n\tau + \frac{\sin n\tau}{n}g(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-2}\right).$$

Подставим последнее в (26):

$$\delta_n\pi = \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi q(\tau)\left[\sin^2 n\tau + \delta_n\tau\sin 2n\tau + \frac{\sin n\tau}{n}g(n,\tau)\right]d\tau - \frac{\delta_n\pi}{n}\varphi(n,\pi) +$$

$$+\mathrm{O}\left(n^{-3}\right) = \frac{T(\pi)}{n} - \frac{\psi(n,\pi)}{n} + \frac{\delta_n}{n}\gamma(n,\pi) + \frac{1}{n^2}\Phi(n,\pi) - \frac{\delta_n\pi}{n}\varphi(n,\pi) + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right).$$

Отсюда, в силу ограниченности величин $\gamma(n,\pi)$ и $\varphi(n,\pi)$, найдем

$$\delta_n = \frac{1}{n\pi}\cdot\frac{T(\pi) - \psi(n,\pi) + \frac{1}{n}\Phi(n,\pi)}{1 - \dfrac{\gamma(n,\pi)}{n\pi} + \dfrac{\varphi(n,\pi)}{n}}. \tag{31}$$

Вновь используя оценку (17), имеем

$$\left(1 - \frac{\gamma(n,\pi)}{n\pi} + \frac{\varphi(n,\pi)}{n}\right)^{-1} = 1 + \frac{\gamma(n,\pi)}{n\pi} - \frac{\varphi(n,\pi)}{n} + \mathrm{O}\left(n^{-2}\right).$$

В результате подстановки последнего выражения в формулу (31) получим искомую асимптотическую оценку собственных значений

$$\delta_n = \frac{T(\pi) - \psi(n,\pi)}{n\pi}\left(1 - \frac{\mu(n)}{n\pi}\right) + \frac{\Phi(n,\pi)}{n^2\pi} + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right). \tag{32}$$

которая, согласно (11) и принятых обозначений, эквивалентна приведенной выше оценке (5).

5. Новая асимптотика спектра высшего порядка

Хотя полученные асимптотические оценки собственных значений с точностью до второго (25) и третьего (32) порядка малости относительно n^{-1} и являются известными результатами, представленный выше их вывод составляет основу конструктивной процедуры последовательного построения асимптотик любого порядка точности для спектра оператора Штурма-Лиувилля. Для этого достаточно, пользуясь представлением элементарных функций и решения $y(x,\omega)$ интегрального уравнения (7) отрезками рядов, соответственно, Тейлора и Неймана, построить некоторое приближение основного трансцендентного уравнения (20), а затем выразить из него собственное значение соответствующего порядка точности. Очевидно, предложенная процедура может считаться эффективной, если с ее помощью можно получить и новые результаты, изложение которых и составляет основное содержание данного раздела, а вместе с тем и всей статьи.

Следующую по точности асимптотическую оценку δ_n, а значит, в силу (11) и собственных значений ω_n, будем искать из очередного приближения уравнения (20) с точностью до величин $\mathrm{O}\left(n^{-4}\right)$. Для этого представим вначале решение $y(x,\omega)$ интегрального уравнения Вольтерра (7) следующим отрезком ряда Неймана [6, с.42]:

$$y(x,\omega)=\sin\omega x+\frac{1}{\omega}g(\omega,x)+\frac{1}{\omega^2}\int\limits_0^x K(x,\tau,\omega)\sin\omega\tau d\tau+\mathrm{O}\left(n^{-3}\right), \qquad (33)$$

где итерированное ядро $K(x,\tau,\omega)=\int\limits_\tau^x q(s)\sin\omega(x-s)q(\tau)\sin\omega(s-\tau)ds$. Опуская элементарные тригонометрические преобразования, найдем выражение

$$\int\limits_0^x K(x,\tau,\omega)\sin\omega\tau d\tau=F(\omega,x)\sin\omega x-\Phi(\omega,x)\cos\omega x.$$

Подставляя его в (33) при $x=\tau$ и $\omega=n+\delta_n$, а также учитывая вытекающую из (30) оценку $\mathrm{O}\left((n+\delta_n)^{-3}\right)=\mathrm{O}\left(n^{-3}\right)$, получим

$$y(\tau,n{+}\delta_n){=}\sin(n{+}\delta_n)\tau{+}\frac{1}{n{+}\delta_n}g(n{+}\delta_n,\tau){+}\frac{1}{(n{+}\delta_n)^2}\left[F(n{+}\delta_n,\tau)\sin(n{+}\delta_n)\tau\ -\right.$$

$$\left.-\ \Phi(n+\delta_n,\tau)\cos(n+\delta_n)\tau\right]+\mathrm{O}\left(n^{-3}\right). \qquad (34)$$

Уточним теперь оценки (23) по соображениям, аналогичным ее выводу:

$$\sin\delta_n x=\delta_n x-\frac{\delta_n^3x^3}{6}+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right),\quad \cos\delta_n x=1-\frac{\delta_n^2x^2}{2}+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right). \qquad (35)$$

Это позволяет с помощью тригонометрических тождеств оценить входящие в (28) величины в виде

$$\sin(n+\delta_n)\tau = \sin n\tau + \delta_n \tau \cos n\tau - \frac{\delta_n^2 \tau^2}{2} \sin n\tau + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right),$$

$$\cos(n+\delta_n)\tau = \cos n\tau - \delta_n \tau \sin n\tau - \frac{\delta_n^2 \tau^2}{2} \cos n\tau + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right), \tag{36}$$

$$\psi(n+\delta_n,\tau) = \psi(n,\tau) - \delta_n \gamma(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-2}\right),$$

$$\varphi(n+\delta_n,\tau) = \varphi(n,\tau) + \delta_n \beta(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-2}\right).$$

Отсюда, с учетом (19), легко выводятся две оценки

$$g(n+\delta_n,\tau) = g(n,\tau) + \delta_n \tau \overline{g}(n,\tau) + \delta_n \Big[\beta(n,\tau)\sin n\tau -$$

$$-\gamma(n,\tau)\cos n\tau\Big] + \mathrm{O}\left(n^{-2}\right) \tag{37}$$

$$g^*(n+\delta_n,\tau) = g^*(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-1}\right),$$

которые вместе с (36) дают возможность написать две последних вспомагательных оценки

$$F(n+\delta_n,\tau) = F(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-1}\right), \quad \Phi(n+\delta_n,\tau) = \Phi(n,\tau) + \mathrm{O}\left(n^{-1}\right). \tag{38}$$

Подставляя оценки (30), (36) – (38) в выражение (34), найдем после элементарных упрощений

$$y(\tau, n+\delta_n) = \sin n\tau + \frac{1}{n} g(n,\tau) + \delta_n \tau \cos n\tau + \frac{1}{n^2}\left[F(n,\tau)\sin n\tau - \Phi(n,\tau)\cos n\tau\right] -$$

$$-\frac{\delta_n^2\tau^2}{2}\sin n\tau + \frac{\delta_n \tau}{n}\overline{g}(n,\tau) + \frac{\delta_n}{n}\left[\beta(n,\tau)\sin n\tau - \gamma(n,\tau)\cos n\tau\right] + \mathrm{O}\left(n^{-3}\right). \tag{39}$$

Наконец, составим искомое приближение основного трансцендентного уравнения (20) с точностью до величины $\mathrm{O}\left(n^{-4}\right)$ при помощи оценок (19), (35), (36) и (39):

$$\delta_n \pi - \frac{\delta_n^3 \pi^3}{6} = \frac{1}{n}\int_0^\pi q(\tau)\left(\sin n\tau + \delta_n \tau \cos n\tau - \frac{\delta_n^2 \tau^2}{2}\sin n\tau\right)\Big\{\sin n\tau +$$

$$+\frac{1}{n} g(n,\tau) + \delta_n \tau \cos n\tau + \frac{1}{n^2}\left[F(n,\tau)\sin n\tau - \Phi(n,\tau)\cos n\tau\right] -$$

$$-\frac{\delta_n^2 \tau^2}{2}\sin n\tau + \frac{\delta_n \tau}{n}\overline{g}(n,\tau) + \frac{\delta_n}{n}\left[\beta(n,\tau)\sin n\tau - \gamma(n,\tau)\cos n\tau\right]\Big\} d\tau -$$

$$-\frac{\delta_n^2 \pi}{n} - \frac{\delta_n^2 \pi^2}{2n}\int_0^\pi q(\tau)\sin^2 n\tau\, d\tau - \frac{\delta_n \pi}{n}\int_0^\pi q(\tau)(\cos n\tau - \delta_n \tau \sin n\tau)[\sin n\tau +$$

$$+\frac{1}{n}g(n,\tau)+\delta_n\tau\cos n\tau]d\tau+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right). \tag{40}$$

Вводя обозначение

$$I_n=\int\limits_0^\pi q(\tau)\sin n\tau\left\{\sin n\tau+\frac{1}{n}g(n,\tau)+\frac{1}{n^2}[F(n,\tau)\sin n\tau-\Phi(n,\tau)\cos n\tau]\right\}d\tau, \tag{41}$$

выражение (40) после элементарных преобразований переписывается в виде

$$\delta_n\pi+\frac{\delta_n}{n}\mu(n)-\frac{\delta_n^2\pi}{n}\left[\chi(n)-1-\frac{\pi}{2}T(\pi)\right]-\frac{\delta_n}{n^2}\left[J(n)+\int\limits_0^\pi\tau q(\tau)\widetilde{g}(n,\tau)\cos n\tau d\tau-\right.$$

$$\left.-\pi\int\limits_0^\pi q(\tau)g(n,\tau)\cos n\tau d\tau\right]-\frac{\delta_n^3\pi^3}{6}=\frac{1}{n}I_n+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right). \tag{42}$$

Далее, в соответствии с формулами (5) и (11) корректно определить величину приращения Δ_n так, что

$$\delta_n=\frac{A_n}{n}+\frac{B_n}{n^2}+\Delta_n,\quad A_n=C+a_n,\quad B_n=b_n+c_n,\quad \Delta_n=\mathrm{O}\left(n^{-4}\right). \tag{43}$$

Компилируя теперь соотношения (42) и (43), найдем

$$\left(\frac{A_n}{n}+\frac{B_n}{n^2}+\Delta_n\right)\left\{\pi+\frac{\mu(n)}{n}+\frac{A_n\pi}{n^2}\left[1+\frac{\pi}{2}T(\pi)-\chi(n)\right]-\frac{1}{n^2}\left[\int\limits_0^\pi\tau q(\tau)\widetilde{g}(n,\tau)d\tau+\right.\right.$$

$$\left.\left.+J(n)-\pi\int\limits_0^\pi q(\tau)g(n,\tau)\cos n\tau d\tau\right]-\frac{A_n^2\pi^3}{6n^2}\right\}=\frac{1}{n}I_n+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right).$$

Выразим отсюда величину Δ_n с учетом выражения (41) и оценки из (43):

$$\Delta_n=\frac{1}{n\pi}\int\limits_0^\pi q(\tau)\sin^2 n\tau d\tau-\frac{A_n}{n}+\frac{1}{\pi n^2}\Phi(n,\pi)-\frac{A_n}{\pi n^2}\mu(n)-\frac{B_n}{n^2}+$$

$$+\frac{1}{\pi n^3}\int\limits_0^\pi q(\tau)\sin n\tau\left[F(n,\tau)\sin n\tau-\Phi(n,\tau)\cos n\tau\right]d\tau+$$

$$+\frac{A_n}{\pi n^3}\left[J(n)+\int\limits_0^\pi\tau q(\tau)\widetilde{g}(n,\tau)d\tau-\pi\int\limits_0^\pi q(\tau)g(n,\tau)\cos n\tau d\tau\right]-$$

$$-\frac{A_n^2}{n^3}\left[1+\frac{\pi}{2}T(\pi)-\chi(n)\right]+\frac{A_n^3\pi^2}{6n^3}-\frac{B_n}{\pi n^3}\mu(n)+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right).$$

Непосредственно проверяется, что в правой части этого равенства коэффициенты при n^{-1} и n^{-2} равны нулю, так что итоговая асимптотическая оценка приращения Δ_n из (43) может быть записана в виде

$$\Delta_n = \frac{1}{n^3}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi q(\tau)\left[F(n,\tau)\sin n\tau - \Phi(n,\tau)\cos n\tau\right]\sin n\tau d\tau - \right.$$

$$-(C+a_n)^2\left[1+\frac{\pi}{2}T(\pi)-\chi(n)\right]+\frac{1}{\pi}(C+a_n)\left[J(n)+\int_0^\pi q(\tau)\widetilde{g}(n,\tau)d\tau - \right.$$

$$\left.\left.-\pi\int_0^\pi q(\tau)g(n,\tau)\cos n\tau d\tau\right]-\frac{\pi^2}{6}(C+a_n)^3-\frac{1}{\pi}(b_n+c_n)\mu(n)\right\}+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right). \quad (44)$$

Здесь в фигурных скобках стоит ограниченная по n величина, однако, легко видеть, что она содержит как постоянную составляющую так и составляющие, порядок малости которых есть α_n, β_n и даже γ_n. Точный анализ порядка малости всех величин, входящих в правую часть равенства (44) основан на следующем элементарном утверждении.

