Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 475, 2000, с. 208–217

Приближение частными суммами ряда Тейлора и наилучшее приближение некоторых классов функций аналитических в единичном круге

А. М. Швецова

Донецкий Государственный Университет, Украина

В работе исследуются вопросы приближения класса аналитических в круге функций с ограниченной производной общего вида в пространствах H_∞ и H_1 частными суммами Тейлора и другое.
1991 Mathematics Subject Classification 41A60.

Рассмотрим множество H_∞ функций аналитических в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in D} |f(z)|;$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \forall z \in D, \quad S_n(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k.$$

Еще в 1916 году Ландау вычислил норму оператора частных сумм ряда Тейлора для функций аналитических в единичном круге:

$$\sup_{\|f\|_\infty \le 1} \|S_n(f)\|_\infty = G_n, \quad G_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \right)^2 \sim \frac{1}{\pi} \ln n.$$

С.Б. Стечкин [4] решил задачу об асимптотике приближения частными суммами ряда Тейлора для класса $B^{(r)}$ функций аналитических в круге и удовлетворяющих условию $\|f^{(r)}\|_\infty \le 1$, где $f^{(r)}$ — r-я производная функции f :

$$\sup_{f \in B^{(r)}} \|f - S_n(f)\|_\infty = \frac{1}{\pi} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r} \right).$$

Пусть $\{\psi(k)\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \psi(k) = 0, \quad \psi(k) \ne 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через H_∞^ψ класс функций из H_∞, для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}a_k z^k = f^\psi(z)$$

является рядом Тейлора функции f^ψ ("ψ - производная") и $\|f^\psi\|_\infty \leq 1$. Впервые подобный класс был введен Шейком (Scheick) в работе [3].

Будем использовать следующие обозначения:

$E_n(f)_\infty$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими полиномами степени не выше n.

$\tilde{V}_a^\infty(\phi) = \int\limits_a^\infty \operatorname{vraisup}\limits_{u\geq t}|\phi'(u)|dt$, где ϕ — локально абсолютно непрерывна на $[a,\infty)$,

$$\tilde{V}_a^b(\phi) = \int\limits_a^c \operatorname{vraisup}\limits_{c\geq u\geq t}|\phi'(u)|dt + \int\limits_c^b vraisup_{c\leq u\leq t}|\phi'(u)|dt,$$

где $c = \frac{a+b}{2}$ и ϕ — абсолютно непрерывна на $[a,b]$.

Условие $\tilde{V}_a^\infty(\phi) < \infty$ для функции ϕ представляет собой более слабое ограничение, чем выпуклость ϕ на $[a,\infty)$, но более сильное, чем ограниченность изменения ϕ на $[a,\infty)$.

C — абсолютная положительная константа, возможно разная в различных частях работы.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\psi : (0,+\infty) \to \mathbb{C}$ локально абсолютно непрерывна на $[n+1,\infty)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x) = 0$ и $\psi(k) \neq 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$, а $\tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi) < \infty$.*

Тогда

$$\sup_{f:f^\psi\in H_\infty}\frac{\|f-S_n(f)\|_\infty}{E_n(f^\psi)_\infty} = \sup_{f\in H_\infty^\psi}\|f-S_n(f)\|_\infty = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{|\psi(k+n)|}{k} + \theta\tilde{V}_{n+1}^\infty(\psi),$$

где $|\theta| \leq C$, а дроби вида $\frac{0}{0}$ приписываем нулевое значение.

Замечание. *Формула в теореме 1 является асимптотической если, например,* $\operatorname{Re}\psi$, $\operatorname{Im}\psi$ *выпуклы на $[n+1,\infty)$ и*

$$\lim_{p\to\infty}\frac{|\psi(p+1)|}{|\psi(p)|} = 1.$$

Отметим, что в недавней работе [2] имеется некая оценка сверху при дополнительных условиях на рост функции ψ.

Следующая теорема указывает асимптотику приближения аналитических функций класса H_∞^ψ средними достаточно общего вида.

Теорема 2. *(приближение ϕ-средними). Пусть $n \in \mathbb{N}$, ψ удовлетворяет условиям теоремы 1. Функция $\phi : [0,1] \to \mathbb{C}$, ϕ — абсолютно непрерывна на $[0,1]$, $\phi(0) = 1$, $\phi(1) = 0$ и $\tilde{V}_0^1((1-\phi(\cdot))\psi((n+1)\cdot)) < \infty$.*

Тогда

$$\sup_{f\in H^{\psi}_{\infty}}\sup_{z\in D}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n+1}\phi\Big(\frac{k}{n+1}\Big)a_kz^k\right|=$$

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{|(1-\phi(1-\frac{k}{n+1}))\psi(n+1-k)-\psi(k+n+1)|}{k}+$$

$$\theta_1\tilde V_{n+1}^{\infty}(\psi)+\theta_2\tilde V_0^1((1-\phi(\cdot))\psi((n+1)\cdot)),\quad (|\theta_i|\le C,\quad i=1,2).$$

Теорема 3. *(Неравенство типа Бернштейна для ψ-производной аналитических полиномов.) Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\psi:(0,\infty)\to\mathbb{C}$ абсолютно непрерывна на $[1,n]$ и $\psi(k)\ne 0$, $\forall k\in\{1,2...n\}$, $\operatorname{Re}\frac{1}{\psi}$, $\operatorname{Im}\frac{1}{\psi}$ выпуклы вверх и возрастают на $[1,n]$.*

Тогда

$$\sup_{\{a_k\}_{k=0}^n}\frac{\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\psi(k)}a_kz^k\right|}{\sup_{z\in D}\left|\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right|}\asymp\frac{1}{|\psi(n)|}$$

(двусторонее неравенство с абсолютными положительными константами).

Обратимся к вопросу о наилучшем приближении функций класса H^{ψ}_{∞} полиномами степени не выше n. При условии выпуклости ψ этот вопрос был решен в статье [3]. (На самом деле, в работе [3] предполагается положительность некоторых интегральных сумм, что является более слабым условием, чем выпуклость.) Подробный обзор по этой проблеме, а также обобщение результатов работы [3], см. в [1].

Теорема 4. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, функция ψ удовлетворяет условиям теоремы 1. Если к тому же $\operatorname{Re}\psi$, $\operatorname{Im}\psi$ выпуклы на $[n+1,\infty)$, то*

$$\sup_{f:f^{\psi}\in H_{\infty}}\frac{E_n(f)_{\infty}}{E_n(f^{\psi})_{\infty}}=\sup_{f\in H^{\psi}_{\infty}}E_n(f)_{\infty}\asymp|\psi(n+1)|.$$

Теорема 5. *Результаты, аналогичные теоремам 1–4, остаются справедливыми при замене метрики L_{∞} на метрику L_1.*

В этой работе будут приведены доказательства теорем 1,2 и 5, доказательства остальных теорем автор предполагает изложить в другой статье.

Доказательство всех теорем проводиться методом мультипликаторов, развитым в работах [6], [8]. Для доказательства понадобятся две леммы.

Лемма 1. *Пусть $g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ есть функция ограниченной вариации на $\mathbb{R}$ и $\lim g(x)=0$ при $|x|\to\infty$. Тогда $\forall\epsilon>0$, $\forall p\in[1,+\infty)$, $\exists\theta\in(-1,1)$:*

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(\epsilon k)e^{ikx}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=$$

$$\sqrt{2\pi}\epsilon^{\frac{1}{p}-1}\left(\int\limits_{-\frac{\pi}{\epsilon}}^{\frac{\pi}{\epsilon}}|\widehat{g}(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+4\pi\theta V_{-\infty}^{\infty}(g).$$

См. следствие 2 в [7], доказанное, по сути, ранее иначе Э.С. Белинским, как отмечено в [7].

Лемма 2.

I. Пусть f локально абсолютно непрерывна на $[0,\infty)$ и равна нулю вне, $\lim f(x)=0$ при $x\to\infty$ и $\widetilde{V}_0^{\infty}(f)<\infty$. Тогда

$$\forall y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\quad \widehat{f}(y)=-\frac{i}{y}f\left(\frac{\pi}{2|y|}\right)+\theta F(y),$$

где F удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F(t)|dt\le\widetilde{V}_0^{\infty}(f),\quad |\theta|\le C.$$

II. Пусть f абсолютно непрерывна на $[a,b]$ и равна нулю вне $[a,b]$, $c=(a+b)/2$ и $\widetilde{V}_a^b(f)<\infty$. Тогда

$$\forall y\in\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{\pi}{b-a},\frac{\pi}{b-a}\right]\quad \widehat{f}(y)=\frac{i}{y}\left[f\left(b-\frac{\pi}{2|y|}\right)e^{-iby}-\right.$$

$$\left.f\left(a+\frac{\pi}{2|y|}\right)e^{-iay}\right]+\theta F(y),$$

где F удовлетворяет условию

$$\int\limits_{|t|\ge\frac{\pi}{b-a}}|F(t)|dt\le\widetilde{V}_a^b(f),\quad |\theta|\le C.$$

См. [6, теорема 5].

Доказательство теоремы 1. Проверим сначала, что неравенства $\|f-S_n(f)\|_\infty\le PE_n(f^\psi)_\infty$ и $\|f-S_n(f)\|_\infty\le P\|f^\psi\|_\infty$, где константа P не зависит от f, эквивалентны. Для этого достаточно учесть, что $E_n(f)_\infty\le\|f\|_\infty$ и $S_n(f-T_n)=S_n(f)-T_n$. Следовательно, доказательство теоремы сводится к нахождению наименьшей константы P в неравенстве

$$\|f-S_n(f)\|_\infty\le P\|f^\psi\|_\infty,$$

которое должно выполняться для всех функций f, таких что $f^\psi\in H_\infty$.

Данный оператор, определяемый последовательностью $\{\lambda_k\}$:

$$\lambda_k=0,\quad 1\le k\le n,\quad \lambda_k=\psi(k),\quad k\ge n+1,$$

действует на классе аналитических функций, для которых $f(0) = 0$ (т.е. функций со спектром в $(0, +\infty)$).

Для вычисления нормы этого оператора-мультипликатора продолжим его на всё $\mathbb{R}$ с сохранением нормы. Как известно, см., напр., [5, теорема 2], такое продолжение существует. Обозначим последовательность, определяющую этот оператор, через $\{\widetilde{\lambda}_k\}$. Для оценки сверху нормы мультипликатора можно выбрать любое продолжение.

Пусть продолжение определяется следующей последовательностью $\{\mu_k\}$:

$$\mu_k = 0, \quad |k| < n+1,$$

$$\mu_k = \psi(|k|), \quad k \in (-\infty, -2n-2] \cup [n+1, +\infty),$$

$$\mu_k = -\left(\frac{k}{n+1} + 1\right)\psi(|k|), \quad k \in [-2n-2, -n-1].$$

Очевидно, что $\|\{\widetilde{\lambda}_k\}\| \le \|\{\mu_k\}\|$. По формуле Надя (см., напр., [9])

$$\|\{\mu_k\}\| = \frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_k e_k\right\|_1, \quad e_k = e^{ikx}.$$

Применяем лемму 1, полагая $\epsilon = \frac{1}{n+1}$, $p = 1$ и

$$g(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in (-1, 1),$$

$$g(x) = \psi((n+1)|x|) \quad \text{при} \quad x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty),$$

$$g(x) = (|x| - 1)\psi((n+1)|x|) \quad \text{при} \quad x \in [-2, -1].$$

Записываем

$$\|\{\mu_k\}\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k\epsilon)e^{ikt}\right| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi(n+1)}^{\pi(n+1)} |\widehat{g}(y)|dy + \theta_1 V_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

Теперь применяем лемму 2(I), учитывая условия на ψ.

Имеем, $\forall y \ne 0$

$$\sqrt{2\pi}\widehat{g}(y) = \int_1^2 (x-1)\psi((n+1)x)e^{ixy}dx + \int_1^{\infty} \psi((n+1)x)e^{-ixy}dx +$$

$$\int_2^{\infty} \psi((n+1)x)e^{ixy}dx = \int_1^2 (x-2)\psi((n+1)x)e^{ixy}dx -$$

$$\frac{i}{y}e^{-iy}\psi\left((n+1)\left(1 + \frac{\pi}{2|y|}\right)\right) + \frac{i}{y}e^{iy}\psi\left((n+1)\left(1 + \frac{\pi}{2|y|}\right)\right) + \Phi_1(y) =$$

$$\int_1^2 (x-2)\psi((n+1)x)e^{ixy}dx - \frac{2\sin y}{y}\psi\left((n+1)\left(1+\frac{\pi}{2|y|}\right)\right) + \Phi_1(y),$$

где

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi_1(y)|dy \le C\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

Используя неравенство

$$\sup_{a\le x<\infty} |\psi(x)| = \sup_{a\le x<\infty} \lim_{y\to\infty} |\psi(x)-\psi(y)| \le V_a^{\infty}(\psi) \le \widetilde{V}_a^{\infty}(\psi) \qquad (1)$$

и то, что $\sin y = \theta_2 y$ при $|y| \le \pi$ ($|\theta_2| \le 1$), имеем

$$|\widehat{g}(y)| \le C\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi) \quad \text{для} \quad \text{всех} \quad |y| \le \pi.$$

Поэтому

$$\|\{\mu_k\}\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-\pi(n+1)}^{-\pi} |\widehat{g}(y)|dy + \int_{\pi}^{\pi(n+1)} |\widehat{g}(y)|dy\right) + \theta_3\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

При $|y| \ge \pi$ к интегралу

$$\int_1^2 (x-2)\psi((n+1)x)e^{ixy}dx$$

можно применить второе утверждение леммы 2.

$$\int_1^2 (x-2)\psi((n+1)x)e^{ixy}dx = -\frac{i\pi}{2|y|y}\psi\left((n+1)\left(2-\frac{\pi}{2|y|}\right)\right)e^{i2y} +$$

$$\frac{i}{y}\left(\frac{\pi}{2|y|}-1\right)\psi\left((n+1)\left(1+\frac{\pi}{2|y|}\right)\right)e^{iy} + \Phi_2(y),$$

где Φ_2 удовлетворяет условию

$$\int_{|y|\ge\pi} |\Phi_2(y)|dy \le C\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

Отсюда получаем, что

$$\sqrt{2\pi}\widehat{g}(y) = -\frac{i}{y}e^{-iy}\psi\left((n+1)\left(1+\frac{\pi}{2|y|}\right)\right) + \Phi_3(y),$$

где

$$\int_{|y|\ge\pi} |\Phi_3(y)|dy \le C\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi)$$

для всех $y, |y| > \pi$. Значит, имеем

$$\|\{\mu_k\}\| = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\pi}^{\pi(n+1)} \frac{|\psi((n+1)(1+\frac{\pi}{2y}))|}{y}dy + \theta_4 \widetilde{V}^{\infty}_{n+1}(\psi).$$

Делая замену переменных в интеграле, приходим к выражению

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{n+3/2}^{3/2(n+1)} \frac{|\psi(t)|}{t-n-1}dt + \theta_4 \widetilde{V}^{\infty}_{n+1}(\psi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{n+1}^{2n+1} \frac{|\psi(t)|}{t-n}dt + \theta_5 \widetilde{V}^{\infty}_{n+1}(\psi).$$

Осталось только перейти от интеграла к сумме, используя очевидное неравенство

$$\left|\int\limits_0^{\infty}\phi(x)dx - \sum_{k=1}^{\infty}\phi(k)\right| \le V(\phi), \tag{2}$$

и получим требуемую оценку сверху.

Перейдем к оценке снизу нормы $\|\{\widetilde{\lambda}_k\}\|$. Рассмотрим оператор-мультипликатор $\{\tau_k\}_{-\infty}^{+\infty}$:

$$\tau_k = 0, \quad k \notin [0, 2n+2],$$

$$\tau_k = 2 - \frac{k}{n+1}, \quad k \in [n+1, 2n+2],$$

$$\tau_k = \frac{k}{n+1}, \quad k \in [0, n+1],$$

$$\|\{\tau_k\}\| = 1.$$

Тогда для оператора $\nu_k = \tau_k \cdot \widetilde{\lambda}_k$ имеем

$$\|\{\nu_k\}\| = \|\{\tau_k \cdot \widetilde{\lambda}_k\}\| \le \|\{\tau_k\}\| \cdot \|\{\widetilde{\lambda}_k\}\| = \|\{\widetilde{\lambda}_k\}\|.$$

Таким образом, для доказательства оценки снизу достаточно оценить норму мультипликатора $\{\nu_k\}$

$$\nu_k = 0, \quad k \notin [n+1, 2n+2], \quad \nu_k = \left(2 - \frac{k}{n+1}\right)\psi(k), \quad k \in [n+1, 2n+2].$$

По формуле Надя она равна

$$\frac{1}{2\pi}\left\|\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\nu_k e_k\right\|_1.$$

Применяем лемму 1, полагая $\epsilon = \frac{1}{n+1}$, $p = 1$ и

$$g(x) = 0, \quad x \notin [1, 2], \quad g(x) = (2-x)\psi((n+1)x), \quad x \in [1, 2],$$

получаем

$$\|\{\nu_k\}\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi(n+1)}^{\pi(n+1)} |\widehat{g}(y)|dy + \theta_6 V_{n+1}^{\infty}(\psi),$$

$$\sqrt{2\pi}\widehat{g}(y) = \int\limits_{1}^{2} (2-x)\psi((n+1)x)e^{-ixy}dx.$$

При $|y| \geq \pi$ применяем лемму 2(II), имеем

$$\int\limits_{1}^{2} (2-x)\psi((n+1)x)e^{-ixy}dx = \frac{i\pi}{2|y|y}\psi\left((n+1)\left(2-\frac{\pi}{2|y|}\right)\right)e^{-i2y} -$$

$$\frac{i}{y}\left(1-\frac{\pi}{2|y|}\right)\psi\left((n+1)\left(1+\frac{\pi}{2|y|}\right)\right)e^{-iy} + \Phi_4(y),$$

где Φ_4 удовлетворяет условию

$$\int\limits_{|y|\geq\pi} |\Phi_4(y)|dy \leq C\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

А при $|y| < \pi$, используя неравенство (1), выводим что

$$|\widehat{g}(y)| \leq C\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

Отсюда делаем вывод, что

$$\|\{\nu_k\}\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\pi(n+1)}^{\pi(n+1)} |\widehat{g}(y)|dy = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{\pi(n+1)} \frac{|\psi((n+1)(1+\frac{\pi}{2y}))|}{y}dy + \theta_7\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

В интеграле делаем замену переменных $t = (n+1)\left(1+\frac{\pi}{2y}\right)$ и получаем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{n+3/2}^{3/2(n+1)} \frac{|\psi(t)|}{t-n-1}dt + \theta_7\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{n+1}^{2n+1} \frac{|\psi(t)|}{t-n}dt + \theta_8\widetilde{V}_{n+1}^{\infty}(\psi).$$

Для завершения доказательства оценки снизу следует перейти к сумме при помощи неравенства (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Здесь имеем дело с оператором, действующим на классе аналитических функций, для которых $f(0) = 0$, и определяемым следующей последовательностью

$$\lambda_k = \left(1-\phi\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)\psi(k), \quad 0 < k \leq n+1, \quad \lambda_k = \psi(k), \quad k > n+1.$$

Для оценки сверху выбирается продолжение, определяющееся последовательностью $\{\mu_k\}$:

$$\mu_k = \psi(|k|), \quad |k| \notin [0, 2n+2],$$

$$\mu_k = \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\left(1 - \phi\left(\frac{|k|}{n+1}\right)\right)\psi(|k|), \quad k \in [-n-1, 0],$$

$$\mu_k = \left(1 - \phi\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)\psi(k), \quad k \in [0, n+1],$$

$$\mu_k = \left(\frac{|k|}{n+1} - 1\right)\psi(|k|), \quad k \in [-2n-2, -n-1];$$

а для оценки снизу — мультипликатор $\{\nu_k\}$:

$$\nu_k = 0 \quad k \notin [0, 2n+2], \quad \nu_k = \left(2 - \frac{k}{n+1}\right)\psi(k) \quad k \in [n+1, 2n+2]$$

$$\nu_k = \frac{k}{n+1}\left(1 - \phi\left(\frac{k}{n+1}\right)\right)\psi(k) \quad k \in [0, n+1].$$

В остальном доказательство повторяет доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 5. Согласно следствию 2 работы [5], для любого $S \subset \mathbb{Z}$ и любого $p \in [1, +\infty]$

$$\|\{\lambda_k\}\|_{M_p(S)} \leq \|\{\lambda_k\}\|_{M(S)},$$

где $\|\{\lambda_k\}\|_{M_p(S)}$ — норма мультипликатора $\{\lambda_k\}$ в пространстве L_p на спектре S.

