

Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред.— Теория функций, функциональный анализ и их приложения, 1973, вып. 17, с. 221—239. 10. Тарапов И. Е. Ермаков В. И. Движение поляризующейся жидкости в каналах.— Вестн. Харьк. ун-та, № 148. Прикладная математика и механика, 1977, вып. 42, с. 89—92.

Поступила в редколлегию 19.09.79.

УДК 532.516

Л. П. ТЕРЕХОВ

ВЯЗКОЕ ТЕЧЕНИЕ В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

Рассматривается стационарная задача о плоскопараллельном движении вязкой несжимаемой жидкости, полностью занимающей пространство между внешним круговым цилиндром безразмерного радиуса R и m внутренними цилиндрами безразмерных радиусов R_k ($k = 1, 2, \dots, m$). Плоское течение обусловлено равномерным вращением цилиндров вокруг параллельных друг другу их осей симметрии в предположении, что длины цилиндров бесконечны, а граничные контуры не имеют общих точек.

С целью удобства применения численных методов при получении окончательных результатов задача решается в безразмерных переменных. Предположено, что все величины, имеющие размерность длины, скорости и функции тока плоского течения отнесены к L , ΩL и ΩL^2 соответственно. При этом L — произвольный фиксированный линейный размер, а Ω — характерная угловая скорость.

Если использовать полярную систему координат (r, θ) с полюсом в точке O — центре внешнего контура (рис. 1), то все основные характеристики течения могут быть выражены через функцию тока $\psi_0(r, \theta)$, выбираемую таким образом, что

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta}; \quad v_\theta = - \frac{\partial \psi_0}{\partial r}, \quad (1)$$

где v_r, v_θ — компоненты вектора скорости жидкой частицы.

Пренебрегаем влиянием сил инерции, считая их малыми по сравнению с вязкими силами. Тогда следствием уравнений движения вязкой жидкости является то, что подлежащая определению ψ_0 должна удовлетворять бигармоническому уравнению

$$\Delta_r \Delta_r \Delta_r \Delta_r \psi_0 = \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \\ - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial \theta^4} = 0. \quad (2)$$

Заметим, что при использовании помимо r и θ местных полярных систем (r_k, θ_k) с полюсами в центрах внутренних контуров O_k и введении $\psi_k(r_k, \theta_k)$ по аналогии с (1)

$$\left(v_{r_k} = \frac{1}{r_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \theta_k}; v_{\theta_k} = -\frac{\partial \psi_k}{\partial r_k} \right)$$

ψ_k — удовлетворяет уравнению $\Delta_{r_k, \theta_k} \Delta_{r_k, \theta_k} \psi_k = 0$ (3), аналогично-му (2).

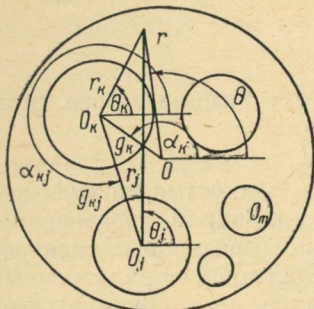


Рис. 1

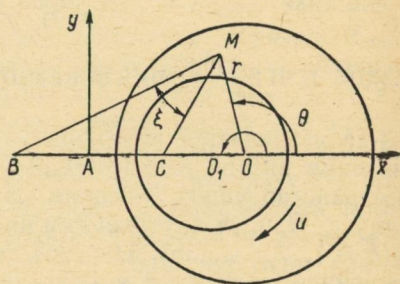


Рис. 2

Граничные условия краевой задачи об определении бигармонических функций ψ_j ($j = 0, 1, 2, \dots, m$) следующие:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\omega R; \quad \frac{\partial \psi_0}{\partial \theta} \Big|_{r=R} = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial r_k} \Big|_{r_k=R_k} = -\omega_k R_k; \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial \theta_k} \Big|_{r_k=R_k} = 0, \quad (5)$$

где ω, ω_k ($k = 1, 2, \dots, m$) — угловые скорости внешнего и внутренних цилиндров.

Считая, что во всех дальнейших комплексозначных выражениях реальный физический смысл имеют их вещественные части, и используя метод разделения переменных, ищем частное решение уравнения типа (3) в виде $\psi_k^{(n)} = y_n(r_k) e^{in\theta_k}$ с целым n и, вообще говоря, комплексным y_n .

Функция $y_n(x)$ должна удовлетворять линейному дифференциальному уравнению четвертого порядка

$$x^3 (xy^{IV} + 2y^{III}) - x(1 + 2n^2)(xy'' - y') + n^2(n^2 - 4)y = 0.$$

Его общее решение

$$y = \begin{cases} C_1 + C_2 x^2 + C_3 \ln x + C_4 x^2 \ln x & \text{при } n = 0, \\ C_1 x^3 + C_2 x + C_3 \frac{1}{x} + C_4 x \ln x & \text{при } |n| = 1, \\ C_1 x^n + C_2 x^{-n} + C_3 x^{n+2} + C_4 x^{-n+2} & \text{при } |n| > 1. \end{cases}$$

Поэтому, с учетом принципа наложения решений линейных краевых задач, выражение для искомой функции тока может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \psi = & \left(\frac{r}{R}\right)^2 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{r}{R}\right)^n \left[z^n \left(a_n + \frac{r^2}{R^2} b_n \right) + \frac{1}{z^n} \left(c_n + \frac{r^2}{R^2} d_n \right) \right] \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^m \left\{ \ln r_k \left[b_0^{(k)} + \frac{r_k}{R_k} \left(\frac{b_1^{(k)}}{z_k} + z_k d_1^{(k)} \right) + \frac{R_k}{r_k} \left(\frac{a_1^{(k)}}{z_k} + z_k c_1^{(k)} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_k}{r_k} \right)^n \left[\frac{1}{z_k^n} \left(a_n^{(k)} + \frac{r_k^2}{R_k^2} b_n^{(k)} \right) + z_k^n \left(c_n^{(k)} + \frac{r_k^2}{R_k^2} d_n^{(k)} \right) \right] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где $z = e^{i\theta}$; $z_k = e^{i\theta_k}$.

Заметим, что при таком выборе ψ компоненты вектора скорости и градиента гидродинамического давления в рассматриваемой области течения $r < R$, $r_k > R_k$, представлены в виде линейной комбинации $\ln r_k$ и абсолютно сходящихся степенных рядов по r или r_k в предположении, что комплексные константы, входящие в (6), ограничены по модулю в совокупности. Эти константы должны быть определены из условий (4), (5).

Требуемые же выражения

$$\begin{aligned} \psi_0(r, \theta) &= \psi[r, \theta, r_1(r, \theta), \theta_1(r, \theta), \dots, r_m(r, \theta), \theta_m(r, \theta)], \\ \psi_k(r_k, \theta_k) &= \psi[r(r_k, \theta_k), \theta(r_k, \theta_k), r_k, \theta_k, r_j(r_k, \theta_k), \theta_j(r_k, \theta_k)] \quad (j = \\ &= 1, 2, \dots, m; j \neq k) \end{aligned}$$

получаются из (6) с учетом элементарных соотношений

$$rz = \omega_k + r_k z_k; \quad r_k z_k = \omega_k + r_j z_j, \quad (7)$$

где числа $\omega_k = g_k e^{i\alpha_k}$ и $\omega_{kj} = g_{kj} e^{i\alpha_{kj}}$ определяют векторы OO_k и $O_k O_j$ (рис. 1).

Разлагаем далее в ряды вида

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p z^p \quad \text{и} \quad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} t_p^{(k)} z_k^p$$

граничные значения производных от ψ_0 и ψ_k , входящие в условия (4), (5). Эти условия, очевидно, будут выполнены, если положить $t_0 = -\omega R$ и $t_0^{(k)} = -\omega_k R_k$ в выражениях для $\frac{\partial \psi_0}{\partial r} \Big|_{r=R}$

и $\frac{\partial \psi_k}{\partial r_k} \Big|_{r_k=R_k}$ соответственно, а остальные $t_p = t_p^{(k)} = 0$.

Полученные таким образом равенства определяют собой некоторую бесконечную линейную алгебраическую систему относительно констант из (6), которую удобно записать в каноническом виде

$$x_s = \sum_{q=1}^{\infty} t_{sq} x_q + \beta_s \quad (s = 1, 2, \dots), \quad (8)$$

где свободные члены β_s и матричные элементы t_{sq} — некоторые рациональные функции чисел R, R_k, w_k, w_{kj} и натуральных логарифмов их модулей, а элементы счетного множества искоемых коэффициентов представлены в виде компонент бесконечномерного вектора $\{x_s\}$ так, что индекс n из (6) не убывает с ростом s в (8). Явный вид всей системы (8) не приведен из-за ее громоздкости.

Анализ показывает, что ряды $\sum_{q=1}^{\infty} |t_{sq}|$ сходятся и что для всех достаточно больших s имеют место оценки

$$X = \sum_{q=1}^{\infty} |t_{sq}| < 1, \beta_s = 0. \quad (9)$$

Например, из (4) следует

$$\begin{aligned} b_p = & - \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{w}_k}{R} \right)^p b_0^{(k)} + \frac{R}{2(p+1)R_k} \left(\frac{\bar{w}_k}{R} \right)^{p+1} b_1^{(k)} - p \left(\frac{\bar{w}_k}{R} \right)^p \times \right. \\ & \times \sum_{n=1}^i C_{p-1}^n \left(\frac{R_k}{\bar{w}_k} \right)^n c_n^{(k)} + \frac{R}{2R_k} \left(\frac{\bar{w}_k}{R} \right)^{p-1} \left[1 - \left(\frac{g_k}{R} \right)^2 \right] d_1^{(k)} + \\ & + \left(\frac{g_k}{R_k} \right)^2 \left(\frac{\bar{w}_k}{R} \right)^p p \left[\left(\frac{R_k}{\bar{w}_k} \right)^{p+1} d_{p+1}^{(k)} + \sum_{n=2}^p C_{p-2}^n \left(\frac{R_k}{\bar{w}_k} \right)^n d_n^{(k)} \right] - \\ & \left. - \left(\frac{R}{R_k} \right)^2 \left(\frac{\bar{w}_k}{R} \right)^p (p-1) \left[\left(\frac{R_k}{\bar{w}_k} \right)^p d_p^{(k)} + \sum_{n=2}^{p-1} C_{p-2}^n \left(\frac{R_k}{\bar{w}_k} \right)^n d_n^{(k)} \right] \right\}, \quad (p > 1). \end{aligned}$$

Сумма модулей коэффициентов в этом уравнении

$$\begin{aligned} B_p = & \sum_{k=1}^m \left\{ \left[\frac{g_k R_k + R^2 - g_k^2}{2g_k R_k} + \frac{g_k}{2(p+1)R_k} \right] \left(\frac{g_k}{R} \right)^p + \right. \\ & \left. + \left(\frac{g_k + R_k}{R} \right)^p \left[p \frac{R + g_k}{g_k + R_k} + (p-1) \frac{R^2}{(g_k + R_k)^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

В сделанном предположении о том, что контуры граничных цилиндров не касаются друг друга, имеем $g_k < R$; $g_k + R_k < R$. Таким образом, $\lim_{p \rightarrow \infty} B_p = 0$.

По аналогии одним из следствий условий (5) является уравнение

$$\begin{aligned} d_p^{(k)} = & - \left(\frac{R_k}{R} \right)^p p \sum_{n=1}^{\infty} C_{n+p}^n \left(\frac{w_k}{R} \right)^n a_{n+p} - \left(\frac{R_k}{R} \right)^p \times \\ & \times \frac{(p+1) R_k^2 + p w_k^2}{R^2} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p}^n \left(\frac{w_k}{R} \right)^n b_{n+p} - p \frac{\bar{w}_k}{R} \left(\frac{R_k}{R} \right)^p \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p-1}^n \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\frac{w_k}{R} \right)^n b_{n+p-1} - \frac{w_k}{R} \left(\frac{R_k}{R} \right)^{p+2} (p+1) \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+p+1}^n \left(\frac{w_k}{R} \right)^n b_{n+p+1} - \\
& - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq k}}^m \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{R_k}{w_{ki}} \right)^p b_0^{(j)} + \frac{R_j}{w_{ki}} \left(\frac{R_k}{w_{ki}} \right)^p p \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} C_{n+p}^n \left(\frac{R_j}{w_{ki}} \right)^n a_{n+1}^{(j)} + \right. \\
& + \frac{R_k}{2R_j} \left(\frac{R_k}{w_{ki}} \right)^{p+1} \left[-1 + \left(\frac{g_{kj}}{R_k} \right)^2 \right] b_1^{(j)} + \frac{(p+1) R_k^2 + p g_{kj}^2}{R_k^2} \left(\frac{R_k}{w_{ki}} \right)^{p+1} \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} C_{n+p}^n \left(\frac{R_j}{w_{ki}} \right)^n b_{n+1}^{(j)} + p \frac{\bar{w}_{kj}}{R_j} \left(\frac{R_k}{w_{ki}} \right)^p \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{n+p-1}^n \times \\
& \times \left(\frac{R_j}{w_{kj}} \right)^n b_{n+1}^{(j)} + \frac{R_k^2}{R_j^2} \left(\frac{R_k}{w_{ki}} \right)^{p-1} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_{n+p+1}^n \left(\frac{R_j}{w_{ki}} \right)^n b_{n+1}^{(j)} - \\
& \left. - \frac{R_k}{2R_j (p-1)} \left(\frac{R_k}{w_{ki}} \right)^{p-1} a_1^{(j)} \right\}, \quad (p > 1).
\end{aligned}$$

Для суммы модулей коэффициентов этого уравнения справедлива оценка

$$D_p \leq p \left[M_1 \max_{(j)} \left\{ \left(\frac{R_k}{g_{ki}} \right)^p \right\} + M_2 \left(\frac{R_k}{R - g_k} \right)^p + M_3 \max_{(j)} \left\{ \left(\frac{R_k}{g_{ki} - R_j} \right)^p \right\} \right]$$

с некоторыми константами M_1, M_2, M_3 . Но так как $R_k < g_{kj}$; $R_k < R - g_k$; $R_k < g_{ki} - R_j$, то $\lim_{p \rightarrow \infty} D_p = 0$.

С учетом (9) система (8) квазирегулярна и, следовательно, имеет ограниченное по модулю решение $\{x_i\} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0$. Это решение может быть определено с помощью простых численных методов [1].

В качестве примера рассмотрим задачу о течении между внешним неподвижным цилиндром и внутренним цилиндром, вращающимся вокруг своей оси по часовой стрелке с угловой скоростью $u/\Omega L R_1$. В известном точном решении [2] функция тока зависит от биполярных координат ξ, η точки M плоскости xAy (см. рис. 2), где $\xi = \angle BMC$; $\eta = \ln \frac{BM}{CM}$; $AB = AC = a = R_1 \operatorname{sh} \eta_1 = R \operatorname{sh} \eta_0$. При этом η_0, η_1 — значения параметра η на поверхности внешнего и внутреннего цилиндров соответственно.

Это решение может быть получено описанным выше методом сведения задачи к квазирегулярной системе (8) и решения этой системы. В самом деле, непосредственно можно проверить, что в рассматриваемом случае ($m=1, \omega=0, \omega_1=-u/\Omega L R_1, \alpha_1=\pi, \omega_1=-g_1$) система (8) имеет решение

$$b_0 = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \eta_0} \left(-\alpha + \frac{\beta}{\zeta_0} + 2 \frac{\gamma \operatorname{ch} \sigma}{\zeta_0} \right); \quad b_0^{(1)} = -\delta - \frac{\operatorname{ch} \eta_1}{\operatorname{sh} \eta_1} \beta;$$

$$\begin{aligned}
a_1 = c_1 &= \frac{\delta}{2\zeta_0} + \frac{\beta}{2\operatorname{sh} \eta_0} \left(\ln R + \frac{\operatorname{ch} \eta_0}{\zeta_0} \right) - \gamma \frac{\operatorname{sh} \sigma}{\zeta_0}; \\
b_1 = d_1 &= \frac{\gamma}{2} \frac{\zeta_1}{\zeta_0^2} - \frac{\beta}{8\zeta_0^2 \operatorname{sh} \eta_0}; \quad a_1^{(1)} = c_1^{(1)} = -\frac{\delta}{2\zeta_1} - \\
&- \frac{\beta}{8\zeta_1^2 \operatorname{sh} \eta_1} (1 + 2\zeta_1^2) - \frac{\gamma}{2\zeta_0}; \quad b_1^{(1)} = d_1^{(1)} = -\frac{\beta}{2\operatorname{sh} \eta_1}; \\
a_p = c_p &= \frac{(-1)^p}{\zeta_0^p} \left[-\frac{\delta}{2p} + \frac{\beta}{4\operatorname{sh} \eta_0 p (p-1)} \left(\zeta_0 - \frac{p-1}{\zeta_0} \right) + \frac{\gamma}{2} \frac{\zeta_1}{\zeta_0} \right]; \\
b_p = d_p &= \frac{(-1)^p}{\zeta_0^{p+1}} \left[\frac{\beta}{4\operatorname{sh} \eta_0 (p+1)} - \frac{\gamma \zeta_1}{2} \right]; \quad a_p^{(1)} = c_p^{(1)} = \\
&= \frac{(-1)^p}{\zeta_1^p} \left[\frac{\delta}{2p} + \gamma \frac{\zeta_1}{2\zeta_0} + \frac{\beta}{4\operatorname{sh} \eta_1 \zeta_1 p (p+1)} (\zeta_1^2 (p+1) + 1) \right]; \\
b_p^{(1)} = d_p^{(1)} &= \frac{(-1)^p}{\zeta_1^{p+1}} \left[-\frac{\beta}{4\operatorname{sh} \eta_1 (p-1)} - \frac{\gamma}{2\zeta_0} \right]; \quad (p > 1), \quad (10)
\end{aligned}$$

где $\sigma = \eta_1 - \eta_0$, $\zeta_0 = e^{\eta_0}$, $\zeta_1 = e^{\eta_1}$, а безразмерные константы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ соответствует размерным коэффициентам A, B, C, D , являющимся функциями η_0, η_1 из [2]: $\alpha = A/\Omega L^2$; $\beta = B/\Omega L^2$; $\gamma = C/\Omega L^2$; $\delta = D/\Omega L^2$.

При этом η_0, η_1 связаны с R, R_1, g_1 соотношениями

$$\operatorname{ch} \eta_0 = \frac{g_1^2 + R^2 - R_1^2}{2g_1 R}; \quad \operatorname{ch} \eta_1 = \frac{R^2 - g_1^2 - R_1^2}{2g_1 R_1}. \quad (11)$$

С учетом (7) и (10) из (6) следует

$$\begin{aligned}
\psi_0(r, \theta) &= (B_1 + B_4 |z_2|^2) \ln \frac{|z_2 + a|^2}{|z_2 - a|^2} + B_2 |z_2|^2 + B_3 (z_2 + \bar{z}_2) + \\
&+ B_5 (|z_2|^2 - 1) \frac{|z_2 + a|^2}{|z_2 - a|^2} + B_6 (|z_2|^2 - 1) \frac{|z_2 - a|^2}{|z_2 + a|^2}, \quad (12)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= \delta/2; \quad B_2 = -\frac{\alpha \operatorname{sh} \eta_0 + \gamma \operatorname{sh} \sigma}{2a}; \quad B_3 = \frac{\alpha \operatorname{ch} \eta_0 - \beta \eta_0}{2a}; \\
B_4 &= \frac{\beta}{4a}; \quad B_5 = \frac{\gamma}{4a^2} (\operatorname{sh} \tau - \operatorname{ch} \tau); \quad B_6 = \frac{\gamma}{4a^2} (\operatorname{sh} \tau + \operatorname{ch} \tau); \quad \tau = \eta_1 + \\
&+ \eta_0; \quad z_2 = rz + R \operatorname{ch} \eta_0.
\end{aligned}$$

Исключив η_0, η_1 из (12) с помощью (11), получаем, что ψ_0 определяет функцию тока, зависящую от полярных координат r, θ , а также геометрических и кинематических констант R, R_1, g_1, ω_1 .