Лемма 2. *Пусть* α_n^i $(i = 1,2,3)$ *бесконечно малые величины порядка* α_n *при* $n \to \infty$. *Тогда их произведения* $\alpha_n^1\alpha_n^2 = \beta_n$ *и* $\alpha_n^1\alpha_n^2\alpha_n^3 = \gamma_n$.

Доказательство. Ее очевидность вытекает из неравенства Коши

$$\prod_{i=1}^k a_i \le \left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k a_i\right)^k$$

для положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

В результате такого анализа соотношение (44) с помощью тождественных преобразований можно представить окончательно так

$$\Delta_n = Dn^{-3} + d_n n^{-3} + e_n n^{-3} + f_n n^{-3} + \mathrm{O}\left(n^{-4}\right), \quad (45)$$

где постоянная D и бесконечно малые d_n, e_n и f_n, имеющие порядок малости величин α_n, β_n и γ_n, соответственно, выражаются в виде

$$D = -C^2\left(1+\frac{C\pi}{3}\right)-\frac{1}{\pi}Q(\pi)+CP(\pi)+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi q(\tau)P(\tau)d\tau,$$

$$d_n = -2Ca_n\left(1+\frac{C\pi^2}{2}\right)+C^2\left[\chi(n)+\frac{a_n\pi^2}{2}\right]+\frac{C}{\pi}J(n)+a_nP(\pi)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi\int_0^\tau q(\tau)q(s)\left[\psi(n,s)-\widetilde{g}(n,s)\right]\sin^2 n\tau ds d\tau-\frac{C}{2}\int_0^\pi q(\tau)\left[\psi(n,\tau)+\widetilde{g}(n,\tau)\right]d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\pi q(\tau)\left[(T^2(\tau)-P(\tau))\cos 2n\tau-\Phi(n,\tau)\sin 2n\tau\right]d\tau+\frac{C}{\pi}\int\limits_0^\pi \tau q(\tau)\widetilde{g}(n,\tau)d\tau,$$

$$e_n=-a_n^2+2Ca_n\chi(n)-\frac{1}{\pi}b_n\mu(n)+\frac{1}{\pi}a_nJ(n)+\frac{1}{\pi}a_n\int\limits_0^\pi \tau q(\tau)\widetilde{g}(n,\tau)d\tau+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi q(\tau)\left[\psi^2(n,\tau)+\varphi^2(n,\tau)\right]\sin^2 n\tau d\tau-\frac{a_n}{2}\int\limits_0^\pi q(\tau)\left[\psi(n,\tau)+\widetilde{g}(n,\tau)\right]d\tau,$$

$$f_n=a_n^2\chi(n)+\frac{\pi^2}{2}a_n^3-\frac{1}{\pi}c_n\mu(n).$$

Таким образом, полная асимптотическая оценка собственных значений согласно формулам (11), (43) и (45) приобретает вид

$$\omega_n=n+(C+a_n)n^{-1}+(b_n+c_n)n^{-2}+(D_n+d_n+e_n+f_n)n^{-3}+\mathrm{O}\left(n^{-4}\right),\quad (46)$$

который содержит в себе все ранее установленные оценки (19), (4) и (5).

В заключение отметим, что в асимптотических оценках собственных значений ω_n отличные от нуля константы при целых степенях (положительных или отрицательных), по-видимому, стоят только при нечетных степенях. Кроме того, указанный выше порядок малости коэффициентов a_n, b_n, c_n, d_n, e_n и f_n в (46) является точным, что может быть непосредственно установлено соответствующим подбором потенциала $q(x)$. Очевидно также, что предложенная процедура построения асимптотических оценок собственных значений оператора Штурма-Лиувилля может быть использована и при более высокой их точности, однако, громоздкость выкладок и даже самих итоговых формул существенно возрастет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Костюченко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. – М., – 1979.
2. Borg G. // Acta Math. – 1946. – **78**. – No. 1. – P. 1 – 96.
3. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев, – 1977.
4. Трикоми Ф. Дифференциальные уравнения. – М., – 1962.
5. Chernyatin V. // Demonstratio Mathematica. – 1998. – **31**. – No. 1. – P. 169 – 178.
6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М., – 1959.
7. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., – 1958.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.968.519.6 № 514, 2001, с. 156–163

Обоснование численного решения сингулярного интегрального уравнения с ядром Гильберта

Ю. В. Гандель, Т. С. Полянская

Харьковский национальный университет, Украина

Интегральное уравнение первого рода с логарифмическим ядром, к которому приводит ряд задач дифракции волн, сведено к сингулярному интегральному уравнению с ядром Гильберта и дополнительным условием. Проведена дискретизация с регуляризацией по Лифанову, дано строгое обоснование оценки скорости сходимости решения дискретной задачи к точному решению сингулярного интегрального уравнения с дополнительным условием. *2000 Mathematics Subject Classification* 45E99,65R20.

Задача дифракции стационарной звуковой волны на "мягкой" цилиндрической поверхности, задача дифракции монохроматической E-поляризованной электромагнитной волны на идеальнопроводящей цилиндрической поверхности (см., например, [1]-[3]) и ряд других граничных задач математической физики приводят к двумерной внешней задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца вне гладкого замкнутого контура.

Эта задача Дирихле однозначно разрешима [1] и сводится к эквивалентному ей интегральному уравнению первого рода с логарифмическим ядром (см., например, [1]-[3]).

Итак, рассматривается интегральное уравнение вида

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} ln\left|sin\frac{\phi-\theta}{2}\right|u(\phi)d\phi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(\theta,\phi)u(\phi)d\phi=g(\theta) \qquad (1)$$

относительно неизвестной функции $u(\phi)$, которое (как следует из сказанного) является однозначно разрешимым. Здесь 2π-периодические функции $g(\theta)$ и $Q(\theta,\phi)$ принадлежат классу $C^{\mu,\gamma}$ ($Q(\theta,\phi)$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной). $C^{\mu,\gamma}$ – класс μ раз непрерывно дифференцируемых функций, μ-е производные которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем γ ($\mu \geq 1; \quad 0<\gamma\leq 1$). Кроме того, предполагается, что

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}Q(\theta,\phi)d\theta d\phi \neq 2ln2.$$

Произведем в уравнении (1) линейную замену $u(\phi) = v(\phi) + C$, где

$$C = \frac{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(\theta)d\theta}{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(\theta,\phi)d\theta - 2ln2\right]d\phi}.$$

После этого, учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} ln\left|sin\frac{\phi-\theta}{2}\right|d\theta = -2ln2,$$

получим эквивалентное ему уравнение относительно неизвестной функции $v(\phi)$:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} ln\left|sin\frac{\phi-\theta}{2}\right|v(\phi)d\phi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(\theta,\phi)v(\phi)d\phi =$$

$$= g(\theta) + C\left[2ln2 - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(\theta,\phi)d\phi\right]. \qquad (2)$$

Дифференцируя уравнение (2) по θ, получаем уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} ctg\frac{\phi-\theta}{2}v(\phi)d\phi - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_\theta(\theta,\phi)v(\phi)d\phi =$$

$$= \frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_\theta(\theta,\phi)d\phi\Bigg] - g'(\theta). \qquad (3)$$

Интегрируя (2) по θ по отрезку $[0, 2\pi]$, получаем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q(\theta,\phi)d\theta - 2ln2\right]v(\phi)d\phi = 0. \qquad (4)$$

Легко видеть, что уравнение (2) эквивалентно уравнению (3) с дополнительным условием (4).

Необходимое условие разрешимости уравнения (3) [3]

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_\theta(\theta,\phi)d\phi - g'(\theta) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_\theta(\theta,\phi)v(\phi)d\phi\right]d\theta = 0,$$

где $v(\phi)$ – решение этого уравнения, выполнено тождественно при любом $v(\phi)$, так как, в силу 2π-периодичности функций $g(\theta)$ и $Q(\theta,\phi)$,

$$\int_0^{2\pi} g'(\theta)d\theta = 0 \quad \text{и} \int_0^{2\pi} Q_\theta(\theta,\phi)d\theta \equiv 0. \tag{5}$$

Перейдем к дискретизации задачи (3), (4). Обозначим $(P_n^{(i)}f)(\phi)$ – интерполяционный тригонометрический полином порядка n функции $f(\phi)$ с узлами интерполирования $\phi_k^{(i,n)}$, $i=1,2$, где

$$\phi_k^{(1,n)} = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad \phi_k^{(2,n)} = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}, k=0,1,...,2n.$$

Приближенное решение $v_n(\phi)$ задачи (3),(4) ищем в виде интерполяционного тригонометрического полинома порядка n с равноотстоящими узлами интерполирования $\left\{\phi_k^{(1,n)}\right\}_{k=0}^{2n}$ из уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\phi-\theta}{2} v_n(\phi)d\phi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (P_{n_\phi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}Q_\theta)(\theta,\phi)v_n(\phi)d\phi + \beta_n =$$

$$= \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi} (P_{n_\phi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}Q_\theta)(\theta,\phi)d\phi - (P_{n_\theta}^{(2)}g')(\theta) \tag{6}$$

с дополнительным условием

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P_{n_\phi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}Q)(\theta,\phi)d\theta - 2ln2\right] v_n(\phi)d\phi = 0, \tag{7}$$

где

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P_{n_\phi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}Q_\theta)(\theta,\phi)v_n(\phi)d\phi - (P_{n_\theta}^{(2)}g')(\theta) + \right.$$

$$\left. + \frac{C}{2\pi}\int_0^{2\pi}(P_{n_\phi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}Q_\theta)(\theta,\phi)d\phi\right] d\theta$$

– дополнительная (регуляризующая) неизвестная [4].

Рассматривая уравнение (6) в точках $\phi = \phi_j^{(2,n)}$, $j=0,1,...,2n$, получаем систему $2n+1$ уравнений. Вычисляя в них, а так же в условии (7), интегралы с помощью квадратурных формул интерполяционного типа, получаем систему $2n+2$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $v_n(\phi_k^{(1,n)}), k=0,1,...,2n$ и β_n, эквивалентную задаче (6),(7):

$$\begin{cases} \frac{1}{2n+1}\sum\limits_{k=0}^{2n}\left[ctg\frac{\phi_k^{(1,n)}-\phi_j^{(2,n)}}{2}-Q_\theta(\phi_j^{(2,n)},\phi_k^{(1,n)})\right]v_n(\phi_k^{(1,n)})+\beta_n= \\ =\frac{C}{2\pi}\frac{1}{2n+1}\sum\limits_{k=0}^{2n}Q_\theta(\phi_j^{(2,n)},\phi_k^{(1,n)})-g'(\phi_j^{(2,n)}), \quad j=0,1,...,2n, \\ \frac{1}{2n+1}\sum\limits_{k=0}^{2n}\left[\frac{1}{2n+1}\sum\limits_{j=0}^{2n}Q(\phi_j^{(2,n)},\phi_k^{(1,n)})-2ln2\right]v_n(\phi_k^{(1,n)})=0 \quad (j=2n+1). \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство однозначной разрешимости задачи (6), (7), а, следовательно, и эквивалентной ей системы (8), проведем, переходя к операторам, действующим в парах гильбертовых пространств.

Введем пространства:

L_2 – гильбертово пространство функций на $(0,2\pi)$ со скалярным произведением $(f,g)\equiv\int\limits_0^{2\pi}f(\phi)\overline{g(\phi)}d\phi$;

$L_2^0=\left\{f(\phi)\in L_2:\int\limits_0^{2\pi}f(\phi)d\phi=0\right\}$;

$\Lambda(Q)\subset L_2$ – подпространство функций из L_2, удовлетворяющих условию (4);

Π_n – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n;

$\Lambda(Q_n)\subset L_2$ – подпространство функций, удовлетворяющих условию (7);

$\Lambda_n(Q_n)\equiv\Lambda(Q_n)\cap\Pi_n$;

$\Pi_n^0\equiv\Pi_n\cap L_2^0$.