Значит, все оценки сверху, которые справедливы для норм мультипликаторов в C или L_∞, справедливы и в метрике L_1. Точность же оценок достигается, как можно проверить на функции

$$f_0 = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{k}{n+1}\psi(k)e^{ikx} + \sum_{k=n+2}^{2n+1}\left(2 - \frac{k}{n+1}\right)\psi(k)e^{ikx}.$$

Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Двейрин М.З. Задачи наилучшего приближения классов функций, аналитических в единичном круге // Теория приближения функций. Труды Международной конференции по теории приближения функций. Калуга 24-28 июля. – С. 129–132.

2. Савчук В.В. Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій // УМЖ. – 1998. – Т. 50, 7. – С. 1001–1003.

3. Scheick J.T. Polynomial approximation of functions analytic in a disk // Proc. Amer. Math. Soc., – 1966. – T. 17, **6**. – P. 1238–1243.

4. Стечкин С.Б. Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. – 1953. – **17**. – С. 461–472.

5. Тригуб Р.М. Мультипликаторы рядов Фурье // УМЖ, – 1991. – Т. 43, **12**. – С. 1686–1693.

6. Тригуб Р.М. Мультипликаторы рядов Фурье и приближение функций полиномами в пространствах C и L // ДАН СССР. – 1989. – Т. 306, **2**. – С. 291–296.

7. Тригуб Р.М. Обобщение формулы Эйлера-Маклорена // Мат. зам. – 1997. – Т. 61, **2**. – С. 312–316.

8. Тригуб Р.М. Приближение непрерывных периодических функций с ограниченной производной полиномами. Теория отображений и приближения функций. – Киев: Наукова думка, – 1989. – С. 185–195.

9. Стечкин С.Б., Теляковский С.А. О приближении дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами в метрике L_1 // Труды Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 20–29.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 475, 2000, с. 218–229

Extremal Solutions of the Generalized Nevanlinna-Pick Problem

Yu. M. Dyukarev
Kharkov National University, Ukraine

In this work a generalized Nevanlinna-Pick problem in a special subclass of Nevanlinna functions are considered. Explicit formulas for the extremal solutions of this problem are obtained.

1. Introduction

This paper substantially expands on the work [1], the central results of which in a somewhat modified form are presented here. In section 2 we pose a Generalized Nevanlinna-Pick Problem in the Stieltjes Class. The latter contains the problem in section 1 as a special case. In section 3 the solvability of the generalized interpolation problem is proved. Here we show that two remarkable solutions can be decided: a minimal and a maximal. These solutions are related to the minimal and maximal extensions of the operators [2]. In this paper we shall adopt the approach to solving interpolation problems elucidated by V.P. Potapov [3], [4].

Definition 1. A matrix-valued function $s(z)$ holomorphic in the complex plane with a cut along the semi-axis $[0, +\infty)$ (denoted by $C^- = C \setminus [0, +\infty)$) is called a Stieltjes function if

1. $(s(z) - s^*(z))/(z - \bar{z}) \geq 0$, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

2. $s(x) \geq 0$, $x < 0$.

The class of all matrix-valued Stieltjes functions is denoted by **S**.

Definition 2. A pair $[p(z), q(z)]$ of matrix-valued function meromorphic in C^- is called a Stieltjes pair if

1. $\det\{p(z)p^*(z) + q(z)q^*(z)\} \not\equiv 0$.

2. $[p(z), q(z)] \dfrac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq 0$, $\operatorname{Im} z \neq 0$.

3. $[zp(z), q(z)]\dfrac{J}{i(\bar z - z)}\begin{bmatrix} \bar z p^*(z) \\ q^*(z)\end{bmatrix} \geq 0,\ \operatorname{Im} z \neq 0.$

$J = \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}$, where I is the identity matrix.

We introduce an equivalence relation on the set of Stieltjes pairs: a pair $[p(z), q(z)]$ is said to be equivalent to the pairs $[p_1(z), q_1(z)]$ if there exists a matrix-valued function $Q(z)$, $\det Q(z) \not\equiv 0$ meromorphic in C^- and such that $p_1(z) = Q(z)p(z)$ and $q_1(z) = Q(z)q(z)$. The set of Stieltjes pairs thus breaks up into equivalence classes which we denote by $\mathbf{S}^\infty$.

Let us consider Nevanlinna-Pick problem in the class $\mathbf{S}$. Given the complex numbers $z_1, ..., z_n$, $\operatorname{Im} z_j > 0$, $z_j \neq z_k$, $j \neq k$ (interpolation points) and $m \times m$ matrices $s_1, ..., s_n$ (interpolation values). Find $s(z) \in \mathbf{S}$ such that

$$s(z_j) = s_j,\ 1 \leq j \leq n, \tag{1}$$

and to describe the set of all solutions.

Theorem 1. *A matrix-valued function $s(z) \in \mathbf{S}$ is a solution of the interpolation problem (1) in the class $\mathbf{S}$ if and only if $s(z)$ satisfies the system of Fundamental Matrix Inequalities (FMI)*

$$\left[\begin{array}{c|c} K & R(\bar z)\,[\,u - vs^*(z)\,] \\ \hline * & \dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar z} \end{array}\right] \geq 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} K_z & R(\bar z)\,[\,Tu - v\bar z s^*(z)\,] \\ \hline * & \dfrac{zs(z) - \bar z s^*(z)}{z - \bar z} \end{array}\right] \geq 0. \tag{2}$$

Here

$$K = \begin{bmatrix} \dfrac{s_1 - s_1^*}{z_1 - \bar z_1} & \dots & \dfrac{s_1 - s_n^*}{z_1 - \bar z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{s_n - s_1^*}{z_n - \bar z_1} & \dots & \dfrac{s_n - s_n^*}{z_n - \bar z_n} \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} z_1 I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 I & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & z_n I \end{bmatrix},$$

$$K_z = \begin{bmatrix} \dfrac{z_1 s_1 - \bar z_1 s_1^*}{z_1 - \bar z_1} & \dots & \dfrac{z_1 s_1 - \bar z_n s_n^*}{z_1 - \bar z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{z_n s_n - \bar z_1 s_1^*}{z_n - \bar z_1} & \dots & \dfrac{z_n s_n - \bar z_n s_n^*}{z_n - \bar z_n} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix},$$

$R(z) = (T - zI)^{-1}$ *denotes the resolvent of the operator T.*

Proof this theorem see [1].

Note that the spectrum of the operator T coincides with the interpolation angles i.e. interpolation is defined on the spectrum of the operator T.

Problem (1) is termed nondegenerate if $K > 0$ and $K_z > 0$.

Theorem 2. *The linear fractional transformation*

$$s(z) = [p(z)\beta(z) + q(z)\delta(z)]^{-1}[p(z)\alpha(z) + q(z)\gamma(z)] \tag{3}$$

gives a one to one map from $\mathbf{S}^{\infty}$ *to the set of all the solutions of the interpolation problem (1).*

The matrix of the linear fractional transformation (3) can be represented in the form

$$\begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & \delta(z) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I - v^* K_z^{-1} R(z) T u & -z v^* K_z^{-1} R(z) v \\ \hline u^* K^{-1} R(z) u & I + u^* K^{-1} R(z) v \end{array}\right]. \tag{4}$$

Proof this theorem see [1].

In order to prove this theorem we shall exploit the following identities

$$TK - KT^* = uv^* - vu^*, \tag{5}$$

$$TK_z - K_z T^* = Tuv^* - vu^* T^*, \tag{6}$$

$$K_z = TK + vu^*. \tag{7}$$

These identities in conjunction with inequalities (2) will be adopted as the basis of the generalized interpolation problem.

Among the class of solutions of problem (1) we can clearly distinguish two remarkable extremal solutions

$$s^{\mu}(z) = \delta^{-1}(z)\,\gamma(z) \quad \text{- the minimal solution} \tag{8}$$

$$s^{M}(z) = \beta^{-1}(z)\,\alpha(z) \quad \text{- the maximal solution.} \tag{9}$$

These solutions can easily be obtained if we set $[p(z), q(z)]$ in formula (3) to be equal to $[0, I]$ and $[I, 0]$, respectively.

Theorem 3. *The extremal solutions allow a representation in the form*

$$s^{\mu}(z) = u^*(K_z - zK)^{-1} u, \tag{10}$$

$$s^{M}(z) = [v^*(K_z - z^{-1} TKT^*)^{-1} v]^{-1}. \tag{11}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
s^{\mu}(z) &= \delta^{-1}(z)\gamma(z) \\
&= (I + u^* K^{-1} R(z) v)^{-1} u^* K^{-1} R(z) u \\
&= (I + u^* K^{-1} R(z) v)^{-1} (u^* K^{-1} R(z)(-zK + TK \\
&\qquad - TK + K_z)(K_z - zK)^{-1} u) \\
&= (I + u^* K^{-1} R(z) v)^{-1} (u^* K^{-1} R(z)(R^{-1}(z) K + vu^*)(K_z - zK)^{-1} u \\
&= (I + u^* K^{-1} R(z) v)^{-1} (u^* + u^* K^{-1} R(z) v u^*)(K_z - zK)^{-1} u \\
&= u^*(K_z - zK)^{-1} u.
\end{aligned}$$

Formula (10) is thus proved. Further

$$\begin{aligned}(s^M(z))^{-1} &= \alpha^{-1}(z)\beta(z)\\ &= (I - v^*K_z^{-1}R(z)Tu)^{-1}(-zv^*K_z^{-1}R(z)v)\\ &= (I - v^*K_z^{-1}R(z)Tu)^{-1}v^*K_z^{-1}R(z)\\ &\quad\times(TKT^* - zK_z)(K_z - z^{-1}TKT^*)^{-1}v\\ &= (I - v^*K_z^{-1}R(z)Tu)^{-1}v^*K_z^{-1}R(z)\\ &\quad\times(T(K_z - uv^*) - zK_z)(K_z - z^{-1}TKT^*)^{-1}v\\ &= (I - v^*K_z^{-1}R(z)Tu)^{-1}v^*K_z^{-1}R(z)\\ &\quad\times(R^{-1}(z) \quad Tuv^*)(K_z - z^{-1}TKT^*)^{-1}v\\ &= (I - v^*K_z^{-1}R(z)Tu)^{-1}(v^* - v^*K_z^{-1}R(z)Tuv^*)\\ &\quad\times(K_z - z^{-1}TKT^*)^{-1}v = v^*(K_z - z^{-1}TKT^*)^{-1}v.\end{aligned}$$

Hence

$$s^M(z) = [v^*(K_z - z^{-1}TKT^*)^{-1}v]^{-1}.$$

We have now proved theorem (3).

Remark. It can be shown that following inequality holds for an arbitrary solution $s(z)$ of problem (1)

$$s^\mu(z) \le s(x) \le s^M(x), \ x < 0.$$

2. The Generalized Nevanlinna-Pick Interpolation Problem in the class $S_{(\alpha,\beta)}$ (GNPIPS)

We treat the generalization of the Nevanlinna-Pick interpolation problem in the class S in two aspects.

Firstly, interpolation will be carried out on the spectrum of an arbitrary operator T.

Secondly, we assume that the interval $(\alpha, \beta) \subset R$ does not intercept with the spectrum of the operator T.

In this context we now pose the following GNPIPS. It is convenient to introduce the following notation

$$X - \text{a Hilbert space}$$

$$K = K^* \in L(X) - \text{a Hermitian operator in } X$$

$$T \in L(X) - \text{am operator in } X$$

$$H - \text{a Hilbert space}$$

$$u, v \in L(H, X) - \text{lineal operators from } H \text{ to } X$$

$$(\alpha, \beta) - \text{a finite interval in } R$$

$$\varphi(z) = \frac{z - \beta}{(\beta - \alpha)(z - \alpha)} - \text{a Nevanlinna function}$$

$$R(z) = (T - zI)^{-1} \text{ -- the resolvent of the operator } T,$$

which is considered to be holomorphic within a neighbourhood of the points α and β

$$K_\varphi = \varphi(T)K + R(\alpha)vu^*R^*(\alpha) \text{ -- an operator in } X. \tag{12}$$

Let these objects be linked by the following identity

$$TK - KT^* = uv^* - vu^*. \tag{13}$$

Theorem 4. *The operator K_φ is Hermitian and satisfies the fundamental identity*

$$TK_\varphi - K_\varphi T^* = \varphi(T)uv^* - vu^*\varphi^*(T) \tag{14}$$

Proof. Initially we shall show that the following identity takes place

$$\varphi(T)K - K\varphi^*(T)) = R(\alpha)(uv^* - vu^*)R^*(\alpha). \tag{15}$$

In fact

$$\varphi(T) = \frac{R(\alpha)R^{-1}(\beta)}{\beta - \alpha}.$$

Consequently

$$\begin{aligned}
&\varphi(T)K - K\varphi^*(T)) \\
&= \frac{R(\alpha)}{\beta - \alpha}[R^{-1}(\beta)KR^{-1*}(\alpha) - R^{-1}(\alpha)KR^{-1*}(\beta)]R^*(\alpha) \\
&= \frac{R(\alpha)}{\beta - \alpha}[(T - \beta)K(T^* - \alpha) - (T - \alpha)K(T^* - \beta)]R^*(\alpha) \\
&= R(\alpha)(TK - KT^*)R^*(\alpha) = R(\alpha)(uv^* - vu^*)R^*(\alpha).
\end{aligned}$$

We now show that K_φ is Hermitian.

$$K_\varphi - K_\varphi{}^* = \varphi(T)K + R(\alpha)vu^*R^*(\alpha) - K\varphi^*(T) - R(\alpha)uv^*R^*(\alpha) = 0.$$

We now focus on the validity of (14)

$$\begin{aligned}
&TK_\varphi - K_\varphi T^* \\
&= T[\varphi(T)K + R(\alpha)vu^*R^*(\alpha)] - [\varphi(T)K + R(\alpha)vu^*R^*(\alpha)]T^* \\
&= \varphi(T)(TK - KT^*) + TR(\alpha)vu^*R^*(\alpha) - R(\alpha)vu^*R^*(\alpha)T^* \\
&= \varphi(T)(uv^* - vu^*) + TR(\alpha)vu^*R^*(\alpha) - R(\alpha)vu^*R^*(\alpha)T^* \\
&= \varphi(T)uv^* - \frac{R(\alpha)R^{-1}(\beta)}{\beta - \alpha} \\
&\times vu^* + TR(\alpha)vu^*R^*(\alpha) - R(\alpha)vu^*R^*(\alpha)T^*
\end{aligned}$$

$$= \varphi(T)uv^* + R(\alpha)[-\frac{R^{-1}(\beta)vu^*R^{*-1}(\alpha)}{\beta-\alpha} + Tvu^* - vu^*T^*]R^*(\alpha)$$

$$= \varphi(T)uv^* + \frac{R(\alpha)}{\beta-\alpha}[-R^{-1}(\beta)R^{*-1}(\alpha)$$

$$+ (\beta-\alpha)Tvu^* - vu^*T^*(\beta-\alpha)]R^*(\alpha)$$

$$= \varphi(T)uv^* + \frac{R(\alpha)}{\beta-\alpha}[-(T-\beta)vu^*(T^*-\alpha) + (\beta-\alpha)Tvu^*$$

$$-(\beta-\alpha)vu^*T^*]R^*(\alpha)$$

$$= \varphi(T)uv^* + \frac{R(\alpha)}{\beta-\alpha}[-(T-\alpha)vu^*T^* + (T-\alpha)\beta vu^*]R^*(\alpha)$$

$$= \varphi(T)uv^* + \frac{1}{\beta-\alpha}[-vu^*T^* + \beta vu^*]R^*(\alpha) =$$

$$= \varphi(T)uv^* - \frac{vu^*}{\beta-\alpha}[T^*-\beta]R^*(\alpha) = \varphi(T)uv^* - vu^*\varphi^*(T).$$

Theorem (4) is thus fully proved.

The discussions presented in the above sections are valid in the case of Hermitian operators. We now require the nonnegativ of these operators.

$$K \geq 0, \qquad K_\varphi \geq 0. \tag{16}$$

Furthermore we impose spectral type conditions on the primary objects, namely the functions

$$(K_\varphi - \varphi(z)K)^{-1} \text{ and } (K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1} \tag{17}$$

should be holomorphic in $C \setminus ((-\infty,\alpha] \cup [\beta,+\infty))$.

Definition 3. An operator-valued function $s(z)$ holomorphic in

$$C \setminus ((-\infty,\alpha] \cup [\beta,+\infty))$$

is called a Stieltjes function if

1. $(s(z) - s^*(z))/(z-\bar{z}) \geq 0$, $\operatorname{Im} z \neq 0$;

2. $s(x) \geq 0$, $x \in (\alpha,\beta)$.

The class of all operator-valued Stieltjes functions is denoted by $\mathbf{S}_{(\alpha,\beta)}$.

Definition 4. A function $s(z) \in \mathbf{S}_{(\alpha,\beta)}$ is a solution of the Generalized Nevanlinna-Pick Interpolation Problem if it satisfies the following system of Fundamental Matrix-Inequalities (FMI)

$$\left[\begin{array}{c|c} K & R(\bar{z})\,[\,u - vs^*(z)\,] \\ \hline * & \dfrac{s(z)-s^*(z)}{z-\bar{z}} \end{array}\right] \geq 0, \quad \left[\begin{array}{c|c} K_\varphi & R(\bar{z})\,[\,\varphi(T)u - v\bar{\varphi}(z)s^*(z)\,] \\ \hline * & \dfrac{\varphi(z)s(z)-\bar{\varphi}(z)s^*(z)}{z-\bar{z}} \end{array}\right] \geq 0. \tag{18}$$

3. Extremal Solutions of the Generalized Nevanlinna-Pick Interpolation Problem in the $\mathbf{S}_{(\alpha,\beta)}$ class

Theorem 5. *The following inequality is valid*

$$\frac{s^{\mu}(z)-s^{\mu*}(z)}{z-\bar{z}}=u^{*}R^{*}(\alpha)(K_{\varphi}-\varphi(z)K)^{-1}\frac{1}{z-\alpha}K$$
$$\times\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(K_{\varphi}-\varphi(z)K)^{-1*}R(\alpha)u, \tag{19}$$
$$R(\bar{z})(u-vs^{\mu*}(z))=K\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(K_{\varphi}-\varphi(z)K)^{-1*}R(\alpha)u, \tag{20}$$
$$\frac{\varphi(z)s^{\mu}(z)-\bar{\varphi}(z)s^{\mu*}(z)}{z-\bar{z}}=u^{*}R^{*}(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1}\frac{\beta-\alpha}{z-\beta}K_{\varphi}\frac{\beta-\alpha}{\bar{z}-\beta}$$
$$\times(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1*}R(\alpha)u, \tag{21}$$
$$R(\bar{z})(\varphi(T)u-v\bar{\varphi}(z)s^{\mu*}(z))=K_{\varphi}\frac{\beta-\alpha}{\bar{z}-\beta}(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1*}R(\alpha)u, \tag{22}$$
$$\frac{s^{M}(z)-s^{M*}(z)}{z-\bar{z}}=s^{M}(z)v^{*}R^{*}(\alpha)(K_{\varphi}-\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^{*}(T))^{-1}\frac{\beta-\alpha}{z-\beta}$$
$$\times\varphi(T)K\varphi^{*}(T)\frac{\beta-\alpha}{\bar{z}-\beta}(K_{\varphi}-\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^{*}(T))^{-1*}R(\alpha)vs^{M*}(z), \tag{23}$$
$$R(\bar{z})(u-vs^{M*}(z))=K\frac{\beta-\alpha}{\bar{z}-\beta}\varphi^{*}(T)(K_{\varphi}-\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^{*}(T))^{-1*}$$
$$\times R(\alpha)vs^{M*}(z), \tag{24}$$
$$\frac{\varphi(z)s^{M}(z)-\bar{\varphi}(z)s^{M*}(z)}{z-\bar{z}}$$
$$=\varphi(z)s^{M}(z)v^{*}R^{*}(\alpha)(\varphi(z)K_{\varphi}-\varphi(T)K\varphi^{*}(T))^{-1}\frac{1}{z-\alpha}K_{\varphi}\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(\varphi(z)$$
$$\times K_{\varphi}-\varphi(T)K\varphi^{*}(T))^{-1*}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M*}(z), \tag{25}$$
$$R(\bar{z})(\varphi(T)u-v\bar{\varphi}(z)s^{M*}(z))=K_{\varphi}\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(\varphi(z)K_{\varphi}-\varphi(T)K\varphi^{*}(T))^{-1*}$$
$$\times R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M*}(z). \tag{26}$$

The proof of this theorem will be given below. Now we proceed to prove a fundamental theorem.