Если же использовать зависимость между биполярными (ξ, η) и полярными (r, θ) координатами, осуществляющуюся формулами

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{|rz + R \operatorname{ch} \eta_0 + a|^2}{|rz + R \operatorname{ch} \eta_0 - a|^2}; \quad \frac{\cos \xi}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} = \frac{1}{2a^2} |rz + R \operatorname{ch} \eta_0|^2,$$

то ψ_0 может быть приведено к виду

$$f(\xi, \eta) = \psi_0[r(\xi, \eta), \theta(\xi, \eta)] = \delta\eta + \frac{\alpha \operatorname{sh}(\eta - \eta_0) + \beta(\eta - \eta_0) \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi} + \\ + \frac{\gamma \cos \xi [\operatorname{sh}(\eta - 2\eta_0) - \operatorname{sh} \sigma]}{\operatorname{ch} \eta - \cos \xi},$$

что с точностью до несущественного постоянного слагаемого соответствует размерной функции тока W , полученной в [2]: $W + D\eta_0 = \Omega L^2 f(\xi, \eta)$.

Список литературы: 1. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.—М. Л.: Физматгиз, 1962.—708 с. 2. Чаплыгин С. А. Избранные труды по механике и математике.—М.: Гостехиздат, 1954, с. 477—489.

Поступила в редколлегию 09.01.80.

УДК 517.958.53

В. Д. ЕРМАКОВА

ВЛИЯНИЕ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА НА АСИМПТОТИКУ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА С НАЧАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ ТИПА СТУПЕНЬКИ

В работе [1] методом обратной задачи рассеяния была решена задача Коши для уравнения Кортевега-де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

с начальными данными $u(x, 0)$, имеющими разные пределы на $\pm \infty$, а именно:

$$u(x, 0) \rightarrow -c^2 (x \rightarrow -\infty), \quad u(x, 0) \rightarrow 0 (x \rightarrow \infty). \quad (2)$$

В предположении, что оператор $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, 0)$ не имеет дискретного спектра, была исследована асимптотика решения при $t \rightarrow \infty$ в окрестности фронта волны ($x > 4c^2 t - 1/2c \ln t^{N+1}$, N — любое натуральное число). Было доказано, что в этой области решение $u(x, t)$ задачи (1)–(2) при $t \rightarrow \infty$ распадается на невзаимодействующие солитоны, которые имеют вид

$$u_n(x, t) = -\frac{2c^2}{\operatorname{ch}^2(c\xi + \varphi_n(t))}, \quad (3)$$

где $\xi = x - 4c^2t$ и

$$\varphi_n = \frac{1}{2} \ln \frac{t^{2n-1/2} 16 \sqrt{\pi} (8c)^{4n-5/2} n! 2^{2(n-1)}}{|S'_{22}|^2 (2n)! (n-1)!}. \quad (4)$$

В статье учтено влияние дискретного спектра оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, 0)$ на асимптотическое поведение решения задачи (1)–(2) при $t \rightarrow \infty$ и $-\frac{1}{2c} \ln t^{N+1} < x - 4c^2t$. Показано, что в области $-\frac{1}{2c} \ln t^{N+1} < x - 4c^2t < 0$ решение распадается на $[N + 1/2]$ невзаимодействующих солитонов, порожденных непрерывным спектром (медленных):

$$u_n = \frac{-2c^2}{\text{ch}^2 \left(c\xi + \varphi_n \prod_{i=1}^m \left(\frac{c - c_i}{c + c_i} \right)^2 \right)},$$

где φ_n — переменные фазы (4), m — число собственных значений оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, 0)$, $-v_i^2$ — собственные значения и $c_i = \sqrt{v_i^2 + c^2}$.

В области $x > 4c^2t$ решение $u(x, t)$ распадается на m солитонов, связанных с дискретным спектром (быстрых):

$$u_k = \frac{-2c_k^2}{\text{ch}^2 [c_k (x - 4c_k^2t + \delta_k)]},$$

где

$$\delta_k = \frac{1}{2c_k} \ln \frac{2c_k}{m_k} \prod_{i=k+1}^m \left(\frac{c_k + c_i}{c_k - c_i} \right)^2.$$

Доказательство этого утверждения может быть проведено методом, предложенным в работе [2] и не рассматривается в данной статье.

В статье используются определения и обозначения работы [1].

Переходим к исследованию асимптотики решения задачи (1)–(2)

в области $-\frac{1}{2c} \ln t^{N+1} < x - 4c^2t < 0$. Исходя из результатов работы [1], асимптотику решения задачи (1)–(2) в указанной области можно найти с помощью формулы $u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} B(x, 0, t) + O\left(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right)$, где $B(x, y, t)$ — решение интегрального уравнения

$$B(x, y, t) + \Omega^{(N)}(2x + y, t) + \int_0^\infty \Omega^{(N)}(2x + y + z, t) B(x, z, t) dz = 0$$

е вырожденным ядром

$$\Omega^{(N)}(2x+y, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{|S'_{22}|^2 (2n+2)! e^{-c(2\xi+y)} (2\xi+y)^n}{16 \sqrt{\pi n!} (n+1)! (8c)^{2n+3/2} t^{n+3/2}} + \\ + \sum_{l=1}^m m_l^{(1)}(0) \exp[-\sqrt{v_l^2 + c^2} (2\xi+y-8v_l^2 t)]$$

при $\xi = x - 4c^2 t$.

Полагая в уравнении (5) $x = 4c^2 t + \xi$, $y = \eta - \xi$, $z = \zeta - \xi$, получаем следующее интегральное уравнение для $A(\xi, \eta, t) = B(4c^2 t + \xi, \eta - \xi, t)$ как функции переменной η :

$$A(\xi, \eta, t) + \Omega^{(N)}(\xi + \eta, t) + \int_{\xi}^{\infty} \Omega^{(N)}(\zeta + \eta, t) A(\xi, \zeta, t) d\zeta = 0, \\ \eta > \xi, \quad (6)$$

где

$$\Omega^{(N)}(\xi + \eta, t) = \sum_{i=0}^{N-1} \eta^i \sum_{n=i}^{N-1} \frac{\omega_{n-i, i} \xi^{n-i}}{t^{n+3/2}} e^{-c(\xi+\eta)} + \\ + \sum_{l=1}^m m_l^{(1)}(0) \exp[c_l t (\xi + \eta - 8v_l^2 t)]; \\ \omega_{n-i, i} = \frac{|S'_{22}|^2 (2n+2)! C_n^i}{16 \sqrt{\pi n!} (n+1)! (8c)^{2n+3/2}}; \quad c_l = \sqrt{v_l^2 + c^2}.$$

При этом в области $x > 4c^2 t - \frac{1}{2c} \ln t^{N+1}$

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{d\xi} A(\xi, \xi, t) \Big|_{\xi=x-4c^2 t} + O\left(t^{-\frac{1}{2}+\epsilon}\right). \quad (7)$$

Решение уравнения (6) ищем в виде

$$A(\xi, \eta, t) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k \eta^k t^{-c\eta} + \sum_{l=1}^m b_l t^{-c_l \eta}, \quad (8)$$

здесь $a_k = a_k(\xi, t)$, $b_k = b_k(\xi, t)$. Подставив (8) в (6), после простых преобразований получим следующую систему уравнений для коэффициентов:

$$a_i + \sum_{k=0}^{N-1} a_k \left(\sum_{l=0}^{N-i-1} \frac{\omega_{ij}}{t^{i+l+3/2}} \int_{\xi}^{\infty} \zeta^{i+k} t^{-2c\zeta} d\zeta \right) + \sum_{l=1}^m b_l \left(\sum_{i=0}^{N-i-1} \frac{\omega_{il}}{t^{i+l+3/2}} \times \right. \\ \left. \times \int_{\xi}^{\infty} \zeta^l t^{-(c_l+c)\zeta} d\zeta \right) = - \sum_{j=0}^{N-i-1} \frac{\omega_{ij}}{t^{i+j+3/2}} \xi^j t^{-c\xi}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1;$$

$$b_l + \sum_{k=1}^m m_k^{(1)}(0) b_k \int_{\xi}^{\infty} t^{-(c_l+c_k)\zeta} d\zeta \times l^{\frac{1}{2}c_l t} + \sum_{k=0}^{N-1} m_l^{(1)}(0) d_k \int_{\xi}^{\infty} \times \\ \times \zeta^k t^{-(c_l+c)\zeta} d\zeta \times l^{\frac{1}{2}c_l t} = -m_l^{(1)}(0) t^{-c_l \xi} \times l^{\frac{1}{2}c_l t}, \quad l = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$\omega_{ij} = \frac{|S'_{22}|^2 (2i + 2j + 2)!}{16 \sqrt{\pi i! j!} (i + j + 1)! (8c)^{2(i+j+3/2)}}. \quad (9)$$

Учитывая (7), (8), из этой системы легко вывести формулу

$$A(\xi, \xi, t) = \frac{d}{d\xi} \ln \det [E + \hat{A}(\xi, t)], \quad (10)$$

E — единичная матрица порядка $(N + m)$; $\hat{A}(\xi, t)$ — матрица с элементами

$$\hat{A}_{i+1, k+1} = \sum_{j=0}^{N-i-1} \frac{\omega_{ij}}{t^{i+j+3/2}} \int_{\xi}^{\infty} \zeta^{j+k} t^{-2c\zeta} d\zeta, \quad i, k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \hat{A}_{i+1, k+N} = \sum_{j=0}^{N-i-1} \frac{\omega_{ij}}{t^{i+j+3/2}} \int_{\xi}^{\infty} \zeta^j t^{-(c+c_k)\zeta} d\zeta, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = \\ = 1, 2, \dots, m; \quad \hat{A}_{i+N, k+1} = m_i^{(1)}(0) l^{\frac{1}{2}c_l t} \int_{\xi}^{\infty} \zeta^k t^{-(c_l+c)\zeta} d\zeta, \quad i = \\ = 1, \dots, m; \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \\ \hat{A}_{N+i, k+N} = m_i^{(1)}(0) l^{\frac{1}{2}c_l t} \int_{\xi}^{\infty} t^{-(c_l+c_k)\zeta} d\zeta, \quad i, k = 1, 2, \dots, m.$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$I_{ik} = \int_{\xi}^{\infty} \zeta^{i+k} t^{-2c\zeta} d\zeta, \quad I_i^k = \int_{\xi}^{\infty} \zeta^i t^{-(c+c_k)\zeta} d\zeta, \\ I^{ik} = \int_{\xi}^{\infty} t^{-(c_l+c_k)\zeta} d\zeta, \quad \Delta = \det [E + \hat{A}(\xi, t)]; \quad (11)$$

Исследуем асимптотику Δ при $t \rightarrow \infty$ в области $-\frac{1}{2c} \ln t^{N+1} < \xi < 0$. Учитывая экспоненциальный рост элементов $\hat{A}_{N+i, k+1}$ ($i = 1, 2, \dots, m; k = 0, 1, \dots, N-1$) и $\hat{A}_{N+i, k+N}$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) при $t \rightarrow \infty$, легко видеть, что главный член $\tilde{\Delta}$ в асимптотическом разложении $\tilde{\Delta}$ имеет вид

$$\tilde{\Delta} = \det [\tilde{E} + \hat{A}(\xi, t)], \quad (12)$$

где $\tilde{E}$ — матрица порядка $(N + m)$, в которой на пересечении первых N строк и первых N столбцов стоит единичная матрица, а остальные элементы равны нулю. Анализ структуры матрицы $\tilde{E} + \hat{A}(\xi, t)$ показывает, что $\tilde{\Delta}$ можно представить в виде

$$\tilde{\Delta} = \prod_{l=1}^m m_l^{(1)}(0) l^{s_{\nu_l} c_l t} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{P_n(\xi, l^{c_1 \xi}, \dots, l^{c_m \xi}, t)}{l^{n(n+1/2)}} \times \\ \times l^{-2\left(nc + \sum_{l=1}^m c_l\right)\xi}. \quad (13)$$

Здесь $P_n(\xi, l^{c_1 \xi}, \dots, l^{c_m \xi}, t)$ — многочлены от $\xi, l^{c_1 \xi}, \dots, l^{c_m \xi}, t$ с ограниченными по t коэффициентами. При $n \leq [N + 1/2]$ справедливы асимптотические равенства

$$\frac{P_n(\xi, l^{c_1 \xi}, \dots, l^{c_m \xi}, t) \times l^{-2\left(nc + \sum_{l=1}^m c_l\right)\xi}}{t^{n(n+\frac{1}{2})}} = \det[A^{(n)}(\xi, t)] [1 + O(t^{-\frac{1}{2}})] + \\ + \frac{l^{-2\left(nc + \sum_{l=1}^m c_l\right)\xi}}{t^{n(n+\frac{1}{2})+1}} R_n(\xi, l^{c_1 \xi}, \dots, l^{c_m \xi}, t), \quad (14)$$

где $R_n(\xi, l^{c_1 \xi}, \dots, l^{c_m \xi}, t)$ — полиномы от $\xi, l^{c_1 \xi}, \dots, l^{c_m \xi}, t$ с ограниченными по t коэффициентами; $A^{(n)}(\xi, t)$ — матрица порядка $(n + m)$ с элементами

$$A_{i+1, k+1}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{ij}}{t^{i+j+3/2}} I_{i+k}^j, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ A_{i+1, k+n}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\omega_{ij}}{t^{i+j+3/2}} I_i^j, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad k = 1, 2, \dots, m; \\ A_{i+n, k+1}^{(n)} = I_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \\ A_{i+n, k+n}^{(n)} = I^{ik}, \quad i, k = 1, 2, \dots, m.$$

Матрица $A^{(n)}(\xi, t)$ является произведением двух матриц, поэтому, учитывая (9), получаем

$$\det[A^{(n)}(\xi, t)] = \frac{|S_{22}'|^{2n} \Omega^{(n)} J^{(n, m)}(\xi)}{16 \sqrt{\pi} (8c)^n (2n-1/2) \prod_{k=0}^m (k!)^2 t^{n(n+1/2)}}. \quad (15)$$

Здесь $\Omega^{(n)}$ — определитель порядка n с элементами

$$\Omega_{i+1, k+1}^{(n)} = \frac{(2i+2k+2)!}{(i+k+1)!} i, \quad k=0, 1, \dots, n-1, \quad (16)$$

а элементы определителя $J^{(n, m)}(\xi)$ определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} J_{i+1, k+1}^{(n, m)} &= I_{i+k} i, \quad k=0, 1, \dots, n-1, \quad J_{i+1, k+1}^{(n, m)} = I_i^k i = \\ &= 0, 1, \dots, n-1; \quad k=1, \dots, m; \quad J_{i+n, k+1}^{(n, m)} = I_k^i i = \\ &= 1, \dots, m; \quad k=0, 1, \dots, n-1; \quad J_{i+n, k+n}^{(n, m)} = I^{ik} i, \quad k=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (17)$$

Для получения асимптотики решения задачи (1)–(2) нам необходимо знать явный вид определителя $J^{(n, m)}(\xi)$. Найдем его.

Элементы определителя $J^{(n, m)}(\xi)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{dI_k}{d\xi} &= kI_{k-1} - 2cI_k; \quad \frac{dI^{ik}}{d\xi} = -(c_i + c_k)I^{ik}; \\ \frac{dI_k^i}{d\xi} &= kI_{k-1} - (c + c_i)I_k^i. \end{aligned} \quad (18)$$

Покажем, что

$$\frac{dJ^{(n, m)}}{d\xi} = -2 \left(nc + \sum_{l=1}^m c_l \right) J^{(n, m)}. \quad (19)$$

Для этого рассмотрим матрицу $B(z, \xi)$ порядка $(n+m)$ с элементами

$$\begin{aligned} B_{i+1, k+1} &= I_{i+k} + izI_{i+k-1} i, \quad k=0, 1, \dots, n-1; \\ B_{i+1, k+n} &= (I_i^k + izI_{i-1}^k) e^{(c_k - c)^2} i = 0, \dots, n-1; \\ & \quad k=1, \dots, m; \\ B_{i+n, k+1} &= I_k^i e^{(c - c_i)^2} i = 1, \dots, m; \\ & \quad k=0, \dots, n-1; \\ B_{i+n, k+n} &= I^{ik} e^{(c_k - c_i)^2} i, \quad k=1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

Учитывая (18), непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$\det B(z, \xi)|_{z=0} = J^{(n, m)}(\xi) \text{ и}$$

$$\frac{d}{dz} (\det B(z, \xi))|_{z=0} = \frac{dJ^{(n, m)}}{d\xi} + 2 \left(nc + \sum_{l=1}^m c_l \right) J^{(n, m)}.$$

Матрицу $B(z, \xi)$ можно представить в виде произведения двух матриц $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ порядка $(n+m)$, ненулевые элементы которых таковы:

$$\begin{aligned} B_{i+1, i+1}^{(1)} &= 1, \quad i=0, 1, \dots, n+m-1; \\ B_{i+1, i}^{(1)} &= iz, \quad i=1, 2, \dots, n-1; \end{aligned}$$

$$B_{i+1, k+1}^{(2)} = I_{i+k}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$B_{i+1, k+n}^{(2)} = I_i^k e^{(c_k - c_i)z} i = 0, \dots, n-1; k = 1, \dots, m;$$

$$B_{i+n, k+1}^{(2)} = I_k^i e^{(c - c_i)z}, \quad i = 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$B_{i+n, k+n}^{(2)} = I^{ik} e^{(c_k - c_i)z}, \quad i, k = 1, \dots, m.$$

Но определители матриц $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ не зависят от z , поэтому $\frac{d}{dz} \det B(z, \xi) \equiv 0$, т. е. справедливо соотношение (19). Из (19) вытекает, что

$$J^{(n, m)}(\xi) = J^{(n, m)}(0) e^{-2 \left(nc + \sum_{l=1}^m c_l \right) \xi}, \quad (19')$$

где $J^{(n, m)}(0)$ — определитель порядка $(n + m)$ с элементами

$$J_{i+1, k+1}^{(n, m)}(0) = \frac{(i+k)!}{(2c)^{i+k+1}}, \quad i, k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$J_{i+1, k+n}^{(n, m)}(0) = \frac{i!}{(c + c_k)^{i+1}}, \quad i = 0, \dots, n-1; k = 1, \dots, m;$$

$$J_{i+n, k+1}^{(n, m)}(0) = \frac{k!}{(c + c_i)^{k+1}}, \quad i = 1, \dots, m; k = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$J_{i+n, k+n}^{(n, m)}(0) = \frac{1}{c_i + c_k}, \quad i, k = 1, \dots, m.$$

Установим, что

$$J^{(n, m)}(0) = c^{-n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k!)^2 \prod_{i=1}^m \left(\frac{c - c_i}{c + c_i} \right)^2 D(c_1, \dots, c_m), \quad (20)$$

где $D(c_1, \dots, c_m)$ — определитель порядка m с элементами

$$d_{ik} = \frac{1}{c_i + c_k}, \quad c_i \neq c_k, \quad c_i > 0,$$

при этом

$$D(c_1, \dots, c_m) = \frac{1}{2c_1} \prod_{i=2}^m \left(\frac{c_1 - c_i}{c_1 + c_i} \right)^2 D(c_2, \dots, c_m).$$

Посмотрим на $J^{(n, m)}(0)$ как на функцию переменной c_1 , скажем, $J^{(n, m)}(0) = f(c_1)$. Несложные преобразования позволяют записать

$$f(c_1) = \frac{-P_{2n+2m-2}(c_1)}{2c_1 (c + c_1)^{2n} \prod_{i=2}^m (c_1 + c_i)^2}.$$

Здесь $P_{2n+2m-2}(c_1)$ — полином степени $2n + 2m - 2$ от c_1 , совпадающий с определителем L , элементы которого равны элементам определителя $J^{(n, m)}(0)$ всюду, кроме $(n + 1)$ -го столбца и

$(n+1)$ -й строки. Несовпадающие элементы определяются формулами

$$L_{n+1, k+1} = 2c_1 \prod_{i=2}^m (c_1 + c_i) (c + c_1)^{n-k-1} k!, \quad k = 0, \dots, n-1;$$

$$L_{n+1, n+1} = (c + c_1)^{2n} \prod_{i=2}^m (c_1 + c_i)^2;$$

$$L_{n+1, n+k} = \prod_{\substack{i \neq k \\ i=2}}^m (c_1 + c_i) 2c_1 (c_1 + c)^n k = 1, \dots, m; \quad (21)$$

$$L_{k+1, n+1} = k! (c + c_1)^{n-k-1} \prod_{i=2}^m (c_1 + c_i) \quad k = 0, \dots, n-1;$$

$$L_{k+n, n+1} = \prod_{\substack{i \neq k \\ i=2}}^m (c_1 + c_i) (c_1 + c)^n \quad k = 1, \dots, m.$$

Корни полинома $P_{2n+2m-2(c_1)}$, не равные $-c_i$, 0 , $-c$, совпадают с корнями функции $f(c_1)$. Вычитая в $J^{(n, m)}(0)$ из $(n+2)$ -го столбца $(n+1)$ -й, а затем из $(n+2)$ -й строки $(n+1)$ -ю, видим, что c_2 — двукратный корень $f(c_1)$. Аналогично проверяется двукратность корней $c_3, c_4, \dots, c_m$ для $f(c_1)$. Теперь покажем, что c $2n$ -кратный корень функции $f(c_1)$. Для этого достаточно убедиться в равенстве нулю всех производных $f(c_1)$ до $(2n-1)$ порядка включительно при $c_1 = c$ (полученные ниже соотношения для полиномов и их степеней показывают, что $(2n+1)$ -кратным корнем c быть не может).