Для $\omega(\phi)\in L_2$ введем функционалы

$$\hat{Q}\omega\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q(\theta,\phi)d\theta-2ln2\right]\omega(\phi)d\phi;$$

$$\hat{Q}_n\omega\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(P_{n_\phi}^{(1)}P_{n_\theta}^{(2)}Q)(\theta,\phi))d\theta-2ln2\right]\omega(\phi)d\phi,$$

и операторы

$$(H\omega)(\theta)\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}ctg\frac{\phi-\theta}{2}\omega(\phi)d\phi;$$

$$(K\omega)(\theta)\equiv-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}Q_\theta(\theta,\phi)\omega(\phi)d\phi;$$

$$(K_n\omega)(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(P^{(1)}_{n_\phi}P^{(2)}_{n_\theta}Q_\theta)(\theta,\phi))d\theta - (P^{(1)}_{n_\phi}P^{(2)}_{n_\theta}Q_\theta)(\theta,\phi))\right]\omega(\phi)d\phi.$$

Кроме того, введем функции

$$f(\theta) = \frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Q_\theta(\theta,\phi)d\phi - g'(\theta) \in L_2^0$$

и

$$f_n(\theta) = \frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(P^{(1)}_{n_\phi}P^{(2)}_{n_\theta}Q_\theta)(\theta,\phi)d\phi - (P^{(2)}_{n_\theta}g')(\theta) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{C}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}(P^{(1)}_{n_\phi}P^{(2)}_{n_\theta}Q_\theta)(\theta,\phi)d\phi - (P^{(2)}_{n_\theta}g')(\theta)\right]d\theta \in \Pi_n^0.$$

В операторных обозначениях уравнение (3) и дополнительное условие (4) принимают, соответственно, вид

$$(H+K)v = f \tag{9}$$

и

$$\hat{Q}v = 0 \tag{10}$$

(т.е. $v(\phi) \in \Lambda(Q)$),

а уравнение (6) с дополнительным условием (7) – вид

$$(H+K_n)v_n = f_n \tag{11}$$

и

$$\hat{Q}_n v_n = 0 \tag{12}$$

(т.е. $v_n(\phi) \in \Lambda_n(Q_n)$).

Оператор $H+K$ (в силу условий (5) и (10)) действует из $\Lambda(Q)$ в L_2^0. Из однозначной разрешимости уравнения (1), а, следовательно, и задачи (3), (4), следует, что оператор $H+K$ имеет в паре пространств

$$(\Lambda(Q), L_2^0) \tag{13}$$

ограниченный обратный оператор $(H+K)^{-1}$ [3].

Теперь докажем, что оператор $H+K_n$ непрерывно обратим в паре пространств

$$(\Lambda_n(Q_n), \Pi_n^0) \tag{14}$$

при достаточно больших n и, тем самым, докажем однозначную разрешимость задачи (6), (7).

Для этого, сначала, пользуясь теоремами Джексона [6], получаем оценки:

Если $\omega = \omega(\theta) \in C^{\mu,\gamma}, z = z(\theta, \phi) \in C^{\mu,\gamma}$ по каждой из переменных равномерно относительно другой переменной, то

$$\left\| z - P_{n_\phi}^{(1)} P_{n_\theta}^{(2)} z \right\|_{L_2 \times L_2} \leq 4\pi \left[E_{n_\phi}(z) + E_{n_\theta}(z) \right]$$

и

$$\left\| \omega - P_{n_\theta}^{(2)} \omega \right\|_{L_2} \leq 2\sqrt{\pi} E_n(\omega),$$

где при $n > \mu$

$$E_n(f) \leq \frac{12^{\mu+1} M(f^{(\mu)})}{n^{\mu+\gamma}},$$

$M(f^{(\mu)})$ – константа в условии Гельдера для $f^{(\mu)}(\phi)$.

Отсюда, пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получаем следующие оценки [3]:

$$1) \quad \left| \hat{Q}\omega - \hat{Q}_n\omega \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \|\omega\|_{L_2} \left\| Q - P_{n_\phi}^{(1)} P_{n_\theta}^{(2)} Q \right\|_{L_2 \times L_2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \|\omega\|_{L_2} \left[E_{n_\phi}(Q) + E_{n_\theta}(Q) \right] \leq \frac{d}{n^{\mu+\gamma}} \|\omega\|_{L_2},$$

$$2) \quad |(H+K) - (H+K_n)|_{\Lambda_n(Q_n) \to L_2^0} \leq 4 \left\| Q_\theta - P_{n_\phi}^{(1)} P_{n_\theta}^{(2)} Q_\theta \right\|_{L_2 \times L_2} \leq$$

$$\leq 16\pi \left[E_{n_\phi}(Q_\theta) + E_{n_\theta}(Q_\theta) \right] \leq \frac{16\pi B}{n^{\mu+\gamma-1}},$$

$$3) \quad \|f - f_n\|_{L_2} \leq 2 \left\| g' - P_{n_\theta}^{(2)} g' \right\|_{L_2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} C \left\| Q_\theta - P_{n_\phi}^{(1)} P_{n_\theta}^{(2)} Q_\theta \right\|_{L_2 \times L_2} \leq$$

$$4\sqrt{\pi} E_n(g') + 4\sqrt{2\pi} C \left[E_{n_\phi}(Q_\theta) + E_{n_\theta}(Q_\theta) \right] \leq \frac{4\sqrt{\pi}}{n^{\mu+\gamma-1}} \left[b + \sqrt{2} BC \right],$$

где d, b, B – константы, не зависящие от n.

Из первой оценки вытекают следующие леммы [3]:

Лемма 1. *Существует $N_1 \geq \mu$ такое, что при $n > N_1$ оператор $H + K$ имеет в паре пространств*

$$(\Lambda(Q_n), L_2^0) \tag{15}$$

ограниченный обратный оператор $(H + K)_n^{-1}$.

Лемма 2. *Для любого ненулевого элемента $\omega(\theta) \in L_2^0$ существует $N_2 = N_2(\omega) \geq N_1$ такое, что для любого $n > N_2$*

$$\left\| (H+K)^{-1}\omega - (H+K)_n^{-1}\omega \right\|_{L_2} \leq \frac{1}{n^{\mu+\gamma}} \frac{d}{q(\omega)} \|\omega\|_{L_2} \left\| (H-K)^{-1} \right\|_{L_2^0 \to \Lambda(Q)},$$

где $q(\omega)$ – константа, зависящая от $\omega(\theta)$.

Следствие 1. *Существует константа $D > 0$ такая, что*

$$\left\| (H+K)_n^{-1} \right\|_{L_2^0 \to \Lambda(Q_n)} \leq D$$

при всех $n > N_1$.

Следствие 2. *Если $v(\phi)$ – решение уравнения (9) в паре пространств (13), а $v^n(\phi)$ – решение уравнения (9) в паре пространств (15), то*

$$\|v - v^n\|_{L_2} \leq \frac{d}{q(f)} \frac{1}{n^{\mu+\gamma}} \|f\|_{L_2} \left\|(H+K)^{-1}\right\|_{L_2^0 \to \Lambda(Q)}.$$

Пользуясь далее тем, что $\Lambda_n(Q_n) \subset \Lambda(Q)$, а $\Pi_n^0 \subset L_2^0$, а так же оценками 2), 3), получаем [7], что существует $N_3 \geq N_1$ такое, что при $n > N_3$ оператор $H + K_n$ непрерывно обратим в паре пространств (14), т.е. уравнение (11) с дополнительным условием (12) имеет единственное решение $v_n(\phi)$.

Здесь N_3 выбрано так, чтобы при $n > N_3$ выполнялось условие

$$p_n \equiv \|(H+K) - (H+K_n)\|_{\Lambda_n(Q_n) \to L_2^0} \left\|(H-K)_n^{-1}\right\|_{L_2^0 \to \Lambda(Q_n)} < 1.$$

С учетом Леммы 2, сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. *Существует $N \geq max\{N_2, N_3\}$ такое, что при $n > N$ уравнение (11) имеет в паре пространств (14) единственное решение $v_n(\phi)$ и имеет место оценка скорости сходимости решения "приближенной задачи" (6),(7) к решению исходной задачи (3)-(4):*

$$\|v - v_n\|_{L_2} \leq \|v - v^n\|_{L_2} + \|v^n - v_n\|_{L_2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n^{\mu+\gamma-1}} \frac{D}{1-p_n} \left[4\sqrt{\pi}(b + \sqrt{2}CB) + 16\pi BD \|f\|_{L_2}\right] +$$

$$+ \frac{1}{n^{\mu+\gamma}} \frac{d}{q(f)} \|f\|_{L_2} \left\|(H-K)^{-1}\right\|_{L_2^0 \to \Lambda(Q)} \leq \frac{S}{n^{\mu+\gamma-1}},$$

где S – константа.

Для регуляризующей неизвестной β_n получаем оценку

$$\beta_n = O\left(\frac{1}{n^{\mu+\gamma-1}}\right) \quad при \quad n \to \infty.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. – М.: Мир, – 1987. – 311 с.

2. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, – 1989. – 256 с.

3. Гандель Ю.В., Еременко С.В., Полянская Т.С. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн. – Харьков: ХГУ, – 1992. – 145 с.

4. Лифанов И.К. О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. //ДАН СССР – 1980. – Т.255,5. – С. 1046-1050.

5. Гандель Ю.В. Метод дискретных особенностей в задачах электродинамики. // Вопросы кибернетики. – 1986. – М.: Изд. АН СССР. – С. 166-183.

6. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.;Л.: ГТТИ, – 1949. – 688 с.

7. Габдулхаев Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, – 1980. – 231 с.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517 № 514, 2001, с. 164–169

The eigenproblem of free anyons and anyons in harmonic isotropic oscillator potential

Jan Milewski, Kamila Popiel
Institute of Mathematics, University of Szczecin, Poland

The eigenproblem for the cases of free anyons and of anyons in harmonic isotropic oscillator potential on a plane is given by means of anyonic harmonic functions and hipergeometric functions. *2000 Mathematical Subject Classification* 81Q05.

1. Introduction

We consider an anyon system on a plane. The anyon theory is a special case of topological quantum mechanics, which describes systems having non - simply connected configuration space. It is well known that wave functions in topological quantum mechanics are multivalued ones [1]–[4]. The anyon theory is applied to desribe twodimensional physical system e.g. fractional quantum Hall effect, or high - temperature superconductivity. The paper is organised as follows. In the second section we give some information about topological quantum mechanics. In the next section we describe the configuration space of anyon system on a plane, and give compact formulas for wave functions of the system. The main results of the paper are given in the last section which is devoted to the eigenproblem for the cases of free anyons and anyons in isotropic harmonic oscillator potential.

2. Quantum mechanics on a non-simply connected space

Let M be a non-simply connected space of classical configurations of a physical system and $(\widetilde{M}, M, p)$ be its universal covering, so that M is the basis of this covering, $\widetilde{M}$ is the total space, and the map

$$p : \widetilde{M} \longrightarrow M \tag{1}$$

is the covering projection. The set $p^{-1}(m)$ for $m \in M$ is the fiber over m. Let $\chi : \pi_1(M) \longrightarrow U(1)$ be a unitary one dimensional representation of the homotopy group $\pi_1(M)$. Let

$$L : \pi_1(M) \times \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \tag{2}$$

be the standard left free action of the group $\pi_1(M)$ on the total space $\widetilde{M}$ [2]. The map L is defined as follows. Let $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ be a loop at the point $m \in M$, $[\gamma]$ denote its homotopy class, $\widetilde{m} \in p^{-1}(m)$, and $\widetilde{\gamma}$ be a lift of γ, such that $\widetilde{\gamma}(0) = \widetilde{q}$. Then

$$L([\gamma], \widetilde{m}) := \widetilde{\gamma}(1) . \tag{3}$$

We shall use the notation

$$[\gamma]\widetilde{m} := L([\gamma], \widetilde{m}) . \tag{4}$$

Sometimes it is convenient to consider the map

$$L_{[\gamma]} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M} \quad , \; L_{[\gamma]}(\widetilde{m}) = L([\gamma], \widetilde{m}) . \tag{5}$$

The map $L_{[\gamma]}$ does not move any point out of its fiber, so that

$$p \circ L_{[\gamma]} = p . \tag{6}$$

A function $f : \widetilde{M} :\longrightarrow C$ is χ–equivariant, (where χ is an unitary onedimensional representation of the fundamental group $\pi_1(M)$) if the following condition is satisfied:

$$\forall [\gamma] \in \pi_1(M) : L_{[\gamma]*} f = \chi([\gamma]) \cdot f , \tag{7}$$

which means that:

$$\forall \widetilde{m} \in \widetilde{M}, [\gamma] \in \pi_1(Q) : f([\gamma]\widetilde{m}) = \chi([\gamma]) f(\widetilde{m}) . \tag{8}$$

The Hilbert space of states of topological quantum mechanics is the space of square–integrable χ–equivariant functions [2],[3]. Operators of physical observables are defined in the same way as in ordinary quantum mechanics, e.g. the Hamilton operator is given by the expression

$$\hat{H} = \hat{T} + V , \tag{9}$$

where V is a potential field and

$$\hat{T} = -\frac{1}{2m} \Delta$$

(Δ is the Laplace operator).