Theorem 6. *The Generalized Nevanlinna-Pick Interpolation Problem in the class* $\mathbf{S}_{(\alpha,\beta)}$ *is solvable. Moreover, its solutions are the extremal functions*

$$s^{\mu}(z)=u^{*}R^{*}(\alpha)(K_{\varphi}-\varphi(z)\,K)^{-1}R(\alpha)u, \tag{27}$$
$$s^{M}(z)=[v^{*}R^{*}(\alpha)(K_{\varphi}-\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^{*}(T))^{-1}R(\alpha)v]^{-1}. \tag{28}$$

Proof. The spectral condition (17) yields $s^\mu(z)$ and $s^M(z)$ are correctly defined. Thus, since $K \geq 0$ and $K_\varphi \geq 0$ we obtain $s^\mu(z)$, $s^M(z) \in \mathbf{S}_{(\alpha,\beta)}$.

We now substitute $s^\mu(z)$ into inequality (18) and taking into consideration (19-22) we obtain

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & u^*R^*(\alpha)(K_\varphi - \varphi(z)K)^{-1}\dfrac{1}{z-\alpha} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} K & K \\ \hline K & K \end{array}\right]$$
$$\times \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{1}{\bar z - \alpha}(K_\varphi - \varphi(z)K)^{-1*}R(\alpha)u \end{array}\right] \geq 0, \qquad (29)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & u^*R^*(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_\varphi - K)^{-1}\dfrac{\beta-\alpha}{z-\beta} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} K_\varphi & K_\varphi \\ \hline K_\varphi & K_\varphi \end{array}\right]$$
$$\times \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{\beta-\alpha}{\bar z - \beta}(\varphi^{-1}(z)K_\varphi - K)^{-1*}R(\alpha)u \end{array}\right] \geq 0. \qquad (30)$$

Evidently these inequalities are satisfied since $K \geq 0$ and $K_\varphi \geq 0$. Consequently, $s^\mu(z)$ is a solution of the interpolation problem.

We now substitute $s^M(z)$ into inequality (18) and taking into consideration (23-26) we obtain

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & s^M(z)v^*R^*(\alpha)(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}\dfrac{\beta-\alpha}{z-\beta}\varphi(T) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} K & K \\ \hline K & K \end{array}\right]$$
$$\times \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \varphi^*(T)\dfrac{\beta-\alpha}{\bar z - \beta}(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1*}R(\alpha)vs^{M*}(z) \end{array}\right] \geq 0, \qquad (31)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \varphi(z)s^M(z)v^*R^*(\alpha)(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}\dfrac{1}{z-\alpha} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} K_\varphi & K_\varphi \\ \hline K_\varphi & K_\varphi \end{array}\right]$$
$$\times \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{1}{\bar z - \alpha}(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1*}R(\alpha)v\bar\varphi(z)s^{M*}(z) \end{array}\right] \geq 0. \qquad (32)$$

Evidently these inequalities are satisfied since $K \geq 0$ and $K_\varphi \geq 0$. Consequently, $s^M(z)$ is a solution of the interpolation problem. Theorem 6 is proved.

Remark. We have presented two solutions of the generalized interpolation problem. There can be only two cases.

a) $s^\mu(z) \equiv s^M(z)$. In this case the solution of the interpolation problem is the only one.

b) $s^\mu(z) \not\equiv s^M(z)$. In this case there exists an infinite class of solutions of the interpolation problem.

Proof of theorem 5.
First, we show that the following identity holds

$$R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\varphi(T)-\bar{\varphi}(z)I)=\frac{I}{\bar{z}-\alpha}. \tag{33}$$

We have

$$\begin{aligned}
&R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\varphi(T)-\bar{\varphi}(z)I)\\
&=R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)[\frac{R^{-1}(\beta)R(\alpha)}{\beta-\alpha}-\frac{(\bar{z}-\beta)I}{(\beta-\alpha)(\bar{z}-\alpha)}]\\
&=\frac{R(\bar{z})}{(\beta-\alpha)(\bar{z}-\alpha)}[(T-\beta)(\bar{z}-\alpha)-(T-\alpha)(\bar{z}-\beta)]\\
&=\frac{R(\bar{z})}{(\beta-\alpha)(\bar{z}-\alpha)}[T(\beta-\alpha)-\bar{z}(\beta-\alpha)]=\frac{I}{\bar{z}-\alpha}.
\end{aligned}$$

Identity (33) has been proved.
Now we shall prove identity (19).

$$\begin{aligned}
&\frac{s^{\mu}(z)-s^{\mu*}(z)}{z-\bar{z}}\\
&=\frac{1}{z-\bar{z}}[u^*R^*(\alpha)(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1}R(\alpha)u-u^*R^*(\alpha)(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u]\\
&=\frac{1}{z-\bar{z}}u^*R^*(\alpha)(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1}[K_\varphi-\bar{\varphi}(z)K\\
&-K_\varphi-\varphi(z)K](K_\varphi+\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u\\
&=u^*R^*(\alpha)(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1}\frac{\varphi(z)-\bar{\varphi}(z)}{z-\bar{z}}K(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u\\
&=u^*R^*(\alpha)(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1}\frac{1}{z-\alpha}K\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u.
\end{aligned}$$

Identity (19) has been proved.
Now we shall prove identity (20).

$$\begin{aligned}
&R(\bar{z})(u-vs^{\mu*}(z))\\
&=R(\bar{z})(u-vu^*R^*(\alpha)(K_\varphi-\varphi(z)\,K)^{-1^*}R(\alpha)u)\\
&=R(\bar{z})(R^{-1}(\alpha)(K_\varphi-\bar{\varphi}(z)K)-vu^*R^*(\alpha))(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u\\
&=R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(K_\varphi-\bar{\varphi}(z)K-R(\alpha)vu^*R^*(\alpha))(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u\\
&=R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(K_\varphi-\bar{\varphi}(z)K+\varphi(T)K-K_\varphi)(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u\\
&=R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\varphi(T)-\bar{\varphi}(z))K(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u\\
&=K\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(K_\varphi-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u.
\end{aligned}$$

Identity (20) has been proved.

Now we shall prove identity (21).

$$\frac{\varphi(z)s^{\mu}(z)-\bar{\varphi}(z)s^{\mu *}(z)}{z-\bar{z}}$$
$$=\frac{1}{z-\bar{z}}(u^*R^*(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1}R(\alpha)u$$
$$-u^*R^*(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u)$$
$$=\frac{1}{z-\bar{z}}u^*R^*(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1}(\bar{\varphi}^{-1}(z)K_{\varphi}-K$$
$$\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}+K)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u$$
$$=u^*R^*(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1}\frac{\bar{\varphi}^{-1}(z)-\varphi^{-1}(z)}{z-\bar{z}}K_{\varphi}$$
$$\times(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u$$
$$=u^*R^*(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1}\frac{\beta-\alpha}{z-\beta}K_{\varphi}\frac{\beta-\alpha}{\bar{z}-\beta}(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u.$$

Identity (21) has been proved.
Now we shall prove identity (22).

$$R(\bar{z})(\varphi(T)u-v\bar{\varphi}(z)s^{\mu *}(z))$$
$$=R(\bar{z})(\varphi(T)u-v\bar{\varphi}(z)u^*R^*(\alpha)(K_{\varphi}-\varphi(z)K)^{-1^*}R(\alpha)u)$$
$$=R(\bar{z})(\varphi(T)R^{-1}(\alpha)(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^*$$
$$-vu^*R^*(\alpha))(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u$$
$$=R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\bar{\varphi}^{-1}(z)\varphi(T)K_{\varphi}$$
$$-\varphi(T)K-R(\alpha)vu^*R^*(\alpha))(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u$$
$$=R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\bar{\varphi}^{-1}(z)\varphi(T)K_{\varphi}-K_{\varphi})(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u$$
$$=R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\varphi(T)-\bar{\varphi}(z))\bar{\varphi}^{-1}(z)K_{\varphi}(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u$$
$$=\frac{1}{\bar{z}-\alpha}\bar{\varphi}^{-1}(z)K_{\varphi}(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u$$
$$=K_{\varphi}\frac{\beta-\alpha}{\bar{z}-\beta}(\varphi^{-1}(z)K_{\varphi}-K)^{-1^*}R(\alpha)u.$$

Identity (22) has been proved.
Now we shall prove identity (23).

$$\frac{s^M(z)-s^{M*}(z)}{z-\bar{z}}$$
$$=\frac{s^M(z)}{z-\bar{z}}[v^*R^*(\alpha)(K_{\varphi}-\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v$$
$$-v^*R^*(\alpha)(K_{\varphi}-\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}R(\alpha)v]s^{M*}(z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{s^M(z)}{z-\bar z} v^* R^*(\alpha)(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}\\
&\times[K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T) - K_\varphi + \bar\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T)]\\
&\times(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*} R(\alpha)vs^{M^*}(z)\\
&= s^M(z)v^*R^*(\alpha)(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}\frac{\bar\varphi^{-1}(z)-\varphi^{-1}(z)}{z-\bar z}\\
&\times\varphi(T)K\varphi^*(T)(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)vs^{M^*}(z)\\
&= s^M(z)v^*R^*(\alpha)(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}\\
&\times\frac{\beta-\alpha}{z-\beta}\varphi(T)K\varphi^*(T)\frac{\beta-\alpha}{\bar z-\beta}\\
&\times(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)vs^{M^*}(z).
\end{aligned}
$$

Identity (23) has been proved.
Now we shall prove identity (24).

$$
\begin{aligned}
&R(\bar z)(u - vs^{M^*}(z))\\
&= R(\bar z)(uv^*R^*(\alpha)(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v - v)s^{M^*}(z)\\
&= R(\bar z)R^{-1}(\alpha)(R(\alpha)uv^*R^*(\alpha) - (K_\varphi - \bar\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T)))\\
&\times(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)vs^{M^*}(z)\\
&= R(\bar z)R^{-1}(\alpha)(-K\varphi^*(T) + \bar\varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))\\
&\times(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)vs^{M^*}(z)\\
&= R(\bar z)R^{-1}(\alpha)(-I + \bar\varphi^{-1}(z)\varphi(T))K\varphi^*(T)\\
&\times(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)vs^{M^*}(z) = \frac{\bar\varphi^{-1}(z)}{\bar z-\alpha}K\varphi^*(T)\\
&\times(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)vs^{M^*}(z)\\
&= K\frac{\beta-\alpha}{\bar z-\beta}\varphi^*(T)(K_\varphi - \varphi^{-1}(z)\varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)vs^{M^*}(z).
\end{aligned}
$$

Identity (24) has been proved.
Now we shall prove identity (25).

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varphi(z)s^M(z) - \bar\varphi(z)s^{M^*}(z)}{z-\bar z}\\
&= \frac{\varphi(z)s^M(z)}{z-\bar z}(\bar\varphi^{-1}(z)s^{M^{-1^*}}(z) - \varphi^{-1}(z)s^{M^{-1}}(z))\bar\varphi(z)s^{M^*}(z)\\
&= \frac{\varphi(z)s^M(z)}{z-\bar z}(v^*R^*(\alpha)(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v\\
&-v^*R^*(\alpha)(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}R(\alpha)v)\bar\varphi(z)s^{M^*}(z)\\
&= \frac{\varphi(z)s^M(z)}{z-\bar z}v^*R^*(\alpha)(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}
\end{aligned}
$$

$$\times(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T) - \bar{\varphi}(z)K_\varphi + \varphi(T)K\varphi^*(T))$$
$$\times(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z)$$
$$= \varphi(z)s^M(z)v^*R^*(\alpha)(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}\frac{\varphi(z)-\bar{\varphi}(z)}{z-\bar{z}}K_\varphi \times$$
$$\times(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z)$$
$$= \varphi(z)s^M(z)v^*R^*(\alpha)(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1}$$
$$\times\frac{1}{z-\alpha}K_\varphi\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z).$$

Identity (25) has been proved.

Now we shall prove identity (26).

$$R(\bar{z})(\varphi(T)u - v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z))$$
$$= R(\bar{z})(\varphi(T)uv^*R^*(\alpha) - R^{-1}(\alpha)(\varphi(z)K_\varphi$$
$$-\varphi(T)K\varphi^*(T))^*)(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z)$$
$$= R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\varphi(T)R(\alpha)uv^*R^*(\alpha) - \bar{\varphi}(z)K_\varphi$$
$$+\varphi(T)K\varphi^*(T))(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z)$$
$$= R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\varphi(T)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T) - \bar{\varphi}(z)K_\varphi$$
$$+\varphi(T)K\varphi^*(T))(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z)$$
$$= R(\bar{z})R^{-1}(\alpha)(\varphi(T) - \bar{\varphi}(z))K_\varphi$$
$$\times(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z)$$
$$= K_\varphi\frac{1}{\bar{z}-\alpha}(\varphi(z)K_\varphi - \varphi(T)K\varphi^*(T))^{-1^*}R(\alpha)v\bar{\varphi}(z)s^{M^*}(z).$$

Identity (26) has been proved. Theorem 5 is proved.

REFERENCES

1. Dyukarev Yu.M., Katsnelson V.E. Multiplicative and additive classes of Stieltjes analytic matrix-valued functions, and interpolation problems associated with them.1 // Teor. Funkt., Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 1981. – Vyp. 36. – P.13–27.

2. Krein M.G., Basic considerations on the representation theory of Hermitian operators with defect index (m,m) // Ukr. Mat. Zhurnal. – 1949. – V. 1:2. – P. 3–66.

3. Kovalishina I.V., Potapov V.P. An indefinite matrix in the Nevanlinna-Pick problem // Akad. Nauk Armyan. SSR Dokl. – 1974. – V. 59. – P. 17–22.

4. Kovalishina I.V., Analytic theory of a class of interpolation problems // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. – 1983. – V. 47.– P. 455–497.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.968+517.956 № 475, 2000, с. 230–240

Boundary equations in two main dynamic problems for thermoelastic media

I. Y. Chudinovich, O. A. Dumina

Kharkov National University, Ukraine

Two mixed boundary value problems for thermoelastic media are under consideration. Their solutions are represented by the dynamic analogues of thermoelastic single and double-layer potentials. These representations lead to systems of nonstationary boundary equations. The unique solvability of these systems is proved in one-parameter scale of Sobolev type function spaces.

1. Introduction

The foundations of the potential theory in classical dynamic elasticity problems are established in [1–4]. The goal of the paper is to study boundary equations in two main dynamic problems for thermoelastic media by the methods developed in [2–4]. We begin with the statement of the problem.

Let Γ of class C^2 be a closed surface that divides $\mathbf{R}^3$ on the domains Ω^+ (interior) and Ω^- (exterior). We denote by $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ a displacement at a point $x = (x_1, x_2, x_3)$ at the moment t. By $\theta(x,t)$ the difference between present and initial $T_0 > 0$ medium temperature is denoted. Let Ω^+ or Ω^- be occupied by homogeneous elastic medium with elastic coefficients a_{ijkl}, $i,j,k,l = 1,2,3$. It is known that the elastic coefficients satisfy the symmetry condition $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk}$ for each value of the indices and the elliptic condition $a_{ijkl}\eta_{ij}\eta_{kl} \geq a_0\eta_{ij}\eta_{ij}$, $\forall \eta_{ij} = \eta_{ji} \in \mathbf{R}$ with a positive a_0. Here and later on the summation over repeated Latin indices is used. We denote by β_{ij}, $i,j = 1,2,3$ the coefficients of the symmetric heat stress tensor. If volume forces and outer heat sources are absent, then the displacement field and the temperature $U = (u,\theta)$ in $G^+ = \Omega^+ \times \mathbf{R}_+$ or $G^- = \Omega^- \times \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}_+ = (0,\infty)$ are the solution of

$$\begin{cases} \rho\partial_t^2 u_i - \partial_j\left(a_{ijkl}\partial_l u_k\right) + \partial_j\left(\beta_{ij}\theta\right) = 0, \quad i = 1,2,3, \\ c_\varepsilon\partial_t\theta - \partial_k\left(\lambda_{kj}\partial_j\theta\right) + \beta_{kj}T_0\partial_j\partial_t u_k = 0, \end{cases} (x,t) \in G^\pm, \qquad (1)$$

[1,5] where $c_\varepsilon > 0$ is the constant specific heat of the medium, ρ is the constant density of the medium and $\{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^3$ are the positive definite symmetric tensor.

The first main problem $\mathrm{I}^{\pm}$ with zero initial data consists in finding the solution of (1) that satisfies zero initial conditions and boundary conditions of the first kind on $\Sigma^{+} = \Gamma \times \mathbf{R}_{+}$:

$$u(x,0) = \partial_t u(x,0) = \theta(x,0) = 0, \qquad x \in \Omega^{\pm},$$
$$U^{\pm}(x,t) = F(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^{+}.$$

The boundary conditions in the second main problem $\mathrm{II}^{\pm}$ take the form

$$(TU)^{\pm}(x,t) = G(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma^{+}$$

where $(TU)_i = \begin{cases} (a_{ijkl}\partial_k u_l - \beta_{ij}\theta)\, n_j(x),\ i = 1,2,3, \\ (\lambda_{lj}\partial_j\theta)\, n_l(x),\ i = 4, \end{cases}$ $x \in \Gamma$. Here and later on the superscripts $\pm$ denote limiting values of corresponding functions when $(x,t) \to \Sigma^{+}$ from inside $G^{\pm}$, respectively. The assumption of homogeneity of the equations and the initial conditions does not restrict the generality of the problem essentially since one can transfer existing nonhomogeneities to the boundary conditions. We remark that both the problems are stated formally, their correct formulation will be given after introducing the necessary functional spaces.

2. Function spaces

To simplify notations we use the same symbols for spaces of vector and scalar functions and for their norms, it will not lead to any misunderstandings. Moreover, we use the same symbol U for functions $U(x,t)$ in spaces of originals and $U(x,p) = \mathcal{L}U(x,t)$ for their Laplace transformations with respect to t, where $\mathcal{L}$ is the Laplace transformation operator. Let $H_m(\mathbf{R}^3)$, $m \in \mathbf{R}$ be the standard Sobolev spaces [6,7]. For each $p \in \mathbf{C}$, $m \in \mathbf{R}$ we introduce the spaces $H_{m,p}(\mathbf{R}^3)$ coinciding with $H_m(\mathbf{R}^3)$ as sets with their norms

$$\|u\|^2_{m,p} = \int_{\mathbf{R}^3} (1 + |\xi|^2 + |p|^2)^m |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi$$

where $\tilde{u}(\xi)$ is the distributional Fourier transformation of $u(x)$. Let $\pi^{\pm}$ be the restriction operators from $\mathbf{R}^3$ to $\Omega^{\pm}$. By $H_m(\Omega^{\pm})$ and $H_{m,p}(\Omega^{\pm})$ we denote the spaces of restrictions to $\Omega^{\pm}$ of elements of $H_m(\mathbf{R}^3)$ and $H_{m,p}(\mathbf{R}^3)$, respectively, with the norms:

$$\|u\|_{m,\Omega^{\pm}} = \inf_{v \in H_m(\mathbf{R}^3):\pi^{\pm}v = u} \|v\|_m\,, \qquad \|u\|_{m,p;\Omega^{\pm}} = \inf_{v \in H_m(\mathbf{R}^3):\pi^{\pm}v = u} \|v\|_{m,p}$$

where $\|v\|_m$ is the norm of $H_m(\mathbf{R}^3)$. The spaces $H_m(\Gamma)$ and $H_{m,p}(\Gamma)$ are introduced by the standard scheme using the resolution of identity and the corresponding local coordinates [6]. Norms in these spaces we denote by $\|u\|_{m;\Gamma}$ and $\|u\|_{m,p;\Gamma}$, respectively. Finally, we introduce the spaces $\mathcal{H}_{m,p}(\Omega^{\pm}) =$

$H_{m,p}(\Omega^{\pm}) \times H_m(\Omega^{\pm})$ and $\mathcal{H}_{m,p}(\Gamma) = H_{m,p}(\Gamma) \times H_m(\Gamma)$ of four-component vector functions $U = (u, \theta)$ whose first three components u belong to $H_{m,p}(\Omega^{\pm})$ or $H_{m,p}(\Gamma)$ and the last component θ belongs to $H_m(\Omega^{\pm})$ or $H_m(\Gamma)$, respectively.