Индукцией по l проверяется, что

$$\frac{d^l f}{dc_1^l} = (-1)^l \sum_{k=0}^l C_k^l \Delta_k^l,$$

где Δ_k^l — определители порядка $(n+m)$, элементы которых совпадают с элементами $I^{(n, m)}(0)$ всюду, кроме $(n+1)$ -й строки и $(n+1)$ -го столбца, а здесь они определяются следующим образом:

$$(\Delta_k^l)_{n+1, i+1} = \frac{(i+k)!}{(c_1 + c_i)^{i+k+1}}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1;$$

$$(\Delta_k^l)_{n+1, n+1} = \frac{e!}{(2c_1)^{l+1}};$$

$$(\Delta_k^l)_{n+1, n+i} = \frac{k!}{(c_1 + c_i)^{k+1}}, \quad i = 2, \dots, m;$$

$$(\Delta_k^l)_{l+1, n+1} = \frac{(l-k+i)!}{(c + c_1)^{e-k+i+1}}, \quad i = 0, \dots, n-1;$$

$$(\Delta_k^l)_{n+i, n+1} = \frac{(l-k)}{(c_1 + c_i)^{l-k+1}}, \quad i = 2, \dots, m. \quad (22)$$

Рассматривая Δ_k^l как полилинейную функцию столбцов, можно проверить справедливость равенства

$$\frac{d}{dc_1} \Delta_k^l = -\Delta_{k+1}^{e+1} - \Delta_k^{e+1}.$$

При $c_1 = c$ и $0 \leq l \leq 2n-1$ все слагаемые суммы (22) равны нулю, откуда следует, что $c_1 = c$ $2n$ -кратный корень полинома $P_{2n+2m-2}(c_1)$. Таким образом, доказано, что $P_{2n+2m-2}(c_1) = \alpha (c - c_1)^{2n} \prod_{i=2}^m (c_1 - c_i)^2$. Разделив $P_{2n+2m-2}(c_1)$ на $c_1^{2n+2m-2}$, устремив $c_1 \rightarrow \infty$, учитывая (21), получим $\alpha = I^{(n,m-1)}(0)$, т. е. для $I^{(n,m)}(0)$ справедливо рекуррентное по m соотношение

$$I^{(n,m)}(0) = I^{(n,m-1)}(0) \frac{1}{2c_1} \prod_{i=2}^m \left(\frac{c_1 - c_i}{c_1 + c_i} \right)^2 \left(\frac{c - c_1}{c + c_1} \right)^{2n}. \quad (23)$$

Несложные вычисления показывают, что

$$I^{(n,0)}(0) = c^{-n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k!)^2. \quad (24)$$

Из соотношений (19'), (20), (23) и (24) находим явный вид определителя

$$\begin{aligned} I^{(n,m)}(\xi) &= c^{-n^2} \prod_{k=0}^{n-1} (k!)^2 \frac{1}{2c_m} \prod_{k=1}^{m-1} \frac{1}{2c_k} \prod_{i=k+1}^m \left(\frac{c_k - c_i}{c_k + c_i} \right)^2 \times \\ &\times \prod_{i=1}^m \left(\frac{c - c_i}{c + c_i} \right)^{2n} e^{-2 \left(nc + \sum_{i=1}^m c_i \right) \xi}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для определителя $\Omega^{(n)}$ (16) можно установить следующее рекуррентное соотношение:

$$\Omega^{(n)} = \frac{(2n)!}{n} 2^{2(n-1)} \Omega^{(n-1)}, \quad \Omega^{(1)} = 2! \quad (26)$$

Отсюда вытекает, что $\Omega^{(n)} > 0$. Вместе с (25), (14) и (15) это позволяет утверждать, что при $n \leq [N + 1/2]$ $P_n(\xi, t)$ не зависит от ξ , причем

$$P_n(t) = \frac{|S_{22}'|^{2n} \Omega^{(n)} J^{(n,m)}(0)}{16 \sqrt{\pi} (8c)^{n(2n-1/2)} \prod_{i=1}^{n-1} (i!)^2} (1 + O(t^{-1/2})) > 0. \quad (27)$$

Обратимся теперь к формулам (7), (10), которые дают

$$u(x, t) \cong -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \tilde{\Delta} |_{\xi=x-4c^2t} = -2 \frac{\tilde{\Delta}'' \tilde{\Delta} - (\tilde{\Delta}')^2}{\tilde{\Delta}^2}. \quad (28)$$

Повторяя рассуждения работы [1], покроем область $-\frac{1}{2c} \ln t^{N+1} < \xi < 0$ интервалами

$$a_1 = \left(-\frac{1}{2c} \ln t^{5/2+\varepsilon} < \xi < 0 \right),$$

$$a_n = \left(-\frac{1}{2c} \ln t^{\frac{4n+1}{2}+\varepsilon} < \xi < -\frac{1}{2c} \ln t^{\frac{4n-3}{2}-\varepsilon} \right) \quad n = 2, \dots, s-1;$$

$$a_s = \left(-\frac{1}{2c} \ln t^{N+1} < \xi < -\frac{1}{2c} \ln t^{\frac{4s-3}{2}-\varepsilon} \right) \quad s = \left[\frac{N+1}{2} \right], \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{4}.$$

Простые, но громоздкие вычисления позволяют проверить, что при $\xi \in d_n$ знаменатель в (28) имеет асимптотику

$$\prod_{e=1}^m m_e^{(1)}(0) e^{8v_e^2 c_e t} e^{-4 \sum_{e=1}^m c_e \xi} \times$$

$$\times \left[\frac{P_{n-1} \exp \{-2(n-1) c \xi\}}{t^{(n-1)(n-1/2)}} + \frac{P_n \exp(-2nc\xi)}{t^{n(n+1/2)}} \right]^2 \left(1 + O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \right),$$

а числитель — асимптотику

$$-4c^2 \prod_{e=1}^m (m_e^{(1)} e^{8v_e^2 c_e t})^2 e^{-4 \sum_{e=1}^m c_e \xi} \times$$

$$\times \frac{2P_n P_{n-1} \exp \{-2(2n-1) c \xi\}}{t^{n(n+1/2)+(n-1)(n-1/2)}} \left(1 + O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \right).$$

Отсюда заключаем, что при $\xi \in a_n$ ($n = 1, \dots, [N + 1/2]$) для решения $u(x, t) = u(\xi + 4c^2 t', t)$ задачи (1) — (2) с точностью до $O(t^{-1/2+\varepsilon})$ справедливы асимптотические формулы

$$u(x, t) \simeq \frac{-8c^2 P_n P_{n-1}}{t^{-n+\frac{1}{2}} \left[P_n e^{-c\xi/t^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}n}} + P_n e^{c\xi/t^{n/2}} \right]^2} =$$

$$= - \frac{2c^2}{\operatorname{ch}^2(c(x - 4c^2 t) + \varphi_n(t))}; \quad (29)$$

$$\varphi_n = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P_{n-1}}{P_n} t^{2n-\frac{1}{2}} \right).$$

Учитывая (15), (25) и (26), найдем

$$\varphi_n = \frac{1}{2} \ln \left(t^{2n-\frac{1}{2}} \frac{16 \sqrt{\pi} (8c)^{4n-5/2} n! 2^{2(n-1)}}{|S_{22}'|^2 (2n)! (n-1)!} \times \right.$$

$$\times \prod_{i=1}^m \left(\frac{c - c_i}{c + c_i} \right)^2 \left. \right).$$

Таким образом доказана следующая

Теорема. Решение задачи (1) — (2) при $t \rightarrow \infty$ в области $-\frac{1}{2c} \times \ln t^{N+1} < x - 4c^2 t < 0$ (N — любое натуральное число) распадается на $[N + 1/2]$ солитонов (29) с переменными фазами (30).

Отметим, что множитель $\prod_{i=1}^m \left(\frac{c - c_i}{c + c_i} \right)^2$ в (30) учитывает взаимодействие солитонов, порожденных непрерывным спектром оператора $-\frac{d^2}{dx^2} + u(x, 0)$ с солитонами, порожденными дискретным спектром.

Список литературы: Хрусов Е. Я. Асимптотика решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки. — Мат. сб., 1976, 99(141), №2, с. 261—281. Shunichi Tanaka. On the N -tuple Wave Solutions of the Korteweg-de Vries Equation. — Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 1973, Vol. 8, № 3, p. 419—427.

Поступила в редколлегию 23.06.78.

УДК 517.929 + 517.934

А. С. КАШУРКО, канд. техн. наук,
Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ-мат. наук,
В. А. СИНЯКОВ

О ВЫБОРЕ ПЕРЕДАТОЧНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В АВТОМАТЕ ВОЖДЕНИЯ САМОХОДНОЙ МАШИНЫ

В [1] показано, что в предположениях, обычно выполняющихся в реальных условиях работы систем «самоходная машина + автомат вождения», учет динамики процесса в конечном счете выражается в том, что задние и передние колеса машины имеют боковые уводы соответственно β_A и β_B , линейно выражающиеся через α — угол поворота передних колес (см. рисунок)

$$\beta_A = -\rho_1 \alpha, \quad \beta_B = -\rho_2 \alpha, \quad (1)$$

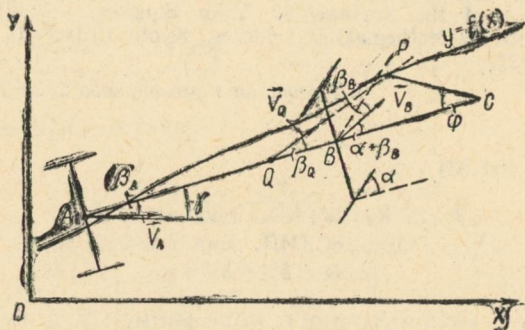
где ρ_1, ρ_2 зависят от коэффициентов сопротивления уводу. Это позволяет учесть динамику самоходной машины в математической модели системы, а для построения модели применить кинематический подход, аналогичный [2, 3].

Текущее положение самоходной машины на плоскости будем характеризовать тремя обобщенными координатами $x_Q(t), y_Q(t), \gamma(t)$, где x_Q, y_Q — координаты точки Q пересечения оси рабочих органов машины с ее продольной осью AB в неподвижной системе координат $ХОУ$, а γ — угол между осью машины AB и

осью x . Уравнения движения самоходной машины с учетом уводов колес имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}_Q &= v \cos \beta_A \left(\cos \gamma - \frac{L_{AQ} \operatorname{tg}(\alpha + \beta_B) + L_{QB} \operatorname{tg} \beta_A}{L_{AB}} \sin \gamma \right); \\ \dot{y}_Q &= v \cos \beta_A \left(\sin \gamma + \frac{L_{AQ} \operatorname{tg}(\alpha + \beta_B) + L_{QB} \operatorname{tg} \beta_A}{L_{AB}} \cos \gamma \right); \\ \dot{\gamma} &= \frac{V \sin(\alpha + \beta_B - \beta_A)}{L_{AB} \cos(\alpha + \beta_B)},\end{aligned}\quad (2)$$

где L_{AQ} , L_{AB} — расстояния от точки A — середины оси задних колес — до соответственно точек Q и B — середины оси передних колес, L_{QB} — расстояние от точки Q до точки B , v — модуль скорости точки A .



Вопрос о возможности точного отслеживания некоторой достаточно гладкой и плавной кривой $y = f(x)$ системой «машина + автомат вождения» сводится к отысканию управления $\alpha(t)$ как функции от $\varphi(t)$ ($0 \leq \theta \leq t$ (φ — угол между осью AB и штангой следящего устройства CP) такой, чтобы точка Q повторяла траекторию точки P — конца штанги CP (точка P постоянно находится на отслеживаемой кривой).

Таким образом, должны выполняться соотношения

$$x_Q(t + \tau(t)) = x_P(t); \quad y_Q(t + \tau(t)) = y_P(t), \quad (3)$$

где x_P , y_P — координаты точки P на плоскости XOY , $\tau(t)$ — время перехода точки Q в положение, занимаемое точкой P в момент времени t .

В реальных условиях $\tau(t)$ существует [1] и мало, точнее, ν мало по сравнению с характерными размерами отслеживаемой кривой. Поэтому, рассматривая асимптотическое разложение (3) по τ с точностью $O(\tau^2)$ совместно с (2), получаем с учетом (1) и малости углов α , φ простой закон управления

$$\alpha(t) = -k\varphi(t), \quad (4)$$

где передаточный коэффициент выражается через параметры системы «машина + автомат вождения» следующим образом:

$$k = \frac{l L_{AB}}{(L_{QC} - l) [L_{AQ}(1 - \rho_2) - L_{QB} \rho_1]} \quad (5)$$

Здесь l — длина штанги CP , L_{QC} — расстояние от точки Q до точки C подвеса штанги CP .

Полученное выражение для передаточного коэффициента k отличается от аналогичных выражений в [2, 3] даже в случае $\rho_1 = \rho_2 = 0$, т. е. без учета динамики процесса. Вместе с тем такой выбор передаточного коэффициента обеспечивает приемлемую в реальных условиях точность отслеживания кривой $y = f(x)$.

Следует отметить, что закон управления (4), (5) может быть получен из простых геометрических соображений, отличных от [2]: угол поворота передних колес в каждый момент времени надо выбирать так, чтобы вектор скорости точки Q был направлен на точку P .

Для решения вопроса об устойчивости движений системы «машина + автомат вождения», определяемых отслеживаемой кривой $y = f(x)$, уравнения (3) линеаризуем (α, γ, φ — малы в реальных условиях), α заменяем на $-k\varphi$ в соответствии с (4) и учетом (5), где φ в свою очередь выражаем через y_Q, γ и $f(x_P)$ (из условия нахождения точки P на кривой $y = f(x)$). Первое из уравнений (2) принимает простой вид:

$$\dot{x}_Q = v.$$

Интегрируя его при начальном условии $x_Q(0) = 0$ и учитывая, что при малых γ и φ $x_P = x_Q + L_{QC} - l$, находим

$$x_P(t) = vt + L_{QC} - l.$$

Тогда последние два уравнения (2) переходят в систему дифференциальных уравнений относительно y_Q и γ :

$$\dot{y}_Q = -\frac{v}{L_{QC} - l} y_Q + \frac{v}{L_{QC} - l} f(vt + L_{QC} - l);$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = & -\frac{v(1 - \rho_2 + \rho_1)}{(L_{QC} - l) [L_{AQ}(1 - \rho_2) - L_{QB} \rho_1]} y_Q - \frac{v(1 - \rho_2 + \rho_1)}{[L_{AQ}(1 - \rho_2) - L_{QB} \rho_1]} \gamma + \\ & + \frac{v(1 - \rho_2 + \rho_1)}{(L_{QC} - l) [L_{AQ}(1 - \rho_2) - L_{QB} \rho_1]} f(vt + L_{QC} - l). \end{aligned} \quad (6)$$

Для полученной системы дифференциальных уравнений корни соответствующего характеристического уравнения λ_1, λ_2 отрицательны, что говорит об устойчивости системы. Так как в реальных условиях $L_{QC} - l \leq L_{AQ}(1 - \rho_2) - L_{QB} \rho_1$, то степень устойчивости системы U_c , определяемая в [3] как $\min(|\operatorname{Re} \lambda_1|, |\operatorname{Re} \lambda_2|)$, равна $U_c = v(1 - \rho_2 + \rho_1) / [L_{AQ}(1 - \rho_2) - L_{QB} \rho_1]$ и в отличие от [3] не зависит от параметров автомата вождения.

И, что особенно существенно, первое из уравнений (6), полученное при выбранном в соответствии с (5) k , отделилось и представляет собой дифференциальное уравнение относительно y_Q . При этом степень устойчивости по y_Q (количественная оценка скорости затухания отклонения точки Q от отслеживаемой кривой $y = f(x)$) выше, чем в [3], и равна

$$U_Q = \frac{v}{L_{QC} - l}.$$

Список литературы: 1. Синяков В. А. Обоснование кинематической модели автомата вождения. — Вестн. Харьк. ун-та, № 174. Прикладная математика и механика, 1978, вып. 43, с. 56—61. 2. Математическая модель автомата вождения самоходной машины, отслеживающего кривую с помощью копира / А. С. Кашурко, В. И. Коробов, Е. Н. Подольский, В. А. Синяков. — Вестн. Харьк. ун-та, № 134. Математика и механика, 1976, вып. 41, с. 3—11. 3. Кашурко А. С., Подольский Е. Н., Синяков В. А. Выбор оптимальных параметров автомата вождения самоходной корневоборочной машины КС-6. — В кн.: Материалы I всесоюз. совещ. Электроприборы для испытаний, исследований и эксплуатационного контроля сельскохозяйственных машин. М., 1977, с. 3—11.

Поступила в редколлегию 24.12.79.

УДК 519

Э. М. ЖМУДЬ, канд. физ.-мат. наук

О РАЗРЕШИМЫХ КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ОБЛАДАЮЩИХ НЕПРИВОДИМЫМ КОМПЛЕКСНЫМ ХАРАКТЕРОМ С СОПРЯЖЕННЫМИ НУЛЯМИ

Цель настоящей статьи — изложение доказательств ряда результатов, анонсированных в работе [5]. Напомним данные в [5] определения DS-характера и DS-группы. DS-характером неабелевой группы G^* называется ее точный неприводимый характер χ , множество T_χ нулей которого является классом сопряженных элементов группы G . Группа с отмеченным DS-характером называется DS-группой. Другими словами, DS-группа — это пара $\{G, \chi\}$, где G — группа, обладающая DS-характерами и χ — один из последних. Если $G = \langle T_\chi \rangle$, то $\{G, \chi\}$ — DS-группа 1-го рода; в противном случае $\{G, \chi\}$ — DS-группа 2-го рода. Если центр DS-группы $\{G, \chi\}$ является максимальной не содержащей нулей характера χ ее нормальной подгруппой, то $\{G, \chi\}$ — DS-группа 1-го типа; в противном случае $\{G, \chi\}$ — DS-группа 2-го типа. Из примеров, приведенных в [5], видно, что для любых $i, j \in \{1, 2\}$ существуют DS-группы i -го рода и j -го типа. Существуют как разрешимые, так и не разрешимые DS-группы.

* Рассматриваются только конечные группы и их комплексные характеры.

Изучение неразрешимых DS-групп наталкивается на значительные трудности. Что касается разрешимых DS-групп, то удалось получить их полное описание для случаев DS-групп 1-го рода и DS-групп 2-го рода и 1-го типа*. Для разрешимых DS-групп 2-го рода и 2-го типа удалось доказать ряд предложений, которые не приводя к полному описанию этих групп, тем не менее, дают довольно значительную информацию об их строении. Докладательству этих результатов** и посвящена настоящая статья.