The evolution of the system in quantum mechanics is given by the nonstationary Schrödinger equation

$$\hat{H}\Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial t} , \tag{10}$$

eigenstates and energetic levels – by the stationary Schrödinger equation

$$\hat{H}\Psi = E\Psi \tag{11}$$

3. The configuration space and the braid group

Anyons are identical, indistinguishable particles with hard core, so a collision of two or more particles is a singularity of the motion. For N anyons on the plane C, which we identify with the plane of complex numbers, the configuration space is the set of all regular orbits of the natural acting of the symmetric group S_N on C^N:

$$Q_N = (C^N - D_N)/S_N \,, \tag{12}$$

or in other words the generic stratum of S_N, where the set

$$D_N = \{(z_1, \ldots, z_N) \in C^N | \exists i \neq j : z_i = z_j\} \tag{13}$$

is the fat diagonal.

The fundamental group of the configuration space Q_N is so called the braid group

$$B_N = \pi_1(Q_N). \tag{14}$$

This group has the system of $N-1$ generators

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{N-1} \,, \tag{15}$$

where the k–th generator is given by the elementary transpostion of k–th and $(k+1)$ particles [1]–[3], [5].

These generators are called elementary transpositions and satisfy the commutation rules:

$$\sigma_l \sigma_k = \sigma_k \sigma_l \quad \text{for} \quad k - l > 1 \tag{16}$$

and the Yang–Baxter equation:

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1} \,. \tag{17}$$

It is convenient to separate the motion of anyons into the mass centre and the relative space. The mass centre space defined by the complex coordinate

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} z_k \tag{18}$$

has trivial homotopy, so we will deal only with the relative motion space, which is orthogonal to the former one. Let

$$u = (u_1, \ldots, u_M) \;, \text{where} \;\; M = N - 1 \tag{19}$$

be an orthonormal system of relative coordinates. There are such the types of relative parts of anyon wave functions

$$V^{\nu}(u) F(u, u^*) \tag{20}$$

and

$$V^{2-\nu}(u^*)F(u,u^*) \ , \tag{21}$$

where $F(u,u^*)$ is a univalent, symmetric function in relation to transpositions of particles, it means that the composed function $F(u(z),u^*(z^*))$ is symmetric or antisymmetric in relation to z–coordinates, and $V(u)$ $(V(u^*))$ is the Vandermonde determinand of holomorphic positions z (resp. antiholomorphic z^*).

3. Harmonic oscillator

We start from the following definition

Definition *A function of the type Eq.[20 – 21] satisfying the Laplace equation*

$$\sum_{k=1}^{M} \frac{\partial^2 H(u,u^*)}{\partial u_k \partial u_k^*} = 0 \tag{22}$$

is called anyonic harmonic function. If this function is in addition an eigenfunction of the holomorphic and antiholomorphic homogeneity operators

$$\sum_{k=1}^{M} z_k \frac{\partial H(u,u^*)}{\partial u_k} = \alpha H(u,u^*) \ , \ \sum_{k=1}^{M} z_k^* \frac{\partial H(u,u^*)}{\partial u_k^*} = \beta H(u,u^*) \tag{23}$$

then this function is called bihomogeneous anyonic harmonic function of birank (α,β).

The following theorem gives the recepture for obtaining anyonic harmonic functions.

Theorem. *Anyonic harmonic functions are given by the following formulas:*

$$H(u,u^*) = P_{sym}(u_1^* \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2^* \frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots)(f_{sym}(u)V^{\nu+2k}(u)) \tag{24}$$

$$H(u,u^*) = P_{antisym}(u_1^* \frac{\partial}{\partial u_2} - u_2^* \frac{\partial}{\partial u_1}, \ldots)(f_{sym}(u)V^{\nu+2k-1}(u)) \tag{25}$$

or

$$H(u,u^*) = P_{sym}(u_1 \frac{\partial}{\partial u_2^*} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_1^*}, \ldots)(f_{sym}(u^*)V^{2-\nu+2k}(u^*)) \tag{26}$$

$$H(u,u^*) = P_{antisym}(u_1 \frac{\partial}{\partial u_2^*} - u_2 \frac{\partial}{\partial u_1^*}, \ldots)(f_{sym}(u^*)V^{1-\nu+2k}(u^*)) \tag{27}$$

where P_{sym} ($P_{antisym}$) are polynomials of $\binom{M}{2}$ variables, such that the corresponding differential operators are symmetric (antisymmetric) with respect variables z, and functions f_{sym} are also supposed to be symmetric with respect to z. For P, f homogeneous the function H is a bihomogeneous one.

For the proof see [5]–[7].

The relative part of the Hamiltonian of the isotropic harmonic oscillator with frequency ω is given by

$$\hat{H}^{\omega}_{rel} = \hat{T}_{rel} + \frac{m\omega^2}{2}|u|^2 , \tag{28}$$

where

$$\hat{T}_{rel} == -\frac{2}{m}\sum_{k=1}^{M}\frac{\partial^2}{\partial u_k \partial u_k^*} , \tag{29}$$

is the relative part of the kinetic energy, and $|u|^2 = \sum |u_k|^2$.

Theorem. *Eigenstates of the relative part of kinetic energy $\hat{T}_{rel}$ is given by the formula,*

$$\Phi^{free}_{rel}(u,u^*) = H(u,u^*)_0F_1(;a+b+M;-\lambda^2|u|^2) , \tag{30}$$

and eigenstates of the relative part of the Hamiltonian H^{ω}_{rel} of the isotropic harmonic oscillator

$$\Phi^{\omega}_{rel}(u,u^*) = \exp(-\frac{m\omega}{2}|u|^2)H(u,u^*)_1F_1(\frac{1}{2}(a+b+M)-\frac{d}{m\omega};M+a+b;m\omega|u|^2) , \tag{31}$$

where $H(u,u^*)$ is a ν–equivariant harmonic bihomogeneous function of birank (a,b). The spectrum for free case is a continous one, and for harmonic oscillator – discrete.

Proof. Let us consider a function of the form

$$\Phi^{free}_{rel}(u,u^*) = H(u,u^*)f(|u|^2) . \tag{32}$$

The eigenproblem for the free particle case ($\hat{T}_{rel}\Phi = E\Phi$) leads to the following equation for f:

$$xf''(x) + (a+b+M)f'(x) = -\lambda^2 f(x) , \tag{33}$$

where $E = \frac{2\lambda^2}{m}$. So we can express the solution by the confluent hipergeometric function $_0F_1(;a+b+M;-\lambda^2 x)$ and the spectrum is continous, $E > 0$. For the harmonic oscillator we consider

$$\Phi^{\omega}_{rel}(u,u^*) = \exp(-\frac{m\omega}{2}|u|^2)H(u,u^*)f(|u|^2) . \tag{34}$$

By some calculation we get the following equation for f:

$$xf''(x) + (h+M)f'(x) = \left[\frac{m\omega}{2}(M+a+b) - d\right] f(x) + m\omega x f'(x) , \tag{35}$$

where $E = \frac{2}{m}d$ and the solution is given in terms of hipergeometric functions:

$$_1F_1(\frac{1}{2}(a+b+M) - \frac{d}{m\omega}; M+a+b; m\omega x) \tag{36}$$

The spectrum is discrete, because $\frac{1}{2}(a+b+M) - \frac{d}{m\omega}$ should be a non positive integer. □

The eigenproblem was also considered by C. Chou and S. Forte [8], [9]. In this paper we have obtained larger class of solutions of the eigenproblem, because of using anyonic harmonic functions.

Remark. The the spectrum of the Hamiltonian of the harmonic oscillator in the anyon theory consists of two series: the first one

$$E_n^I = \left(2M + 2\binom{N}{2}\nu + n\right)\frac{\omega}{2}\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots \tag{37}$$

and the second

$$E_n^{II} = \left(2M + 2\binom{N}{2}(2-\nu) + n\right)\frac{\omega}{2}\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots\ . \tag{38}$$

This situation is connected with the fact, that $V(u)^\nu$ is a homogeneous function of the rank $\binom{N}{2}\nu$ and $V(u^*)^{2-\nu}$ – of rank $\binom{N}{2}(2-\nu)$

REFERENCES

1. Wu. Y. General Theory for Quantum Statistics in Two Dimensions. // Phys. Rev. Lett. – 1984. – 2103. – Vo. 52, **24**.
2. Morandi G. The Role of Topology in Classical and Quantum Physics.– Springer-Verlag, – 1992.
3. Lerda A. Anyons Quantum Mechanics of Particles with Fractional Statistics. – Springer-Verlag, – 1992.
4. Wilczek F. Fractional Statistics and Anyons Superconductivity. – World Sci, – 1990.
5. Milewski J. Construction of Anyonic Harmonic Functions, in Symmetry and Structural Propertis of Condensed Matter T. Lulek, W. Florek, B. Lulek – World Scientific, – 1997.
6. Milewski J. Anyonic Harmonic Functions, in Hidden Symmetries: the Recipte of Weyl – Rzeszow, – 1997.
7. Milewski J., Lulek T. Harmonic Functions and Angular Momentum for Anyon Systems. // J. Math. Phys. – 2001. – Vo. 42, **3**. – P. 1418-1427.
8. Chou C. Multi-anyon quantum mechanics and fractional statistics. // Phys. Lett. – 1991. – A **155**, No. 4, 5. – P. 245-251.
9. Forte S. Quantum mechanics and field theory with fractional spin and statistics. // Rev. Mod. Phys. – 1992. – **64** , No. 1. – p. 193.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 531.36 № 514, 2001, с. 170-176

Итерацонный метод в задаче оптимального управления для линейной системы в стандартной форме

Т. А. Мельник

Одесская государственная академия строительства и архитектуры, Украина

Предложен итерационный метод решения задачи управления линейной системой в стандартной форме, основанный на методе усреднения.
2000 Mathematics Subject Classification 34H05.

Введение

Метод усреднения [1] дает широкие возможности при построении асимтотических и численных методов [1-5] приближенного решения систем дифференциальных уравнений с малым параметром. В данной работе метод усреднения используется для построения итерационной схемы приближенного решения задачи оптимального управления для линейной системы в стандартной форме. Предлагаемый подход основан на результатах работы [6, гл.1] для задач управления линейными системами с сильно выпуклым функционалом и итерационного метода [7] для линейных систем стандартного вида и идейно близок к методу последовательных приближений [2], применяемому для непрерывных систем стандартного вида, и итерационному методу [8] приближенного решения задач управления для линейных сингулярно возмущенных систем.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x} = \varepsilon A(t, \varepsilon t)x + \varepsilon B(t, \varepsilon t)u, \quad x(0) = x^0, \tag{1}$$

$$I[u] = \varepsilon \int_0^{L/\varepsilon} F(x(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon), t, \varepsilon t)dt \to \min_{u \in U}, \tag{2}$$

где $0 \le t \le T$, $T = L/\varepsilon$; $x \in R^n$; A, B -матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$, соответственно, U— множество r—мерных измеримых вектор-функций, значения которых при почти всех $t \in [0, T]$ принадлежат единичному кубу из R^r.

Множество U является выпуклым, замкнутым и ограниченным множеством из $L_2{}^r[0, L/\varepsilon]$.

Пусть в области $\{t \geq 0, \tau \in [0, L], x \in Q\}$ выполнены следующие условия:

1) функции $A(t,\tau), B(t,\tau)$ кусочно-непрерывны и 2π- периодические по t при каждом фиксированном τ, удовлетворяют условию Липшица по τ при кажом фиксированном t; ограниченны константой $\lambda > 0$;

2) скалярная функция F и ее частные производные F_x, F_u удовлетворяют условию Липшица по x, u, τ, почти всюду ограниченны константой $\lambda > 0$ и удовлетворяют неравенству

$$F(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha u_1 + (1-\alpha)u_2, t, \varepsilon t) \leq \alpha F(x_1, u_1, t, \varepsilon t) +$$
$$+(1-\alpha)F(x_2, u_2, t, \varepsilon t) - \alpha(1-\alpha)\beta\|u_1 - u_2\|^2,$$

где $\beta = const > 0$; $\alpha \in [0,1]$; $x_j \in Q$, $u_j \in U$, $j = 1, 2$.