For each $\kappa > 0$.we denote by $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(\Omega^{\pm})$, $m, k \in \mathbf{R}$ the spaces of four-component vector functions $U(x,p)$, $x \in \Omega^{\pm}$, $p \in \mathbf{C}_\kappa = \{p \in \mathbf{C} : \operatorname{Re} p = \sigma > \kappa\}$ that set a holomorphic map from $\mathbf{C}_\kappa$ into the space of four-component vector functions $H_m(\Omega^{\pm})$ with the finite norms defined by

$$\|U\|^2_{m,k,\kappa;\Omega^{\pm}} = \sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|)^{2k} \|U\|^2_{m,p;\Omega^{\pm}}\, d\tau, \qquad p = \sigma + i\tau.$$

Similarly the spaces $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(\Gamma)$ of four-component vector functions defined on the boundary surface Γ are introduced with the norms

$$\|G\|^2_{m,k,\kappa;\Gamma} = \sup_{\sigma > \kappa} \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|)^{2k} \|G\|^2_{m,p;\Gamma}\, d\tau, \qquad p = \sigma + i\tau.$$

Finally, we introduce the spaces $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(G^{\pm})$ and $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(\Sigma^{+})$, formed by inverse Laplace transformations of elements of $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(\Omega^{\pm})$ and $\mathcal{H}_{\mathcal{L},m,k;\kappa}(\Gamma)$ with their norms

$$\|U\|_{m,k,\kappa;G^{\pm}} = \|\mathcal{L}U\|_{m,k,\kappa;\Omega^{\pm}}, \qquad \|U\|_{m,k,\kappa;\Sigma^{+}} = \|\mathcal{L}U\|_{m,k,\kappa;\Gamma},$$

respectively. Let $\gamma^{\pm}$ be the trace operators mapping the spaces $\mathcal{H}_{r;m,k,\kappa}(G^{\pm})$ onto $\mathcal{H}_{r;m-1/2,k,\kappa}(\Sigma^{+})$ continuously for $m > \frac{1}{2}$ and $k \in \mathbf{R}$.

Now we give the correct formulations of the problems $\mathrm{I}^{\pm}$ and $\mathrm{II}^{\pm}$. An element $U = (u, \theta) \in \mathcal{H}_{r;1,0,\kappa}(G^{\pm})$ is a solution of the problem $\mathrm{I}^{\pm}$ if $\gamma^{\pm} U = F$ and the equality

$$\int_{G^{\pm}} (-\rho \partial_t u_i \partial_t v_i + a_{ijkl} \partial_l u_k \partial_j v_i + \beta_{ij} \partial_i \theta v_i - c_\varepsilon \theta \partial_t \eta +$$
$$\lambda_{kj} \partial_j \theta \partial_k \eta - \beta_{kj} T_0 \partial_t u_k \partial_j \eta)\, dx dt = 0,$$

holds for any finite four-component vector function $V(x,t) = (v(x,t), \eta(x,t)) \in C^\infty\left(\overline{G^{\pm}}\right)$, $\operatorname{supp} V \subset \Omega^{\pm} \times \overline{\mathbf{R}_+}$. The solution of $\mathrm{II}^{\pm}$ is an element $U \in \mathcal{H}_{r;1,0,\kappa}(G^{\pm})$ that satisfies the equality

$$\int_{G^{\pm}} (-\rho \partial_t u_i \partial_t v_i + a_{ijkl} \partial_l u_k \partial_j v_i + \beta_{ij} \partial_i \theta v_i - c_\varepsilon \theta \partial_t \eta + \lambda_{kj} \partial_j \theta \partial_k \eta -$$
$$\beta_{kj} T_0 \partial_t u_k \partial_j \eta)\, dx dt = \pm \int_{\Sigma^{+}} (G_i v_i + G_4 \eta)\, ds dt$$

for any function $V(x,t) \in C^\infty\left(\overline{G^{\pm}}\right)$ with a compact support.

3. Thermoelastic potentials

Denote by T the 4×4 matrix differential operator of the theory of thermoelasticity. Let $\Phi(x,t)$ be the fundamental solution for T which is equal to zero as $t<0$. $\Phi(x,t)$ is the 4×4 matrix, satisfying

$$\begin{cases} T\Phi(x,t) = \delta(x,t)\,I, & (x,t) \in \mathbf{R}^4, \\ \Phi(x,t) = 0, & x \in \mathbf{R}^3, t < 0 \end{cases}$$

where $\delta(x,t)$ is the Dirac function and I is the unit 4×4 matrix. We introduce the thermoelastic single-layer potential with defined on $\Sigma = \Gamma \times \mathbf{R}$ four-component density $\alpha(x,t)$ by

$$(V\alpha)(x,t) = \int_{\Sigma} \Phi(x-y,t-\tau)\,\alpha(y,\tau)\,ds_y d\tau.$$

The thermoelastic double-layer potential with a density $\beta(x,t)$ is defined by

$$(W\beta)(x,t) = \int_{\Sigma} T(x-y,t-\tau)\,\beta(y,\tau)\,ds_y d\tau$$

where $T(x-y,t-\tau) = \left[\tilde{T}_y \Phi^T(x-y,t-\tau)\right]^T$, "$T$" is the symbol of transposition and $\tilde{T}_y$ is the boundary differential operation

$$\left(\tilde{T}V\right)_i = \begin{cases} (a_{ijkl}\partial_k v_l + T_0\beta_{ij}\partial_t\eta)\,n_j(x), & i = 1,2,3, \\ (\lambda_{lj}\partial_j\eta)\,n_l(x), & i = 4 \end{cases}$$

with respect to the variable y. The properties of the single and double-layer potentials are studied in [5]. It was shown there that at least for smooth and finite on Σ densities both the potentials satisfy the homogeneous thermoelastic equation outside Γ. Moreover, if the densities are equal to zero when $t<0$, then also they satisfy zero initial data. The single-layer potential is continuous in the whole space. The double-layer potential has a jump when a point passes through the boundary surface:

$$\begin{aligned} (W\beta)^{\pm}(x,t) &= \mp\frac{1}{2}\beta(x,t) + (W\beta)^0(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma, \\ (TW\beta)^{+}(x,t) &= (TW\beta)^{-}(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma \end{aligned}$$

where $(W\beta)^0(x,t)$, is the direct value of the corresponding integral.

Representing the solution of the problems $\mathrm{I}^{\pm}$ in a form

$$U(x,t) = (V\alpha)(x,t), \qquad (x,t) \in G^{\pm}, \tag{2}$$

one comes to the system of boundary equations which we write as

$$\mathcal{V}\alpha = F. \tag{3}$$

The representation of the solution to the same problem in the form

$$U(x,t) = (W\beta)(x,t), \qquad (x,t) \in G^{\pm} \tag{4}$$

leads to the system

$$\mathcal{W}^{\pm}\beta = F. \tag{5}$$

The analogous representations of the solution to the problems $\mathrm{II}^{\pm}$ yield the systems of equations

$$\mathcal{K}^{\pm}\alpha = G, \tag{6}$$

$$\mathcal{F}\beta = G, \tag{7}$$

respectively. The goal of the article is to study the unique solvability of these systems.

After the transition to the Laplace transformation with respect to the time variable the single and double-layer potentials take the form

$$(V_p\alpha)(x,p) = \int\limits_{\Gamma} \Phi(x-y,p)\,\alpha(y,p)\,ds_y,$$

$$(W_p\beta)(x,p) = \int\limits_{\Gamma} T(x-y,p)\,\beta(y,p)\,ds_y$$

where $\Phi(x,p)$ is the fundamental solution for the operator $\mathcal{T}_p$ that arises from the operator $\mathcal{T}$ after the Laplace transformation: $T(x-y,p) = \left[\tilde{T}_{p,y}\Phi^T(x-y,p)\right]^T$ and $\tilde{T}_{p,y}$ is the boundary differential operation

$$\left(\tilde{T}_pV\right)_i = \begin{cases} (a_{ijkl}\partial_k v_l + T_0\beta_{ij}p\eta)\,n_j(x), & i = 1,2,3, \\ (\lambda_{lj}\partial_j\eta)\,n_l(x), & i = 4 \end{cases}$$

with respect to the variable y.

We introduce the operators $\mathcal{V}_p$, $\mathcal{W}_p^{\pm}$, $\mathcal{K}_p^{\pm}$ and $\mathcal{F}_p$ acting on smooth densities by

$$\begin{array}{ll} \mathcal{V}_p\alpha = (V_p\alpha)(x,p), & \mathcal{W}_p^{\pm}\beta = (W_p\beta)^{\pm}(x,p), \\ \mathcal{K}_p^{\pm}\alpha = (TV_p\alpha)^{\pm}(x,p), & \mathcal{F}_p\beta = (TW_p\beta)(x,p), \end{array} \qquad x \in \Gamma$$

where after transition to the Laplace transformation the superscripts $\pm$ denote the limiting values of the corresponding functions as $x \to \Gamma$ from inside $\Omega^{\pm}$ respectively.

4. Properties of the boundary operators

Accomplishing the Laplace transformation in (1) and in the boundary conditions we obtain the problems $\mathrm{I}_p^{\pm}$ and $\mathrm{II}_p^{\pm}$ that consist in seeking $U(x,p) = (u(x,p), \theta(x,p)) \in \mathcal{H}_{1,p}(\Omega^{\pm})$ that satisfies

$$\begin{cases} \rho p^2 u_i - \partial_j(a_{ijkl}\partial_l u_k) + \partial_j(\beta_{ij}\theta) = 0, & i = 1,2,3, \\ c_\varepsilon p\theta - \partial_k(\lambda_{kj}\partial_j\theta) + \beta_{kj}T_0 p\partial_j u_k = 0, \end{cases} \quad x \in \Omega^{\pm} \tag{8}$$

and $U^{\pm}(x,p) = F(x,p)$ or $(TU)^{\pm}(x,p) = G(x,p)$, $x \in \Gamma$, respectively.

The solvability of the elliptic problems $\mathrm{I}_p^{\pm}$ and $\mathrm{II}_p^{\pm}$ is proved easily by the standard methods. Denote by $(\cdot,\cdot)_{0,\Omega^{\pm}}$, $\|\cdot\|_{0,\Omega^{\pm}}$ the inner product and the norm of the space $L^2(\Omega^{\pm})$, by $(\cdot,\cdot)_{0,\Gamma}$ and $\|\cdot\|_{0,\Gamma}$ the inner product and the norm of the space $L^2(\Gamma)$, respectively. By $(TU)_e$ we denote the first three components of the boundary differential expression TU and by $(TU)_t$ the last one. From (8) it follows that

$$\begin{aligned} \rho p^2 \|u\|^2_{0,\Omega^{\pm}} + E_{\pm}(u,u) - (\theta, \beta_{ij}\partial_j u_i)_{0,\Omega^{\pm}} &= \pm\left((TU)^{\pm}_e, u^{\pm}\right)_{0,\Gamma}, \\ c_{\varepsilon}\bar{p}\,\|\theta\|^2_{0,\Omega^{\pm}} + \Lambda_{\pm}(\theta,\theta) + T_0\bar{p}\,(\theta, \beta_{ij}\partial_j u_i)_{0,\Omega^{\pm}} &= \pm\left(\theta^{\pm}, (TU)^{\pm}_t\right)_{0,\Gamma} \end{aligned} \tag{9}$$

where

$$E_{\pm}(u,v) = (a_{ijkl}\partial_k u_l, \partial_j v_i)_{0,\Omega^{\pm}}, \qquad \Lambda_{\pm}(\theta,\eta) = (\lambda_{kj}\partial_k\theta, \partial_j\eta)_{0,\Omega^{\pm}}.$$

Multiplying the first equation in (9) by $T_0|p|^{-2}\bar{p}^2$ and the second by $|p|^{-2}\bar{p}$, and adding the resulting relations one obtains

$$\begin{aligned} &\rho T_0 |p|^2 \|u\|^2_{0,\Omega^{\pm}} + T_0 E_{\pm}(u,u) + c_{\varepsilon}\|\theta\|^2_{0,\Omega^{\pm}} + \sigma^{-1}\Lambda_{\pm}(\theta,\theta) = \\ &= \pm\sigma^{-1}\mathrm{Re}\left\{T_0\bar{p}\left((TU)^{\pm}_e, u^{\pm}\right)_{0,\Gamma} + \left(\theta^{\pm}, (TU)^{\pm}_t\right)_{0,\Gamma}\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

We denote by the same letter c any positive constant arising in estimates that does not depend on parameter $p \in \mathbf{C}_{\kappa}$. Note that the constants c may depend on κ.Using the Corn inequality [6] and ellipticity of the tensors $\{a_{ijkl}\}^3_{i,j,k,l=1}$ and $\{\lambda_{ij}\}^3_{i,j=1}$ we obtain the estimate

$$\|U\|^2_{1,p;\Omega^{\pm}} \le c\left\{|p|\left|((TU)^{\pm}_e, u^{\pm})_{0,\Gamma}\right| + \left|\left(\theta^{\pm}, (TU)^{\pm}_t\right)_{0,\Gamma}\right|\right\} \tag{11}$$

for each $p \in \mathbf{C}_{\kappa}$.

Let $U = (u,\theta) \in \mathcal{H}_{1,p}(\Omega^{\pm})$ be the solution of the (8) where $F = (f,\xi) \in \mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$, $\Psi = (\psi,\zeta) \in \mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$, $V = (v,\eta) \in \mathcal{H}_{1,p}(\Omega^{\pm})$ is an extension of Ψ into $\Omega^{\pm}$, that is, $\gamma^{\pm}V = \Psi$ where $\gamma^{\pm}$ are the trace operators mapping continuously $\mathcal{H}_{1,p}(\Omega^{\pm})$ onto $\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$. Poincaré-Steklov operators acting on $F \in \mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ are introduced by

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{N}^{\pm}_p F, \Psi\right)_{0,\Gamma} &= \left(\left(\mathcal{N}^{\pm}_p F\right)_e, \psi\right)_{0,\Gamma} + \left(\left(\mathcal{N}^{\pm}_p F\right)_t, \zeta\right)_{0,\Gamma}, \\ \pm\left(\left(\mathcal{N}^{\pm}_p F\right)_e, \psi\right)_{0,\Gamma} &= \rho p^2 (u,v)_{0,\Omega^{\pm}} + E_{\pm}(u,v) - (\theta, \beta_{ij}\partial_j v_i)_{0,\Omega^{\pm}}, \\ \pm\left(\left(\mathcal{N}^{\pm}_p F\right)_t, \zeta\right)_{0,\Gamma} &= c_{\varepsilon} p\,(\theta,\eta)_{0,\Omega^{\pm}} + \Lambda_{\pm}(\theta,\eta) + T_0 p\,(\beta_{ij}\partial_j u_i, \eta)_{0,\Omega^{\pm}}. \end{aligned}$$

Lemma 1. *For each $p \in \mathbf{C}_{\kappa}$, $\kappa > 0$ the operators $\mathcal{N}^{\pm}_p$ are isomorphisms from $\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ to $\mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$. The estimates*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}^{\pm}F\|_{-1/2,p;\Gamma} &\le c\,|p|^2\,\|F\|_{1/2,p;\Gamma}, \\ \|F\|_{1/2,p;\Gamma} &\le c\,|p|\,\|\mathcal{N}^{\pm}F\|_{-1/2,p;\Gamma} \end{aligned} \tag{12}$$

hold.

Proof. From the definition of the Poincaré-Steklov operators it follows that

$$\left|\left(\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_e,\psi\right)_{0,\Gamma}\right| \le c\left\{\|u\|_{1,p;\Omega^\pm}\|v\|_{1,p;\Omega^\pm}+\|\theta\|_{1,\Omega^\pm}\|v\|_{1,p;\Omega^\pm}\right\}\le$$
$$\le c\,\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}\|v\|_{1,p;\Omega^\pm},$$

$$\left|\left(\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_t,\zeta\right)_{0,\Gamma}\right| \le c\left\{|p|\,\|\theta\|_{1,\Omega^\pm}\|\eta\|_{1,\Omega^\mp}+T_0\,|p|\,\|u\|_{1,p;\Omega^\pm}\|\eta\|_{1,\Omega^\pm}\right\}\le$$
$$\le c\,|p|\,\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}\|\eta\|_{1,\Omega^\pm}$$

or

$$\left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_e\right\|_{-1/2,p;\Gamma}\le c\,\|U\|_{1,p;\Omega^\pm},\qquad \left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_t\right\|_{-1/2,p;\Gamma}\le c\,|p|\,\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}. \tag{13}$$

It follows from (10) and (13) that

$$\|U\|^2_{1,p;\Omega^\pm}\le c\{|p|\left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_e\right\|_{-1/2,p;\Gamma}\|f\|_{1/2,p;\Gamma}+\|\xi\|_{1/2;\Gamma}\left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_t\right\|_{-1/2;\Gamma}\}\le$$
$$\le c\left\{|p|\,\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}\|f\|_{1/2,p;\Gamma}+|p|\,\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}\|\xi\|_{1/2;\Gamma}\right\},$$

hence,

$$\|U\|_{1,p;\Omega^\pm}\le c\,|p|\,\|F\|_{1/2,p;\Gamma},$$
$$\left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_e\right\|_{-1/2,p;\Gamma}\le c\,|p|\,\|F\|_{1/2,p;\Gamma},\qquad \left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_t\right\|_{-1/2;\Gamma}\le c\,|p|^2\,\|F\|_{1/2,p;\Gamma},$$

that is, $\left\|\mathcal{N}_p^{\pm}F\right\|_{-1/2,p;\Gamma}\le c\,|p|^2\,\|F\|_{1/2,p;\Gamma}$.

The second inequality follows from the trace theorem and (10):

$$\|F\|^2_{1/2,p;\Gamma}\le c\{|p|\left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_e\right\|_{-1/2,p;\Gamma}\|f\|_{1/2,p;\Gamma}+\|\xi\|_{1/2;\Gamma}\left\|\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F\right)_t\right\|_{-1/2;\Gamma}\}\le$$
$$\le c\,|p|\,\|F\|_{1/2,p;\Gamma}\left\|\mathcal{N}_p^{\pm}F\right\|_{-1/2,p;\Gamma},$$

that is, $\|F\|_{1/2,p;\Gamma}\le c\,|p|\left\|\mathcal{N}_p^{\pm}F\right\|_{-1/2,p;\Gamma}$. To complete the proof it is sufficient to verify that the ranges of the operators $\mathcal{N}_p^{\pm}$ are dense in the space $\mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$. If it is not true we find a nonzero element $\Psi=(\psi,\zeta)\in\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ such that $\left(\mathcal{N}_p^{\pm}F,\Psi\right)_{0,\Gamma}=0$ for each $F\in\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$. We take $F=(T_0p\psi,\zeta)\in\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ and construct the solution of (8) $U\in\mathcal{H}_{1,p}(\Omega^\pm)$. From (10) it follows that $U=0$, hence $F=0$ and $\Psi=0$. This contradiction completes the proof.

Now we start studying properties of the operator $\mathcal{V}_p$ generated by the single-layer potential $(V_p\alpha)(x,p)$.

Lemma 2. *For each $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$ the operator $\mathcal{V}_p$ can be extended by continuity to the isomorphism between the spaces $\mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$ and $\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$. For each $\alpha \in \mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$ the estimates*

$$\begin{gathered} \|\mathcal{V}_p\alpha\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c\,|p|\,\|\alpha\|_{-1/2,p;\Gamma}\,, \\ \|\alpha\|_{-1/2,p;\Gamma} \leq c\,|p|^2\,\|\mathcal{V}_p\alpha\|_{1/2,p;\Gamma} \end{gathered} \tag{14}$$

hold.