Обозначения и формулировка основных результатов

$\subseteq$ — символ строгого включения множеств; $\setminus$ — символ теоретико-множественной разности; $|M|$ — число элементов конечного множества M ; в частности, $|G|$ — порядок группы G ; $H < G$ — « H — собственная подгруппа группы G »; $\delta(g)$ — порядок элемента $g \in G$; $\langle M \rangle$ подгруппа порожденная подмножеством $M \subseteq G$; G -класс — класс сопряженных элементов группы G ; $x^y = y^{-1}xy$ ($x, y \in G$); $X^Y = \{x^y | x \in X, y \in Y\}$ ($X, Y \subseteq G$) x^G — G -класс элемента $x \in G$; $\sim$ символ для отношения сопряженности элементов группы G ; $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ ($x, y \in G$) G' — коммутант группы G ; $Z(G)$ — центр группы G ; $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини, группы G ; $F(G)$ подгруппа Фиттинга группы G ; $Syl_p(G)$ множество всех силовских p -подгрупп группы G ; $C(n)$ — циклическая группа n -го порядка; $I_{\text{гр}}(G)$ множество всех неприводимых комплексных характеров группы G ; $T_\chi = \{g \in G | \chi(g) = 0\}$ — множество всех нулей нелинейного характера $\chi \in I_{\text{гр}}(G)$ $N_\chi = \langle T_\chi \rangle$; $\Delta_\chi = G \setminus N_\chi$; $\text{Ker } \chi = \{g \in G | \chi(g) = \chi(1)\}$; $Z(\chi) = \{g \in G | |\chi(g)| = \chi(1)\}$; ψ^G — характер группы G , индуцированный характером ψ подгруппы H группы G ; χ_H — ограничение характера χ группы G на подгруппу H ; $I_\psi = \{g \in G | \psi^g = \psi\}$ — группа инерции характера $\psi \in I_{\text{гр}}(N)$ ($N \triangleleft G$); $\mathbb{Z}$ — кольцо целых рациональных чисел; $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел; $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Основные результаты статьи резюмируются следующей теоремой.

Теорема. Если $\{G, \chi\}$ — разрешимая DS-группа 2-го рода и 2-го типа, то имеют место следующие утверждения:

$$(I) \quad N'_\chi = N_\chi \setminus T_\chi.$$

$$(II) \quad N'_\chi = [g, N_\chi] \quad (g — \text{любой элемент из } T_\chi).$$

(III) N_χ/N'_χ — главный фактор группы G и, следовательно, — элементарная абелева p -группа; все главные ряды группы G проходят через N_χ и N'_χ .

(IV) G/N'_χ изоморфна 2-транзитивной группе Фробениуса степени $p^a = [N_\chi/N'_\chi]$; ядром группы Фробениуса G/N'_χ является подгруппа N_χ/N'_χ ; $|G/N'_\chi| = p^a(p^a - 1)$.

* Соответствующие результаты анонсированы в [5]. Изложению их доказательств будет посвящена отдельная статья.

** В работе [5] они составляют содержание теоремы 3.

(V) Если $g \in T_\chi (= N_\chi \setminus N'_\chi)$, то $|C_G(g)| = |C_{N_\chi}(g)| = p^\alpha$; в частности, $o(g) = p^\sigma$, где $\sigma \leq \alpha$ и не зависит от g .

(VI) Если $g \in N_\chi \setminus N'_\chi$, то $N'_\chi = [g, N_\chi]$.

VII На T_χ обращаются в нуль все нелинейные неприводимые характеры подгруппы N_χ .

(VIII) Если $P \in \text{Syl}_p(N_\chi)$, то $P' \in \text{Syl}_p(N'_\chi)$, $P' = \Phi(P)$ и $P/P' — элементарная абелева группа порядка p^α ; если $g \in P \setminus P'$, то $P' = [g, P]$.$

(IX) Подгруппы N_χ и N'_χ обладают нормальным p -дополнением V : $N_\chi = V \times P$, $N'_\chi = V \times P'$.

(X) Если $\alpha > 1$, то α четно; если $\alpha = 1$, то N_χ — группа Фробениуса с ядром N'_χ и дополнительным множителем $P \cong C(p)$; при этом $G = N'_\chi \rtimes \Phi$, где $\Phi = N_G(P)$ — 2-транзитивная группа Фробениуса с ядром P и дополнительным множителем $L \cong C(p-1)^*$.

(XI) Характер $\chi_{N'_\chi}$ неразветвлен и распадается на p^α G -сопряженных неприводимых компонент.

Некоторые леммы. В этом параграфе G — неабелева группа, $\chi \in \text{Irr}(G)$.

1.1. **Лемма** [1]. Если $\chi(1) > 1$, то $T_\chi \neq \emptyset$.

1.2. **Лемма** [2]. (I) $\chi_{N_\chi} \in \text{Irr}(N_\chi)$; (II) Из $g \in \Delta_\chi$ следует, что $\chi(g)$ — корень из 1.

1.3. Следствие. Подгруппа N_χ неабелева.

1.4. **Лемма** [4]. $g \in T_\chi$ влечет $C_G(g) \subset N_\chi$.

1.5. Следствие. Если $g \in T_\chi$, то $C_G(g) = C_{N_\chi}(g)$.

1.6. **Лемма** $Z(\chi) \subset N_\chi$; в частности, $Z(G) \subset N_\chi$.

Доказательство. $Z(\chi)T_\chi = T_\chi$, откуда $Z(\chi) \subseteq T_\chi \cdot T_\chi^{-1**} \subseteq N_\chi$. Так как $Z(\chi) \neq N_\chi$, то $Z(\chi) \subset N_\chi$.

1.7. Следствие. $Z(\chi_{N_\chi}) = Z(x)$. В частности, если $\text{Ker } \chi = \{1\}$, то $Z(N_\chi) = Z(G)$.

1.8. **Лемма.** Если характер $\chi = \chi^G$ индуцируется из подгруппы H группы G , то $G \setminus H^G \subseteq T_\chi$.

Доказательство. Утверждение следует из явной формулы для χ^G .

1.9. Следствие. Если $N_\chi \neq G$, то характер χ не может индуцироваться из собственной нормальной подгруппы группы G .

1.10. Следствие [4]. Если группа G нильпотентна, то $N_\chi = G$.

* Таким образом, при $\alpha = 1$ G — «двойная группа Фробениуса» с левым фробениусовым множителем N_χ и прямым $\Phi = P \rtimes L$ (порядка $p(p-1)$).

** Если $X \subseteq G$, то $X^{-1} = \{x^{-1} | x \in X\}$.

1.11. **Лемма** [6]. Допустим, что $N_\chi \neq G$ и $\chi = \vartheta^a$, где $\vartheta \in \text{Irr}(H)$, $H < G$. Пусть $\Omega = H \cap \Delta_\chi (= H \setminus N_\chi)$. Тогда (I) $G = N_\chi \cdot H$; (II) $\Delta_\chi = \Omega_G$; (III) $H = N_G(\Omega)$ и Ω — (TI)-подмножество группы G .

1.12. Следствие. Если характер χ индуцируется из собственной подгруппы H группы G , то $\bigcap_{g \in G} H^g \subseteq N_\chi$.

1.13. **Лемма**. Если $N \triangleleft G$, $N \subseteq N_\chi$, то $\chi_N \in \text{Irr}(N)$.

Доказательство. χ_N изотипичен: в противном случае χ индуцируется из собственной подгруппы H группы G , содержащей N , откуда в силу 1.12 $N \subseteq \bigcap_{g \in G} H^g \subseteq N_\chi$ — противоречие. Таким образом, $\chi_N = e\psi$ (e — индекс ветвления χ_N , $\psi \in \text{Irr}(N)$). Так как $\chi(g) = e\psi(g)$ ($g \in G$) и при $g \in N \setminus N_\chi$, в силу 1.2, $\chi(g)$ — корень из 1, то $e = 1$ и, следовательно, $\chi_N \in \text{Irr}(N)$.

1.14. **Лемма**. Если $N \triangleleft G$, $N \cap T_\chi = \emptyset$ и χ_N изотипичен, то $N \subseteq Z(\chi)$.

Доказательство. Если $\chi_N = e\psi$ (e — индекс ветвления χ_N , $\psi \in \text{Irr}(N)$), то $T_\psi = T_\chi \cap N = \emptyset$, откуда ввиду 1.1 $\psi(1) = 1$. Поэтому $N \subseteq Z(\chi)$.

1.15. Следствие. Из $N \triangleleft G$, $N \cap T_\chi = \emptyset$ вытекает, что $N \subset N_\chi$.

Доказательство. Из 1.13 и 1.1 вытекает включение $N \subseteq N_\chi$. Так как $N \neq N_\chi$, то $N \subset N_\chi$.

1.16. Следствие. Если $N \triangleleft G$, $N \subseteq Z(\chi)$ и $N \cap T_\chi = \emptyset$, то характер χ индуцируется из собственной подгруппы группы G , содержащей N .

Доказательство. В силу 1.14 характер χ_N не изотипичен, откуда и вытекает утверждение.

1.17. **Лемма**. Пусть M — любая максимальная по включению нормальная подгруппа «свободная от нулей» характера χ (т. е. такая, что $M \cap T_\chi = \emptyset$). Тогда $Z(\chi) \subseteq M \subset N_\chi$: в частности, $Z(G) \subseteq M$.

Доказательство. Так как $M \subseteq Z(\chi)$, $M \triangleleft G$ и $Z(\chi)M \cap T_\chi = \emptyset$, то $Z(\chi)M = M$, откуда $Z(\chi) \subseteq M$. Включение $M \subset N_\chi$ следует из 1.15.

1.18. **Лемма** [3, с. 431]. Пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$, $N \triangleleft G$, $N_p = N \cap P \subseteq \Phi(P)$. Тогда группа N обладает нормальным p -дополнением: $N = V \rtimes N_p$, где $V \triangleleft N$.

1.19. **Лемма**. Пусть G — примитивная группа подстановок, в которой подстановки без неподвижных точек сопряжены. Если $F(G) \neq \{1\}$, то G — 2-транзитивная группа Фробениуса, ядро F которой совпадает с $D \cup \{1\}$, где D — множество всех подстановок без неподвижных точек группы G ; F — элементарная абелева группа порядка p^α (p — простое число, $\alpha \geq 1$). Степень n группы G равна p^α , $|G| = p^\alpha(p^\alpha - 1)$.

Доказательство. Допустим, что группа G действует на множестве $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. Если H_i ($i = 1, \dots, n$) стабилизаторы точек, то, очевидно, $D = G \setminus \bigcup_i H_i$. Так как $F(G) \neq \{1\}$, то группа G содержит минимальную абелеву нормальную под-

группу F . Так как G примитивна, то F транзитивна и, следовательно, $|F| = n$. Подгруппа F регулярна, откуда следует, что $F^\# \subseteq D$. Так как $D - G$ -класс и $F^\#$ нормально, то $F^\# = D$ и, следовательно, $G \setminus F = \cup H_i^\#$. С другой стороны, $|\cup H_i^\#| \leq \sum |H_i^\#| = |G| - n = |G| - |F| = |G \setminus F|$. Следовательно, $H_i^\# \cap H_j^\# = \emptyset$, если $i \neq j$. Таким образом, G — группа Фробениуса с ядром F и дополнительными множителями H_i ($i = 1, \dots, n$). Так как $F^\# - G$ -класс, то $F^\# = x^G$, где $x \in F^\#$. Ввиду абелевости F имеем $x^G = x^{F \times H_i} = x^{H_i}$, откуда вытекает, ввиду регулярности действия H_i на F , что $|F^\#| = |x^{H_i}| = |H_i|$. Таким образом, $|H_i| = n - 1$, откуда легко вытекает 2-транзитивность группы G . Так как F — элементарная абелева группа, то $n = |F| = p^\alpha$ (p — простое число, $\alpha \geq 1$). Наконец, $|G| = n |H_i| = p^\alpha(p^\alpha - 1)$.

1.20. **Лемма.** Если $g \in G$, то $|C_G(g)| \geq |G/G'|$.

Доказательство. Так как $g^G = g[g, G] \subseteq gG'$, то $(G : C_G(g)) = |g^G| \leq |gG'| = |G'|$, откуда и вытекает утверждение.

1.21. **Лемма.** Если $g \in G$, то следующие утверждения равносильны: (I) $G' = [g, G]$; (II) $|C_G(g)| = |G/G'|$; (III) все нелинейные неприводимые характеры группы G обращаются на элементе g в нуль.

Доказательство. $G' = [g, G]$ влечет $gG' = g^G$, откуда

$$|C_G(g)| = \frac{|G|}{|g^G|} = \frac{|G|}{|gG'|} = |G/G'|.$$

Таким образом, (I) $\Rightarrow$ (II). Так как

$$|C_G(g)| = \sum_{\theta \in \text{Irr}} |\theta(g)|^2 = \sum_{\theta(1)=1} |\theta(g)|^2 + \sum_{\theta(1)>1} |\theta(g)|^2 = |G/G'| + \sum_{\theta(1)>1} |\theta(g)|^2,$$

то (II) $\Rightarrow$ (III). Наконец, если выполнено (III), то

$$|C_G(g)| = \sum_{\theta \in \text{Irr}(G), \theta(1)>1} 1 = |G/G'|.$$

Следовательно, $|[g, G]| = |g^G| = (G : C_G(g)) = |G'|$. Так как $[g, G] \subseteq G'$, отсюда следует, что $[g, G] = G'$. Таким образом, (III) $\Rightarrow$ (I).

1.22. **Лемма.** Допустим, что $G' \leq N < G$, $g \in G$, причем $|C_G(g)| = |G/N|$. Тогда (I) $N = G' = [g, G]$. (II) На элементе g обращаются в нуль все нелинейные характеры группы G .

Доказательство. Так как $|C_G(g)| = |G/N|$, то $|[g, G]| = |g^G| = (G : C_G(g)) = |N|$, откуда, ввиду $[g, G] \subseteq G'$, вытекает: $|N| \leq |G'| \leq |N|$. Следовательно, $N = G' = [g, G]$. Тем самым доказано (I). Для доказательства (II) достаточно воспользоваться леммой 1.21.

2. Разрешимые DS -группы 2-го рода и 2-го типа. В дальнейшем $\{G, \chi\}$ — разрешимая DS -группа 2-го рода и 2-го типа. Таким образом, G разрешима, χ — ее DS -характер, $N_\chi \neq G$, $Z(G) \subset M$, где M — максимальная нормальная подгруппа группы G свободная от нулей характера χ^* .

* В силу (1.17) $Z(G) \subseteq M$, в случае же D -группы 2-го типа $Z(G) \subset M$.

2.1. Предложение. $N_\chi \subseteq G'$.

Доказательство. В силу 1.9 характер $\chi_{G'}$ изотипичен. $\chi_{G'} = e\psi$ (e — индекс ветвления $\chi_{G'}$, $\psi \in \text{Irr}(G')$). Из $\psi(1) = 1$, ввиду точности χ , вытекает, что $G' \subseteq Z(G)$. Но тогда группа G нильпотентна и ввиду 1.10 $N_\chi = G$ — противоречие. Следовательно, $\psi(1) > 1$ и в силу 1.1 $T_\psi \neq \emptyset$. Поэтому $T_\chi \cap G' = T_\psi \neq \emptyset$. Так как T_ψ — G -класс, отсюда вытекает, что $G' \supset T_\chi$, откуда $G' \supseteq N_\chi$.

2.2. Следствие. Группа G/M неабелева.

Доказательство. В противном случае в силу 2.1 $M \supseteq N_\chi$, что невозможно, так как $M \cap T_\chi = \emptyset$.

2.3. Предложение. (I) $M \subset N_\chi$; (II) N_χ/M — главный фактор группы G , являющийся единственной минимальной нормальной подгруппой группы G/M .

Доказательство. Включение $M \subset N_\chi$ вытекает из 1.17. Если $N \triangleleft G$, $M \subset N$, то, как видно из определения подгруппы M , $N \cap T_\chi \neq \emptyset$, откуда вытекает (так как T_χ — G -класс), что $N \supseteq N_\chi$. Тем самым доказано (II).

2.4. Следствие. N_χ/M — элементарная абелева группа.

Доказательство. Вытекает из 2.3 и разрешимости группы G .

2.5. Предложение. Характер $\theta = \chi_M$ неизотипичен.

Доказательство. В противном случае, ввиду точности χ , имело бы место $M \subseteq Z(G)$, либо $M \cap T_\chi \neq \emptyset$. Оба случая невозможны.

2.6. Следствие. Если ψ — неприводимая компонента характера $\theta = \chi_M$, I_ψ — группа инерции ψ , то $M \subseteq I_\psi \subset G$ (2.1); $\theta = e(\psi_1 + \dots + \psi_l)$ (2.2); $l \geq (G:I_\psi) > 1$ (2.3). В (2.2) ψ_i ($i = 1, \dots, l$) — неприводимые характеры подгруппы M , G -сопряженные с $\psi_1 = \psi$; e — индекс ветвления θ .

2.7. Предложение. Пусть H — любая максимальная подгруппа группы G , содержащая I_ψ (см. 2.5) $\Delta = G \setminus H^2$. Тогда $\Delta = T_\chi$.

Доказательство. Поскольку χ индуцируется из I_ψ , то χ индуцируется также из H , откуда в силу 1.8 вытекает, что $\Delta \subseteq T_\chi$. Так как Δ непусто и нормально, а T_χ является G -классом, то $\Delta = T_\chi$.

2.8. Предложение. $\cap H^g = M$.

Доказательство. $\cap_{g \in G} H^g$. Полагая $D = \cap H^g$, получим, ввиду 2.7: $D \subseteq H^G = G \setminus \Delta = G \setminus T_\chi$. Таким образом, $D \cap T_\chi = \emptyset$, откуда ввиду $D \supseteq M$ вытекает, что $D = M$.

Полагая $(G:H) = n$, разложим группу G по подгруппе H : $G = \bigcup_{i=1}^n Hg_i$ ($g_1 = 1$). Обозначим через τ транзитивное представление группы G подстановками смежных классов Hg_i , порожденное правыми умножениями. Из 2.8 вытекает, что

$$\text{Ker } \tau = M. \quad (2.4)$$

Обозначив через G группу подстановок $\tau(G)$, ввиду (2.4) получим

$$G \cong G / M. \quad (2.5)$$

2.9. Предложение. $\tau(g) (g \in G)$ является подстановкой без неподвижных точек тогда и только тогда, когда $g \in T_\chi$. Другими словами T_χ — полный прообраз $\tau^{-1}(D)$ множества D всех подстановок без неподвижных точек группы G .

Доказательство. Если $g \in T_\chi$ то ввиду 2.7 $Hg_i \cdot g \neq Hg_i (i = 1, \dots, n)$. Следовательно, $\tau(g) \in D$. Если $g \in T_\chi$, то $g \in H^G$ и, следовательно, при некотором i имеет место $g \in H^{G_i}$, откуда $Hg_i \cdot g = Hg_i$; таким образом, $\tau(g) \in D$.

2.10. Следствие. Множество D является G -классом.

Доказательство. В силу 2.9 $D = \tau(T_\chi)$. Так как T_χ — G -класс, то D — G -класс.

2.11. Следствие. G является 2-транзитивной группой Фробениуса с ядром $F = D \cup \{1\}$ и дополнительным множителем $H = \tau(H)$.

Доказательство. Так как группа G разрешима, то $F(G) = \{1\}$. Ввиду максимальности подгруппы H , группа подстановок G примитивна. В силу 2.10 и 1.19 отсюда вытекает, что G — 2-транзитивная группа Фробениуса с ядром $F = D \cup \{1\}$. Подгруппа $H = \tau(H)$ является, очевидно, стабилизатором «точки» H в группе G ; следовательно, H — дополнительный множитель в группе Фробениуса G .

Согласно 1.19 $n = |F| = p^\alpha$ (p — простое число, $\alpha \geq 1$) и $|G| = p^\alpha(p^\alpha - 1)$. Поэтому в силу (2.5) $(G:H) = n = |F| = p^\alpha$ (2.6); $|G| = |M|p^\alpha(p^\alpha - 1)$ (2.7); $|H| = |M|(p^\alpha - 1)$ (2.8).

2.12. Предложение. $N_\chi = M \cup T_\chi$, $M \cap T_\chi = \emptyset$.

Доказательство. Так как $T_\chi = \tau^{-1}(F^*)$ и ввиду (2.5) $\tau^{-1}(1) = M$, то $\tau^{-1}(F) = M \cup T_\chi$. Следовательно, $F = M \cup T_\chi$ — подгруппа (очевидно, нормальная) группы G . Так как $F \supset T_\chi$ и T_χ является G -классом, то $F \supseteq N_\chi$ и, следовательно, $F = N_\chi$. Таким образом, $N_\chi = M \cup T_\chi$. Из определения подгруппы M следует, что $M \cap T_\chi = \emptyset$.

2.13. Следствие. M — единственная максимальная свободная от нулей характера χ нормальная подгруппа группы G .