Из условий 1)-2) в силу теоремы 8[6, стр. 55] следует, что функция $I[u]$ сильно выпукла на $L_2[0, L/\varepsilon]$ и достигает своей нижней грани на множестве U, причем оптимальное управление $u^*(t,\varepsilon) \in L_2[0, L/\varepsilon]$ единственно, а градиент I', как показано в теореме 3[6, стр. 100], удовлетворяет соотношению

$$I'[u] = \varepsilon F_u(x, u, t, \varepsilon t) - \varepsilon B^T(t, \varepsilon t)\Psi(t, \varepsilon, u), \tag{3}$$

где $\Psi(t, \varepsilon, u)$ является решением задачи

$$\dot{\Psi} = -\varepsilon A^T(t, \varepsilon t)\Psi + \varepsilon F_x(x, u, t, \varepsilon t), \quad \Psi(L/\varepsilon, \varepsilon, u) = 0, \tag{4}$$

верхний индекс T означает транспонирование.

Соответствующая частично усредненная задача имеет вид

$$\frac{dx_0}{dt} = \varepsilon \overline{A}(\varepsilon t)x_0 + \varepsilon B(t, \varepsilon t)u_0(t, \varepsilon), \quad x_0(0) = x^0 \tag{5}$$

$$\frac{d\Psi_0}{dt} = -\varepsilon \overline{A}^T(\varepsilon t)\Psi_0 + \varepsilon F_x(x_0, u_0, t, \varepsilon t), \quad \Psi_0(L/\varepsilon, \varepsilon) = 0, \tag{6}$$

где $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$,

$$\overline{A}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A(t, \tau)dt,$$

функция

$$u_0(t, \varepsilon) = \{\overline{u} \in U : \overline{u}^T B^T \Psi_0 - F(x_0, \overline{u}, t, \varepsilon t) =$$
$$\max_{u \in U}[u^T B^T \Psi_0 - F(x_0, u, t, \varepsilon t)]\}, \tag{7}$$

существует и единственна в силу сильной выпуклости функционала $-[u^T B^T \Psi_0 - F(x_0, u, t, \varepsilon t)]$ на множестве U.

Рассмотрим следующее условие:

3) решение $x_0(t, \varepsilon)$ задачи (5), (7) принадлежит области Q вместе со своей ρ-окрестностью при $t \geq 0$.

2. Итерационный процесс

В работе [2] с помощью близкого к тождественному преобразования [4] решение нелинейных задач Коши для систем стандартного вида было предложено сводить к решению более простых частично усредненных задач. Воспользуемся модификацией метода [7] для приближенного решения линейных систем. Рассмотрим итерационный процесс для нахождения вектор-функций $x_{n+1}(t,\varepsilon,u_n) \equiv S(t,\varepsilon)y_{n+1}(t,\varepsilon,u_n)$,

$$\dot{y}_{n+1} = \varepsilon\overline{A}(\varepsilon t)y_{n+1} + \varepsilon f_n(t,\varepsilon t,\varepsilon), \qquad y_{n+1}(0,\varepsilon) = x^0, \tag{8}$$

здесь $n = 0,1,2,...;\quad u_n \in U,\quad S(t,\varepsilon) \equiv E + I(t,\varepsilon),\quad \widetilde{A} \equiv AI - I\overline{A}$,

$$I(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon\int\limits_0^t [A(s,\varepsilon s) - \overline{A}(\varepsilon s)]ds,$$

$$f_n(t,\varepsilon t,\varepsilon) \equiv S^{-1}(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon t)u_n(t,\varepsilon) + S^{-1}(t,\varepsilon)\widetilde{A}(t,\varepsilon t)y_n,$$

через E обозначена единичная матрица, $S(t,\varepsilon)$ –преобразование близкое к тождественному [4].

Для приближенного решения задачи (4) построим аналогичный [7] итерационный процесс $\Psi_{n+1} \equiv R(t,\varepsilon)P_{n+1}$, для которого вектор-функции $P_{n+1}(t,\varepsilon,u_n)$ являются решениями задачи

$$\dot{P}_{n+1} = -\varepsilon\overline{A}^T(\varepsilon t)P_{n+1} + \varepsilon g_n(t,\varepsilon t,\varepsilon), \quad P_{n+1}(T,\varepsilon,u_n) = 0, \tag{9}$$

где $R(t,\varepsilon) \equiv E + J(t,\varepsilon),\quad \widetilde{B} \equiv A^T J - J\overline{A}^T,\ J(t,\varepsilon) \equiv -I^T(t,\varepsilon)$,

$$g_n(t,\varepsilon t,\varepsilon) \equiv R^{-1}(t,\varepsilon)F_x(x_{n+1},u_n,t,\varepsilon t) - R^{-1}(t,\varepsilon)\widetilde{B}(t,\varepsilon t)P_n.$$

В качестве нулевого приближения возьмем решение $x_0(t,\varepsilon)$, $\Psi_0(t,\varepsilon)$, $u_0(t,\varepsilon)$ задачи (5)-(7), при этом

$$I'_n[u_n] = \varepsilon F_u(x_{n+1}(t,\varepsilon,u_n),u_n(t,\varepsilon),t,\varepsilon t) - \varepsilon B^T(t,\varepsilon t)\Psi_{n+1}(t,\varepsilon,u_n). \tag{10}$$

Следующее приближение u_{n+1} находим по формуле

$$u_{n+1} = P_U(u_n - \alpha_n I'_n[u_n]), \qquad n = 0,1,2,..., \tag{11}$$

где $\alpha_n > 0$, $\quad P_U$-оператор проектирования на множество U.

Оценка отклонения приближенного решения задачи оптимального управления (1),(2) устанавливается следующей теоремой

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1)-3).*

Тогда существуют постоянные $\varepsilon_0 > 0, C > 0$ *такие, что для любых* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ *найдутся такие* $\widetilde{m}_n(\varepsilon) > 0,\ \alpha_n(\varepsilon) \in (0, 2\widetilde{m}_n(\varepsilon)/(C^2\varepsilon))$, *что* *для оптимального управления $u^*(t,\varepsilon)$ и оптимальной траектории $x^*(t,\varepsilon)$ имеют место оценки*

$$\|u_n - u^*\|_{L_2[0,L/\varepsilon]} \le C\varepsilon^{1/2}|q(\alpha_n)|^n, \quad \|x_{n+1}(t,\varepsilon,u_n) - x^*(t,\varepsilon)\| \le C\varepsilon^{1/2}|q(\alpha_n)|^n$$

при $t \in [0, L/\varepsilon]$, $\quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $(1+\alpha_n(\alpha_n C^2\varepsilon^2 - 2\widetilde{m}_n\varepsilon))^{1/2} < |q(\alpha_n)| < 1$.

Замечание. Здесь и в дальнейшем через $C > 0$ обозначим, вообще говоря, разные константы, не зависящие от ε.

3. Вспомогательный результат

Лемма. *При условиях 1)-3) существуют постоянные $\varepsilon_0 > 0$, $\quad C > 0$, такие что для любых $u, v \in U$ равномерно по $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ имеют место оценки*

$$\|I_n'[u] - I_n'[v]\|_{L_2[0,L/\varepsilon]} \le C\varepsilon\|u - v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]},$$

$$(I_n'[u] - I_n'[v], u - v) \ge \varepsilon\widetilde{m}_n\|u - v\|^2{}_{L_2[0,L/\varepsilon]}, \qquad \widetilde{m}_n(\varepsilon) > 0, \qquad (12)$$

$$\|x_n(t,\varepsilon,u) - x_n(t,\varepsilon,v)\| \le C\varepsilon^{1/2}\|u - v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]},$$

$$\|\Psi_n(t,\varepsilon,u) - \Psi_n(t,\varepsilon,v)\| \le C\varepsilon^{1/2}\|u - v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]}, \qquad (13)$$

Доказательство леммы

Обозначим через $X(\tau,\bar{s})$ $\quad (0 \le \bar{s} \le \tau \le L)$ фундаментальную матрицу системы (5), тогда $\|X(\tau,\bar{s})\| \le C$ при $0 \le \bar{s} \le \tau \le L$.

Оценим норму разности решений системы (8) при разных управлениях $u(t,\varepsilon), v(t,\varepsilon) \in U$

$$\|y_n(t,\varepsilon,u(t,\varepsilon)) - y_n(t,\varepsilon,v(t,\varepsilon))\| \le C\varepsilon\int\limits_0^t \|y_n(s,\varepsilon,u(s,\varepsilon)) - y_n(s,\varepsilon,v(s,\varepsilon))\|ds +$$

$$+C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]} + C\varepsilon\|y_{n-1}(t,\varepsilon,u(t,\varepsilon)) - y_{n-1}(t,\varepsilon,v(t,\varepsilon))\|_{C[0,L/\varepsilon]},$$

откуда

$$\|y_n(t,\varepsilon,u(t,\varepsilon)) - y_n(t,\varepsilon,v(t,\varepsilon))\|_{C[0,L/\varepsilon]} \le$$

$$\le [C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]} + C\varepsilon\|y_{n-1}(t,\varepsilon,u) - y_{n-1}(t,\varepsilon,v)\|_{C[0,L/\varepsilon]}]e^{CL} \le$$

$$\le C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]}\sum_{i=0}^{n-1}(C\varepsilon)^i + (C\varepsilon)^n\|y_0(t,\varepsilon,u) - y_0(t,\varepsilon,v)\|_{C[0,L/\varepsilon]}.$$

Из формулы суммы геометрического ряда для достаточно малого $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и из оценки

$$\|y_0(t,\varepsilon,u) - y_0(t,\varepsilon,v)\| = \|S^{-1}(t,\varepsilon)\|\|x_0(t,\varepsilon,u) - x_0(t,\varepsilon,v)\| \le$$

$$\leq C\varepsilon \int\limits_0^{L/\varepsilon} \|X(\varepsilon t, \varepsilon s)\| \|u(s,\varepsilon) - v(s,\varepsilon)\| ds \leq C\varepsilon^{1/2} \|u - v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]}$$

заключаем, что

$$\|y_n(t,\varepsilon,u(t,\varepsilon)) - y_n(t,\varepsilon,v(t,\varepsilon))\|_{C[0,L/\varepsilon]} \leq$$

$$\leq C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]} \left[\frac{1-(C\varepsilon)^n}{1-C\varepsilon} + (C\varepsilon)^n\right] \leq C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]}.$$

Следовательно, для разности $x_n(t,\varepsilon,u) - x_n(t,\varepsilon,v) \equiv S(t,\varepsilon)[y_n(t,\varepsilon,u) - y_n(t,\varepsilon,v)]$ имеет место оценка (13)

$$\|x_n(t,\varepsilon,u(t,\varepsilon)) - x_n(t,\varepsilon,v(t,\varepsilon))\| \leq C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]},$$

при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Аналогично, получаем еще одну оценку вида (13)

$$\|\Psi_n(t,\varepsilon,u(t,\varepsilon)) - \Psi_n(t,\varepsilon,v(t,\varepsilon))\| \leq C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]}.$$

Рассмотрим величину

$$\|I_n'[u] - I_n'[v]\|^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} \leq \varepsilon^2 \int\limits_0^{L/\varepsilon} [\|F_u(x_{n+1}(t,\varepsilon,u), u(t,\varepsilon), t, \varepsilon t) -$$

$$-F_u(x_{n+1}(t,\varepsilon,v), v(t,\varepsilon), t, \varepsilon t)\| +$$

$$+\|B^T(t,\varepsilon t)\| \|\Psi_{n+1}(t,\varepsilon,u(t,\varepsilon)) - \Psi_{n+1}(t,\varepsilon,v(t,\varepsilon))\|]^2 dt.$$

С учетом оценок (13) приходим к неравенству

$$\|I_n'[u] - I_n'[v]\|^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} \leq \varepsilon^2 \int\limits_0^{L/\varepsilon} [(\lambda + C)C\varepsilon^{1/2}\|u-v\|_{L_2[0,L/\varepsilon]} +$$

$$+\lambda\|u(t,\varepsilon) - v(t,\varepsilon)\|]^2 dt \leq C^2\varepsilon^2\|u-v\|^2_{L_2[0,L/\varepsilon]},$$

т.е. получаем первую из оценок (12).