Proof. Let α be a smooth four-component vector function defined on Γ. It was shown in [5] that one of the jump formulas for thermoelastic potentials has a form

$$(TV\alpha)^{\pm}(x,t) = \pm\frac{1}{2}\alpha(x,t) + (TV\alpha)^{0}(x,t)\,, \qquad (x,t) \in \Sigma \tag{15}$$

where $(TV\alpha)^0(x,t)$ is the direct value of the corresponding integral. Subtracting the second equality in (15) from the first one we obtain after Laplace transformation the equality

$$\mathcal{N}_p^+\mathcal{V}_p\alpha - \mathcal{N}_p^-\mathcal{V}_p\alpha = \alpha. \tag{16}$$

Let $U(x,p) = (V_p\alpha)(x,p)$, $x \in \mathbf{R}^3$. From the trace theorem it follows that

$$\|\mathcal{V}_p\alpha\|^2_{1/2,p;\Gamma} \leq c\left\{\|U\|^2_{1,p;\Omega^-} + \|U\|^2_{1,p;\Omega^+}\right\}.$$

From (10) and (16) we have $\|\mathcal{V}_p\alpha\|^2_{1/2,p;\Gamma} \leq c\,|p|\,\|\mathcal{V}_p\alpha\|_{1/2,p;\Gamma}\,\|\alpha\|_{-1/2,p;\Gamma}$ and the validity of the first inequality in (14) is proved. This inequality allows us to extend by continuity the operators $\mathcal{V}_p$ from the dense sets to the spaces $\mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$.

Equality (16) proves that $\mathcal{V}_p$ is injective. Since $\mathcal{V}_p^{-1} = \mathcal{N}_p^+ - \mathcal{N}_p^-$ with the help of the first inequality in (12) we obtain the second inequality in (14). The density of the ranges of $\mathcal{V}_p$ is verified as in Lemma 1.

Going over to studying properties of the operators $\mathcal{W}_p^{\pm}$ we note that just as in the classical elasticity theory the following easily checked equalities

$$(W_p\beta)(x,p) = \begin{cases} \left(V_p\mathcal{N}_p^-\beta\right)(x,p), & x \in \Omega^+, \\ \left(V_p\mathcal{N}_p^+\beta\right)(x,p), & x \in \Omega^- \end{cases}$$

hold at least for smooth densities β. Hence, for smooth densities β the equalities

$$\mathcal{W}_p^{\pm}\beta = \mathcal{V}_p\mathcal{N}_p^{\mp}\beta. \tag{17}$$

are valid. The next statement is the obvious consequence of (17) and Lemmas 1 and 2.

Lemma 3. *For each $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$ the operators $\mathcal{W}_p^{\pm}$ can be extended by continuity to the isomorphisms of $\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$. For each $\beta \in \mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ the estimates*

$$\begin{gathered} \left\|\mathcal{W}_p^{\pm}\beta\right\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c\,|p|^3\,\|\beta\|_{1/2,p;\Gamma}\,, \\ \|\beta\|_{1/2,p;\Gamma} \leq c\,|p|^3\left\|\mathcal{W}_p^{\pm}\beta\right\|_{1/2,p;\Gamma} \end{gathered} \tag{18}$$

hold.

Consider now the boundary operators $\mathcal{K}_p^{\pm}$ and $\mathcal{F}_p$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p^{\pm} &= \mathcal{N}_p^{\pm}\mathcal{V}_p, \\ \mathcal{F}_p = \mathcal{F}_p^{\pm} &= \mathcal{N}_p^{\pm}\mathcal{W}_p^{\pm} \end{aligned} \tag{19}$$

and the inverse ones

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{K}_p^{\pm}\right)^{-1} &= (\mathcal{V}_p)^{-1}\left(\mathcal{N}_p^{\pm}\right)^{-1}, \\ (\mathcal{F}_p)^{-1} = \left(\mathcal{F}_p^{\pm}\right)^{-1} &= \left(\mathcal{W}_p^{\pm}\right)^{-1}\left(\mathcal{N}_p^{\pm}\right)^{-1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Lemma 4. *For each $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$ the operators $\mathcal{K}_p^{\pm}$ can be extended by continuity to the isomorphisms of $\mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$. For each $\alpha \in \mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$ the estimates*

$$\begin{aligned} \left\|\mathcal{K}_p^{\pm}\alpha\right\|_{-1/2,p;\Gamma} &\le c\,|p|^3\,\|\alpha\|_{-1/2,p;\Gamma}, \\ \|\alpha\|_{-1/2,p;\Gamma} &\le c\,|p|^3\left\|\mathcal{K}_p^{\pm}\alpha\right\|_{-1/2,p;\Gamma} \end{aligned} \tag{21}$$

hold.

Evidently this statement follows from Lemmas 1,2 and (19), (20).

Lemma 5. *For each $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$ the operator $\mathcal{F}_p$ can be extended by continuity to the isomorphism between $\mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ and $\mathcal{H}_{-1/2,p}(\Gamma)$. For each $\beta \in \mathcal{H}_{1/2,p}(\Gamma)$ the estimates*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}_p\beta\|_{-1/2,p;\Gamma} &\le c\,|p|^5\,\|\beta\|_{1/2,p;\Gamma}, \\ \|\beta\|_{1/2,p;\Gamma} &\le c\,|p|\,\|\mathcal{F}_p\beta\|_{-1/2,p;\Gamma} \end{aligned} \tag{22}$$

hold.

Proof. The first part of the Lemma is the corollary of Lemmas 1,3 and (19), (20). The second inequality in (22) is proved just as in Lemma 2 by means of the jump formulas for thermoelastic potentials [5]

$$(W\beta)^{\pm}(x,t) = \mp\frac{1}{2}\beta(x,t) + (W\beta)^0(x,t), \qquad (x,t) \in \Sigma$$

where $(W\beta)^0(x,t)$ is the direct value of the corresponding integral.

5. The solvability of the systems of boundary equations

Theorem 1. *Systems (3), (5)-(7) are uniquely solvable for any vector functions $F \in \mathcal{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$, $G \in \mathcal{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$. Their solving operators are continuous in the following spaces*

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^{-1} &: \mathcal{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \to \mathcal{H}_{r;-1/2,k-2,\kappa}(\Sigma^+), \\ (\mathcal{W}^{\pm})^{-1} &: \mathcal{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \to \mathcal{H}_{r;1/2,k-3,\kappa}(\Sigma^+), \\ (\mathcal{K}^{\pm})^{-1} &: \mathcal{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \to \mathcal{H}_{r;-1/2,k-3,\kappa}(\Sigma^+), \\ \mathcal{F}^{-1} &: \mathcal{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \to \mathcal{H}_{r;1/2,k-1,\kappa}(\Sigma^+) \end{aligned}$$

for any $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$.

Proof. After transition to the Laplace transformation system (3) takes the form $\mathcal{V}_p \alpha = F$. The solvability of this system for each $p \in \mathbf{C}_\kappa$ was proved in Lemma 2. Using the scheme developed in [2-4] one can make sure that if $F(x,p)$ is a holomorphic map from $\mathbf{C}_\kappa$ to $H_{1/2}(\Gamma)$, then $\alpha = \mathcal{V}^{-1} F$ is a holomorphic map from $\mathbf{C}_\kappa$ to $H_{-1/2}(\Gamma)$. Finally, from the second inequality in (14) it follows that for $\alpha(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\alpha(x,p)$ the inequalities

$$\|\alpha(x,t)\|^2_{-1/2,k-2,\kappa;\Sigma^+} = \sup_{\sigma>\kappa} \int_{\mathbf{R}} (1+|p|)^{2(k-2)} \|\alpha(x,p)\|^2_{-1/2,p;\Gamma}\, d\tau \le$$

$$\le c \sup_{\sigma>\kappa} \int_{\mathbf{R}} (1+|p|)^{2k} \|F(x,p)\|^2_{1/2,p;\Gamma}\, d\tau = \|F(x,t)\|^2_{1/2,k,\kappa;\Sigma^+}$$

hold. This yields the validity of the statement concerned system (3).

The statements concerned systems (5)-(7) are proved similarly.

Boundary equations (3), (5)-(7) being solved, we construct single and double-layer potentials with founded densities by (2), (4), respectively.

Theorem 2. *Let* $F(x,t) \in \mathcal{H}_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$, $\alpha(x,t)$ *and* $\beta(x,t)$ *be the solutions of (3) and (5), respectively. Then vector functions* $U(x,t) = (V\alpha)(x,t)$ *and* $U(x,t) = (W\beta)(x,t)$ *are elements of* $\mathcal{H}_{r;1,k-1,\kappa}(G^\pm)$ *and they are the solutions of* $I^\pm$ *when* $k \ge 1$.

Proof. From the inequality $\|U(x,p)\|_{1,p;\Omega^\pm} \le c|p| \|F(x,p)\|_{1/2,p;\Gamma}$ it follows that

$$\|U(x,t)\|^2_{1,k-1,\kappa;G^\pm} = \sup_{\sigma>\kappa} \int_{\mathbf{R}} (1+|p|)^{2(k-1)} \|U(x,p)\|^2_{1,p;\Omega^\pm}\, d\tau \le$$

$$\le \sup_{\sigma>\kappa} \int_{\mathbf{R}} (1+|p|)^{2k} \|F(x,p)\|^2_{1/2,p;\Gamma}\, d\tau = \|F(x,t)\|^2_{1/2,k,\kappa;\Sigma^+}.$$

This inequality and the easily verified statement that $U(x,p)$ is a holomorphic map from C_κ to $H_1(\Omega^\pm)$ complete the proof.

Theorem 3. *Let* $G(x,t) \in \mathcal{H}_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$, $k \in \mathbf{R}$, $\kappa > 0$, $\alpha(x,t)$ *and* $\beta(x,t)$ *be the solutions of (6) and (7), respectively. Then vector functions* $U(x,t) = (V\alpha)(x,t)$ *and* $U(x,t) = (W\beta)(x,t)$ *are elements of* $\mathcal{H}_{r;1,k-1,\kappa}(G^\pm)$ *and they are the solutions of* $II^\pm$ *when* $k \ge 1$.

This Theorem is proved similarly to the previous one.

REFERENCES

1. Kupradze V.D., Gegelia T.G., Bashelejshvily M.O., Burchuladze T.V. Three-dimensional problems of the mathematical elasticity and thermoelasticity theory. – M.: Nauka, 1976. – 664 p. (In Russian)

2. Chudinovich I.Yu. Boundary equation method in the dynamic problems for elastic media. – Kharkov: Kharkov State University Press, 1991. – 135 p. (In Russian)

3. Chudinovich I.Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems // Math. Methods Appl. Sci. – 1993. – **16**. – P. 203–215.

4. Chudinovich I.Yu. Methods of potential theory in the dynamics of elastic media // Russian J. Math. Phys. – 1993. – **1**. – P. 427–446.

5. Ugodchikov A.G., Khutoryanskiy N.M. Boundary element method in the mechanics of a deformed solid. – Kasan': Kasan' State University Press, 1986. – 295 p. (In Russian)

6. Duvaut G., Lions J.-L. Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod, 1972. – 384 p.

7. Agranovich M.S., Vishik M.L. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general form // Uspekhi matematicheskih nauk, – 1964. – V. 3, **19**. – P. 53–161. (In Russian)

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.9:535.4 № 475, 2000, с. 241–249

О частичном обращении оператора задачи дифракции поля решетки вертикальных магнитных диполей на экранированном шаре

С. В. Кузьменко, В. А. Резуненко

Харьковский национальный университет, Украина

Обращением интегрального оператора типа Абеля и частичным обращением парных сумматорных уравнений выполнена регуляризация задачи дифракции поля решетки вертикальных магнитных диполей на экранированном шаре и получена система алгебраических уравнений II рода с компактным в ℓ^2 оператором, имеющая высокую вычислительную устойчивость.

1. Работа [1] явилась одной из первых, положивших начало успешному развитию численно-аналитических методов решения задач математической физики, возникающих в механике, электродинамике, антенной технике и других областях [2, 3]. В настоящее время представляют интерес прямые и обратные задачи дифракции волн на сферических поверхностях [4, 5]. Эти задачи как правило сводятся к численному решению систем алгебраических уравнений I рода больших порядков или интегральных уравнений I и II рода со сложными и громоздкими ядрами, имеющими особенности [6]. В данной работе с использованием интегрального преобразования типа Абеля выполнена регуляризация задачи дифракции поля решетки вертикальных магнитных диполей на диэлектрическом шаре, экранированном сферой с круговым отверстием. В итоге получена система алгебраических уравнений II рода с компактным в пространстве ℓ^2 матричным оператором, обладающая высокой вычислительной устойчивостью [7].

2. Пусть начало декартовой и сферической систем координат совмещено с центром сферы радиуса a_2 с круговым отверстием так, что ось OZ является осью симметрии сферы и отверстие в сфере измеряется полярным углом θ, где $\theta \in (\theta_0, \pi]$. Внутрь сферы с отверстием поместим шар радиуса $a_1 (a_1 < a_2)$, центр которого совмещен с началом системы координат. Полагаем шар - диэлектрическим, $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ - параметры заполняющей шар среды. Пусть сфера с отверстием - тонкая идеально проводящая, шар и сфера находятся в вакууме ($\varepsilon = 1, \mu = 1, \sigma = 0$).

Пусть электромагнитное поле $\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}$ источника создается специальной системой (решеткой) из трех вертикальных магнитных диполей, размещенных на оси OZ, по одному в трех областях пространства: внутри шара, между шаром и сферой с отверстием и вне сферы с отверстием так, что $b_1 < a_1 < b_2 < a_2 < b_3$, где b_j расстояние j-того диполя до начала системы координат, $j = 1, 2, 3$. При этом дополнительно учитываем направление момента $\vec{m}_j$ каждого диполя: полагаем $m_j = |\vec{m}_j|$ в случае ориентировки момента диполя в положительном направлении оси OZ, $m_j = -|\vec{m}_j|$ - если диполь ориентирован в отрицательном направлении оси OZ, полагаем $m_j = 0$ в случае изъятия диполя из решетки. Требуется найти вторичные дифрагированные поля $\vec{E}^{(n)}, \vec{H}^{(n)}, n = 1, ..., 4$ диполей во всех трех областях пространства R^3.

Рассмотрим задачу дифракции как краевую задачу для уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \qquad \operatorname{div} \vec{D} = 4\pi\rho, \tag{2}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \qquad \vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{3}$$

относительно полных полей $\vec{E} = \vec{E}^{(0)} + \vec{E}^{(n)}, \vec{H} = \vec{H}^{(0)} + \vec{H}^{(n)}, n = 1, ..., 4.$

В (1)-(3) приняты стандартные обозначения: $\vec{D}, \vec{B}$ - векторы электрической и магнитной индукции, c - скорость света, t - время, ρ - плотность зарядов, μ и ε - магнитная и диэлектрическая проницаемость, σ - проводимость среды, $\vec{j}$ - ток проводимости. Зависимость от времени полагаем гармонической $e^{-i\omega t}$ с круговой частотой ω.

Векторы $\vec{E}, \vec{H}$ должны удовлетворять: а)граничным условиям : на поверхности шара и отверстия в сфере векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ непрерывны, на поверхности сферы с отверстием тангенциальная составляющая вектора $\vec{E}$ равна нулю; б) условию конечности интеграла энергии по любой ограниченной области V в R^3 в том числе области, содержащей ребро сферы с отверстием и не содержащей источников

$$\int\limits_V \left(\varepsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2\right) dV < \infty, \tag{4}$$

здесь интеграл Лебега;

в) условиям излучения на бесконечности $\lim\limits_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0, \lim\limits_{r\to\infty} u = 0,$ где u - любая компонента поля $\vec{E}, \vec{H}$; г) иметь требуемую неинтегрируемую особенность в точках размещения диполей.

Условия пунктов а)-г) обеспечивают существование и единственность решения краевой задачи для уравнений Максвелла [8].

Для решения задачи сначала применим метод разделения переменных Фурье, так как поверхности сферы с отверстием и шара являются координатными и компактными в R^3. Сначала получим представление поля $\vec{E}_j^{(0)}, \vec{H}_j^{(0)}$ j-того диполя ($j = 1, 2, 3$) в виде рядов Фурье-Бесселя.

Поле магнитного диполя по определению имеет нулевую компоненту $E_r^{(0)}$ и не зависит, в силу ориентировки момента диполя вдоль оси OZ, от координаты φ. Воспользуемся этими свойствами поля диполя. Из уравнений (1),(3) полагая ε, μ, σ константами, получаем: две отличные от нуля компоненты $H_r^{(0)}, H_\theta^{(0)}$ поля $\vec{E}^{(0)}, \vec{H}^{(0)}$ диполя выражаются через единственную компоненту $E_\varphi^{(0)}$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rE_\varphi^{(0)}\right)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cdot E_\varphi^{(0)})\right)+k^2E_\varphi^{(0)}=0. \tag{5}$$

Введем магнитный потенциал Дебая $v_j^{(0)}$, через который выразим отличные от нуля компоненты поля диполя [9, 10]:

$$H_{j,r}^{(0)}=\frac{\partial^2(rv_j^{(0)})}{\partial r^2}+k_1(rv_j^{(0)}),\quad H_{j,\theta}^{(0)}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(rv_j^{(0)})}{\partial\theta\partial r},\quad E_{j,\varphi}^{(0)}=-\frac{ik_0\mu_1}{r}\cdot\frac{\partial(rv_j^{(0)})}{\partial\theta}. \tag{6}$$

$$v_j^{(0)}=\frac{m_j}{k_jb_j^2r}\sum_{n=1}^{\infty}F_j(n)(2n+1)P_n(\cos\theta)\begin{cases}\psi_n(k_jr)\cdot\xi_n(k_jb_j), & b_j>r,\\ \xi_n(k_jr)\cdot\psi_n(k_jb_j), & b_j<r,\end{cases} \tag{7}$$

где $\psi_n(x), \xi_n(x)$ - сферические функции Бесселя и Ханкеля 1-го рода, $P_n(\cos\theta)$ - полиномы Лежандра нулевого порядка степени n, коффициент $F_j(n)$ равен 1 в случае размещения j-го диполя на оси OZ выше точки $(0,0,0)$ и $F_j(n) = (-1)^n$ при размещении j-го диполя на оси OZ ниже точки $(0,0,0)$, $j = 1,2,3$; $k_2 = k_3 = k$ в случае размещения диполя в вакууме, $k_1 \neq k$ в случае размещения диполя в диэлектрическом шаре, например, $k_1 = k\sqrt{\epsilon_1\mu_1}$.

Введем потенциалы Дебая $v^{(1)} - v^{(4)}$ вторичных полей. Так как сфера с отверстием и шар обладают симметрией относительно поворота на любой угол φ в выбранной системе координат и их центры остаются неподвижными, то вторичные поля также имеют три отличные от нуля компоненты, которые выразим через потенциалы $v^{(j)}$ аналогично (6), а сами $v^{(j)}$ представим в таком виде

$$v^{(1)}=\frac{1}{k_1r}\sum_{n=1}^{\infty}A_n\psi_n(k_1r)P_n(\cos\theta),\qquad 0\le r<a_1. \tag{8}$$

$$\left.\begin{matrix}v^{(2)}\\ v^{(3)}\end{matrix}\right\}=\frac{1}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}P_n(\cos\theta)\begin{cases}B_n\cdot\xi_n(kr),\\ a_n\cdot\psi_n(kr),\end{cases}\qquad a_1<r<a_2. \tag{9}$$

$$v^{(4)}=\frac{1}{kr}\sum_{n=1}^{\infty}b_n\xi_n(kr)P_n(\cos\theta),\qquad r>a_2. \tag{10}$$

Из условия (4) и уравнений (1)-(3) следует, что коэффициенты A_n, B_n, a_n, b_n рядов (8)-(10) необходимо искать в гильбертовом пространстве $\widetilde{\ell}^2$ комплекснозначных последовательностей с некоторым весом. Например, для коэффициентов b_n ряда (10) пространство $\widetilde{\ell}^2$ определяем так:

$$\widetilde{\ell}^2=\left\{\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in C:\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2|\psi_n(ka_2)|^2n^2<\infty\right\}. \tag{11}$$

3. Из граничных условий для полей приходим к граничным условиям для потенциалов Дебая (7)-(10):

$$\mu_1 v_a = \mu v_b, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(v_a - v_b\right)\right] = 0, \quad r = a_1, \quad \theta \in [0, \pi], \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} v_b = \frac{\partial}{\partial \theta} v_c = 0, \quad r = a_2, \quad \theta \in [0, \theta_0), \tag{13}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left[r\left(v_c - v_b\right)\right] = \frac{\partial}{\partial \theta}\left[v_c - v_b\right] = 0, \quad r = a_2, \theta \in (\theta_0, \pi], \tag{14}$$

где

$$v_a = v_1^{(0)} + v^{(1)}, \quad v_b = v_2^{(0)} + v^{(2)} + v^{(3)}, \quad v_c = v_1^{(4)} + v_3^{(0)}.$$

Из (12)-(14) найдем связь для коэффициентов рядов (8)-(10), используя, в частности, ортогональность на $[0, \pi]$ с весом $\sin\theta$ присоединенных функций Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$ первого рода первого порядка степени n, значение Вронскиана сферических функций $W(\psi_n(ka_2), \xi_n(ka_2)) = i$. В результате получаем для коэффициентов A_n, B_n, a_n, b_n рядов (8)-(10) систему трех линейных уравнений с отличными от нуля минорами третьего порядка (для каждого n=1,2,...). В каждой из этих систем исключаем A_n, B_n, a_n и выражаем их через коэффициенты b_n, имея целью построить алгоритм отыскания коэффициентов $b_n (n = 1, 2, ...)$ ряда (10).

