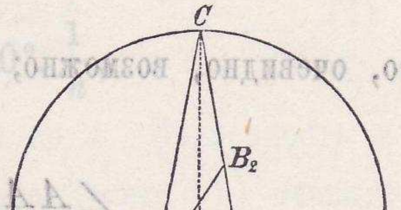
РАСПРОСТРАНЕНІЕ СПОСОБА АБУЛЪ-ДЖУДА

ДЛЯ ОПРЕДѢЛЕНІЯ СТОРОНЪ ПРАВИЛЬНЫХЪ ВПИСАННЫХЪ МНОГОУГОЛЬНИКОВЪ.

А. П. Грузинцева.

Въ прекрасной книгѣ проф. Ващенка-Захарченка, изданной имъ въ прошломъ году подъ заглавіемъ: «Исторія математики», изложенъ на стр. 552 способъ арабскаго геометра XI столѣтія Абулъ-Джуда для вычисленія стороны правильнаго вписаннаго 9-угольника; этотъ способъ, какъ оказалось, можно обобщить, распространивъ его и на случай всякаго правильнаго вписаннаго многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ. Этотъ обобщенный способъ состоитъ въ слѣдующемъ:

Пустъ AB сторона правильнаго вписаннаго n-угольника; построимъ на ней равнобедренный треугольникъ съ вершиной въ C на окружности. Тогда уголъ при C будетъ



$$\angle C = \frac{180^0}{n};$$

уголъ при B будетъ:

$$\angle ABC = \angle CAB = 90^0 . \frac{n-1}{n}.$$

Проведемъ изъ A прямую AB_1 такъ, чтобы

$$\angle B_1AB = \frac{180^0}{n},$$

тогда

$$\angle AB_1B = 90^0\,\frac{n-1}{n},$$

т. е.
$$\angle AB_1B = \angle ABC,$$

слѣдовательно треугольникъ ABB_1 будетъ равнобедренный и

$$AB_1 = AB = a_n,$$

если положимъ, что

$$AB = a_n.$$

Послѣ того найдемъ, что

$$\angle CAB_1 = 90^0.\frac{n-3}{n}.$$

Проведемъ теперь прямую B_1A_1 такъ, чтобы

$$\angle AB_1A_1 = 180^0.\frac{3}{n},$$

что, очевидно, возможно; тогда

$$\angle AA_1B_1 = 90^0.\frac{n-3}{n},$$

т. е. треугольникъ AB_1A_1 тоже равнобедренный и слѣдовательно

$$A_1B_1 = AB_1 = a_n.$$

За-тѣмъ проведемъ изъ A_1 прямую A_1B_2 такъ, чтобы

$$\angle B_1A_1B_2 = 180^\circ . \frac{5}{n},$$

и найдемъ, что

$$\angle A_1B_1C = \angle A_1B_2B_1 = 90^\circ . \frac{n-5}{n};$$

слѣдовательно

$$A_1B_2 = A_1B_1 = a_n.$$

Продолжая подобныя построенія, найдемъ, что углы при вершинахъ равнобедренныхъ треугольниковъ будутъ соотвѣтственно:

$180^\circ . \frac{1}{n}$, $180^\circ . \frac{3}{n}$, $180^\circ . \frac{5}{n}$, ... и для i-наго угла $180^\circ \frac{2i-1}{n}$;

углы при основаніяхъ:

$$90^\circ . \frac{n-1}{n},\ 90^\circ . \frac{n-3}{n},\ 90^\circ . \frac{n-5}{n}, \ldots 90^\circ . \frac{n-2i+1}{n}.$$

Допуская, что i-ный треугольникъ будетъ имѣть угломъ при основаніи уголъ C, должны имѣть:

$$90^\circ . \frac{n-2i+1}{n} = 180^\circ . \frac{1}{n},$$

т. е.

$$n = 2i + 1.$$

И такъ, приведенное построеніе возможно для всякаго правильнаго многоугольника о нечетномъ числѣ сторонъ. Что касается вычисленія стороны a_n, то можно употребить слѣдующій пріемъ. Опуская изъ точекъ A, A_1, B_1, ... перпендикуляры AD, B_1E, A_1D_1, ... и замѣчая, что всѣ получаемые четыреугольники таковы, что около нихъ можно описать окружности, имѣемъ по свойству сѣкущихъ, проведенныхъ изъ точки C, i уравненій между $i+1$ отрѣзками, получаемыми на сторонахъ AC и BC; за-тѣмъ имѣемъ еще два уравненія, выражающія, что сумма отрѣзковъ съ одной стороны равна AC, а съ другой $AC - a_n$, итого $i+2$ уравненій; кромѣ того изъ подобія треугольниковъ ABC и ABB_1 имѣемъ соотношеніе между AC и a_n. Слѣдовательно, всего будетъ $i+3$ уравненій съ $i+3$ неизвѣстными; значитъ — найдемъ a_n.