Доказательство. $M = N_\chi \setminus T_\chi$. Следовательно, подгруппа M определяется однозначно.

2.14. Следствие. Все главные ряды группы G проходят через N_χ и M .

Доказательство. Из 2.3 следует, что N_χ — единственная нормальная подгруппа группы G , показывающая M^* . Из 2.12 вы-

* Нормальная подгруппа N покрывается нормальной подгруппой L , если $N \subseteq L$ и L/N — главный фактор группы G .

текает, что M — единственная нормальная подгруппа группы G , покрываемая N_χ . Действительно, если $N \triangleleft G$, $N \subset N_\chi$, то $N \cap T_\chi = \emptyset$, откуда в силу 2.12 $N \subseteq M$.

2.15. Предложение. (I) Группа G/M изоморфна 2-транзитивной группе Фробениуса степени p^α ; (II) ядром и дополнительным множителем группы Фробениуса G/M являются соответственно подгруппы N_χ/M и H/M ; N_χ/M — элементарная абелева группа порядка p^α .

Доказательство. Так как $G = \tau(G)$, $F = \tau(N_\chi)$, $H = \tau(H)$, то все утверждения вытекают из (2.4), 2.11 и 1.19.

2.16. Следствие. $|G/N_\chi| = p^\alpha - 1$.

2.17. Следствие. $\text{Syl}_p(G) = \text{Syl}_p(N_\chi)$.

2.18. Предложение. $N_G(H) = H$.

Доказательство. Так как H дополнительный множитель группы Фробениуса G , то $H \triangleleft G$. Следовательно, $H = \tau^{-1}(H) \triangleleft G$. Так как H — максимальная подгруппа группы G , то $N_G(H) = H$.

2.19. Следствие. Существует ровно p^α подгрупп сопряженных с H . Пересечение любых двух из них совпадает с M .

Доказательство. Вытекает из 2.16, (2.6) и 2.11.

2.20. Предложение. Если $g \in T_\chi$, то $|C_G(g)| = p^\alpha$.

Доказательство. Так как в силу 2.15 $|N_\chi/M| = p^\alpha$, то на основании 2.12 $|T_\chi| = |N_\chi| - |M| = |M|(p^\alpha - 1)$. Учитывая, что T_χ — G -класс и используя (2.7), получаем: $|C_\chi(g)| =$

$$= \frac{|G|}{|T_\chi|} = \frac{|M|p^\alpha(p^\alpha - 1)}{|M|(p^\alpha - 1)} = p^\alpha.$$

2.21. Следствие. Если $g \in T_\chi$, то $o(g) = p^\sigma$, где $\sigma \leq \alpha$ и не зависит от g .

2.22. Следствие. Если $x \in M^\#$, x — p' -элемент, то $C_{N_\chi}(x) \subseteq M$.

Сохраняя обозначения, принятые в 2.6 и 2.7, докажем следующее утверждение, уточняющее 2.6.

2.23. Предложение. (I) $I_\psi = H$, (II) характер θ неразветвлен: $\theta = \psi_1 + \dots + \psi_{p^\alpha}$, где ψ_i ($i = 1, \dots, p^\alpha$) — неприводимые характеры подгруппы M , G -сопряженные с ψ .

Доказательство. В силу (2.3) и (2.6) $l = (G : I_\psi) = (G : H)(H : I_\psi) = p^\alpha(H : I_\psi)$. С другой стороны, на основании (2.2), 2.11, 1.2 и 2.15 $e^2 l = (\theta, \theta) = \frac{1}{|M|} \sum_{g \in N_\chi} |\chi_{N_\chi}(g)|^2 = |N_\chi/M| = p^\alpha$. Следовательно, $e = (H : I_\psi) = 1$, что и доказывают утверждения (I) и (II).

2.24. Предложение. (I) $M = N_\chi' = [g, N_\chi]$ (g — любой элемент из T_χ); (II) на T_χ обращаются в нуль все нелинейные неприводимые характеры подгруппы N_χ .

Доказательство. Если $g \in T_\chi$, то ввиду 2.20, 1.5 и 2.15 $|C_{N_\chi}(g)| = |N_\chi/M|$. Так как $N_\chi \leq M < N_\chi$, то в силу 1.22 (в применении к группе N_χ) имеют место утверждения (I) и (II).

2.25. **Предложение.** Если $P \in \text{Syl}_p(N_\chi) (= \text{Syl}_p(G))$ и $M_p = M \cap P$, то (I) $N_\chi = M \cdot P$; (II) $P' = M_p \in \text{Syl}_p(M)$.

Доказательство. Очевидно, $M_p \in \text{Syl}_p(M)$, $M_p \triangleleft P$, $M \cdot P / M \cong P / M_p$. Полагая $|M_p| = p^\lambda$, получим $|M| = p^\lambda k$, где k — целое, $(k, p) = 1$. Поэтому $|N_\chi| = p^\alpha |M| = p^{\alpha+\lambda} k$, откуда $|P| = p^{\alpha+\lambda}$. Следовательно, $|P / M_p| = p^\alpha = |N_\chi / M|$. Так как $|P / M_p| = |MP / M|$ и $MP \subseteq N_\chi$, откуда вытекает, что $M \cdot P = N_\chi$. Таким образом, $N_\chi / M \cong P / M$ (2.9). Из (2.9) и 2.15 вытекает, что P / M_p — элементарная абелева группа порядка p^α . Следовательно, $M_p \supseteq P'$. Пусть $g \in P \setminus M_p$. Так как $C_P(g) \subseteq C_G(g)$ и $g \in T_\chi$, то в силу 2.20 $|C_P(g)| \leq p^\alpha$. Поэтому $|P / P'| \geq |P / M_p| = p^\alpha \geq |C_P(g)|$. С другой стороны, в силу 1.20 $|C_P(g)| \geq |P / P'|$. Следовательно, $|C_P(g)| = |P / P'|$ и $|P / P'| = |P / M_p|$. Поэтому $P' = M_p$.

2.26. **Предложение.** (I) P / P' — элементарная абелева группа порядка p^α ; (II) $P' = \Phi(P)$; (III) если $g \in P \setminus P'$, то $P' = [g, P]$ (что равносильно каждому из условий $g^P = gP'$, $|C_P(g)| = (p^\alpha)$); (IV) все элементы из $P \setminus P'$ имеют один и тот же порядок p^σ ($\sigma \leq \alpha$).

Доказательство. Так как $P' = M_p$, то P / P' — элементарная абелева группа порядка p^α . Отсюда вытекает, что $P' \supseteq \Phi(P)$. С другой стороны, так как P — p -группа, то $\Phi(P) \supseteq P'$. Следовательно, $P' = \Phi(P)$. Если $g \in P \setminus P'$, то (см. доказательство предложения 2.23) $|C_P(g)| = |P / P'|$, откуда в силу 1.21 вытекает, что $P' = [g, P]$. Так как $P \setminus P' = P \setminus M_p \subseteq T_\chi$, то в силу 2.21 все элементы из $P \setminus P'$ имеют один и тот же порядок p^σ ($\sigma \leq \alpha$).

2.27. **Предложение.** Число α либо четно, либо равно 1. Случай $\alpha = 1$ имеет место тогда и только тогда, когда подгруппа P абелева; при выполнении этого условия $P \cong C(p)$ и N_χ — группа Фробениуса с ядром $M (= N_\chi')$ и дополнительным множителем P .

Доказательство. Если подгруппа P абелева, то $P' = \{1\}$. Так как ввиду 2.25 $P' \in \text{Syl}_p(M)$, то M — p' -подгруппа. В силу 2.22 отсюда следует, что N_χ — группа Фробениуса с ядром M . Так как $|N_\chi / M| = p^\alpha$, то P является дополнительным множителем. Поэтому подгруппа P либо циклическа, либо обобщенная группа кватернионов. Так как $P \cong N_\chi / M$ — элементарная абелева группа порядка p^α , то $\alpha = 1$ и $P \cong C(p)$.

Допустим теперь, что подгруппа P неабелева, т. е. $P' \neq \{1\}$. Пусть N — любая нормальная подгруппа группы P , покрываемая нормальной подгруппой P' . Так как P' / N — главный фактор группы P , то $|P' / N| = p$. Рассмотрим группу $\bar{P} = P / N$. Пусть $x \rightarrow \bar{x}$ — естественный гомоморфизм группы P на $\bar{P}$. Из определения подгруппы N следует, что $\bar{P}' = P' / N$ — минимальная нормальная подгруппа группы $\bar{P}$. Следовательно, $P' \subseteq Z(\bar{P})$. С другой стороны, ввиду 2.24, для любого $g \in P \setminus P'$ имеет место $\bar{P}' = [\bar{g}, \bar{P}] = [\bar{g}, \bar{P}]$. Допуская, что $\bar{P}' \neq Z(\bar{P})$,

выберем g так, чтобы имело место $\bar{g} \in Z(\bar{P}) \setminus \bar{P}'$. Тогда, очевидно, $g \in P \setminus P'$ и, следовательно, $\bar{P}' = [\bar{g}, \bar{P}] = \{1\}$. Замечая, что $\bar{P}' = \bar{P}'$, приходим к выводу, что $\bar{P}$ — абелева группа, откуда вытекает, что $N \supseteq P'$ — противоречие. Таким образом, $\bar{P}' = Z(\bar{P})$. Ввиду $\bar{P} / \bar{P}' \cong P / P'$, отсюда следует, что $\bar{P} / Z(\bar{P})$ — элементарная абелева группа порядка p^α . Так как $|Z(\bar{P})| = |\bar{P}'| = |P' / N| = p$, то $\bar{P}$ — экстраспециальная группа, откуда вытекает [3, с 353], что α четно.

2.28. Предложение. Если $\alpha = 1$, то (I) N_χ — группа Фробениуса с ядром $M = N'_\chi$ и дополнительным множителем P порядка $p \neq 2$ (II); $N_G(P)$ — группа Фробениуса с ядром P и дополнительным множителем $L \cong C(p-1)$. При этом $G = M \rtimes N_G(P) = N_\chi \rtimes L^*$.

Доказательство. (I) следует из 2.25 и 2.23. Так как $P \in \text{Syl}_p(N_\chi)$, то в силу замечания Фраттини $G = N_\chi \cdot N_G(P)$. Так как, с другой стороны, $P \in \text{Syl}_p(G)$, то $N_G(P) = P \rtimes L$, где $L \leq G$. Следовательно, $G = N_\chi(P \cdot L) = N_\chi \cdot L$. Поскольку P — дополнительный множитель группы Фробениуса N_χ , то $N_{N_\chi}(P) = P$. Поэтому $L \cap N_\chi \subseteq N_{N_\chi}(P) = P$, откуда $L \cap N_\chi \subseteq P \cap L = \{1\}$. Следовательно, $G = N_\chi \rtimes L$. Вместе с тем, $G = (M \rtimes P) \rtimes L = M \rtimes (P \rtimes L) = M \rtimes N_G(P)$. Поэтому $N_G(P) \cong G / M$, откуда следует ввиду (2.5), что $N_G(P) \cong G$. Так как $\alpha = 1$, то ввиду 2.11 G — 2-транзитивная группа Фробениуса с ядром порядка p и дополнительным множителем H порядка $p-1$. Как легко показать, $H \cong C(p-1)$. Таким образом, $N_G(P) = P \rtimes L$ — группа Фробениуса с ядром $P \cong C(p)$ и дополнительным множителем $L \cong C(p-1)$.

Некоторую информацию о строении подгрупп M и N_χ дает следующее утверждение:

2.29. Предложение. Подгруппы M и N_χ обладают общим нормальным p -дополнением.

Доказательство. Так как в силу 2.23 и 2.24 $M_p = M \cap P = \Phi(P)$, то на основании 1.18 подгруппа M обладает нормальным p -дополнением V : $V \triangleleft M$, V — p' -подгруппа и $M = V \rtimes M_p = V \rtimes P'$. Так как V — характеристическая подгруппа в M , то $V \triangleleft N_\chi$. В силу 2.23 $N_\chi = M \cdot P$, откуда вытекает, что $N_\chi = V \rtimes P$. Поэтому V — нормальное p -дополнение в N_χ .

Совокупность доказанных выше предложений 2.1 — 2.29 составляет содержание сформулированной во введении теоремы.

Список литературы: 1. Burnside W. On an arithmetical theorem connected with roots of unite and its applications to group characteristics. — Proc. Lond. Math. Soc., 1904, 1 (2), p. 112—116. 2. Gallagher P. X. Zeros of characters of finite groups. — Journ. of Algebra, 1966, 4:1, p. 42—45. 3. Huppert B. End-

* Иначе говоря, G — двойная группа Фробениуса с левым фробениусовым множителем N_χ и правым $N_G(P)$, являющимся 2-транзитивной группой Фробениуса порядка $p(p-1)$.

liche Gruppen. I.— Berlin: Springer-Verlag, 1967. 4. Жмудь Э. М. О нулях, групповых характеров.— Усп. мат. наук, 1977, 32, № 6, с. 223. 5. Жмудь Э. М. О конечных группах, обладающих неприводимым комплексным характером с одним классом нулей.— Докл. АН СССР. 1979, 247, № 4, с. 788—791. 6. Жмудь Э. М., Михайлова И. В. Об одном экстремальном классе конечных групп. Харьков. ун-т. Харьков, 1978. Рукопись деп. в ВИНТИ 23 нояб. 1978. № 3578—78 деп.

Поступила в редколлегию 08.06.79.

УДК 512.664.4

Б. В. НОВИКОВ

О-КОГОМОЛОГИИ ВПОЛНЕ О-ПРОСТЫХ ПОЛУГРУПП

1. Результаты этой работы являются обобщением полученного в [1] описания групп когомологий вполне простой полугруппы. Определение 0-когомологий полугрупп и связанных с ними конструкций приведено в [2].

В дальнейшем используются следующие обозначения: $S = S^0(G; I; \Lambda; P)$ — вполне 0-простая полугруппа [3] с базисной группой G и сэндвич-матрицей $P = (P_{\lambda i})$ размера $\Lambda \times I$, e — единица группы G , A — 0-модуль над S , $\bar{S}$ — полугруппа без нуля, соответствующая полугруппе S [2]. Мы будем считать, что $I \cap \Lambda = \{1\}$, $p_{11} = e$ и группа G отождествлена с G_{11} .

Так как полугруппа S категорична в нуле, то $H^n_0(S, A) \cong H^n(\bar{S}, A)$ согласно теореме 3 [2]. Поэтому наша задача сводится к описанию группы $H^n(\bar{S}, A)$. Предварительно докажем несколько лемм.

2. **Лемма.** Пусть T — произвольная полугруппа, G — некоторая ее подгруппа с единицей e . Тогда ZTe — проективный правый G -модуль.

Доказательство. Введем на Te отношение π , положив $se \pi te$ тогда и только тогда, когда $sg = te$ для некоторого $g \in G$. Поскольку G — группа, то π является эквивалентностью. Пусть $\{u_i\}$ — множество представителей классов этой эквивалентности. Тогда $ZTe = \sum_i Z(u_i G)e$. Правые G -модули $Z(u_i G)e$ и ZG , очевидно, изоморфны. Так как G -модуль ZG проективен, то таким же будет и G -модуль ZTe .

3. **Лемма.** Пусть T — произвольный моноид, G — его подгруппа, e — единица группы G . Обозначим через M ядро гомоморфизма $f: ZTe \otimes_G Z \rightarrow Z$ такого, что $t \otimes n \rightarrow n$ ($t \in T$, $n \in Z$). Тогда имеет место точная последовательность $0 \rightarrow H^0(T, C) \rightarrow H^0(G, eC) \rightarrow \text{Hom}_T(M, C) \rightarrow H^1(T, C) \rightarrow \dots \rightarrow H^n(T, C) \rightarrow H^n(G, eC) \rightarrow \text{Ext}_T^n(M, C) \rightarrow H^{n+1}(T, C) \rightarrow \dots$ для любого T -модуля C .

Доказательство. Короткая точная последовательность $0 \rightarrow M \rightarrow ZTe \otimes_G Z \rightarrow Z \rightarrow 0$ порождает длинную точную последовательность $\dots \rightarrow H^n(T, C) \rightarrow \text{Ext}_T^n(ZTe \otimes_G Z, C) \rightarrow \text{Ext}_T^n(M, C) \rightarrow \dots$

Так как ZTe — проективный G -модуль (п. 2), то по лемме 2.1 [1] $\text{Ext}_T^n(ZTe \otimes_G Z, C) \cong H^n(G, eC)$, что и требовалось доказать.

Следствие. Для вполне 0-простой полугруппы S имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow H_0^0(S, A) \rightarrow H^0(G, eA) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{S}^1}(M, A) \rightarrow H_0^1(S, A) \rightarrow \dots \rightarrow H_0^n(S, A) \rightarrow H^n(G, eA) \rightarrow \text{Ext}_{\bar{S}^1}^n(M, A) \rightarrow H_0^{n+1}(S, A) \rightarrow \dots, \quad (1)$$

где $M = \text{Ker}(Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G Z \rightarrow Z)$.

Доказательство следует из предыдущей леммы и теоремы 3 [2].

4. Для описания члена $\text{Ext}_{\bar{S}^1}^n(M, A)$ в последовательности (1) исследуем сначала строение $\bar{S}^1$ -модуля M .

Обозначим через U множество всех элементов из $\bar{S}$ вида $\langle x^1, \dots, x^n, e_{i1} \rangle$ ($n \geq 0, i \in I$). Тогда каждый элемент из $\bar{S}^1 \langle e \rangle$ ($e = e_{i1}$) однозначно представляется в виде $u \langle g_{i1} \rangle$ $u \in U, g \in G$, поскольку

$$\langle x^1, \dots, x^n \rangle \langle e \rangle = \begin{cases} \langle x^1, \dots, x^{n-1}, e_{i1} \rangle \langle (gp_{\lambda 1})_{i1} \rangle, & \text{если } x^n = g_{i\lambda}, p_{\lambda 1} \neq 0, \\ \langle x^1, \dots, x^{n-1}, x^n, e \rangle, & \text{если } x^n = g_{i\lambda}, p_{\lambda 1} = 0. \end{cases}$$

Если элемент $s \in \bar{S}$ представлен в виде $s = u \langle g_{i1} \rangle$, то будем писать $u = \omega(s)$.

Легко видеть, что группа $Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G Z$ изоморфна группе ZU и при этом изоморфизме

$$M \cong Z\{u - \langle e \rangle \mid u \in U\} \subseteq ZU, \quad (2)$$

так как $\sum_{u, g} m_{u, g} u \langle g_{i1} \rangle \otimes n_{u, g} \in M$ тогда и только тогда, когда $\sum_{u, g} m_{u, g} n_{u, g} = 0$ ($m_{u, g}, n_{u, g} \in Z$). На группе ZU индуцируется структура унитарного $\bar{S}^1$ -модуля: если $s \in \bar{S}^1, u \in U$, то положим $s \circ u = \omega(su)$, где через $\circ$ обозначается действие $\bar{S}^1$ на ZU . Таким образом, если $s = \langle s^1, \dots, s^n \rangle \in \bar{S}$, то

$$s \circ u = \begin{cases} \langle s^1, \dots, s^{n-1}, e_{i1} \rangle, & \text{если } u = \langle e_{i1} \rangle, s^n = g_{i\lambda}, p_{\lambda 1} \neq 0, \\ su & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Построим теперь неприводимую систему образующих $\bar{S}^1$ -модуля M и определяющие соотношения этой системы, используя изоморфизм (2). Введем обозначения: $B = \{\langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle \mid i \in I \setminus \{1\}\}$, $E(i) = \{\langle e_{i\lambda} \rangle \mid p_{\lambda 1} \neq 0, p_{\lambda 1} \neq 0\}$.

Лемма. Множество B является системой образующих $\bar{S}^1$ -модуля M . Далее, $\bar{S}^1$ -линейная комбинация элементов из B . $\sum_{i \neq 1} \sum_{s \in \bar{S}^1} n_s^i s (\langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle) (n_s^i \in Z)$ равна нулю тогда и только тогда, когда $s \in \bar{S}^1 E(i)$ для всех $s \in \bar{S}^1$ и $i \in I \setminus \{1\}$ таких, что $n_s^i \neq 0$. В частности, система образующих B неприводима.