Рассмотрим вспомогательную задачу оптимального управления для системы (8) при $x_{n+1} \equiv S(t,\varepsilon)y_{n+1}$ и

$$\overline{I}_n[u_n] = \varepsilon \int\limits_0^{L/\varepsilon} F(x_{n+1}, u_n, t, \varepsilon t) dt. \tag{14}$$

Тогда в силу линейности задачи (8), (14) и условий 1)-2) заключаем [6], что функция $\overline{I}_n[u]$ сильно выпукла на $L_2[0, L/\varepsilon]$ и градиент имеет вид

$$\overline{I}'_n[u_n] = \varepsilon F_u(x_{n+1}, u_n, t, \varepsilon t) - \varepsilon B^T(t,\varepsilon t)(S^{-1}(t,\varepsilon))^T \overline{\Psi}_{n+1}(t,\varepsilon,u_n),$$

где

$$\dot{\overline{\Psi}}_{n+1} = -\varepsilon \overline{A}^T(\varepsilon t)\overline{\Psi}_{n+1} + \varepsilon S(t,\varepsilon)F_x(x_{n+1},u_n,t,\varepsilon t), \quad \overline{\Psi}_{n+1}(L/\varepsilon,\varepsilon,u) = 0.$$

Обозначим через $h_n(t,\varepsilon,u) \equiv \Psi_n(t,\varepsilon,u) - \overline{\Psi}_n(t,\varepsilon,u)$. Аналогично неравенствам (13) получим оценку

$$||h_{n+1}(t,\varepsilon,u) - h_{n+1}(t,\varepsilon,v)|| \le C\varepsilon^{1/2}||u-v||_{L_2[0,L/\varepsilon]}.$$

Из теоремы 4 [6, стр.101] следует, что выполняется неравенство

$$(\overline{I}'_n[u] - \overline{I}'_n[v], u-v) \ge \varepsilon m_n ||u-v||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]}, \quad m_n = 2\beta > 0,$$

тогда

$$(I'_n[u] - I'_n[v], u-v) = (\overline{I}'_n[u] - \overline{I}'_n[v], u-v) -$$
$$-(\varepsilon B^T(t,\varepsilon t)[h_{n+1}(t,\varepsilon,u) - h_{n+1}(t,\varepsilon,v)], u-v) \ge$$
$$\ge \varepsilon[m_n - C\varepsilon]||u-v||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} \ge \varepsilon\widetilde{m}_n(\varepsilon)||u-v||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]},$$

тем самым, существует $\varepsilon_0 > 0$, такое что при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ выполняется неравенство $\widetilde{m}_n(\varepsilon) = m_n - C\varepsilon > 0$ и имеет место вторая из оценок (12).

4. Доказательство теоремы

Обозначим через $T: U \to U$ оператор $Tu_n \equiv P_U(u_n - \alpha_n I'_n[u_n])$. Оценим величину

$$||Tu_n - Tv_n||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} = ||P_U(u_n - \alpha_n I'_n[u_n]) - P_U(v_n - \alpha_n I'_n)||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} \le$$
$$\le ||(u_n - v_n) - \alpha_n(I'_n[u_n] - I'_n[v_n])||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} \le ||u_n - v_n||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} +$$
$$+\alpha_n^2||I'_n[u_n] - I'_n[v_n]||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]} - 2\alpha_n(I'_n[u_n] - I'_n[v_n], u_n - v_n) < q^2||u_n - v_n||^2_{L_2[0,L/\varepsilon]},$$

где $1 + \alpha_n(\alpha_n C^2\varepsilon^2 - 2\widetilde{m}_n\varepsilon) < q^2$, причем $|q(\alpha_n)| < 1$ при $0 < \alpha_n(\varepsilon) < 2\widetilde{m}_n(\varepsilon)/(C^2\varepsilon)$. Другими словами, оператор T сжимающий с коэффициентом сжатия $|q(\alpha_n)| < 1$ при $0 < \alpha_n(\varepsilon) < 2\widetilde{m}_n(\varepsilon)/(C^2\varepsilon)$, тогда по принципу сжимающих отображений справедлива оценка

$$||u_n - u^*||_{L_2[0,L/\varepsilon]} \le ||u_1 - u_0||_{L_2[0,L/\varepsilon]}|q(\alpha_n)|^n.$$

Так как $u_1 = P_U(u_0 - \alpha_0 I'_0[u_0])$, где $I'_0[u_0(\varepsilon t)] = \varepsilon F_u(x_1,u_0,t,\varepsilon t) - \varepsilon B^T(t,\varepsilon t)\Psi_1(\varepsilon t,u_0)$, и $u_0 = P_U(u_0 - \alpha_0\overline{I}'_0[u_0])$, где $\overline{I}'_0[u_0] = F_u(x_0,u_0,t,\varepsilon t) - B^T(t,\varepsilon t)\Psi_0(\varepsilon t)$, тогда для достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ имеет место неравенство

$$||u_1 - u_0||_{L_2[0,L/\varepsilon]} \le ||u_0 - \varepsilon\alpha_0(F_u(x_1,u_0,t,\varepsilon t) - F_u(x_0,u_0,t,\varepsilon t)) +$$
$$+\varepsilon\alpha_0 B^T(t,\varepsilon t)(\Psi_1(t,\varepsilon) - \Psi_0(t,\varepsilon)) - u_0||_{L_2[0,L/\varepsilon]} \le$$

$$\leq C\varepsilon^{-1/2}(||x_1 - x_0||_{C[0,L/\varepsilon]} + ||\Psi_1 - \Psi_0||_{C[0,L/\varepsilon]}).$$

Из [7] вытекают оценки

$$||x_1 - x_0||_{C[0,L/\varepsilon]} \leq C\varepsilon, \qquad ||\Psi_1 - \Psi_0||_{C[0,L/\varepsilon]} \leq C\varepsilon.$$

Следовательно, для приближенного значения оптимального управления $u_n(t,\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справедлива оценка

$$||u_n - u^*||_{L_2[0,L/\varepsilon]} \leq C\varepsilon^{1/2}|q(\alpha_n)|^n. \tag{15}$$

В силу неравенства треугольника, теоремы [7], леммы и неравенства (15) при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $t \in [0, L/\varepsilon]$ приходим к оценке

$$||x(t,\varepsilon,u^*) - x_{n+1}(t,\varepsilon,u_n)|| \leq ||x(t,\varepsilon,u^*) - x_{n+1}(t,\varepsilon,u^*)|| +$$
$$+ ||x_{n+1}(t,\varepsilon,u^*) - x_{n+1}(t,\varepsilon,u_n)|| \leq C\varepsilon^{1/2}|q(\alpha_n)|^n,$$

из которой и неравенства (15) вытекает справедливость теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, – 1974. – 504 с.

2. Акуленко Л Д Применение методов усреднения и последовательных приближений для исследования нелинейных колебаний. // Прикладная математика и механика. – 1981. – Т. 45,**5**. – С. 771-777.

3. Филатов А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. – Ташкент: ФАН. – 1974. – 216 с.

4. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М. Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике. – Киев: Наукова думка. – 1989. – 248 с.

5. Самойленко А.М. Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. // Приближенные методы решения диф.урав. – Киев: АН УССР, – 1963. – С. 90-95.

6. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, – 1981. – 400 с.

7. Мельник Т.А. Итерационный метод для задачи усреднения в стандартной форме. // Украинский математ. журнал. – 1998. – Т. 50, **3**. – с. 114-117.

8. Дмитриев М.Г. Итерационное решение задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями. // Док. АН СССР, – 1983. – 272, **2**.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.574 № 514, 2001, с. 177–182

Мінімальні мажоранти зростання субгармонійних в $\mathbf{R}^m$ функцій нескінченного порядку

Я.В. Васильків, С.І. Тарасюк

Львівський національний університет імені Івана Франка, Україна

Знайдено мінімальні мажоранти зростання субгармонійних в $\mathbf{R}^m$, $m \geq 3$, функцій з обмеженнями на їх міри Ріса. Як наслідок, встановлена теорема про канонічне зображення δ-субгармонійної в $\mathbf{R}^m$ функції різницею субгармонійних функцій. *2000 Mathematics Subject Classification* 31A05.

Додатні, зростаючі до $+\infty$ неперервні на $(0, +\infty)$ функції називатимемо *функціями зростання*. Нехай ν — функція зростання. Через $\mathcal{M}_\nu$ позначатимемо множину борелівських мір в $\mathbf{R}^m$, $m \geq 3$, таких, що $0 \notin \operatorname{supp}\mu$ і $n(r;\mu)r^{2-m} \leq \nu(r)$, де $n(r;\mu) = \mu(\{y: |y| \leq r\})$.

Характеристика Неванлінни субгармонійної функції u в $\mathbf{R}^m$ позначається через $T(r,u)$, а її міра Ріса — μ_u. Нехай λ — функція зростання. Субгармонійну функцію u в $\mathbf{R}^m$ називають *функцією скінченного λ-типу*, якщо при деяких $a > 0$, $b > 0$ виконується $T(r,u) \leq a\lambda(br)$ для всіх $r > 0$. Клас субгармонійних функцій u таких, що $\mu_u \in \mathcal{M}_\nu$ позначатимемо через S_ν.

Означення. Функція зростання λ називається *мінімальною мажорантою зростання* для S_ν, якщо

1) для довільної міри μ з $\mathcal{M}_\nu$ існує субгармонійна функція скінченного λ-типу u така, що $\mu_u = \mu$;

2) існує міра μ з $\mathcal{M}_\nu$ така, що для довільної субгармонійної функції u такої, що $\mu_u = \mu$, виконується $\lambda(r) \leq aT(br, u)$ при деяких $a > 0$, $b > 0$ для всіх $r > 0$.

Теорема 1. *Нехай функція зростання ν задовольняє умови:*

i) функція $\log\nu(r)$ опукла відносно $\log r$;

ii) при деяких $b > 1$, $r_0 > 0$ виконується $\int\limits_{r_0}^{+\infty} \nu(t)(\nu(bt)t)^{-1}dt < +\infty$.

Тоді ν — мінімальна мажоранта зростання для S_ν.

Зауважимо, що функція зростання ν з теореми 1 має нескінченний порядок.

Спочатку наведемо необхідні означення та факти. Будемо дотримуватись позначень, прийнятих в [1],[2]. *Сферичною гармонікою* або *сферичною функцією Лапласа степеня* k, $k \in \mathbf{Z}_+$, називається звуження на одиничну сферу S^{m-1} в $\mathbf{R}^m$ однорідного гармонійного полінома степеня k. Множину сферичних гармонік степеня k можна розглядати, як підпростір простору Лебега $L^2(S^{m-1})$ дійснозначних функцій із скалярним добутком

$$(f,g) = \frac{1}{|S^{m-1}|} \int\limits_{S^{m-1}} f(x)g(x)d\sigma(x),$$

де $d\sigma$ — елемент площі сфери S^{m-1}, $|S^{m-1}| = \operatorname{mes} S^{m-1} = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$.

Якщо $\{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\}$ — ортонормована база в цьому підпросторі, то об'єднання по k таких баз

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} \{Y_1^{(k)}, Y_2^{(k)}, \ldots, Y_{a_k}^{(k)}\}$$

є ортонормованою базою в просторі $L^2(S^{m-1})$.

Рядом Фур'є-Лапласа функції $f \in L^1(S^{m-1})$ називається ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} Y^{(k)}(x; f),$$

де

$$Y^{(k)}(x; f) = b_1^{(k)} Y_1^{(k)}(x) + b_2^{(k)} Y_2^{(k)}(x) + \ldots + b_{a_k}^{(k)} Y_{a_k}^{(k)}(x),$$

$$b_j^{(k)} = (f, Y_j^{(k)}), \qquad j = 1, 2, \ldots, a_k.$$

Сферичні гармоніки $Y^{(k)}(x; f)$ можна виразити співвідношеннями

$$Y^{(k)}(x; f) = \frac{2k+m-2}{(m-2)|S^{m-1}|} \int\limits_{S^{m-1}} p_k^{(m-2)/2}[(x,y)] f(y) d\sigma(y),$$

де (x, y) — скалярний добуток в $\mathbf{R}^m$, а $p_k^{(m-2)/2}$ — *поліноми Гегенбауера*, які визначаються із розвинення

$$(1 - 2t\tau + \tau^2)^{(2-m)/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k^{(m-2)/2}(t)\tau^k.$$

Зауважимо, що

$$\max\{|p_k^{(m-2)/2}(t)|: t \in [-1,1]\} = p_k^{(m-2)/2}(1) = \frac{(k+m-3)!}{k!(m-3)!} = O(k^{m-3}),\ k \to +\infty,$$

а також $p_0^{(m-2)/2}(t) = 1$ для всіх $t \in [-1, 1]$.