Рассмотрим равенства в (14). Исключаем из них коэффициенты потенциалов $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ и для коэффициентов b_n (10) получаем систему парных сумматорных функциональных уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi_n(ka_2) P_n^1(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(1)}(n) P_n^1(\cos\theta), \qquad 0 \le \theta < \theta_0, \tag{15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_n} P_n^1(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(2)}(n) P_n^1(\cos\theta), \qquad \theta_0 < \theta \le \pi, \tag{16}$$

где

$$\Delta_n = \psi_n(ka_2)\Delta_n^{(1)} - \xi_n(ka_2)\Delta_n^{(2)}, \tag{17}$$

$$\Delta_n^{(1)} = (k_1 k)^{-1}\left[k\mu_1 \psi_n(k_1 a_1)\xi_n'(ka_1) - k_1 \mu \psi_n'(k_1 a_1)\xi_n(ka_1)\right],$$

$$\Delta_n^{(0)} = -(k_1 k)^{-1}\left[k\mu_1 \psi_n(k_1 a_1)\psi_n'(ka_1) - k_1 \mu \psi_n'(k_1 a_1)\psi_n(ka_1)\right],$$

$$F^{(1)}(n) = -4iF_3^{(0)}(n)(ka_2)^{-1}\psi_n(ka_2)\xi_n(kb_3); \quad F_j^{(0)}(n) = m_j b_j^{-2}(2n+1)F_j(n),$$

$$F^{(2)}(n) = \Delta_n^{-1}\left(F_2^{(0)}(n)\psi_n(kb_2)\left\{\Delta_n^{(1)}\left[\xi_n(ka_2)\psi_n'(ka_2) + \xi_n'(ka_2)\psi_n(ka_2)\right]\right.\right.$$
$$\left.\left. -2\Delta_n^{(0)}\xi_n(ka_2)\xi_n'(ka_2)\right\} + iF_3^{(0)}(n)\xi_n(kb_3)\left[\Delta_n^{(0)} - \Delta_n^{(1)}\right]\right.$$

$$+F_2^{(0)}(n)\xi_n(kb_2)\Delta_n^{(0)} - i\frac{\mu_1}{k_1}F_1^{(0)}(n)\psi_n(k_1b_1)\Big).$$

4. Выше мы свели исходную краевую задачу к системе сумматорных функциональных уравнений первого рода по присоединенным функциям Лежандра $P_n^1(\cos\theta)$. Коэффициенты рядов полученной системы сложным образом зависят от функций Бесселя и Ханкеля фиксированных аргументов. Применение прямых численных методов для решения такой системы является некорректным. Общего метода решения таких систем функциональных уравнений нет. Система требует своего дальнейшего преобразования [3, 7].

Преобразуем систему функциональных уравнений (15),(16) к системе уравнений по тригонометрическим функциям:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\xi_n(ka_2)\frac{n(n+1)}{2n+1}\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} F^{(1)}(m)\frac{m(m+1)}{2m+1}\sin\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\varphi, \varphi\in[0,\theta_0), \tag{18}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_n}\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi = \sum_{m=1}^{\infty} F^{(2)}(m)\sin\Big(m+\frac{1}{2}\Big)\varphi + C_0\sin\frac{1}{2}\varphi, \varphi\in(\theta_0,\pi]. \tag{19}$$

Для этого проинтегрируем (16) почленно, так как $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in\widetilde{\ell}^2$, $P_n^1(\cos\theta) = -\frac{d}{d\theta}P_n(\cos\theta)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_n}P_n(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{(2)}(n)P_n(\cos\theta) + C_0P_0(\cos\theta), \qquad \theta_0<\theta\le\pi, \tag{20}$$

где $P_0(\cos\theta)=1$ и C_0-константа интегрирования.

В (15), (20) вместо $P_n(\cos\theta)$ и $P_n^1(\cos\theta)$ подставим их интегральные представления Мелера-Дирихле [11]

$$P_n(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}}d\varphi,$$

$$P_n^1(\cos\theta) = \frac{n(n+1)}{2n+1}\frac{2\sqrt{2}}{\pi\sin\theta}\int_0^\theta \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\sin\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}d\varphi.$$

Поменяем порядки суммирования и интегрирования в (15), (20), так как $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in\widetilde{\ell}^2$. Получим уравнения типа Абеля [4, 12] - однородные интегральные уравнения Вольтерра I - го рода со слабой особенностью в ядре

$$\int_0^\theta f(\varphi)(\cos\varphi-\cos\theta)^{-1/2}\sin\varphi\,d\varphi = 0, \qquad 0\le\theta<\theta_0, \tag{21a}$$

$$\int_\theta^\pi h(\varphi)(\cos\theta-\cos\varphi)^{-1/2}\,d\varphi=0,\qquad \theta_0<\theta\le\pi, \tag{21b}$$

где

$$f(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\xi_n(ka_2)-F^{(1)}(n)\right]\frac{n(n+1)}{2n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi,\quad \varphi\in[0,\theta_0), \tag{22a}$$

$$h(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[b_n\frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_n}-F^{(2)}(n)\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-C_0\sin\frac{1}{2}\varphi,\qquad \varphi\in(\theta_0,\pi]. \tag{22b}$$

Покажем, что в (21a) функция $f(\varphi)$ обращается в нуль для $\varphi\in[0,\theta_0)$. Для этого рассмотрим вспомагательное уравнение

$$\int_0^\theta f_1(\varphi)(\cos\varphi-\cos\theta)^{-1/2}\,d\varphi=g(\theta),\qquad g(0)=0, \tag{23}$$

где $g(\theta)$– абсолютно непрерывная функция на $[0,\pi]$. Обратим интегральный оператор Вольтерра $A:\tilde{L}^1(0,\pi)\to AC([0,\pi])$, соответствующий (23). Спектр оператора A состоит из точки $\{0\}$, уравнение (23) имеет единственное решение [13, 14]. Найдем это решение, используя следующую композицию

$$\int_0^\theta\frac{\sin s}{\sqrt{\cos s-\cos\theta}}\int_0^s\frac{f_1(\varphi)d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi-\cos s}}ds=\int_0^\theta\frac{g(s)\sin s}{\sqrt{\cos s-\cos\theta}}ds. \tag{24}$$

В левой части (24) изменим порядки интегрирования (используя теорему Фубини). В (24) получаем следующее ядро:

$$K(\varphi,\theta)=\int_\varphi^\theta\frac{\sin s\,ds}{\sqrt{(\cos s-\cos\theta)(\cos\varphi-\cos s)}}.$$

Вычислим интеграл в $K(\varphi,\theta)$, применив подстановку $\cos\varphi-\cos s=y(\cos\varphi-\cos\theta)$:

$$K(\varphi,\theta)=\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)}}=\int_0^1\frac{d(2y-1)}{\sqrt{1-(2y-1)^2}}=\arcsin(2y-1)\big|_{y=0}^{y=1}=\pi. \tag{25}$$

Значит, ядро $K(\varphi,\theta)$ в (24) является константой и равно π. Дифференцируем обе части (24) по θ и находим решение вспомогательного уравнения (23):

$$f_1(\theta)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{d\theta}\int_0^\theta\frac{g(s)\sin s}{\sqrt{\cos s-\cos\theta}}ds. \tag{26}$$

В (26) положим $g(s) = 0, s \in [0, \theta_0)$ и получаем искомое решение уравнения (23) $f_1(\theta) = 0$ и уравнения (21a): $f(\theta) = 0, \theta \in [0, \theta_0)$.

Аналогично (21a) рассмотрим (21b) и получим $h(\varphi) = 0, \varphi \in (\theta_0, \pi]$. Из (21a), (21$b$) следуют (18), (19).

5. Система функциональных уравнений (18), (19)- система первого рода по элементарным функциям, является некорректной, но она допускает сведение путем частичного обращения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений II рода (СЛАУ II) с вполне непрерывным матричным оператором в ℓ^2 [3, 7].

Действительно, выделим аналитически обращаемую часть системы (18), (19). Для этого вводим обозначения

$$x_n^{(1)} = \frac{\Delta_n^{(1)}}{\Delta_n} \cdot b_n, \qquad F_n^{(3)} = F^{(1)}(n) \frac{n(n+1)}{2n+1}$$

и параметр малости (предварительно умножив (18) на $\frac{4i}{ka_2}$)

$$\varepsilon_n^{(\mu)} = 1 - \frac{4i}{ka_2} \frac{n(n+1)}{2n+1} \frac{\Delta_n}{\Delta_n^{(1)}} \xi_n(ka_2). \tag{27}$$

В результате из (18), (19) получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{(1)} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{\infty} x_m^{(1)} \varepsilon_m^{(\mu)} \sin(m + \frac{1}{2})\varphi + \sum\limits_{m=1}^{\infty} F_m^{(1)} \sin(m + \frac{1}{2})\varphi, & 0 \le \varphi < \theta_0, \\ \sum\limits_{m=1}^{\infty} F_m^{(2)} \sin(m + \frac{1}{2})\varphi + C_0 \sin \frac{1}{2}\varphi, & \theta_0 < \varphi \le \pi. \end{cases} \tag{28}$$

В равенстве (28) левую и правую части составляют ряды Фурье в $L^2(0, \pi)$ по системе функций $y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(n + \frac{1}{2})x$. Функции y_n образуют базис, так как являются собственными функциями самосопряженного оператора $Ly = -y''$. $y(0) = y'(\pi) = 0$; $L : H^2(0, \pi) \to L^2(0, \pi)$ с дискретным спектром [9, 15].

Считая правую часть в (28) известной функцией, а левую часть рядом Фурье этой функции, обращаем левую часть [1, 3]. В результате получаем искомую СЛАУ II рода:

$$x_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} x_m^{(2)} \varepsilon_m^{(\mu)} \omega_{n,m} \frac{m}{n} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(F_m^{(3)} \omega_{n,m} + F_m^{(2)} \left[\delta_{n,m} - \omega_{n,m}\right]\right) n^{-1}, \tag{29}$$

где

$$x_n^{(2)} = \frac{x_n^{(1)}}{n}, \quad \omega_{n,m} = \frac{1}{\pi}\left(\beta_{n,m} + \frac{\beta_{m,0} \cdot \beta_{n,0}}{\pi - \beta_{0,0}}\right), \quad \beta_{n,n} = \theta_0 - \frac{\sin(2n+1)\theta_0}{2n+1},$$

$$\delta_{n,n}=1, \delta_{n,m}=0, \beta_{n,m}=\left[\frac{\sin(n-m)\theta_0}{n-m}-\frac{\sin(n+m+1)\theta_0}{n+m+1}\right], \quad n\neq m.$$

6. Систему (29) представим в стандартной матричной форме $(I-T)X^{(2)}=Z$, где I - единичный оператор, T - матричный оператор в ℓ^2, $X^{(2)}$ - столбец неизвестных, Z - правый столбец. Покажем, что матричный оператор T системы (29) является компактным в ℓ^2. Действительно [16],

$$\sum_{n,m=1}^{\infty}|\varepsilon_m^{(\mu)}|^2|\omega_{n,m}|^2m^2n^{-2}<\infty, \qquad ||Z||_{\ell^2}<\infty.$$

Неравенства для T и Z получаем, используя асимптотические оценки для функций Бесселя $\psi_n(x)$ и Ханкеля $\xi_n(x)$ ($x-$ фиксирован, $n\to\infty$) [9] и оценки

$$|\beta_{n,m}|\le 2\theta_0\le 2\pi, \quad |\varepsilon_m^{(\mu)}|\le\frac{C_1}{m^2}+C_2\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^m, \quad m\to\infty,$$

где для фиксированных ka_1, ka_2 имеем $0<C_1, C_2<\infty$.

Матричные элементы системы (29) не имеют особенностей, они с одинаково быстрой скоростью стремятся к нулю по строкам n и столбцам m ($n,m\to\infty$), величины $\omega_{n,m}$ симметричны по n,m. Полученная система обладает высокой вычислительной устойчивостью, в том числе на счетном нигде не плотном множестве корней функций Бесселя $\psi_n(x)=0$ (n=1,2,3...) [17]. Эти корни связаны с резонансами исследуемых задач дифракции и являются корнями определителя системы (29) в предельном случае $\theta_0=0, ka_1=0$. Система разрешима численно с любой наперед заданной точностью для любых значений параметров задачи, например, методом редукции, и аналитически, например, методом последовательных приближений для малых значений θ_0 и $\pi-\theta_0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агранович З.С., Марченко В.А., Шестопалов В.П. Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках // Журн.техн. физ. – 1962. – Т. 32, **4**. – С. 381–394.
2. Шестопалов В.П., Литвиненко Л.Н., Масалов С.А., Сологуб В.Г. Дифракция волн на решетках.– Харьков: Изд. ХГУ, 1973. – 288 с.
3. Радин А.М., Резуненко В.А., Шестопалов В.П. Излучение волн сферой с круговым отверстием // Журн.вычисл.матем. и матем.физ. – 1977. – Т. 17, **2**. – С. 394–406.
4. Грынь В.И. Преобразование интегрального уравнения типа Абеля с негладкими данными к интегральному уравнению II рода // Журн.вычисл.матем. и матем.физ. – 1997. – Т. 37, **1**. – С. 85–106.

5. Jaggard D.L., Liu J.C. The Matrix Riccati Equation for scaterring from Stratified Chiral Spheres // IEEE Transactions on AP, – 1999. – T. 47, 1. – P. 1201–1207.

6. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения. Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.– Киев: Наукова Думка, 1986. – 543 с.

7. Шестопалов В.П., Тучкин Ю.А., Поединчук А.Е., Сиренко Ю.К. Новые методы решения прямых и обратных задач теории дифракции.– Харьков: Основа, 1997. – 284 с.

8. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.– М.: Мир, 1987. – 312 с.

9. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

10. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.

11. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции.Ч.II. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

12. Вірченко Н.О., Южакова О.А. Система N-арних інтегральних рівнянь з узагальненою функцією Лежандра // Доповіді НАН України. – 1997. – 8. – С. 20–25.

13. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1974. – 296 с.

14. Самко С.С., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника. – 1987. – 614 с.

15. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. – Киев: Наук. Думка, 1977. – 369 с.

16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 751 с.

17. Кузьменко С.В., Резуненко В.А. Алгоритм вычисления сферических функций Бесселя полуцелых положительных индексов с комплексными аргументами // Тезисы докладов VI Международн. конференции им. акад. М.Кравчука. – Киев – 1997. – С. 366.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.968+517.956 № 475, 2000, с. 250–258

Boundary Equations in Basic Dynamic Problems for Thin Elastic Plates

I. Yu. Chudinovich, Yu. S. Gassan
Kharkov National University, Ukraine

The basic dynamic problems for thin elastic plates in Kirchhoff model are under consideration. The representation of the solutions to the problems by the dynamic analogs of the single- and double layer potentials with respect to their unknow densities. The solvability of these systems is proved in one-parameter scale of Sobolev-type function spaces.

1. Introduction

Thin elastic plates are elements of numerous constructions being used in aerocosmic and electronic engineering and many other industries. That is why the development of the methods for a calculation of strains arising in a plate is a very important problem. In the article a variant of the potential theory method is proposed that makes it possible to reduce the problems to the systems of nonstationary boundary equations. The method of the research based on the scheme developed in [1 – 4] for the problems of elastodynamics and in [5 – 7] for the transient diffraction problems for acoustic and electromagnetic waves.

Consider a thin elastic plate occupying a domain $\bar{\Omega} \times [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ where $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ is bounded by a closed C^2-curve Γ and with its thickness $h = \text{const}$. From the standard Kirchhoff hypotheses it follows that the displacement vector at (x, x_3) where $x = (x_1, x_2)$ has a form $(-x_3\partial_1 u(x,t), -x_3\partial_2 u(x,t), u(x,t))$ where $u(x,t)$ is the displacement of the middle plane of the plate, $\partial_i = \partial/\partial x_i$, $i = 1, 2$. For the sake of simplicity we consider only the homogeneous case, that is, the case with zero loading forces and zero initial data. This does not lead to a loss of generality since the existing non-homogeneities can be transfered to the boundary conditions. The function $u(x,t)$ satisfies the equation [8]

$$\rho h \partial_t^2 u(x,t) + D\Delta^2 u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+, \qquad \mathbf{R}_+ = (0, \infty),$$

the initial conditions

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), \\ \partial_t u(x,0) = \psi(x), \end{cases} \qquad x \in \Omega$$

and the boundary conditions

$$I:\begin{cases} u(x,t)=f_1(x,t), \\ \partial_n u(x,t)=f_2(x,t), \end{cases} \text{ or } \quad II:\begin{cases} (Qu)(x)=g_1(x,t), \\ (-Mu)(x)=g_2(x,t), \end{cases} (x,t)\in\Gamma\times\mathbf{R}_+$$

where

$$Qu=-(D/\rho h)(\partial_n\Delta u+(1-\nu)\partial_\tau[n_1n_2(\partial_2^2u-\partial_1^2u)+(n_1^2-n_2^2)\partial_1\partial_2u]),$$
$$Mu=-(D/\rho h)(\Delta u+(1-\nu)(2n_1n_2\partial_1\partial_2u-n_2^2\partial_1^2u-n_1^2\partial_2^2u))$$

are the operations that correspond to the generalized cutting force and the bending moment, $\partial_t=\partial/\partial t$, ∂_n is the normal derivative, $n(x)=(n_1(x),n_2(x))$ is a unit outward normal to Γ, ρ is the surface density of the plate, D is its cylindrical stiffness, $\partial\tau$ is the tangent derivative to Γ and unit vector τ is obtained by turning n on the angle $\pi/2$ against the hour-hand.

Later on we consider simultaneously interior I^+, II^+ and exterior I^-, II^- problems in interior and exterior domains $\Omega^+=\Omega$ and $\Omega^-=\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega^+}$, respectively. The correct formulations of these problems will be given after introducing the necessary function spaces.

2. Function spaces

We introduce the function spaces by the scheme used in [9]. For any $p\in\mathbf{C}$ and $m\in\mathbf{R}$ the spaces $H_{m.p}(\mathbf{R}^2)$ coincide as sets with the standard Sobolev spaces $H_m(\mathbf{R}^2)$ [8]. Their norms are defined by

$$\|u\|_{m,p}^2=\int\limits_{\mathbf{R}^2}(1+|\xi|^2+|p|)^m|\tilde{u}(\xi)|^2d\xi$$

where $\tilde{u}(\xi)$ is the distributional Fourier transformation of $u(x)$. For an arbitrary domain $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ the spaces $\overset{\circ}{H}_{m,p}(\Omega)$ are the subspaces in $H_{m,p}(\mathbf{R}^2)$ that consist of elements $u(x)$ having $\operatorname{supp}u\subset\overline{\Omega}$. The spaces $H_{m,p}(\Omega)$ consist of restrictions of elements of $H_{m,p}(\mathbf{R}^2)$ to Ω. The norms in these spaces are introduced by

$$\|u\|_{m,p;\Omega}=\inf_{\hat{u}\in H_{m,p}(\mathbf{R}^2):\hat{u}|_\Omega=u}\|\hat{u}\|_{m,p}.$$

The spaces $H_{m,p}(\Gamma)$ are introduced by the standard way that uses resolution of identity and the corresponding local coordinates [8].