Доказательство. Согласно (2) модуль M порождается элементами вида $u - \langle e \rangle$. Пусть $u \in U$, $u = \langle x^1, \dots, x^{n-1}, e_{i1} \rangle$ и $n \geq 2$. Тогда $u - \langle e \rangle = \langle x^1 \rangle \circ (\langle x^2, \dots, x^{n-1}, e_{i1} \rangle - \langle e \rangle) + (\langle x^1 \rangle \circ \langle e \rangle - \langle e \rangle)$. Таким образом, если $|u| \geq 2$, то $u - \langle e \rangle$ выражается через элементы меньшей длины и, следовательно, $\bar{S}$ -модуль M порождается множеством B .

Для доказательства второй части леммы заметим, что $\langle e_{i1} \rangle \circ \langle e_{i1} \rangle = \langle e_{i1} \rangle \circ \langle e \rangle = \langle e \rangle$, если $\langle e_{i1} \rangle \in E(i)$. Поэтому $s \circ (\langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle) = 0$ для всех $s \in \bar{S}^1 E(i)$.

Пусть некоторая $\bar{S}^1$ -линейная комбинация элементов из B , содержащая ненулевые коэффициенты $n_s^i \in Z$, равна нулю:

$$\sum_{i \neq 1} \sum_{s \in \bar{S}} n_s^i \circ (\langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle) + \sum_{i \neq 1} n_1^i (\langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle) = 0. \quad (3)$$

Учитывая предыдущее замечание, можно считать, что в (3) $n_s^i = 0$, если $s \in \bar{S}^1 E(i)$. Если $n_s^i = 0$ для всех $s \in \bar{S}$, $i \in I \setminus 1$, то равенство (3) принимает вид $\sum_{i \neq 1} n_1^i (\langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle) = 0$, откуда

следует $n_1^i = 0$ для всех $i \in I \setminus 1$, что противоречит предположению о коэффициентах линейной комбинации. Пусть $t \in \bar{S}$, — такой элемент, что $n_t^i \neq 0$ для некоторого $i \in I \setminus 1$ и длина $|t| = r$ максимальна. Так как $t \in \bar{S}^1 E(i)$, то либо $|t \circ \langle e_{i1} \rangle| = r + 1$, либо $|t \circ \langle e \rangle| = r + 1$. Пусть, например, $|t \circ \langle e \rangle| = r + 1$. Так как $t \circ \langle e \rangle \neq t \circ \langle e_{i1} \rangle$ при $i \neq 1$, то в $\bar{S}$ должен найтись такой элемент $s \neq t$, что $n_s^i \neq 0$ и $s \circ \langle e_{j1} \rangle = t \circ \langle e \rangle$ для некоторого $j \in I$. Из $|s| \leq r$ и $|s \circ \langle e_{j1} \rangle| = r + 1$ следует $|s| = r$. Пусть $s = \langle s^1, \dots, s^r \rangle$, $t = \langle t^1, \dots, t^r \rangle$. Тогда из $s \circ \langle e_{j1} \rangle = t \circ \langle e \rangle$ и $|t \circ \langle e \rangle| = r + 1$ получаем $\langle s^1, \dots, s^r, e_{j1} \rangle = \langle t^1, \dots, t^r, e \rangle$, т. е. $s = t$ вопреки предположению. Лемма доказана.

5. Введем, как и в [1], символы ε_i ($i \in I \setminus 1$) и рассмотрим свободный $\bar{S}^1$ -модуль $\sum_{i \neq 1} Z \bar{S}^1 \varepsilon_i$, натянутый на них. Соответствие $\varepsilon_i \rightarrow \langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle$ продолжается до эпиморфизма $\sum_{i \neq 1} Z \bar{S}^1 \varepsilon_i \rightarrow M$.

Лемму п. 4 можно теперь переформулировать следующим образом.

Предложение. *Имеет место точная последовательность $0 \rightarrow \sum_{i \neq 1} Z \bar{S}^1 E(i) \varepsilon_i \rightarrow \sum_{i \neq 1} Z \bar{S}^1 \varepsilon_i \rightarrow M \rightarrow 0$ (если $E(i) = \emptyset$ для некоторого i , то полагаем $Z \bar{S}^1 E(i) = 0$).*

Рассматривая соответствующую длинную точную последовательность $\dots \rightarrow \text{Ext}_{\bar{S}^1}^n(M, A) \rightarrow \text{Ext}_{\bar{S}^1}^n(\sum_{i \neq 1} Z \bar{S}^1 \varepsilon_i, A) \rightarrow \text{Ext}_{\bar{S}^1}^n(\sum_{i \neq 1} Z \bar{S}^1 E(i) \varepsilon_i, A) \rightarrow \dots$ и учитывая, что $\bar{S}^1$ -модуль $\sum_{i \neq 1} Z \bar{S}^1 \varepsilon_i$ проективен, получаем

Следствие. Для всех $n \geq 2$ $\text{Ext}_{\bar{S}^1}^n(M, A) \cong \text{Ext}_{\bar{S}^1}^{n-1} \times (\sum_{i \neq 1} Z\bar{S}^1 E(i) \varepsilon_i, A) \cong \prod_{i \neq 1} \text{Ext}_{\bar{S}^1}^{n-1}(Z\bar{S}^1 E(i), A) \varepsilon_i$.

6. Теорема. Длинная точная последовательность (2) распадается на точную последовательность

$$0 \rightarrow H_0^0(S, A) \rightarrow H^0(G, e, A) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{S}^1}(M, A) \rightarrow H_0^1(S, A) \rightarrow H^1(G, e, A) \rightarrow \text{Ext}_{\bar{S}^1}^1(M, A) \rightarrow H_0^2(S, A) \rightarrow H^2(G, e, A) \rightarrow 0 \quad (4)$$

и на расщепляемые короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow \prod_{i \neq 1} \text{Ext}_{\bar{S}^1}^{n-2}(Z\bar{S}^1 E(i), A) \varepsilon_i \rightarrow H_0^n(S, A) \rightarrow H^n(G, e, A) \rightarrow 0 \quad (5)$$

для $n \geq 3$. Более того, если $n \geq 3$, то $H_0^n(S, A) \cong H^n(G, e, A)$.

Доказательство. Пусть $X \rightarrow Z$ — стандартная G -проективная резольвента G -модуля Z [4], $Y \rightarrow M$ — $\bar{S}^1$ -проективная резольвента $\bar{S}^1$ -модуля M , причем можно считать, что $y_0 = \sum_{i \neq 1} Z\bar{S}^1 \varepsilon_i$. Тогда по лемме 2.1 [1] $Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G X \rightarrow Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G Z$ — проективная резольвента $\bar{S}^1$ -модуля $Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G Z$.

Определим гомоморфизм комплексов $\tilde{f}: Y \rightarrow Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G X$, являющийся отображением над гомоморфизмом [4] $f: M \rightarrow Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G Z$, так, чтобы выполнялось равенство $\tilde{f}_n = 0$ при $n \geq 2$ (см. диаграмму)

$$\begin{array}{ccccccc} M & \xleftarrow{\psi} & Y_0 & \xleftarrow{\partial_0} & Y_1 & \xleftarrow{\partial_1} & \dots \\ \downarrow f & & \downarrow \tilde{f}_0 & & \downarrow \tilde{f}_1 & & \\ Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G Z & \xleftarrow{\psi} & Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G X_0 & \xleftarrow{\partial_0} & Z\bar{S}^1 \langle e \rangle \otimes_G X_1 & \xleftarrow{\partial_1} & \dots \end{array}$$

Как и в [1], положим $\tilde{f}_0(\varepsilon_i) = (\langle e_{i1} \rangle - \langle e \rangle) \otimes []$, где $[]$ — образующий элемент модуля X_0 . Легко проверить, что $f_* = \psi \tilde{f}_0$. Далее, пусть $y \in Y_1$ и $\partial_0 y = \sum_{i \neq 1} \sum_{s \in \bar{S}^1} n_s^i s \varepsilon_i$.

Так как $\varphi \partial_0 = 0$, то $\partial_0 Y_1 \subseteq \sum_{i \neq 1} Z\bar{S}^1 E(i) \varepsilon_i$ (предложение п. 5).

$$\text{Поэтому } \partial_0 y = \sum_{i \neq 1} \sum_{s \in \bar{S}^1 E(i)} n_s^i s \varepsilon_i = \sum_{i \neq 1} \sum_{s \in \bar{S}^1 \langle e_{i1} \rangle \in E(i)} n_s^i \langle e_{i1} \rangle s \varepsilon_i.$$

Последнее разложение, однако, неоднозначно, так как при $s \neq t$ возможно равенство $s \langle e_{i1} \rangle = t \langle e_{i1} \rangle$. Элемент $s \in \bar{S}$ опре-

деляется однозначно из произведения $s \in \overline{S} \langle e_{1\lambda} \rangle$, если дополнительно потребовать, чтобы $s \in \overline{S} \langle e \rangle$. Поэтому будем записывать $\partial_0 y$ в виде

$$\partial_0 y = \sum_{i \neq 1} \sum_{\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)} \sum_{s \in \overline{S} \langle e \rangle} n_{s \langle e_{1\lambda} \rangle}^i s \langle e_{1\lambda} \rangle \varepsilon_i. \quad (6)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{f}_0 \partial_0 y &= \sum_{i \neq 1} \sum_{\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)} \sum_{s \in \overline{S} \langle e \rangle} n_{s \langle e_{1\lambda} \rangle}^i (s(\langle p_{\lambda i} \rangle - \langle e \rangle) \otimes [1] - s(\langle p_{\lambda 1} \rangle - \\ &- \langle e \rangle) \otimes [1]) = \delta_0 \sum_{i \neq 1} \sum_{\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)} \sum_{s \in \overline{S} \langle e \rangle} n_{s \langle e_{1\lambda} \rangle}^i s \langle e \rangle \otimes ([p_{\lambda i}] - [p_{\lambda 1}]). \end{aligned}$$

Таким образом, положив

$$\bar{f}_1 y = \sum_{i \neq 1} \sum_{\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)} \sum_{s \in \overline{S} \langle e \rangle} n_{s \langle e_{1\lambda} \rangle}^i s \otimes ([p_{\lambda i}] - [p_{\lambda 1}]),$$

где коэффициенты $n_{s \langle e_{1\lambda} \rangle}^i$ определяется из (6), получаем $\bar{f}_0 \partial_0 = \delta_0 \bar{f}_1$. Кроме того, $\bar{f}_1 \partial_1 = 0$, так как если $z \in \mathcal{Y}_2$ и $y = \partial_1 z$, то $\partial_0 y = 0$ и в (6) все коэффициенты $n_s^i = 0$, следовательно, $\bar{f}_1 \partial_1 z = \bar{f}_1 y = 0$.

Покажем теперь, что отображение $\bar{f}_1$ является $\overline{S}^1$ -гомоморфизмом. Пусть $y \in \mathcal{Y}_1$, $t \in \overline{S}^1$, $\partial_0 y$ определяется по формуле (6) и

$$\partial_0(ty) = \sum_{i \neq 1} \sum_{\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)} \sum_{x \in \overline{S} \langle e \rangle} m_{x \langle e_{1\lambda} \rangle}^i x \langle e_{1\lambda} \rangle \varepsilon_i.$$

Сравнивая коэффициенты в равенстве $\partial_0(ty) = t\partial_0 y$, получаем

$$m_{x \langle e_{1\lambda} \rangle}^i = \sum_{s: ts=x} n_{s \langle e_{1\lambda} \rangle}^i.$$

Отсюда

$$\bar{f}_1(ty) = \sum_{i \neq 1} \sum_{\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)} \sum_{x \in \overline{S} \langle e \rangle} \sum_{s: ts=x} n_{s \langle e_{1\lambda} \rangle}^i x \otimes ([p_{\lambda i}] - [p_{\lambda 1}]) = t\bar{f}_1 y.$$

Таким образом, искомое отображение $\bar{f}$ построено. Применяя теперь лемму 1.1 [1] к точной последовательности

$$0 \rightarrow M \rightarrow Z\overline{S}^1 \langle e \rangle \otimes_{GZ} Z \rightarrow Z \rightarrow 0$$

и отображению f , получаем последовательности (4), (5).

Для доказательства последнего утверждения преобразуем сэндвич-матрицу P следующим образом: умножим строку с номером λ на $p_{\lambda 1}^{-1}$, если $p_{\lambda 1} \neq 0$; в противном случае оставляем строку неизменной. Прделав это со всеми строками, получим матрицу P' , в которой элементы $p'_{\lambda 1}$ равны 0 или 1 для всех $\lambda \in \Lambda$. Подгруппа $S^0(G; I, \Lambda; P')$, как известно [3], изоморфна исход-

ной полугруппе S . Поэтому можно считать, что в матрице P элементы $p_{\lambda 1}$ равны 0 или 1. В этом случае элементы $\langle e_{1\lambda} \rangle$ оказываются идемпотентами при $p_{\lambda 1} = 1$ и $\bar{S}^1$ -модуль $Z\bar{S}^1 E(i)$ разлагается в прямую сумму:

$$Z\bar{S}^1 E(i) = \sum_{\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)} Z\bar{S}^1 \langle e_{1\lambda} \rangle.$$

Все слагаемые этой суммы $\bar{S}^1$ -проективны, так как из $\langle e_{1\lambda} \rangle \in E(i)$ следует, что $\langle e_{1\lambda} \rangle$ — идемпотент. Поэтому модуль $Z\bar{S}^1 E(i)$ проективен и, следовательно, $\text{Ext}_{\bar{S}^1}^n(Z\bar{S}^1 E(i), A) = 0$ при $n \geq 1$. Тогда из (5) следует $H_0^n(S, A) \cong H^n(G, eA)$ при $n \geq 3$, что и требовалось доказать.

7. Из предыдущей теоремы можно по аналогии со следствием 3.5 [1] получить описание групп $H_0^1(S, A)$ и $H_0^2(S, A)$ в случае, когда группа G одноэлементна.

Следствие. Если S — инверсная вполне 0-простая полугруппа, то $H_0^n(S, A) \cong H^n(G, eA)$ для всех $n \geq 2$. Кроме того, имеет место точная последовательность $0 \rightarrow H_0^0(S, A) \rightarrow H^0(G, eA) \rightarrow \text{Hom}_{\bar{S}^1}(M, A) \rightarrow H_0^1(S, A) \rightarrow H^1(G, eA) \rightarrow 0$.

Доказательство. Согласно теореме п. 6 достаточно установить изоморфизм при $n = 2$. Так как для инверсной вполне 0-простой полугруппы $|I| = |\Lambda|$ и сэндвич-матрица является единичной [3], то $E(i) = \emptyset$ при $i \neq 1$. Тогда $M \cong \sum_{i \neq 1} Z\bar{S}^1 \varepsilon_i$ (предложение п. 5) и, следовательно, M — проективный $\bar{S}^1$ -модуль. Поэтому $\text{Ext}_{\bar{S}^1}^1(M, A) = 0$ и из (4) следует, что $H_0^2(S, A) \cong H^2(G, eA)$.

Список литературы: 1. Nico W. R. On the cohomology of finite semigroups. — J. Algebra, 1969, vol. 1, № 4, p. 598—612. 2. Новиков Б. В. О $\bar{O}$ -когомологиях полугрупп. — В кн.: Теор. и прикл. вопросы диф. уравнений и алгебры. Киев: Наук. думка, 1978, с. 185—188. 3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. В 2-х т. Т. 1. — М.: Мир, 1973. — 285 с. 4. Картан А. Эйленберг С. Гомологическая алгебра. — М.: Изд-во иностр. лит., 1960. — 510 с.

Поступила в редколлегию 09.10.78.

УДК 517.919.2

А. П. ПРИХОДЬКО

О СВЯЗИ КОМПАКТНОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ
ДЛЯ СИЛЬНО НЕПРЕРЫВНЫХ ПОЛУГРУПП

В банаховом пространстве X рассмотрим управляемый процесс вида

$$x(t, u, x_0) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $S(t)$ является c_0 -полугруппой, B — линейный ограниченный оператор, $u(\cdot) \in L_p^{\text{loc}}([0, +\infty), U)$. Обозначим через

$$K = \left\{ x : \int_0^t S(\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad u(\tau) \in L_p^{\text{loc}}([0, +\infty), U) \right\}$$

множество достижимости (1) из нуля. Тогда свойство точной управляемости (1) эквивалентно условию $K = X$.

В работе [1] сформулировано следующее утверждение: если $S(t)$ компактная при $t > 0$ полугруппа, то процесс (1) не может быть точно управляемым управлениями из $L_p^{\text{loc}}([0, +\infty), U)$ при $1 \leq p \leq +\infty$ независимо от того, какой оператор B . Ниже приводится пример, который уточняет данное утверждение.

Предположим, что $X = U = l_1$, полугруппа

$$S(t) = \text{diag} \{e^{-it}\}_{i=1}^{\infty}, \quad B = E, \quad u(\cdot) \in L_1^{\text{loc}}([0, +\infty), l_1).$$

Заметим, что $S(t)$ компактная и аналитическая полугруппа при $t > 0$. Пусть

$$K_1 = \left\{ x : x = \int_0^1 s(\tau)u(\tau)d\tau, \quad u(\cdot) \in L_1^{\text{loc}}([0, 1], l_1) \right\}.$$

Докажем, что $K_1 = l_1$. Для каждого $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($x \in l_1$) построим управление $u(x, \tau)$ в виде $\{u_i(x_i, \tau)\}_{i=1}^{\infty}$

$$u_i(x_i, \tau) = \begin{cases} ix_i \left(e^{-\frac{1}{2^i}} - e^{-\frac{1}{2^{i-1}}} \right) : \tau \in \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}} \right]; \\ 0 : \tau \in \left[\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}} \right]. \end{cases}$$

Указанное управление удовлетворяет условию $x(1, u(x, \tau), 0) = x$, причем $u(x, \cdot) \in L_1([0, 1], l_1)$. Таким образом, процесс (1) точно управляем за время $t = 1$, а следовательно, и за свободное время L_1 -управлениями, но не является L_{∞} -управляемым. Следовательно, аналога теоремы 1.2 [1] не существует.

Рассмотренный пример показывает, что для c_0 полугрупп свойство точной управляемости существенно зависит от значения показателя p пространства управлений, поэтому невозможно указать единый критерий точной управляемости, аналогичный конечномерным системам и уравнениям с ограниченным производящим оператором [2].

Список литературы: 1. Triggiani R. A note on the lack of exact controllability for mild solution in Banach space.—SIAM j. Control and Optimization, 1977, 15, № 5, p. 407—411. 2. Triggiani R. On the lack of Exact Controllability for Mild Solutions in Banach Space.—journ. of Math. Anal. and Applic., 1975, 50, № 2, p. 438—446.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 531.33

А. А. ЛУЦЕНКО

К ВОПРОСУ О ЗНАКООПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ЛЯПУНОВА

При исследовании устойчивости относительно части переменных движений нелинейных систем часто используются знакоопределенные функции Ляпунова в виде квадратичных форм [1]. В статье получены необходимые и достаточные условия знакоопределенности квадратичной формы относительно подпространства (из которых вытекают условия знакоопределенности по части переменных).

В пространстве E_n рассмотрим квадратичную форму (Ax, x) с вещественной симметрической $n \times n$ -матрицей A и подпространство $G = \{x: Hx = 0\}$, где H — вещественная $m \times n$ -матрица.

Квадратичную форму (Ax, x) назовем положительно определенной относительно подпространства G , если она неотрицательна во всем E_n и для каждого $x \in G$ будет $(Ax, x) > 0$.

Используя эквивалентность [2] неотрицательности собственных чисел матрицы A , неотрицательности главных миноров матрицы A , а также [3] возможность выбора в E_n ортонормированного базиса, состоящего из собственных векторов матрицы A , можно доказать следующие теоремы.