Нехай μ — борелівська міра в $\mathbf{R}^m$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu$, і нехай $Y = \{Y^{(k)}(x)\}$, $Y^{(0)}(x) = 0$, — деяка послідовність сферичних гармонік. Нехай також $r \in$

$(0,+\infty)$, $k\in\mathbf{Z}_+$. *Сферичними гармоніками* $c_k(x,r;\mu,Y)$ *пари* (μ,Y) називають функції [2]

$$c_k(x,r;\mu,Y)=r^kY^{(k)}(x)+r^k\int\limits_{|y|\le r}p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}-$$
$$-\frac{1}{r^{k+m-2}}\int\limits_{|y|\le r}|y|^kp_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\frac{y}{|y|}\right)\right]d\mu(y),\quad x\in S^{m-1}. \tag{1}$$

Теорема 1 та лема 3 з [2] дають наступний критерій.

Теорема А. *Нехай λ — функція зростання. Для того, щоб борелівська міра μ, $0\notin\operatorname{supp}\mu$, була мірою Ріса деякої субгармонійної функції скінченного λ-типу u, необхідно і досить, щоб існували послідовність сферичних гармонік $\{Y^{(k)}(x)\}$, $Y^{(0)}(x)=0$, і сталі a, b, l такі, що*

$$\left|Y^{(k)}(x)+\int\limits_{|y|\le r}p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}\right|\le a(k+1)^l\lambda(br)r^{-k} \tag{2}$$

для всіх $r>0$, $k\in\mathbf{Z}_+$, $x\in S^{m-1}$

Доведення теореми 1. Нехай $\mu\in\mathcal{M}_\nu$. Для побудови субгармонійної в $\mathbf{R}^m$, $m\ge 3$, функції скінченного ν-типу u такої, що $\mu_u=\mu$, побудуємо спочатку сферичні гармоніки (1) пари (μ,Y), підібравши в (1) $Y^{(k)}(x)$ так, щоб для всіх $r>0$, $k\in\mathbf{Z}_+$, $x\in S^{m-1}$ виконувалося співвідношення (2) з $\lambda=\nu$, $l=m-2$ при деяких $a>0$, $b>0$.

Нехай функція ν задовольняє умови i) та ii). Неважко побудувати гладку строго зростаючу функцію $\widetilde{\nu}$, для якої $\log\widetilde{\nu}(r)=\log\nu(r)+O(1)$, $r\to+\infty$. Тому саму функцію ν вважатимемо такою. Позначимо $\log\nu(r)=\tau(r)$. Тоді зі строгої опуклості функції $\tau(r)$ відносно $\log r$ та її гладкості випливає, що $r\tau'(r)$ строго зростає до $+\infty$ на $(0,+\infty)$. Отже, при $k\in\mathbf{Z}_+$ маємо: або $r\tau'(r)>k$ при $r>0$, або існує єдине $r_k>0$ таке, що $br_k\tau'(br_k)=k$. Це r_k є єдиною точкою мінімуму функції $\tau(bt)-k\log t$. Покладемо в першому випадку $Y^{(k)}(x)=0$, $r_k=0$, а в другому —

$$Y^{(k)}(x)=-\int\limits_{|y|\le r_k}p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\frac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}.$$

Тоді при $k\in\mathbf{Z}_+$, $x\in S^{m-1}$ маємо

$$Y^{(k)}(x)+\int_{|y|\le r}p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\tfrac{y}{|y|}\right)\right]\frac{d\mu(y)}{|y|^{k+m-2}}=$$
$$=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{r_k<|y|\le r}p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\tfrac{y}{|y|}\right)\right]|y|^{2-k-m}d\mu(y) & ,\ r\ge r_k;\\ \displaystyle-\int\limits_{r<|y|\le r_k}p_k^{(m-2)/2}\left[\left(x,\tfrac{y}{|y|}\right)\right]|y|^{2-k-m}d\mu(y) & ,\ r<r_k.\end{cases}$$

Два останні інтеграли оцінюються за модулем виразами

$$p_k^{(m-2)/2}(1)\int\limits_{r_k}^{r}\frac{dn(t;\mu)}{t^{k+m-2}}\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left\{\frac{n(r;\mu)}{r^{k+m-2}}+(k+m-2)\int\limits_{r_k}^{r}\frac{n(t;\mu)}{t^{k+m-1}}dt\right\}\le$$
$$\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left\{\frac{\nu(r)}{r^k}+\frac{k+m-2}{r^k}\nu(br)\left(\int\limits_{r_0}^{+\infty}\frac{\nu(t)}{\nu(bt)}\frac{dt}{t}+c\right)\right\}\le\frac{a(k+1)^{m-2}\nu(br)}{r^k}, \tag{3}$$

при деяких $c>0,\ a>0,\ b>0$ і

$$p_k^{(m-2)/2}(1)\int\limits_{r}^{r_k}\frac{dn(t;\mu)}{t^{k+m-2}}\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left\{\frac{n(r_k;\mu)}{r_k^{k+m-2}}+(k+m-2)\int\limits_{r}^{r_k}\frac{n(t;\mu)}{t^{k+m-1}}dt\right\}\le$$
$$\le p_k^{(m-2)/2}(1)\left\{\frac{\nu(br)}{r^k}+\frac{k+m-2}{r^k}\nu(br)\int\limits_{r}^{+\infty}\frac{\nu(t)}{\nu(bt)}\frac{dt}{t}\right\}\le\frac{a(k+1)^{m-2}\nu(br)}{r^k} \tag{4}$$

при деяких $a>0,\ b>0$, відповідно.

Враховуючи (3) та (4), дістаємо (2). Тоді за теоремою А існує субгармонійна в $\mathbf{R}^m$ функція u скінченного ν-типу така, що $\mu_u=\mu$, $u(0)=0$.

Перевіримо тепер умову 2) означення. Позначимо $N(r;\mu) = (m-2)\int_0^r n(t;\mu)t^{1-m}dt$, $N(r;\mu_u)=N(r,u)$. Розглянемо борелівську в $\mathbf{R}^m$ міру μ, $0\notin\operatorname{supp}\mu$, таку, що $\frac{1}{2}\nu(r)\le n(r;\mu)r^{2-m}\le\nu(r)$. Для довільної функції $u\in S_\nu$, $u(0)=0$, $\mu_u=\mu$ маємо, враховуючи нерівність $N(r,u)\le T(r,u)$ [3, с. 146],

$$\nu(r)\le 2n(r;\mu)r^{2-m}\le 4(m-2)n(r;\mu)\int\limits_r^{2r}t^{1-m}dt\le 4N(2r,u)\le 4T(2r,u).$$

Теорему 1 доведено.

Теорему 1 застосуємо до зображення δ-субгармонійної в $\mathbf{R}^m$ функції w різницею субгармонійних за певних умов на їх зростання та додатні (від'ємні) варіації μ_w^+ (μ_w^-) міри Ріса μ_w.

Нагадаємо, що відображення w із $\mathbf{R}^m$ в $\overline{\mathbf{R}}$ називається *δ-субгармонійною в $\mathbf{R}^m$ функцією*, якщо існують субгармонійні в $\mathbf{R}^m$ функції u, v такі, що:

а) w визначена на множині точок $G\subset\mathbf{R}^m$, в яких u і v не дорівнюють одночасно $-\infty$;

б) $w(y)=u(y)-v(y)$ на G у розумінні $\overline{\mathbf{R}}$.

Оскільки $\Delta u\ge 0$, $\Delta v\ge 0$ у розумінні узагальнених функцій, то Δw є мірою, де Δ — оператор Лапласа. Міру $\mu_w=\left((m-2)|S^{m-1}|\right)^{-1}\Delta w$ називають *мірою Ріса δ-субгармонійної функції w.*

Нехай $\mu_w=\mu_w^+-\mu_w^-$ — розвинення Жордана міри μ_w. Якщо $\mu_u=\mu_w^+$, $\mu_v=\mu_w^-$, то зображення $w(y)=u(y)-v(y)$ називають *канонічним;* різниця визначена на G. Якщо $w(0)=0$, то існує канонічне зображення таке [2], що $u(0)=v(0)=0$.

Нехай $w = u - v$ — канонічне зображення, $u(0) = v(0) = 0$. *Характеристикою Неванлінни* функції w називається функція

$$T(r, w) = \frac{1}{|S^{m-1}|} \int\limits_{S^{m-1}} \max\{u(ry), v(ry)\} d\sigma(y).$$

Враховуючи рівність $w^+ + v = \max(u, v)$ і формулу Ієнсена [3, с. 145], маємо також

$$T(r, w) = \frac{1}{|S^{m-1}|} \int\limits_{S^{m-1}} w^+(ry) d\sigma(y) + N(r, \mu_w^-).$$

Нехай λ — функція зростання. Будемо говорити, що δ-субгармонійна в $\mathbf{R}^m$ функція w, $w(0) = 0$, $0 \notin \operatorname{supp} \mu_w$, має *скінченний λ-тип* [2], якщо при деяких $a > 0$, $b > 0$ виконується нерівність $T(r, w) \leq a\lambda(br)$ для всіх $r > 0$.

Тепер подамо для δ-субгармонійних в $\mathbf{R}^m$ функцій w аналог теореми Майлза [4] про зображення мероморфних в $\mathbf{C}$ функцій скінченного λ-типу часткою цілих функцій скінченного λ-типу. Слідуючи [5], ми будемо вимагати, щоб зображення функції $w = u - v$ було канонічним. Найбільш загальні аналоги теореми Майлза для δ-субгармонійних в $\mathbf{R}^m$ функцій встановлено в [6] — випадок $m = 2$, і в [7] — випадок $m \geq 3$. Зауважимо, що на відміну від розглядуваного нами випадку, у згаданих вище аналогах теореми Майлза $\operatorname{supp} \mu_u \cap \operatorname{supp} \mu_v \neq \emptyset$.

Теорема 2. *Нехай функція зростання ν задовольняє умови i), ii). Тоді кожна δ-субгармонійна в $\mathbf{R}^m$ функція w скінченного ν-типу зображається різницею $w = u - v$ субгармонійних в $\mathbf{R}^m$ функцій u, v скінченного ν-типу таких, що $\mu_u = \mu_w^+$, $\mu_v = \mu_w^-$.*

Доведення. Нехай w — δ-субгармонійна функція скінченного ν-типу, $w(0) = 0$. Нетривіальний випадок — коли $\mu_w^+(\mathbf{R}^m) = +\infty$, $\mu_w^-(\mathbf{R}^m) = +\infty$. Оскільки $N(r, \mu_w^-) \leq T(r, w)$, то $\mu_w^- \in \mathcal{M}_\nu$. За теоремою 1 існує субгармонійна в $\mathbf{R}^m$ функція v скінченного ν-типу така, що $\mu_v = \mu_w^-$, $v(0) = 0$. Субгармонійна функція $u = w + v$ є функцією скінченного ν-типу. Справді, з огляду на нерівність $u^+ = (w + v)^+ \leq w^+ + v^+$, маємо $T(r, w + v) \leq T(r, w) + T(r, v)$. За побудовою $\mu_u = \mu_w^+$, що завершує доведення теореми 2.

Робота виконана при підтримці INTAS, проект 99-00089.

ЛІТЕРАТУРА

1. Кондратюк А.А. О методе сферических гармоник для субгармонических функций. // Матем. сб., – 1981. – **116**. – 2. –С. 147–165.

2. Кондратюк А.А. Сферические гармоники и субгармонические функции. // Матем. сб., – 1984. – **125**. – 2. –С. 147–166.

3. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. – М.: Мир, – 1980. – 304с.

4. Miles J.B. Quotient representations of meromorphic functions. // J. d'Analyse Math., – 1972. – **25**. – P. 371-388.

5. Гольдберг А.А. О представлении мероморфной функции в виде частного целых функций. // Изв. Высш. Учебн. Завед., Математика, – 1972. – **10**.– С.13-17.

6. Васильків Я.В. Деякі властивості δ-субгармонічних функцій скінченного λ-типу. // Вісн. Львів. у-ту, Сер. мех.-мат., – 1983. – **21**. – С. 14-21.

7. Веселовская О.В. Аналог теоремы Майлза для δ-субгармонических в $\mathbf{R}^n$ функций. // Укр. мат. журн., –1984. – **36**. – 6. – С. 694-698.

ИВАН ЕВГЕНЬЕВИЧ ТАРАПОВ

К семидесятипятилетию со дня рождения

20 июня 2001 года исполняется семьдесят пять лет замечательному ученому, известному специалисту в области механики сплошной среды, заслуженному профессору Харьковского университета Ивану Евгеньевичу Тарапову.