We choose and fix $\kappa>0$. Denote $\mathbf{C}_\kappa=\{p\in\mathbf{C}:\Re ep>\kappa\}$. Let $H_{L;m,k,\kappa}(\Omega)$ and $H_{L;m,k,\kappa}(\Gamma)$ be the spaces of functions $U(p)=u(x,p)$, $x\in\Omega$, $p\in\mathbf{C}_\kappa$ and $F(p)=f(x,p)$, $x\in\Gamma$, $p\in\mathbf{C}_\kappa$, respectively, that are homeomorphisms from $\mathbf{C}_\kappa$ to $H_m(\Omega)$ and $H_m(\Gamma)$ with their finite norms

$$\|u\|_{m,k,\kappa;\Omega}^2=\sup_{\sigma>\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|p|)^{2k}\|u\|_{m,p;\Omega}^2d\tau,$$
$$\|f\|_{m,k,\kappa;\Gamma}^2=\sup_{\sigma>\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|p|)^{2k}\|f\|_{m,p;\Gamma}^2d\tau, \qquad p=\sigma+i\tau.$$

Let $G = \Omega \times \mathbf{R}_+$, $\Sigma^+ = \Gamma \times \mathbf{R}_+$ and let L be the Laplace transformation operator . The spaces $H_{r;m,k,\kappa}(G)$ and $H_{r;m,k,\kappa}(\Sigma^+)$ consist of the inverse Laplace transformations $u(x,t) = L^{-1}u(x,p)$ and $f(x,t) = L^{-1}f(x,p)$ of elements $u(x,p) \in H_{L;m,k,\kappa}(\Omega)$ and $f(x,p) \in H_{L;m,k,\kappa}(\Gamma)$, respectively. The norms of these spaces are defined by

$$\|u\|_{m,k,\kappa;G} = \|Lu\|_{m,k,\kappa;\Omega}, \qquad \|f\|_{m,k,\kappa;\Sigma^+} = \|Lf\|_{m,k,\kappa;\Gamma}.$$

Let $G^\pm = \Omega^\pm \times \mathbf{R}_+$. Denote by $\vec{\gamma}^\pm$ the trace operators that are continuous from $H_{r;m,k,\kappa}(G^\pm)$ to $H_{r;m-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \times H_{r;m-3/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$ for $m > 3/2$, $k \in \mathbf{R}$. The element $\vec{\gamma}^\pm u$ is the couple consisting of the traces of $u(x,t)$ and $\partial_n u$ on Σ^+. We say that $u \in H_{r;2,0,\kappa}(G^\pm)$ is the solution of I$^\pm$ if $\gamma^\pm = \vec{f}$ and the variational equation

$$\int_0^\infty a_\pm(u,v)dt - \int_{G^\pm} \partial_t u \overline{\partial_t v} dx dt = 0 \tag{1}$$

holds for an arbitrary $v(x,t) \in \mathbf{C}^\infty(\overline{G^\pm})$ with the compact support lying in $\Omega^\pm \times \overline{\mathbf{R}_+}$. In (1) $a_\pm(u,v) = (D/\rho h) \int_{\Omega^\pm} \Big(\partial_1^2 u \overline{\partial_1^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \nu(\partial_1^2 u \overline{\partial_2^2 v} + \partial_2^2 u \overline{\partial_1^2 v}) + 2(1-\nu)\partial_1\partial_2 u \overline{\partial_1\partial_2 v}\Big) dx$ where ν is a Poisson's ratio of the plate.

The solution of the problems II$^\pm$ is the element $u(x,t) \in H_{r;2,0,\kappa}(G^\pm)$ that satisfies

$$\int_0^\infty a_\pm(u,v)dt - \int_{G^\pm} \partial_t u \overline{\partial_t v} dx dt = \pm \int_0^\infty < \vec{g}, \vec{\gamma}^\pm v >_{0,\Gamma} dt \tag{2}$$

for an arbitrary $v(x,t) \in C^\infty(\overline{G^\pm})$ with the compact support. In (2) $\vec{g} = (g_1, g_2)$ and $\langle \vec{g}, \vec{\gamma}^\pm v \rangle_{0,\Gamma}$ is the inner $L^2(\Gamma)$-product.

Theorem 1. *For any $\vec{f} = (f_1, f_2) \in H_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \times H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$ and $\vec{g} = (g_1, g_2) \in H_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$ the problems I$^\pm$ and II$^\pm$ have the unique solutions $u \in H_{r;2,k-1,\kappa}(G^\pm)$ for all $k \geq 1$, $\kappa > 0$. The estimates*

$$\|u\|_{2,k-1,\kappa;G^\pm} \leq c(\|f_1\|_{3/2,k,\kappa;\Sigma^+} + \|f_2\|_{1/2,k,\kappa;\Sigma^+}),$$

$$\|u\|_{2,k-1,\kappa;G^\pm} \leq c(\|g_1\|_{-3/2,k,\kappa;\Sigma^+} + \|g_2\|_{-1/2,k,\kappa;\Sigma^+})$$

hold where c is some positive constant.

To prove the theorem we make a transition to the Laplace transformation with respect to t and obtain for I$^\pm$ and II$^\pm$ the elliptic problems

$$\begin{aligned} &p^2 u(x,p) + (D/\rho h)\Delta^2 u(x,p) = 0, \quad x \in \Omega^\pm, \\ &\vec{\gamma}^\pm u(x,p) = \vec{f}(x,p), \quad x \in \Gamma, \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} &p^2 u(x,p) + (D/\rho h)\Delta^2 u(x,p) = 0, \quad x \in \Omega^\pm, \\ &\left\{ \begin{array}{l} (Qu)(x) = g_1(x,p), \\ (-Mu)(x) = g_2(x,p), \end{array} \right. \quad (x,t) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{4}$$

respectively. In (3) $\vec{\gamma}^{\pm}$ is the trace operator that is continuous (uniformly with respect to $p \in \mathbf{C}_\kappa$) from $H_{2,p}(\Omega^\pm)$ to $H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$. For the solutions of problems (3) and (4) the estimates

$$\|u\|_{2,p;\Omega^\pm} \le c(\|f_1\|_{3/2,p;\Gamma} + \|f_2\|_{1/2,p;\Gamma}), \quad \|u\|_{2,p;\Omega^\pm} \le c(\|g_1\|_{-3/2,p;\Gamma} + \|g_2\|_{-1/2,p;\Gamma})$$

hold, respectively. Here and later on we denote by the same symbol c all constants arising in various estimates that are independent on the functions in these estimates and also from the Laplace transformation parameter $p \in \mathbf{C}_\kappa$. Note that the constants c may depend on κ.

It is easy to verify that if $\vec{F}(p) = (f_1(x,p), f_2(x,p))$ and $\vec{G}(p) = (g_1(x,p), g_2(x,p))$ are holomorphic from $\mathbf{C}_\kappa$ to $H_{3/2}(\Gamma) \times H_{1/2}(\Gamma)$ and $H_{-3/2}(\Gamma) \times H_{-1/2}(\Gamma)$, respectively, then the solutions of the problems (3) and (4) $U(p) = u(x,p)$ are holomorphic from $\mathbf{C}_\kappa$ to $H_2(\Omega^\pm)$. Returning to the space of originals we obtain the statements of the theorem.

3. The dynamic single and double layer potentials

Let $\Phi(x,t)$ be the fundamental solution to the equation of oscillations that satisfies

$$\begin{aligned} &\partial_t^2 \Phi(x,t) + (D/\rho h)\Delta^2 \Phi(x,t) = \delta(x,t), \\ &\Phi(x,t) = 0, \qquad t < 0 \end{aligned}$$

where $\delta(x,t)$ is the Dirac function.

It is easy to verify that

$$\Phi(x,t) = \frac{\theta(t)}{4\pi\sqrt{(D/\rho h)}} si\Big(\frac{|x|^2}{4\sqrt{(D/\rho h)}t}\Big)$$

where $si(z) = -\int\limits_z^\infty \frac{\sin\mu}{\mu} d\mu$ and $\theta(t)$ is the characteristic function of $(0,\infty)$. The dynamic single layer potential with a defined on $\Sigma = \Gamma \times \mathbf{R}$ two-component density $\vec{\alpha}(x,t)$ is introduced by

$$(V\vec{\alpha})(x,t) = \int\limits_\Sigma \{\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_1(y,\tau) + \partial_{n,y}\Phi(x-y,t-\tau)\alpha_2(y,\tau)\} ds_y d\tau$$

where $\partial_{n,y}$ is the normal derivative with respect to y. The dynamic double layer potential with a two-component density $\vec{\beta}(x,t)$ is defined by

$$(W\vec{\beta})(x,t) = \int\limits_\Sigma \{Q_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_1(y,\tau) - M_y\Phi(x-y,t-\tau)\beta_2(y,\tau)\} ds_y d\tau$$

where Q_y and M_y act with respect to y.

Obviously at least for the smooth finite densities on Σ both the potentials satisfy in $\mathbf{R}^2 \setminus \Gamma$ the homogeneous oscillation equation. If the densities vanish as $t < 0$, then both the potentials satisfy the zero initial data. The single layer potential and its first derivatives are continuous when a point goes across the boundary curve. The jump formulae for the single and double layer potentials have a form

$$\begin{aligned}
&(W\vec{\beta})^{\pm}(x,t) = \mp\tfrac{1}{2}\beta_1(x,t) + (W\vec{\beta})^0(x,t),\\
&(\partial_n W\vec{\beta})^{\pm}(x,t) = \mp\tfrac{1}{2}\beta_2(x,t) + (\partial_n W\vec{\beta})^0(x,t),\\
&(QV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t) = \pm\tfrac{1}{2}\alpha_1(x,t) + (QV\vec{\alpha})^0(x,t),\\
&(-MV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t) = \pm\tfrac{1}{2}\alpha_2(x,t) + (-MV\vec{\alpha})^0(x,t),
\end{aligned} \qquad (x,t)\in\Sigma^+$$

where the superscripts "$\pm$" denote the limiting value of the corresponding functions when (x,t) tends to Σ^+ from inside $G^{\pm}$, respectively, and the superscript "0" denotes the direct value of the corresponding integral.

The representation of the solutions to the problems $\mathrm{I}^{\pm}$ by the single layer potential $u(x,t) = (V\vec{\alpha})(x,t)$, $(x,t) \in G^{\pm}$ leads to the system of boundary equations

$$\begin{cases} (V\vec{\alpha})(x,t) = f_1(x,t),\\ (\partial_n V\vec{\alpha})(x,t) = f_2(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Sigma^+$$

or in a symbolic form

$$\Theta_1\vec{\alpha} = \vec{f}. \tag{5}$$

The representation of the solutions to the same problems in a form $u(x,t) = (W\vec{\beta})(x,t)$, $(x,t) \in G^{\pm}$ leads to the systems

$$\begin{cases} (W\vec{\beta})^{\pm}(x,t) = f_1(x,t),\\ (\partial_n W\vec{\beta})^{\pm}(x,t) = f_2(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Sigma^+ \quad \text{or} \quad \Theta_2\vec{\beta} = \vec{f}. \tag{6}$$

The representation of the solutions to $\mathrm{II}^{\pm}$ by the single layer potential yields the systems

$$\begin{cases} (QV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t) = g_1(x,t),\\ (-MV\vec{\alpha})^{\pm}(x,t) = g_2(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Sigma^+ \quad \text{or} \quad \Theta_3\vec{\alpha} = \vec{g}, \tag{7}$$

and finally if $u(x,t) = (W\vec{\beta})(x,t)$, $(x,t) \in G^{\pm}$,then we have the systems

$$\begin{cases} (QW\vec{\beta})^{\pm}(x,t) = g_1(x,t),\\ (-MW\vec{\beta})^{\pm}(x,t) = g_2(x,t), \end{cases} \qquad (x,t)\in\Sigma^+. \quad \text{or} \quad \Theta_4\vec{\beta} = \vec{g} \tag{8}$$

The aim of the article is to prove the unique solvability of (5)—(8).

We remark that after transition to the Laplace transformations the single and double layer potentials take the forms

$$(V_p\vec{\alpha})(x,p) = \int_{\Gamma} \{\Phi(x-y,p)\alpha_1(y,p) + \partial_{n,y}\Phi(x-y,p)\alpha_2(y,p)\}\, ds_y,$$

$$(W_p\vec{\beta})(x,p) = \int_{\Gamma} \{Q_y\Phi(x-y,p)\beta_1(y,p) - M_y\Phi(x-y,p)\beta_2(y,p)\}\, ds_y$$

where $\Phi(x,p)$ is the fundamental solution for the operator $p^2 I + \Delta^2$, that is,

$$\Phi(x,p) = -\frac{1}{2\pi p\sqrt{(D/\rho h)}}\mathrm{kei}_0\left(\frac{\sqrt{p}}{(D/\rho h)^{1/4}}|x|\right),$$

$\mathrm{kei}_0(t) = \Im m K_0(\sqrt{i t})$, $K_0(t)$ is the Macdonald's function [10].

4. The properties of the boundary operators in the spaces with a parameter

In this section we study the properties of the analogs of the Poincaré—Steklov operators and also the properties of the basic boundary operators generated by the single and double layer potentials in the spaces with a parameter.

Let $\vec{f} = (f_1, f_2) \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ and let $u(x,p)$ be the solution of (3). We introduce the analogs of the Poincaré—Steklov operators $\vec{N}_p^{\pm}$ by

$$\langle \vec{N}_p^{\pm}\vec{f}, \vec{\varphi}\rangle_{0,\Gamma} = \pm\left\{p^2(u,v)_{0,\Omega^\pm} + a_\pm(u,v)\right\} \tag{9}$$

where $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2) \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ and $v(x,p)$ is an arbitrary element of $H_{2,p}(\Omega^\pm)$ such that $\vec{\gamma}^{\pm} v = \vec{\varphi}$. In (9) $\langle \vec{g}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma} = (g_1, f_1)_{0,\Gamma} + (g_2, f_2)_{0,\Gamma}$, $(u,v)_{0,\Omega^\pm}$ and $(f,g)_{0,\Gamma}$ denote the inner products in $L^2(\Omega^\pm)$ and $L^2(\Gamma)$, respectively. It is easy to check that definition (9) does not depend on the choice of the extension v of φ. We denote the norm of $H_{m,p}(\Gamma) \times H_{l,p}(\Gamma)$ by $\|\cdot\|_{m,l,p;\Gamma}$.

Theorem 2. *For all $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$ the operators $\vec{N}_p^{\pm}$ set the homeomorphisms*

$$\vec{N}_p^{\pm} : H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma) \to H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma).$$

The estimates

$$\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}, \quad \|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}$$

hold.

Proof. Taking in (9) $v = u$ and separating the real and imagine parts one easily obtains

$$|p|^2\|u\|^2_{0,\Omega^\pm} + a_\pm(u,u) = \pm\sigma^{-1}\Re e\{\bar{p}\langle \vec{N}_p^{\pm}\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma}\}, \qquad p = \sigma + i\tau. \tag{10}$$

From (10) it follows that $\|u\|^2_{2,p;\Omega^\pm} \le c|p||\langle \vec{N}_p^{\pm}\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma}|$. If we take in (9) $v = l^{\pm}\vec{\varphi}$ where $l^{\pm}$ are the extension operators mapping continuously $H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ to $H_{2,p}(\Omega^\pm)$, then we obtain

$$|\langle \vec{N}_p^{\pm}\vec{f}, \vec{\varphi}\rangle_{0,\Gamma}| \le c\|u\|_{2,p;\Omega^\pm}\|v\|_{2,p;\Omega^\pm} \le c\|u\|_{2,p;\Omega^\pm}\|\vec{\varphi}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}.$$

Hence $\vec{N}_p^{\pm}\vec{f} \in H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$ and $\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|^2_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \le c\|u\|^2_{2,p;\Omega^\pm} \le c|p||\langle \vec{N}_p^{\pm}\vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma}|$. Therefore

$$\|\vec{N}_p^{\pm}\vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}.$$

On the other hand, from the trace theorem it follows that

$$\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c\|u\|_{2,p;\Omega^\pm} \le c|p|\|\vec{N}_p^\pm \vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$$

therefore

$$\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{N}_p^\pm \vec{f}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}.$$

If there is a non-zero $\vec{f} \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ such that $\langle \vec{N}_p^\pm \vec{\varphi}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma} = 0$ for all $\vec{\varphi} \in H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$, then taking $\vec{\varphi} = \vec{f}$ one obtains $\langle \vec{N}_p^\pm \vec{f}, \vec{f}\rangle_{0,\Gamma} = 0$ and $\vec{f} = 0$. This contradiction shows that the ranges of the operators $\vec{N}_p^\pm$ are dense in the space $H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$. This completes the proof.

We denote by $\vec{V}_p\vec{\alpha} = \vec{\gamma}^+ V_p\vec{\alpha} = \vec{\gamma}^- V_p\vec{\alpha}$ the boundary operator generated by the single layer potential defined on smooth densities $\vec{\alpha}$

Theorem 3. *The operator $\vec{V}_p$ can be extended by continuity to the operator that set a homeomorphism from $H_{-3/2,p}(\Gamma) \times H_{-1/2,p}(\Gamma)$ to $H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ for all $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$, $k \in \mathbf{R}$. The estimates*

$$\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}, \qquad \|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$$

hold.

Proof. Let $u(x,p) = (V_p\vec{\alpha})(x,p)$, $x \in \mathbf{R}^2$. Using the trace theorem and (10) we obtain the estimates

$$\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c\left(\|u\|^2_{2,p;\Omega^+} + \|u\|^2_{2,p;\Omega^-}\right) \le c|p||\langle(\vec{N}_p^+ - \vec{N}_p^-)\vec{V}_p\vec{\alpha}, \vec{V}_p\alpha\rangle_{0,\Gamma}|.$$

From the jump formula $(\vec{N}_p^+ - \vec{N}_p^-)\vec{V}_p\vec{\alpha} = \vec{\alpha}$ it follows that

$$\|\vec{V}_p\vec{\alpha}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p||\langle(\vec{\alpha}, \vec{V}_p\alpha\rangle_{0,\Gamma}|.$$

Hence $\|\vec{V}_p^\pm\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}$. The inequality $\|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{V}_p^\pm\vec{\alpha}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$ follows from the equality $\vec{V}_p^{-1} = \vec{N}_p^+ - \vec{N}_p^-$ and from the previous theorem.

The density of the range of the operator $\vec{V}_p$ in the space $H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ is proved as in Theorem 2.

Theorem 4. *The operators $\vec{W}_p^\pm$ can be extended by continuity to the operators $\vec{W}_p^\pm$ that are homeomorphisms from $H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ to $H_{3/2,p}(\Gamma) \times H_{1/2,p}(\Gamma)$ for all $p \in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa > 0$, $k \in \mathbf{R}$. The estimates*

$$\|\vec{W}_p^\pm\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|^3\|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}, \qquad \|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma} \le c|p|\|\vec{W}_p^\pm\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$$

hold.

The proof of the theorem follows from the easily checked formulae $\vec{W}_p^\pm\vec{\beta} = \vec{V}_p\vec{N}_p^\mp\vec{\beta}$ and also from the statements of Theorems 2 and 3.

Now we consider the properties of the operator $\vec{F}_p = \vec{N}^+\vec{\gamma}^+W_p = \vec{N}^-\vec{\gamma}^-W_p$.

Theorem 5. *The operator $\vec{F}_p$ is a homeomorphism from $H_{3/2,p}(\Gamma)\times H_{1/2,p}(\Gamma)$ to $H_{-3/2,p}(\Gamma)\times H_{-1/2,p}(\Gamma)$ for all $p\in \mathbf{C}_\kappa$, $\kappa>0$, $k\in\mathbf{R}$ The estimates*

$$\|\vec{F}_p\vec{\beta}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\le c|p|^3\|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma},\quad \|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{F}_p\vec{\beta}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}$$

hold.

Proof. The first statement and the first inequality follow from the properties of $\vec{N}_p^\pm$ and $\vec{W}_p^\pm$. To prove the second inequality we construct the function $u(x)=(\vec{W}_p^\pm\vec{\beta})(x)$, $x\in\Omega^\pm$ and remark that from the jump formula $\vec{\beta}=\vec{W}_p^-\vec{\beta}-\vec{W}_p^+\vec{\beta}$ and from the trace theorem it follows that

$$\begin{aligned}\|\vec{\beta}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma}&\le c(\|\vec{W}_p^+\vec{\beta}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma}+\|\vec{W}_p^-\vec{\beta}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma})\\&\le c(\|u\|^2_{2,p;\Omega^+}+\|u\|^2_{2,p;\Omega^-}).\end{aligned}$$

Taking into account the estimate in Theorem 2 we have

$$\|\vec{\beta}\|^2_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p||\langle\vec{F}_p\vec{\beta},\vec{\beta}\rangle|_{0,\Gamma}\le c|p|\|\vec{F}_p\vec{\beta}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}$$

from which the required inequality follows.