Теорема 1. (Алгебраический критерий). *Квадратичная форма (Ax, x) положительно определена относительно подпространства $G = \{x: Hx = 0\}$ тогда и только тогда если*

- а) все главные миноры матрицы A неотрицательны;*
- б) $\text{rank}(A, H^*) = \text{rank } A$, где H^* — матрица, полученная транспонированием матрицы H .*

Теорема 2. (Геометрический критерий). *Квадратичная форма (Ax, x) положительно определена относительно подпространства $G = \{x: Hx = 0\}$ тогда и только тогда, если*

- а) все собственные числа матрицы A неотрицательны;*
- б) $\text{Ker } A \subset G$.*

Список литературы: 1. Луценко А. В., Стадникова Л. В. О частичной устойчивости по первому приближению. — Диф. уравнения, 1973, № 8, с. 1530—1533. 2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука. 1967. — 576 с. 3. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.—Л.: Физматгиз, 1963. — 734 с.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 532.51:538.4

А. И. ЖАКИН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ СЛАБОПРОВОДАЮЩЕЙ ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ В ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассматривается плоская задача об устойчивости горизонтальной бесконечной плоской поверхности раздела двух слабопроводящих поляризующихся жидкостей в тангенциальном переменном электрическом поле $\vec{E} = E_0 \cos \Omega t \vec{i}_x$. Устойчивость изучается по отношению к бесконечно малым возмущениям, зависимость от горизонтальной координаты принимается гармонической [1] с волновым числом k .

Выделяются два предельных случая, когда вязкости велики $\lambda^2 \Omega \ll \nu$ ($\lambda = 2\pi/k$ — длина волны возмущения), и вязкость жидкости незначительна (в этом случае считается, что над жидкостью расположен непроводящий газ): $\lambda \Omega^{1/2} \gg \nu^{1/2}$.

В обоих предельных случаях предполагается, что частота Ω внешнего электрического поля достаточно велика, так что соответствующие безразмерные параметры τ , T , U значительно меньше единицы, однако диэлектрическими потерями при этом можно пренебречь [2].

Тогда для сильно вязкой жидкости условие устойчивости имеет вид

$$T - \tau - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} U < 0, \quad \tau \left(T - \frac{\pi - 1}{4\pi} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} U \right) - \\ - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^4}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} U^2 + O(\mu^3) < 0,$$

где

$$T = \frac{(\rho_1 - \rho_2)g - \alpha k^2}{2k(\eta_1 + \eta_2)\Omega}, \quad \tau = \frac{4\pi(\sigma_1 + \sigma_2)}{\Omega(\epsilon_1 + \epsilon_2)}, \quad U = \frac{E_0^2}{8\pi(\eta_1 + \eta_2)\Omega},$$

$O(\mu^3)$ обозначает члены третьего порядка малости, индексы 1, 2 относятся к величинам, характеризующим соответственно верхнюю и нижнюю жидкости; ρ — плотность, η — динамическая вязкость, ϵ — диэлектрическая проницаемость; σ — проводимость, α — коэффициент поверхностного натяжения, g — объемная плотность силы тяжести, направленной нормально к поверхности.

Для слабовязкой жидкости условие устойчивости при $\tau \sim T \sim U \ll 1$ выражается в виде

$$\tau \left(\pi^2 T - \left(\frac{(1 + \pi^2)(\varepsilon - 1)}{2(1 + \varepsilon)} - 1 + \varepsilon \right) U \right) + O(\mu^3) < 0,$$

а при $\tau \ll T \sim U \ll 1$ имеет вид

$$T - \frac{1}{2} \frac{(1 - \varepsilon)^2}{1 + \varepsilon} U + O(\mu^2) < 0.$$

Здесь

$$T = - \frac{(\rho g + a k^2) k}{\rho \Omega^2}, \quad \tau = \frac{4\pi\tau}{(1 + \varepsilon) \Omega}, \quad U = \frac{k^2 E_0^2}{4\pi\rho\Omega^2}.$$

Нетрудно видеть, что в обоих случаях при $\tau \ll T \sim U \ll 1$ (малые проводимости или достаточно сильные поля) условия устойчивости совпадают по виду с условием устойчивости идеального диэлектрика в постоянном поле [3].

Список литературы: 1. Melcher D., Schwarz W. Interfacial relaxation ovestability in a tangential electric field.—Phys. Fluids, 1968, 11, № 12, p. 9—14. 2. Сканани Г. И. Физика диэлектриков (область слабых полей).—Л.: Гостехиздат 1949.—500 с. 3. Мелчер Дж. Электрогидродинамика.—Магнитная гидродинамика, 1974, № 2, с. 3—30.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 538.21:538.4

А. Б. ИСЕРГ

ДИЭЛЕКТРОФОРЕТИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЯ

Рассматривается движение пузыря в безграничной невязкой и несжимаемой жидкости под действием электрического поля, создаваемого системой точечных зарядов, помещенных в жидкость на конечном расстоянии от пузыря, при отсутствии массовых сил. Задача рассматривается в ЭГД-приближении [1], и в предположении, что объем пузыря и температура T системы в процессе движения не меняются, плотность газа в пузыре ρ_1 пренебрежимо мала по сравнению с плотностью жидкости ρ , в начальный момент пузырь покоится и имеет сферическую форму радиуса L_0 , газ и жидкость являются идеальными диэлектриками с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 = 1 + k(T) \rho_1$ и $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$ соответственно.

Согласно [2], начавшееся движение жидкости будет потенциально, причем, выписывая уравнение Коши — Лагранжа и исключая из него давление жидкости при помощи условия для скачка давлений [1] на границе пузыря s , получаем, что характеристики движения не зависят от конкретного вида $\varepsilon(\rho, T)$. Если $E_0^2 L / \sigma \ll 1$, где E_0 — характерная величина электрического поля в жидкости

вблизи пузыря, σ — коэффициент поверхностного натяжения на s , то движение пузыря в нулевом приближении является движением сферы. Если при этом движение пузыря прямолинейно, то при условиях $\varepsilon_1 - 1 \ll 1$, $\varepsilon - 1 \gg 1$, выполняющихся для большинства диэлектриков, оно описывается следующим уравнением:

$$\frac{2\pi}{3} \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{(\varepsilon - 1)}{2(\varepsilon + 1)} \varepsilon \int_0^1 \int_0^\pi R^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}} \frac{\partial}{\partial R} [R^2 (\nabla \psi_e)^2] \cos \theta \sin \theta d\theta dR = 0.$$

Здесь z — безразмерная координата центра пузыря, R и θ — сферические координаты с началом в центре пузыря, ψ_e — потенциал электрического поля в жидкости при отсутствии пузыря. Полученное уравнение с начальными условиями $z|_{t=0} = z_0$ — задано, $dz/dt|_{t=0} = 0$ использовалось для нахождения траектории и скорости пузыря при движении его в поле точечного заряда и поле заряженного кольца.

Список литературы: 1. Тарапов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. — Магнитная гидродинамика, 1972, 1, с. 3—11. 2. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. — М.: Наука, 1973. — 492 с.

Поступила в редколлегию 14.01.79

УДК 517.548.5+517.983.248

Б. С. ЭЛЬКИН

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ЗАДАЧИ ПРОХОЖДЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДАХ

Некоторые характерные свойства задачи прохождения электромагнитных волн в нерегулярных волноводах могут быть прослежены на довольно простой модели. Регулярным частям волновода соответствует распадающаяся система обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\dot{\varphi}_m = -\frac{\lambda^2 + \omega_m^2}{\lambda} \varphi_m, \quad \dot{\psi}_m = -\lambda \varphi_m \quad (m = 1, 2);$$

$0 < \omega_1 < \omega_2$; $\lambda = i\omega$, ω — частота.

В качестве передаточной матрицы S нерегулярного участка может быть выбрана целая матриц-функция четвертого порядка, удовлетворяющая J -свойствам с индефинитными метриками

$$J_k = \begin{pmatrix} j_k & 0 \\ 0 & j_k \end{pmatrix} (k = 1, 2), \quad j_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\omega_1 < \omega < \omega_2$. Тогда для матрицы S_R , являющейся аналогом передаточной матрицы задачи прохождения с регулярными частями, простирающимися неограниченно в обе стороны от нерегулярности, справедлива

Теорема. S_R является матриц-функцией второго порядка мероморфной в комплексной плоскости с разрезами по мнимой оси $]-i\infty, -i\omega_2[\cup]i\omega_2, +i\infty[$, удовлетворяет J -свойствам с индефинитными метриками j_1, j_2 и выражается через двумерные блоки матрицы S следующим образом:

$$S_R = S_{11} - S_{12}(K^- + K^+ S_{22} K^+)^{-1} K^+ S_{21},$$

где

$$K^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm \alpha \\ \pm \alpha^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\lambda^2 + \omega_2^2}}{\lambda}.$$

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 532.1

Ю. В. ИСИЧЕНКО, И. Ю. ЧУДИНОВИЧ, канд. физ.-мат. наук,
И. Д. ЧУЕШОВ, канд. физ.-мат. наук

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Исследовалось напряженное состояние в окрестности трещины, упирающейся одним концом в границу раздела двух упругих сред. Трещина моделируется непрерывно распределенными точечными дислокациями с неизвестным вектором Бюргерса. С помощью методов теории функций комплексной переменной его нахождение удается свести к решению сингулярного интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^l \frac{\varphi(y) dy}{y-x} = \frac{\alpha+1}{2\mu} \left\{ 4R + i \int_0^l \left[\frac{d}{y+x} + \frac{\beta y}{(y+x)^2} + \frac{\gamma y^2}{(y+x)^3} \right] \varphi(y) dy \right\},$$

где интеграл, стоящий в левой части уравнения, понимается в смысле главного значения, $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \kappa, R$ — параметры, характеризующие упругие среды, $\varphi(x)$ — искомая функция.

С помощью стандартных методов переходим к фредгольмовскому уравнению 2-го рода с ядром, содержащим особенность. Для выделения особенности из решения представим $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = -i[x(x+l)]^{-\frac{1}{2}} x^{-\lambda} u(x),$$

где новая искомая функция $u(x)$ является гельдеровой. Нахождение характеристического показателя λ приводит к уравнению

$$\sin \lambda \pi = \pi \left[\frac{\gamma}{2} \lambda^2 + (\beta + \gamma) \lambda + \left(\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{3\gamma}{8} \right) \right].$$

Интегральное уравнение для $u(x)$ решаем стандартными методами. Проведены расчеты для различных упругих сред.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ВОЛНОВОДЕ,
ПОДВЕРЖЕННОМ УПРУГИМ КОЛЕБАНИЯМ

Изучаются параметры электромагнитной волны при ее распространении в цилиндрическом диэлектрическом волноводе, подверженном действию упругих осесимметричных колебаний, при условии, что поляризационные свойства среды волновода мало зависят от деформаций. Тензор диэлектрической проницаемости представляем в виде

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \delta_{ik} + \epsilon_{ik}(r) e^{i(\theta - \gamma z + \nu t)} + \epsilon_{ik}^*(r) e^{-i(\theta - \gamma z + \nu t)},$$

где $|\epsilon_{ik}| \ll \epsilon_0$. Для вектора $\vec{E}$ используем представление

$$\vec{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\vec{E}_n^0(r) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \vec{E}^{nm}(r) e^{i(m\theta - \gamma z + \nu t)} \right] e^{i[\nu\theta - (p_n^0 + p_n')z + \omega t]},$$

где величины с индексом «0» соответствуют невозмущенному случаю, p_n' , $\vec{E}^{nm}$ — малые добавки, возникающие за счет возмущения тензора диэлектрической проницаемости. Аналогично представляется вектор $\vec{H}$. Значения общих членов рядов возмущений находятся при решении уравнений Максвелла с соответствующими граничными условиями.

Электромагнитные волны, распространяющиеся в волноводе, имеют комбинированные частоты, представляющие суперпозиции частот исходной электромагнитной волны и частот, кратных частоте упругих колебаний волновода. В первом приближении по величинам порядка упругооптических постоянных электромагнитные волны распространяются без затухания и искажений. Значения углов поворота эллипса поляризации электромагнитной волны определяются ее типом и видом колебаний волновода.

Поступила в редколлегию 14.0179

УДК 517.984.4:517.937

В. О. МИЩЕНКО

СПЕКТРАЛЬНАЯ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИЯ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКОГО
АБСТРАКТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Рассматривается абстрактная эллиптическая задача $|0 < x < \infty|$:

$$-u'' + Au + c(x)u = \lambda u, \quad u'(0) = Bu(0), \quad (1)$$

где $A = A^* \gg \gamma > 0$ — неограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H ,

$$c(x) = c^*(x) \in B(H) \text{ и } B = B^* \in B(H),$$

при $n = 0$, 2 оператор-функции

$$(x, y) \mapsto A^n \exp(x \sqrt{A}) c(y) A^{-n} \exp(-x \sqrt{A})$$

$$\text{и } x \mapsto A^n \exp(x \sqrt{A}) B A^{-n} \exp(-x \sqrt{A})$$

сильно непрерывны при $x, y \geq 0$.

Теорема 1. Для задачи (1) существует неубывающая спектральная функция $\rho(\lambda) \in B(H) (\lambda \in \mathbf{R})$, порождающая равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty (f(x), g(x))_H = \int_{-\infty}^\infty (\Phi_f, d\rho \Phi_g), \quad (2)$$

где $f, g \in L^2(0, \infty; H)$, а Φ_f — преобразование f по обобщенным собственным функциям $\omega(x, \lambda)$ данной краевой задачи:

$$\Phi_f(\lambda) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \int \omega^*(x, \lambda) E_\mu(A) E_\mu(x) f(x) dx \quad (\mu \rightarrow \infty),$$

$E_\mu(t)$ — характеристическая функция интервала $(-\infty, \mu]$.

Функция $\omega(x, \lambda) h = u(x)$ определяется как обобщенное решение задачи (1) при $u(0) = h$. При $h = E_\mu(A) g$ ($g \in H$) оно существует в обычном смысле.

Формула (2) основана на обобщенном равенстве Парсеваля, порождаемом обобщенной спектральной матрицей R задачи (1). R отображает пространство Z целых четных функций экспоненциального типа, принадлежащих $L^2(\mathbf{R})$, в пространство неограниченных в H операторов. Принято, что $f_n \rightarrow f$ в Z , если экспоненциальные типы f_n ограничены в совокупности, а $\|f - f_n\|_{L'} \rightarrow 0$.

Теорема 2. $Z_0 = R^{-1}(B(H))$ плотно в Z , но $Z_0 \neq Z$.

Если в (1) $A \in B(H)$, то, как известно, $Z_0 = Z$.

Теоремы 1, 2 развивают в некоторых направлениях результаты работ В. А. Марченко и Ф. С. Рефе-Бекетова (1958), В. А. Козела, Д. Ш. Лундиной, В. А. Марченко (1976) и автора (1977).

Поступила в редколлегию 14.01.79

УДК 517.944

А. А. МАКАРОВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = A(x) * u(x, t) \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$\int_0^\infty dM(t) B(x, t) * u(x, t) = \varphi(x), \quad (2)$$

где $A(x)$ и $B(x, t)$ — матрицы, элементы которых обобщенные функции такие, что их преобразования Фурье (в обобщенном смысле) являются целыми функциями, удовлетворяющими оценкам:

$$\|\tilde{A}(s)\| < C_p (1 + |s|)^p \exp \left\{ \exp \left(\frac{1}{\alpha} + \rho \right) |\operatorname{Im} s| \right\} \quad (\forall \rho > 0),$$

$$\|\tilde{B}(s, t)\| < C_p (1 + |s|)^p \exp \left\{ -\beta t^p + \exp \left(\frac{1}{\alpha} + \rho \right) |\operatorname{Im} s| \right\} \quad (\forall \rho > 0),$$

а $M(t)$ — матрица ограниченной вариации. Важную роль играет функция $\Delta(s) = \det \int_0^\infty dM(t) \tilde{B}(s, t) \exp t \tilde{A}(s)$, называемая определителем задачи (1) — (2). Приведем достаточные условия корректной разрешимости данной задачи.

Теорема. Пусть выполнены следующие условия: а) $\max_i \operatorname{Re} \lambda_i(s) < C_p \exp \left(\frac{1}{\alpha} + \rho \right) |\operatorname{Im} s|$ ($\forall \rho > 0$), ($\lambda_i(s)$ — собственные значения матрицы $\tilde{A}(s)$); б) $|\Delta(s)| > C_p (1 + |s|)^{-p} \exp \left\{ -\exp \left(\frac{p'}{\alpha} + \rho \right) |\operatorname{Im} s| \right\}$ ($\forall \rho > 0$), где $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный по Юнгу порядок ($p > 1$).

Тогда для любой достаточно гладкой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей оценкам:

$$\|\varphi^{(k)}(x)\| < C \exp \alpha_1 |x| \ln(1 + |x|) \quad (|k| \leq s_1),$$

существует единственное решение задачи (1) — (2), удовлетворяющее неравенствам: $\|u^{(k)}(x, t)\| < C \exp \{(\beta - \varepsilon) t^p + \alpha_2 |x| \ln(1 + |x|)\}$ ($|k| \leq s_2$) при любых $\varepsilon > 0$, $\alpha_2 < \frac{\alpha}{p}$ и некотором $\alpha_1 < \alpha_2$.

Поступила в редколлегию 14.01.79

УДК 517.9

Т. В. МИСЮРА

О СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ДИРАКА

Рассмотрим оператор Дирака вида

$$\vec{D}y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} p(x) & r(x) \\ r(x) & -p(x) \end{pmatrix} \vec{y}(x) \quad (x \in [0, \pi])$$

с вещественными периодическими локально суммируемыми в квадрате функциями $p(x) \equiv p(x + \pi)$, $r(x) \equiv r(x + \pi)$.

Следующие две теоремы дают полную характеристику спектров $\{\mu_k^\pm\}$ периодической и антипериодической краевых задач и собственных чисел $\{\lambda_k\}$ краевой задачи $y_1(0) = y_1(\pi) = 0$, отвечающих оператору D описанного вида.

Теорема 1. Множеству операторов Дирака указанного вида взаимнооднозначно отвечает множество последовательностей $\{\theta_k\}_{k=-\infty}^\infty$ комплексных чисел θ_k , удовлетворяющих условию $\sum |\theta_k|^2 < \infty$.

$< \infty$. При этом собственные числа $\{\mu_k^{\pm}\}$ и $\{\lambda_k\}$, отвечающие оператору D , выражаются через отвечающую этому оператору последовательность $\{\theta_k\}$ по формулам $\mu_k^{\pm} = z(k\pi \pm 0)$, $\lambda_k = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} z(k\pi + i \operatorname{Im} \theta_k + \epsilon \operatorname{Re} \theta_k)$, где $z(\theta)$ — аналитическое продолжение функции, обратной $\theta(z)$, $\theta(z)$ — функция, конформно отображающая верхнюю полуплоскость на область $\{\theta : \operatorname{Im} \theta > 0\} \setminus \bigcup_k \{\theta : \operatorname{Re} \theta = k\pi, 0 \leq \operatorname{Im} \theta \leq |\theta_k|\}$, нормированная условием $\lim_{y \rightarrow \infty} [\theta(iy) - i\pi y] = 0$.

Теорема 2. Для того чтобы функции $p(x)$ и $r(x)$ имели $n = 0, 1, 2 \dots$ локально суммируемых в квадрате производных, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\sum (k^n |\theta_k|)^2 < \infty.$$

В заключение отметим, что восстановление оператора D по последовательности $\{\theta_k\}$ проводится с помощью обратной задачи теории рассеяния.

Поступила в редколлегию 14.01.79

УДК 513.88

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

О ФОРМУЛЕ ГЕЛЬФАНДА В НЕАРХИМЕДОВОМ АНАЛИЗЕ

Пусть A — линейный оператор в ультраметрическом банаховом пространстве [1] над алгебраически замкнутым полем, $\sigma(A)$ — его спектр. Положим $|\sigma(A)| = \sup \{0, |\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$, $\rho(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}$.

Так же как и в классическом случае, доказывается неравенство $|\sigma(A)| \leq \rho(A)$. В неархимедовой ситуации, однако, равенство не всегда имеет место. Это следует, например, из существования операторов с пустым спектром [1] (см. также [2]). Пусть G — множество операторов, для которых формула Гельфанда $|\sigma(A)| = \rho(A)$ верна, N — его дополнение.

Теорема 1. Множества G и N открыты и замкнуты.

Теорема 2. Если существует такой полином P , что $P(A) = 0$, то $A \in G$. Оператор называется вполне непрерывным, если он является пределом в равномерной топологии операторов с конечными образами [1].

Теорема 3. Если A — вполне непрерывный оператор, то $A \in G$, $\alpha I + A \in G$.

Теорема 4. Любое из множеств $G + G$, $G + N$, $N + N$, GG , GN , NG , NN имеет непустое пересечение с каждым из множеств G , N .