Иван Евгеньевич родился в с. Лука Сумской области в семье инженера-железнодорожника. В 1950 г. с отличием окончил моторостроительный факультет Харьковского авиационного института и поступил в аспирантуру на кафедру теоретической механики Харьковского университета, в 1953 г. защитил кандидатскую, а в 1974 г. - докторскую диссертацию на тему "Основные задачи гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред". Вся научная, педагогическая и общественная деятельность И.Е.Тарапова связана с Харьковским университетом. После окончания аспирантуры он занимался педагогической работой, в 1958 г. возглавил первый вузовский вычислительный центр в г.Харькове - ВЦ ХГУ, а в 1961 г. был избран на должность заведующего кафедрой вычислительной математики. С 1966 г. по 1999 г. Иван Евгеньевич руководил кафедрой теоретической механики, способствуя бережному сохранению и развитию традиций, заложенных его предшественниками - В.Г. Имшенецким, А.М. Ляпуновым, В.А. Стекловым, В.М. Майзелем, В.Л. Германом.

Много сил и энергии отдал И.Е.Тарапов развитию Харьковского университета, ректором которого он был с 1975 г. по 1993 г. За эти годы значительно возрос научно-педагогический потенциал университета, укрепилась его материально-техническая оснащенность, установились связи со многими отечественными и зарубежными научными и учебными центрами. Во многом благодаря инициативе Ивана Евгеньевича в университете были открыты два факультета: социологический и фундаментальной медицины, созданы новые специальности на других факультетах.

Научные результаты И.Е.Тарапова связаны, в первую очередь, с проблемами механики поляризующихся и намагничивающихся сред. Им была построена математическая модель сплошной среды с произвольным законом поляризации и намагничивания, сформулирован вариационный принцип для изотропных сред, найдены интегралы уравнений движения намагничивающейся идеальной жидкости, проведено теоретическое исследование волновых процессов, изучены равновесные конфигурации и их устойчивость. Полученные И.Е.Тараповым результаты сыграли важную роль в становлении и развитии новых областей механики сплошной среды - феррогидродинамики и электрогидродинамики. В созданной под руководством И.Е. Тарапова лаборатории электродинамики сплошных сред был проведен цикл экспериментальных исследований реологии и физических свойств магнитных и слабопроводящих жидкостей. Всего И.Е.Тараповым опубликовано 125 научных работ. В соавторстве с А.И.Борисенко им было написано учебное пособие "Векторный анализ и начала тензорного исчисления", которое выдержало шесть изданий в СССР, а также издавалось за рубежом - в США (дважды), Индии, Канаде, Великобритании. Под руководством И.Е.Тарапова защищено 15 кандидатских и 2 докторские диссертации.

В настоящее время И.Е.Тарапов занимает должность советника ректора университета и профессора кафедры теоретической механики. Он активно работает со студентами и аспирантами и одновременно пишет учебник по механике сплошной среды, в основу которого положен его курс лекций, многие годы читавшихся студентам-механикам. Наряду с учебной и научной И.Е. Тарапов ведет большую научно-общественную и просветительскую работу. Его фундаментальные исследования по вопросам образования, науки и культуры на Украине отражены в четырех монографиях. В 1998 г. И.Е. Тарапов вместе со своими коллегами основал научно-популярный журнал "Universitates", главным редактором которого он является. И.Е.Тарапов входит в состав Национальных Комитетов Украины и России по теоретической и прикладной механике и является членом Координационного совета по проблеме "магнитные жидкости". В течение многих лет И.Е.Тарапов был главным редактором нашего журнала.

Ученики, сотрудники и редколлегия журнала сердечно поздравляют Ивана Евгеньевича с Юбилеем и желают ему здоровья и новых успехов в его плодотворной деятельности.

АНОТАЦІЇ

УДК 533.72

Перехідний режим між гвинтовими рівноважними станами газу.

Г о р д е в с ь к и й В. Д. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 17–33 .

Взаємодія між двома гвинтовими потоками газу з твердих куль описана за допомогою бімодального розподілу, що має вигляд лінійної комбінації стаціонарних неоднорідних максвеліанів. Кожний з потоків обертається навколо своєї осі й може рухатись поступально вздовж неї. Здобуто умови, достатні для прямування до нуля інтегральної норми різниці міжлівою та правою частинами рівняння Больцмана.

Бібліогр.: 18 найм.

УДК 517.5

Континуальна інтерполяційна задача у класі Стільтєса.

Д ю к а р е в Ю. М. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 34–40 .

Розглянуто задачу про зображення одного класу ермітово-додатних функцій у вигляді інтегралу Хінчина-Бохнера по півосі. Показано, що її можно дослідить загальними методами розв'язку інтерполяційних задач у класі Стільтьєса.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 517.958

Спеціальні розв'язки рівнянь Максвелла у багатозв'язній області.

П о п о в а О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 41–52 .

Будується счисленна система базисних розв'язків рівнянь Максвелла, включаючи скінченну підсистему, характерну для багатозв'язної області.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.977.1

Про фазове зображення для лінійних дискретних систем у гільбертових просторах.

Р а б а х Р., Б е р г е о н Б. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 53–62 .

Лінійній керованій системі з неперервним часом у гільбертовому просторі зі станом $x(t)$ зіставлена система з дискретним часом, де фазовою змінною є

$z_k = (x((k+1)h) + x(kh))/2$ з малим h. Це дозволяє ввести дискретну похідну $\Delta z_k = (x((k+1)h) - x(kh))/h$. Одержана система з дискретним часом має властивості, подібні властивостям неперервної системи: стійкість еквівалентна тому, що спектр оператора системи з дискретним часом знаходиться в лівій півплощині, як і в рівняннях Ляпунова та Ріккаті.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 517.958+536.71

Ідентифікація математичної моделі лінійної одновимірної керованої системи.

С о х і н А. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 63–72 .

Стаття включає постановку і розв'язання задачі ідентифікації математичної моделі системи керування, що описується звичайним диференціальним рівнянням довільного порядку, за спостережуваним фінальними станами системи з імпульсними керуваннями.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.948

Схема розсіяння для сингулярного метричного вузла.

В о р о б й о в І. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 73–90 .

У роботі побудована модель сингулярного метричного вузла для операторів, що близькі до нормальних. Отримано зв'язок між характеристичною та визначальною функціями цього вузла. Для вузла з інволютивною метрикою побудована унітарна дилатація розв'язку лінійної однорідної задачі Коші. Вивчено властивості хвильових операторів та оператора розсіяння.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 531.38

Про три інваріантні співвідношення рівнянь динаміки твердого тіла.

Г о р р Г. В., М е л ь н и к А. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 91–98 .

В роботі розглядаються три інваріантних співвідношення рівнянь Д. Гріолі-М. П. Харламова. Вважається, що потенційна та гіроскопічна функції відомі, зазначений алгоритм дослідження умов їх існування, який базується на використанні перших інтегралів та інтегруванні рівнянь Пуасона.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.5

Равномірна коректність однієї задачі Коші та матрична умова Макензаупта.

Олефір О. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 99–105 .

В роботі вивчаються напівгрупи, що породжуются необмеженими несамоспряженими операторами, діючими в $L_2([0,a],C^n)$. Знайдено необхідні і достатні умови належності напівгруп класу C_0 в термінах умов Макензаупта для матричної ваги. Розглянуто використання основних результатів роботи для періодичних в середньому функцій.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 513.88

Криволінійний інтеграл від абстрактних майже періодичних і майже періодичних за Левітаном функцій.

Дімітрова С. Д. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 106–114 .

В наданій статті теорема Боля-Бора перенесена на криволінійний інтеграл при умові незалежності його від путі інтегрування. Розширено клас просторів і функцій, для яких вірна теорема Боля-Бора. Розглянуто майже періодичні, майже періодичні за Левітаном та безперервні функціє у деякій слабкішій за початковоє топологіє у просторах Фреше та загальних локально-опуклих просторах.

Бібліогр.: 10 найм.

УДК 519.46

Класифікація та точні розв'язки нелінійних еволюційних рівнянь.

Андрейцев А. Ю. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 115–121 .

В роботі запропонований метод класифікації нелінійних еволюційних рівнянь виду $u_t = uu_{xx} + F(u,u_x)$ з диференціальними зв'язками $u_{xx} = f(u,u_x)$, що допускають редукцію до систем двох звичайних диференціальних рівнянь. Показано, що сумісність вихідної системи рівнянь забезпечується, якщо $F(u,u_x)$ задовольняє рівнянню параболічного типу, яке за допомогою класичної заміни змінних зводиться до звичайного диференціального рівняння з параметром. Доведено, що при підстановці розв'язків додаткового рівняння в вихідне еволюційне, останнє редукується до системи двох звичайних диференціальних рівнянь. Наведені приклади редукції та точні розв'язки вихідного рівняння, одержані, за допомогою описаного методу.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 532.59

Резонанс та форма хвильового пакету на поверхні контакту рідких середовищ.

А в р а м е н к о О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 122–128 .

Досліджується форма хвильового пакету, напрямок поширення, а також умови резонансу другої гармоніки на поверхні контакту рідкого шару та півпростору. Представлено умови поширення пакетів різної форми, виявлено характерні властивості резонансної області, сформульовано умови формування зустрічних хвиль.

Мал.: 4. Бібліогр.: 4 найм.

УДК 514

Афінна класифікація точок багатовимірних комплексних поверхонь.

Л е й б і н а О. В. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 129–141 .

В роботі одержана афінна класифікація точок багатовимірних неособливих комплексних поверхонь, вкладених у комплексний простір $\mathbf{C}^n$ з довільною ковимірністю. З'ясовано, для яких комплексних поверхонь існує скінченна кількість класів афінно еквівалентних точок.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.95

Побудова асимптотичних оцінок власних значень оператора Штурма-Ліувілля з довільною точністю.

Ч е р н я т и н В. О. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 142–155

Дана робота присвячена побудові нових асимптотичних оцінок власних значень класичної крайової задачі Штурма-Ліувілля. На основі елементарних засобів аналізу послідовних наближень трансцендентного рівняння, яке визначає власні значення, встановлена принципова можливість одержання їх асимптотичних оцінок з точністю до величин довільного порядка малості.

Мал.: 1. Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.968.519.6

Обгрунтування чисельного розв'язку сингуляроного інтегрального рівняння з ядром Гільберта.

Г а н д е л ь Ю. В., П о л я н с ь к а Т. С. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 156–163 .

Інтегральне рівняння першого роду з логарифмічним ядром, до якого приводить ряд задач дифракції хвиль, зведено до сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта та додатковою умовою. Проведено дискретизацію з регуляризацією по Ліфанову, проведено строге обгрунтування оцінки швидкості збіжності розв'язку дискретної задачі до точного розв'язку сингулярного інтегрального рівняння з додатковою умовою.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517

Спектральна проблема вільних еніонів та еніонів в потенціалі гармонічного ізотропного осцилятора

Я. Мілевський, К. Попіл – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 164–169 .

Розглядається спектральна проблема для випадків вільних еніонів та еніонів в потенціалі гармонічного ізотропного осцилятора на площині за допомогою еніоних гармонічних та гіпергеометричних функцій.

Бібліогр.: 9 найм.

УДК 531.36

Ітераційний метод в задачі оптимального управління для лінейної системы в стандартній формі.

Мельник Т. А. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 170–176 .

Запропонован ітераційний метод в задачі оптимального управління для лінейної системы в стандартній формі, збудований на методі усереднення.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.574

Мінімальні мажоранти зростання субгармонійних в $\mathbf{R}^m$ функцій нескінченного порядку.

Васильків Я. В., Тарасюк С. І. – Вісн. Харк. нац. ун-ту., 2001, № 514. Математика, прикладна математика і механіка, с. 177–182 .

Знайдено мінімальні мажоранти зростання субгармонійних в $\mathbf{R}^m$, $m \geq 3$, функцій з обмеженнями на їх міри Ріса. Як наслідок, встановлена теорема про канонічне зображення δ-субгармонійної в $\mathbf{R}^m$ функції різницею субгармонійних функцій.

Бібліогр.: 7 найм.

ЗМIСТ

CONTENTS

Visit our Web-page

http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

to find

- **Information for Manuscript Preparation**
- **Abstracts**
- **Editorial Board**

Збірник наукових праць

Вісник Харківського національного університету
№ 514
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

Підписано до друку 22.05.2001 р.
Формат 70 × 108/16. Папір офсетний.
умовн.– друк. арк. – 11,9
обл.– вид. арк. – 9,5
Наклад 400 прим.
Ціна договірна

61077, Харків, м. Свободи, 4, Харківський національний університет
Видавничий центр ХНУ.
Різо ХНУ, м. Харків.

5-80