Список литературы: 1. Van Rooij A. Non-archimedean functional analysis.— Marcel Dekker, Inc., New York, 1978. 2. Escassut A. Algebres de Banach ul tramtriques et algebres de Krasner-Tate.— Asterisque, 1973, № 10, p. 3—11.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОГОМОЛОГИЙ НЕКОТОРЫХ ПОЛУГРУПП

Пусть S — полугруппа с нулем. В [1] введено определение группы 0-когомологий $H_0^n(S, A)$ полугруппы S (A — 0-модуль над S). Там же сформулирована теорема о том, что $H_0^n(S, A) \cong \cong H^n(\bar{S}, A)$ для некоторой полугруппы $\bar{S}$ без нуля, если S — категоричная в нуле полугруппа [2]. Этот изоморфизм дает возможность вычислить когомологии полугруппы T , если $T \cong \bar{S}$ для категоричной в нуле полугруппы S . Ниже приведены некоторые новые результаты. Через $[a_1, \dots, a_n | P_1 = Q_1, \dots, P_r = Q_r]$ обозначим полугруппу с образующими $a_1, \dots, a_n$ и определяющими соотношениями $P_i = Q_i, 1 \leq i \leq r$. Пусть A — модуль над полугруппой T .

Предложение 1. Пусть $T = [a, b | aba = a, bab = b]$. Тогда $H^n(T, A) = 0$ при $n \geq 2$.

Предложение 2. Пусть $T = [a, b | ab = b, a^p = a^q]$. Тогда $H^n(T, A) = 0$ при $n \geq 2$ и $H^1(T, A) \cong A / \{m \in A | am = 2m\}$.

Для полугруппы, антиизоморфной полугруппе из предложения 2 когомологии устроены сложнее.

Предложение 3. Пусть $T = [a, b | ba = b, a^p = a^q]$, A_1 — аддитивная группа модуля A , рассматриваемая как тривиальный T -модуль. Тогда имеет место точная последовательность

$$0 \rightarrow H^0(T, A) \rightarrow \dots \rightarrow H^n(T, A) \rightarrow H^n([a], A) \rightarrow H^n([a], A_1) \rightarrow \rightarrow H^{n+1}(T, A) \rightarrow \dots$$

В частности, если A — тривиальный модуль, то $H^n(T, A) = 0$, при $n \geq 1$. Если A_1 — полная группа без кручения, то $H^n(T, A) \cong \cong H^n([a], A)$ при $n \geq 1$.

Список литературы: 1. Новиков Б. В. О когомологиях полугрупп. — В кн.: II Всесоюз. симпозиум по теории полугрупп: Тез. сообщ. Свердловск, 1978. — 112 с. 2. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. — М.: Мир, 1972. — 422 с.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 517.9

И. Г. КУДИНЦЕВА

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В БЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЯХ ТИПА ЦИЛИНДРА

Рассматривается следующая краевая задача:

$$\Delta u(x, t) = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, t) |_{||x||=r_0} = u_0(x) \quad (2)$$

в области $t \in R^2$, $\|t\| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2} \leq r_0$, $x \in R^n$, где $\Delta_t = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial t_2^2}$,

$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — полином от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ с постоянными (комплексными) коэффициентами.

Пусть $\gamma_{\nu k}$ — k -й корень функции Бесселя $I_\nu(x)$ ($\nu, k = 0, 1, \dots$) и $Z = \{s \in C^n : P(-is) = -\gamma_{\nu k r_0}^{-2}\}$. Назовем типом задачи (1)–(2) число $a = \inf_{s \in Z} \|\operatorname{Im} s\|$. Для функции $g(x) > 0$ при $x \in R^n$ обозначим M_g класс функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству ($C_f > 0$) $|f(x)| \leq C_f g(x)$.

Теорема 1. Пусть тип краевой задачи (1)–(2) $a > 0$, тогда эта краевая задача корректно разрешима в следующих классах:

$$M_1 = M_{g_1}, \quad g_1(x) = \exp\{(A, x)\}, \quad A \in R^n, \quad \|A\| < a,$$

$$M_2 = M_{g_2}, \quad g_2(x) = \exp\{(B, x^2)\}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad B \in R^n,$$

$$M_3 = M_{g_3}, \quad g_3(x) = \prod_{i=1}^n (1 + |x_i|)^{\mu_i}, \quad \mu_i \in R^1.$$

Теорема 2. Пусть тип краевой задачи (1)–(2) $a = 0$, но $Z \cap R^n = \emptyset$, тогда для каждого $\alpha \in (0, 1)$ и $B \in R^n$ класс M_2 является классом единственности решений и для всякого $\mu \in R^n$ M_3 является классом корректной разрешимости этой краевой задачи.

Для некоторых случаев расположения множества Z в C_n (например для $n = 1$ и $Z \cap \{\operatorname{Im} s > d\} = \emptyset$) получены более широкие, чем указанные в теоремах 1 и 2 классы единственности решений задачи (1)–(2).

При некоторых дополнительных условиях на полином $P(s)$ доказана силы о корректная разрешимость задачи (1)–(2) в классах M_1 , M_2 и M_3 .

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 517.535.4+517.91

С. С. БОЙКО

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ БЫСТРОРАСТУЩИМИ АЛГЕБРОИДНЫМИ РЕШЕНИЯМИ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЕННОСТЕЙ

Теорема. Пусть $R_i(z, w, w', \dots, w^{(p)}) = \frac{P_i(z, w, w', \dots, w^{(p)})}{Q_i(z, w, w', \dots, w^{(p)})}$ ($i = 1, 2$) — рациональные по $w, w', \dots, w^{(p)}$ функции с мероморфными в C функциями в качестве коэффициентов, где P_i и Q_i — полиномы по $w, w', \dots, w^{(p)}$ степеней n_i и m_i соответственно.

Предположим, что

$$P_2(z, w, w', \dots, w^{(p)}) = w^{n_2} + P_3(z, w, w', \dots, w^{(p)}),$$

$$Q_2(z, w, w', \dots, w^{(p)}) = w^{m_2} + Q_3(z, w, w', \dots, w^{(p)}),$$

где P_3 и Q_3 — полиномы со степенями, меньшими соответственно, чем n_2 и m_2 .

Тогда, если дифференциальное уравнение $R_1(z, w, w', \dots, w^{(p)}) = R_2(z, w, w', \dots, w^{(p)})$ обладает алгеброидным в C решением $w(z)$ таким, что $N(r, w) = S(r, w)$, $N^*(r, w) = S(r, w)$, $1(r, a(z)) = S(r, w)$ для всех коэффициентов $a(z)$ в R_1 и R_2 , где $S(r, w)$ означает величину, являющуюся $O(T(r, w))$ при $r \rightarrow \infty$, возможно, вне некоторого множества конечной линейной меры, то $\max(n_1, m_1) \geq |n_2 - m_2|$. При этом $N(r, w)$ и $N^*(r, w)$ — считающие функции соответственно полюсов и точек ветвления, а $T(r, w)$ — характеристика алгеброидной функции.

Данный результат является усилением и обобщением аналогичного результата Ян-Чжун-Чжуня для мероморфных решений.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 519.4

Н. И. НЕССОНОВ

О СТРУКТУРЕ ФАКТОРОВ ТИПА III_λ ($0 < \lambda < 1$)

Пусть M — фактор типа III_λ ($0 < \lambda < 1$) с сепарабельным преддвойственным пространством M_* , σ_t — группа модулярных автоморфизмов M , $\overline{\text{Int}} M$ — замыкание группы внутренних автоморфизмов в топологии, определяемой системой окрестностей $U_{\varphi_\varepsilon} = \{\theta \in \text{Aut } M : \|\varphi \cdot \theta - \varphi\| < \varepsilon (\varepsilon > 0, \varphi \in M_*)\}$.

Имеет место следующая

Теорема. Если M — фактор типа III_λ ($0 < \lambda < 1$), λ^n ($n \neq 0$) принадлежит множеству асимптотических отношений $M(A(M))$ и σ_t ($t \in R$) $\in \overline{\text{Int}} M$, то $M = R_{\lambda n} \otimes M_0$, где $R_{\lambda n}$ — фактор Пауэрса типа $III_{\lambda n}$, M_0 — фактор типа III_0 .

Справедливо обобщение этой теоремы на факторы типа III_1 и можно построить примеры факторов типа III_λ ($0 < \lambda < 1$), показывающие, что из принадлежности σ_t ($t \in R$) к $\overline{\text{Int}} M$, вообще говоря, не следует нетривиальность $A(M)$.

Поступила в редколлегию 14.01.79.

УДК 519.21

И. П. КАМЫНИН

О РОСТЕ ФУНКЦИЙ, ХРЕБТОВЫХ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

Определение. С-показателем сходимости последовательности $\{a_n = |a_n| \exp(itx_n)\}$ будем называть число $\rho_c = \inf_{H>0} \rho_1(H)$, где $\rho_1(H) = \inf \left\{ \lambda : \sum_{|a_n|>H} |a_n|^{-\lambda} |\sin \alpha_n| < \infty \right\}$.

Теорема 1. Пусть $\varphi(z)$ — хребтовая в полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ функция конечного порядка ρ и пусть C — показатель сходимости последовательности ее нулей равен ρ_C . Если $\rho_C < \rho$, то $\rho \leq 3$. Оценка $\rho \leq 3$ — точная.

Как известно [1, с. 47], класс характеристических функций вероятностных распределений (х. ф.), голоморфных в полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, является собственным подклассом класса функций, хребтовых в полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$, поэтому возникает вопрос: точна ли оценка $\rho \leq 3$ в классе х. ф.? Как показывает пример х. ф. $\varphi(z) = (1 - iz)^{-1} \exp(iz^3 - 3z^2)$, ответ на этот вопрос утвердителен.

Теорема 2. Пусть $\varphi(z)$ — целая хребтовая функция (ц. хр. ф.) конечного порядка ρ и пусть C — показатель сходимости последовательности ее нулей равен ρ_C . Если $\rho_C < \rho$, то $\rho \leq 2$.

Эта теорема содержит известную теорему Марцинкевича [1, с. 59], а также результат работы А. А. Гольдберга, И. В. Островского [2], гласящий, что ц. хр. ф. конечного порядка с действительными нулями имеет порядок ≤ 2 .

Теорема 3. Пусть $\varphi(z)$ — хребтовая в полуплоскости $\text{Im } z \geq 0$ функция конечного порядка ρ и пусть нули $\varphi(z)$, лежащие в углу $\{z : |\arg z - \pi/2| \leq \alpha\}$ (обозначим их $\{a_n = |a_n| \exp(i\alpha_n)\}$), удовлетворяют условию

$$\inf \left\{ \lambda : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-\lambda} \sin[(\alpha_n + \alpha - \pi/2)\pi/(2\alpha)] < \infty \right\} < \rho.$$

Тогда справедлива оценка $\rho \leq K\alpha^{-2}$, где K — абсолютная постоянная. Показатель 2 в оценке $\rho \leq K\alpha^{-2}$ нельзя заменить числом, меньшим 1.

Список литературы: 1. Линник Ю. В., Островский И. В. Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972. — 480 с. 2. Гольдберг А. А., Островский И. В. О росте целых хребтовых функций с действительными нулями. — Тр. ФТИНТ. Мат. физика, функц. анализ, 1974, вып. 5, с. 3—10.

Поступила в редколлегию 14.01.79

УДК 517.944

Ю. В. КИРИЧЕНКО

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОМ БРУСЕ

Исследованию корректной разрешимости различных краевых задач в бесконечных цилиндрических областях для систем линейных уравнений с частными производными посвящены работы [1, 2] и многие другие. В настоящей статье исследуется вопрос о корректной разрешимости следующей краевой задачи в бесконечном бросе $R^m[0, Y_1][0, Y_2]$:

$$\frac{\partial^2 u(x, y_1, y_2)}{\partial y_1 \partial y_2} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, y_1, y_2) + f(x, y_1, y_2); \quad (1)$$

$$u(x, 0, y_2) = u(x, Y_1, y_2); u(x, y_1, 0) = 0; \quad (2)$$

$u(x, y_1, y_2); f(x, y_1, y_2)$ — вектор-функции со значениями из C^n ;
 $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица, элементами которой служат полиномы от $\frac{\partial}{\partial x_1} \dots$

$\frac{\partial}{\partial x_m}$ с комплексными коэффициентами. Единственность решения задачи (1) — (2) исследована нами в работе [3]. Для доказательства разрешимости задачи (1) — (2) прежде всего заметим, что из равенств (1) — (2) следует, что $f(x, y_1, y_2)$ должна удовлетворять условию

$$\int_0^{Y_1} f(x, y_1, 0) dy_1 = 0; \quad x \in R^m. \quad (3)$$

На основании результатов работы [3] может быть установлена следующая

Лемма 1. Если $f(x, y_1, y_2)$ финитна по « x », то решение $u(x, y_1, y_2)$ задачи (1) — (3) имеет преобразование Фурье $\tilde{u}(s, y_1, y_2)$ и при любом s , при котором $\Delta(s) \equiv \det P(is) \neq 0$, функция $\tilde{u}(s, y_1, y_2)$ представима в виде

$$\tilde{u}(s, y_1, y_2) = Q(s) P^{-1}(is) \tilde{f}(s, y_1, y_2). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{f}(s, y_1, y_2)$ — преобразование Фурье функции $f(x, y_1, y_2)$, $Q(s)$ — при любом $s \in C^m$ — интегральный оператор по переменным y_1, y_2 .

Доказательство. Представление (4) вытекает из следующих равенств (см. [3]):

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s, y_1, y_2) = & \varphi(s, y_2) + \int_0^{Y_1} \int_0^{Y_2} I_0(2i \sqrt{(y_1 - \eta_1)(y_2 - \eta_2)} P(is)) \times \\ & \times [P(is) \varphi(s, \eta_2) + f(s, \eta_1, \eta_2)] d\eta_1 d\eta_2, \end{aligned}$$

где $I_0(z)$ — Бесселева функция нулевого порядка, а $\varphi(s, y_2)$ является решением системы уравнений Вольтерра II рода:

$$\begin{aligned} \varphi(s, y_2) = & -\frac{P^{-1}(is)}{Y_1} \int_0^{Y_1} \int_0^{Y_2} \frac{\partial}{\partial y_2} I_0(2i \sqrt{(Y_1 - \eta_1)(Y_2 - \eta_2)} P(is)) \times \\ & \times [P(is) \varphi(s, \eta_2) + \tilde{f}(s, \eta_1, \eta_2)] d\eta_1 d\eta_2 - \frac{P^{-1}(is)}{Y_1} \int_0^{Y_1} f(y_2, \eta_1) d\eta_1. \end{aligned}$$

Кроме того, справедлива

Лемма 2. Ядро оператора $Q(s)$ (см. (4)) является целой функцией параметра « s », а $Q(s)$ в $C_{[0, Y_1][0, Y_2]}$ имеет не более чем экспоненциальный рост.

Используя результаты лемм 1, 2 и методику [1], можно доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть существуют такие постоянные $z > 0$ и λ , что в области $0_{z,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau : \|\tau\| \leq z(1 + \|\sigma\|)^\lambda\}$ выполняются условия $A(s) \neq 0$; $\|Q(s)\|_{[0, Y]} \leq A(1 + \|\sigma\|)^z$. Тогда задача (1)–(3) корректно разрешима в пространстве функций

$$M_\mu = \left\{ \varphi(x) : |\varphi(x)| < C \prod_{i=1}^m (1 + |x_i|)^{\mu_i}, C > 0, \mu_i \in R^{-1}i = \overline{1, m} \right\},$$

а при $\lambda \geq 0$ также в пространстве

$$M_{1,A} = \{ \varphi(x) : |\varphi(x)| < C \exp \{A|x|\} C > 0, A < z \}.$$

Замечание. Полученные результаты допускают обобщение на случай начально-краевой задачи, т. е. задачи (1)–(2), у которой условие периодичности в (2) заменяется общим нелокальным краевым условием $Au(x, 0, y_2) + Bu(x, Y_1, y_2) = 0$.

Список литературы: 1. Борок В. М. О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, 35, № 1 с. 185–201. 2. Борок В. М., Житомирский Я. И. О единственности решения краевых задач в бесконечных цилиндрических областях. — Теория функций, функцион. анализ и их приложения, 1975, вып. 23, с. 12–24. 3. Кириченко Ю. В. Классы единственности решений смешанной нелокальной краевой задачи в бесконечном брусе для систем линейных уравнений с частными производными. — Деп. в ВИНТИ, № 1974–1979, 1979, 5 июня.

Поступила в редколлегию 04.02.80.

СОДЕРЖАНИЕ

Коробов В. И. Критерии управляемости линейной системы на подпространство	3
Сохин А. С. Управляемость гиперболической системы первого порядка билинейного типа	11
Приходько А. П. О существовании оптимальных быстродействий в банаховом пространстве	18
Бидерманн Д., Маринич А. П. Подпространство идеальной наблюдаемости и его структура	22
Скляр Г. М., Ширман В. Я. О задаче стабилизации стационарных систем при неполной информации о состоянии	25
Гавриляков В. М. О некоторых свойствах функции управляемости	30
Баранов В. В. Об одном методе оптимальных решений в задачах автоматизации проектирования	33
Босов А. А., Щербак В. В. Определение оптимального марковского управления процессом восстановления для объектов с линейной интенсивностью отказов	38
Ермаков В. И. Об устойчивости плоской поверхности раздела жидкостей в нормальном электрическом поле	46
Терехов Л. П. Вязкое течение в многосвязной области специального типа	51
Ермакова В. Д. Влияние дискретного спектра на асимптотику решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки	57
Кашурко А. С., Подольский Е. Н., Синяков В. А. О выборе передаточного коэффициента в автомате вождения самоходной машины	67
Жмудь Э. М. О разрешимых конечных группах, обладающих неприводимым комплексным характером с сопряженными нулями	70
Новиков Б. В. О-когомологии вполне О-простых полугрупп	80

Научные сообщения

Приходько А. П. О связи компактности и управляемости для сильно непрерывных полугрупп	86
Лущенко А. А. К вопросу о знакоопределенных функциях Ляпунова	87
Жакин А. И. Об устойчивости свободной поверхности слабопроводящей поляризуемой жидкости в тангенциальном переменном электрическом поле	88
Исеров А. Б. Диэлектрофоретическое движение пузыря	89
Элькин Б. С. Об одной модели для задачи прохождения электромагнитных волн в волноводах	90
Исиченко Ю. В., Чудинович И. Ю., Чуешов И. Д. Об одной задаче плоской теории упругости	91

Колодяжный Б. Г. Распространение электромагнитных волн в волноводе, подверженном упругим колебаниям	92
Мищенко В. О. Спектральная оператор-функция для симметрического абстрактного эллиптического дифференциального оператора . .	92
Макаров А. А. Краевая задача в полупространстве для систем уравнений в свертках	93
Мисюра Т. В. О спектре оператора Дирака	94
Калюжный В. Н. О формуле Гельфанда в неархимедовом анализе	95
Новиков Б. В. О вычислении когомологий некоторых полугрупп	96
Кудинцева И. Г. О корректной разрешимости некоторых краевых задач в бесконечных областях типа цилиндра	96
Бойко С. С. О некоторых свойствах алгебраических дифференциальных уравнений, обладающих быстрорастущими алгеброидными решениями с малым числом особенностей	97
Нессонов Н. И. О структуре факторов типа III_λ ($0 < \lambda < 1$) . .	98
Камынин И. П. О росте функций, хребтовых в полуплоскости . .	98
Кириченко Ю. В. Корректная разрешимость начально-периодической задачи в бесконечном брусе	99

**ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**

№ 221

Прикладная математика и механика

Выпуск 46

Редактор А. П. Гужва
Художественный редактор Т. П. Воробиенко
Технический редактор Г. П. Александрова
Корректоры В. В. Николаева, В. Л. Максименко

Сдано в набор 28.08.80. Подп. в печать 10.12.81. БЦ 09342.
Формат 60 x 90/16. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Вых. печать.
6,5 усл. печ. л. 6,75 усл. кр-отт., 8,2 уч-изд. л. Тираж 1000 экз.
Изд. № 900. Заказ 1-423. Цена 1 р. 20 к.

Издательство при Харьковском государственном университете
издательского объединения «Вища школа»
310003. Харьков-3, ул. Университетская, 16

Харьковская книжная фабрика «Коммунист», 310012, Харьков-12,
ул. Энгельса, 11

УМБ-1✓