5. The solvability of the systems of boundary equations

Passing in the systems (5) — (8) to the Laplace transformations we obtain the systems

$$\text{(i) } \vec{V}_p\vec{\alpha}=\vec{f},\qquad \text{(ii) } \vec{W}_p^\pm\beta=\vec{f},\qquad \text{(iii) } \vec{N}_p^\pm\vec{V}_p\vec{\alpha}=\vec{g},\qquad \text{(iv) } \vec{N}_p^\pm\vec{W}_p^\pm\beta=\vec{g}.$$

The unique solvability of these systems and the estimates for their solutions

$$\begin{aligned}&\text{(i) } \|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma},\\&\text{(ii) } \|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p|^2\|\vec{f}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma},\\&\text{(iii) } \|\vec{\alpha}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\le c|p|^2\|\vec{g}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma},\\&\text{(iv) } \|\vec{\beta}\|_{3/2,1/2,p;\Gamma}\le c|p|\|\vec{g}\|_{-3/2,-1/2,p;\Gamma}\end{aligned}$$

follow from Theorems 3 — 6. It is easy to check that if $\vec{f}(x,p)$ and $\vec{g}(x,p)$ are holomorphic from $\mathbf{C}_\kappa$ to $H_{3/2}(\Gamma)\times H_{1/2}(\Gamma)$ and $H_{-3/2}(\Gamma)\times H_{-1/2}(\Gamma)$, respestively, then $\vec{\alpha}(x,p)$ and $\vec{\beta}(x,p)$ are holomorphic from $\mathbf{C}_\kappa$ to $H_{-3/2}(\Gamma)\times H_{-1/2}(\Gamma)$ and $H_{3/2}(\Gamma)\times H_{1/2}(\Gamma)$. Finally, returning to the spaces of the originals we obtain the following statement.

Theorem 6. *For all $\vec{f}\in H_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$ and $\vec{g}\in H_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$, $\kappa>0$, $k\in\mathbf{R}$ systems (5) — (8) have the unique solutions. Their solving operators*

$$\begin{aligned}&(\Theta_1)^{-1}: H_{r;\frac32,k,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;\frac12,k,\kappa}(\Sigma^+)\to H_{r;-\frac32,k-1,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;-\frac12,k-1,\kappa}(\Sigma^+),\\&(\Theta_2)^{-1}: H_{r;\frac32,k,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;\frac12,k,\kappa}(\Sigma^+)\to H_{r;\frac32,k-2,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;\frac12,k-2,\kappa}(\Sigma^+),\\&(\Theta_3)^{-1}: H_{r;-\frac32,k,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;-\frac12,k,\kappa}(\Sigma^+)\to H_{r;-\frac32,k-2,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;-\frac12,k-2,\kappa}(\Sigma^+),\\&(\Theta_4)^{-1}: H_{r;-\frac32,k,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;-\frac12,k,\kappa}(\Sigma^+)\to H_{r;\frac32,k-1,\kappa}(\Sigma^+)\times H_{r;\frac12,k-1,\kappa}(\Sigma^+)\end{aligned}$$

are continuous.

Having solved boundary equations (5) — (8) we construct the single– and double layer potentials with obtained densities.

Theorem 7. *For all* $\vec{f} \in H_{r;3/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \times H_{r;1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$ *and* $\vec{g} \in H_{r;-3/2,k,\kappa}(\Sigma^+) \times H_{r;-1/2,k,\kappa}(\Sigma^+)$, $\kappa > 0$, $k \geq 1$ *the potentials* $(V\vec{\alpha})(x,t)$ *and* $(W\vec{\beta})(x,t)$ *with densities* $\vec{\alpha}$ *and* $\vec{\beta}$ *that are the solutions of (5) — (8), respectively, are the solutions* $u \in H_{r;2,k-1,\kappa}(G^{\pm})$ *of the problems* $I^{\pm}$ *and* $II^{\pm}$.

The proof follows from the estimates obtained in Theorem 1.

REFERENCES

1. Chudinovich I. Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 1. Existence theorems // Math. Methods Appl. Sci., – 1993. **16.** – P. 203–215.

2. Chudinovich I. Yu. The boundary equation method in the third initial boundary value problem of the theory of elasticity. 2. Methods for approximate solutions // Math. Methods Appl. Sci., – 1993. – **16**. – P. 217–227.

3. Chudinovich I. Yu. Methods of potential theory in the dynamics of elastic media // Russian J. Math. Phys., – 1993. – **1**. – P. 427–446.

4. Chudinovich I. Yu. On the solution of the boundary equations in problems of elastic wave diffraction on the spatial cracks // Differencial'nye uravneniya, – 1993. – **29**. – P. 1648–1651. (In Russian)

5. Chudinovich I. Yu., Dieng S. Potential theory methods in diffraction problems for acoustic waves. // C.R. Acad. Sci. Paris. –1995. – **320**. –P. 885–889.

6. Chudinovich I. Yu., Dieng S. The solvability of the boundary equations of the transient diffraction of acoustic waves on manifolds having a boundary //C.R. Acad. Sci. Paris. – 1995. – **320**. – P. 1019–1023.

7. Chudinovich I. Yu. The solvability of boundary equations in mixed problems for nonstationary Maxwell system // Math. Methods Appl. Sci. – 1997. – **20**. – P. 425–448.

8. Duvaut G., Lions J.-L. Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod, – 1972. – 384 p.

9. Agranovich M. S., Vishik M. L. Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general form // Uspekhi matematicheskih nauk, – 1964. – V. 3., **19**. – P. 53–161. (In Russian)

10. Abramowitz M., Stegun I., Handbook of mathematical functions. – New York: Dover, – 1964.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.956 № 475, 2000, с. 259–265

Краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений в бислое

А. А. Макаров

Харьковский национальный университет, Украина

В статье получен критерий корректности краевой задачи в бислое и доказано существование корректной краевой задачи для любой системы псевдодифференциальных уравнений. Выяснено также для каких систем существуют параболические краевые задачи.

В работах [1] - [3] рассматривалась краевая задача для систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в слое. Были получены условия корректности такой задачи в различных пространствах функций, условия параболичности и свойства решений параболической краевой задачи. Было также доказано, что для любой системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами существует корректная двухточечная задача и выяснены условия существования параболической задачи в слое.

Целью данной работы является получение аналогичных результатов для краевой задачи в бислое.

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_1\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) & a \le t \le c; \quad (1)\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_2\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) & c \le t \le b; \quad (2)\\ u(x,c-0) = u(x,c+0); & \quad (3)\\ B\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,a) + D\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,c) + C\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,b) = \varphi(x). & \quad (4) \end{cases}$$

Здесь $A_k\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right), B\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right), C\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right), D\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)$ - псевдодифференциальные операторы с символами из пространства бесконечно дифференцируемых функций степенного роста $C^{\infty}_{-\infty}$, а через $u(x,c)$ обозначен общий левый и правый предел функции $u(x,t)$ при $t \to c$.

Рассмотрение будем вести в пространствах функций Соболева-Слободецкого H^s и H^s_l, а также в их проективных пределах $H^{\infty} = \bigcap\limits_s H^s$ и $S = \bigcap\limits_{s,l} H^s_l$.

Понадобятся также пространства:

$$C^j([a,b],H^s)=\left\{u(x,t):\|u\|=\sup_{|i|\le j,\,a\le t\le b}\|u_t^j(x,t)\|^{(s)}<\infty\right\}.$$

Определение 1. *Задача (1) - (4) называется* **корректно разрешимой** *из пространства* H^{s_1} *в пространство* $C([a,b],H^{s_2})$, *если* $\forall\varphi(x)\in H^{s_1}\ \exists!\,u(x,t)\in C([a,b],H^{s_2})$ *такая, что* $\|u(x,t)\|\le C\|\varphi\|$.

Преобразование Фурье переводит пространство H^s в пространство $H_s=(1+|x^2|)^{-s/2}L^2$, а $FH^\infty=H_\infty=\bigcap\limits_s H_s$.

Множеством мультипликаторов в пространстве H_∞ является пространство локально интегрируемых функций таких, что vrai $\sup|\varphi(\sigma)|(1+|\sigma|)^p\le C$ для некоторого p (см. [4]).

Рассмотрим двойственную краевую задачу:

$$\begin{cases}\frac{\partial\tilde u(\sigma,t)}{\partial t}=\tilde A_1(\sigma)\tilde u(\sigma,t) & a\le t\le c; \quad (5)\\[2mm] \frac{\partial\tilde u(\sigma,t)}{\partial t}=\tilde A_2(\sigma)\tilde u(\sigma,t) & c\le t\le b; \quad (6)\\[2mm] \tilde u(\sigma,c-0)=\tilde u(\sigma,c+0); & \quad (7)\\[2mm] \tilde B(\sigma)\tilde u(\sigma,a)+\tilde D(\sigma)\tilde u(\sigma,c)+\tilde C(\sigma)\tilde u(\sigma,b)=\tilde\varphi(x), & \quad (8)\end{cases}$$

где $\tilde u(\sigma,t)=F_xu(x,t),\tilde\varphi(\sigma)=F\varphi(x)$, $\tilde A_k(\sigma),\tilde B(\sigma),\tilde C(\sigma)$ и $\tilde D(\sigma)$ - символы соответствующих ПДО.

Будем искать решение задачи (5) - (8) в виде

$$\tilde u(\sigma,t)=\begin{cases}e^{(t-c)\tilde A_1(\sigma)}\phi(\sigma) & a\le t\le c;\\ e^{(t-c)\tilde A_2(\sigma)}\phi(\sigma) & a\le t\le b.\end{cases}$$

Подставляя в условия (8), получим

$$\left(\tilde B(\sigma)e^{(a-c)\tilde A_1(\sigma)}+\tilde D(\sigma)+\tilde C(\sigma)e^{(b-c)\tilde A_2(\sigma)}\right)\phi(\sigma)=\tilde\varphi(\sigma).$$

Если $\exists\left(\tilde B(\sigma)e^{(a-c)\tilde A_1(\sigma)}+\tilde D(\sigma)+\tilde C(\sigma)e^{(b-c)\tilde A_2(\sigma)}\right)^{-1}$, то

$$\phi(\sigma)=\left(\tilde B(\sigma)e^{(a-c)\tilde A_1(\sigma)}+\tilde D(\sigma)+\tilde C(\sigma)e^{(b-c)\tilde A_2(\sigma)}\right)^{-1}\tilde\varphi(\sigma),$$

а $\tilde u(\sigma,t)=Q(\sigma,t)\tilde\varphi(\sigma)$, где

$$Q(\sigma,t)=\begin{cases}e^{(t-c)\tilde A_1}\left(\tilde B(\sigma)e^{(a-c)\tilde A_1(\sigma)}+\tilde D(\sigma)+\tilde C(\sigma)e^{(b-c)\tilde A_2(\sigma)}\right)^{-1} & t\in[a,c);\\ e^{(t-c)\tilde A_2}\left(\tilde B(\sigma)e^{(a-c)\tilde A_1(\sigma)}+\tilde D(\sigma)+\tilde C(\sigma)e^{(b-c)\tilde A_2(\sigma)}\right)^{-1} & t\in(c,b].\end{cases}$$

Чтобы $\tilde{u}(\sigma, t) \in C([a,b]; H_\infty)$ при любой $\tilde{\varphi} \in H_\infty$ необходимо и достаточно, чтобы $Q(\sigma, t) \in H_{-\infty}$.

Таким образом доказана следующая теорема

Теорема 1. *Необходимым и достаточным условием корректной разрешимости задачи (1) - (4) из пространства H^∞ в пространство $C([a,b]; H^\infty)$ является условие*

$$\exists c > 0 \quad \exists p \quad \|Q(\sigma, t)\| \le c(1 + |\sigma|)^p.$$

Замечание. *Условие теоремы обеспечивает также корректную разрешимость из пространства H_1^s в пространства $C([a,b]; H^{s-p})$.*

Докажем теперь, что для любых систем ПДУ всегда существует корректная краевая задача указанного вида.

Теорема 2. *Для любых $\tilde{A}_1(\sigma), \tilde{A}_2(\sigma) \in C^\infty_{-\infty}$ существуют $\tilde{B}(\sigma), \tilde{C}(\sigma)$ и $\tilde{D}(\sigma) \in C^\infty_{-\infty}$, что краевая задача (1) - (4) корректно разрешима из H^∞ в $C([a,b]; H^\infty)$.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы проведем по схеме доказательства теоремы 3 из работы [1].

Представим матрицы $\exp(a-c)\tilde{A}_1$ и $\exp(a-c)\tilde{A}_2$ в полярном виде $\exp(a-c)\tilde{A}_1 = U_1(\sigma)H_1(\sigma), \exp(a-c)\tilde{A}_2 = U_2(\sigma)H_2(\sigma)$, где $U_k(\sigma)$ - унитарные матрицы, а $H_k(\sigma)$ - самосопряженные, положительно определенные матрицы, причем $H_k(\sigma) \in H_{-\infty}$, т.к. $\|U_k\| = 1$.

Возьмем $\tilde{B}(\sigma) = U_1^*(\sigma), \tilde{C}(\sigma) = U_2^*(\sigma)$, а $\tilde{D}(\sigma) = E$. Тогда

$$Q(\sigma, t) = \begin{cases} e^{(t-c)\tilde{A}_1} \left(E + H_1(\sigma) + H_2(\sigma)\right)^{-1} & t \in [a, c); \\ e^{(t-c)\tilde{A}_2} \left(E + H_1(\sigma) + H_2(\sigma)\right)^{-1} & t \in (c, b]. \end{cases}$$

Но в работе [1] было доказано, что $\|e^{At}(E+H)^{-1}\| \le c(1+|\sigma|)^p, \ \ t \in [0, T]$. Поэтому

$$\|e^{(t-c)\tilde{A}_2} \left(E + H_1 + H_2\right)^{-1}\| \le$$

$$\|e^{(t-c)\tilde{A}_2} \left(E + H_2\right)^{-1}\| \cdot \|\left(E + H_2\right)\left(E + H_1 + H_2\right)^{-1}\| \le c(1 + |\sigma|)^p,$$

т.к. $\|\left(E + H_2\right)\left(E + H_1 + H_2\right)^{-1}\| = \|\left(E + H_3\right)^{-1}\| \le 1$, где $H_3 = H_1\left(E + H_2\right)^{-1}$ - положительно определенная матрица.

Аналогично оценивается матрица $\|e^{(t-c)\tilde{A}_2} \left(E + H_1 + H_2\right)^{-1}\| \le c(1+|\sigma|)^p$.

Замечание. *Если вместо условия (4) рассматривать двухточечное краевое условие*

$$B\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x, a) + C\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right) u(x, b) = \varphi(x),$$

то эта задача может всегда быть некорректной для некоторых систем.

Покажем сначала, что модельная краевая задача, построенная при доказательстве теоремы 2, некорректна в пространствах Соболева-Слободецкого, если $Re\,\tilde{A}_1 > 0, Re\,\tilde{A}_2 < 0, \forall\sigma \in R^n$, причем $Re\,\tilde{A}_k > 0$ неограничены.

Тогда при $\tilde{B}(\sigma) = e^{-i(a-c)\mathrm{Im}A_1(\sigma)}, \tilde{C}(\sigma) = e^{-i(b-c)\mathrm{Im}A_2(\sigma)}$ (мы ограничимся скалярным случаем) получим

$$|Q(\sigma,t)| = \begin{cases} e^{(t-c)\tilde{A}_1}\left(e^{(a-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_1} + e^{(b-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_2}\right)^{-1} & t < c; \\ e^{(t-c)\tilde{A}_2}\left(e^{(a-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_1} + e^{(b-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_2}\right)^{-1} & t > c. \end{cases}$$

Допустим $(a-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_1 \geq (b-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_2$ на некотором неограниченном множестве $G \in R^n$. Тогда на этом множестве при $t < c$,

$$|Q(\sigma,t)| > e^{(t-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_1}(2e^{(a-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_1})^{-1} = \frac{1}{2}e^{(t-a)\mathrm{Re}\tilde{A}_1} \geq c(1+|\sigma|)^p \quad \forall p.$$

Если $(a-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_1 \leq (b-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_2$ на некотором неограниченном множестве $G \in R^n$, то на этом множестве при $t > c$ $|Q(\sigma,t)| \geq \frac{1}{2}e^{(t-a)\mathrm{Re}\tilde{A}_1} \geq c(1+|\sigma|)^p \ \forall p$.

Таким образом данная задача некорректна в пространствах H^s.

Что же касается остальных краевых задач указанного вида, то в $|Q(\sigma,t)| = \left(B(\sigma)e^{(a-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_1} + C(\sigma)e^{(b-c)\mathrm{Re}\tilde{A}_2}\right)^{-1}$ и первое и второе слагаемые быстро убывают на бесконечности, поэтому при любых ненулевых $B(\sigma), C(\sigma) \in C^{\infty}_{-\infty}$ $Q(\sigma,t)$ растет быстрее любой степени σ.

Определение 2. *Задача (1) - (4) называется параболической в бислое, если фундаментальная матрица $Q(\sigma,t)$ удовлетворяет оценке*

$$|Q(\sigma,t)| = \begin{cases} C_1(1+|\sigma|)^{p_1}e^{-l_1\rho_1(t)|\sigma|^{k_1}} & t < c; \\ C_2(1+|\sigma|)^{p_2}e^{-l_2\rho_2(t)|\sigma|^{k_2}} & t > c. \end{cases}$$

где $\rho_1(t) = \min\{(t-a),(c-a)\}, \rho_2(t) = \min\{(b-t),(t-c)\}$, а $C_k, l_k, h_k > 0$.

Выясним при каких условиях на $\tilde{A}_k(\sigma)$ существуют параболические краевые задачи в бислое.

Теорема 3. *Если $C_k, b_k, h_k > 0$, что $\min\limits_j |Re\lambda_j^k(\sigma)| \geq C_k|\sigma|^{h_k} - b_k$, $(k = 1,2)\, \forall\sigma \in R^n$, где λ_j^k - собственные значения матрицы $\tilde{A}_k(\sigma)$, то существует параболическая краевая задача (1) - (4).*

Доказательство. Пусть как и в теореме 2 $\tilde{B}(\sigma) = U_1^*(\sigma), \tilde{C}(\sigma) = U_2^*(\sigma)$, а $\tilde{D}(\sigma) = E$. Тогда как мы видели при доказательстве Теоремы 2

$$Q(\sigma,t) = \begin{cases} e^{(t-c)\tilde{A}_1}\left(E + H_1(\sigma) + H_2(\sigma)\right)^{-1} & t \in [a,c); \\ e^{(t-c)\tilde{A}_2}\left(E + H_1(\sigma) + H_2(\sigma)\right)^{-1} & t \in (c,b]. \end{cases}$$

Но в работе [2] было доказано, что $Q(\sigma,t) = e^{tA}\left(E+H\right)^{-1}$ допускает оценку $\|Q(\sigma,t)\| \leq c(1+|\sigma|)^p \exp\{-b\rho(t)\min\limits_j|\mathrm{Re}\lambda_j|\}$. Поэтому при $t < c$,

$\|Q(\sigma,t)\| \leq \|e^{(t-c)\tilde{A}_2}(E+H_1)^{-1}(E+H_3)^{-1}\| \leq C_1(1+|\sigma|)^{p_1}\exp\{-b\rho(t)|\sigma|^{h_1}\}$, где $H_3 = H_2(E+H_1)^{-1}$ - положительно определенная матрица. Аналогично оценивается $Q(\sigma,t)$ при $t > c$. Значит задача параболическая, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Если собственные значения матриц $\tilde{A}_k(\sigma)$ удовлетворяют условиям теоремы 3 и краевая задача (1) - (4) разрешима из пространства H^∞ в пространство $C([a,b],H^\infty)$, то эта краевая задача параболическая и для любой $\varphi(x) \in L^2$ существует решение $u(x,t)$ бесконечно дифференцируемое по x, $\forall t \in (a,c)\cup(c,b)$.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что любая корректная краевая задача вида (1) - (4) эквивалентна модельной краевой задаче.

Лемма. *Любая корректная краевая задача (1) - (4) эквивалентна модельной краевой задаче, где*

$$\tilde{B}_0(\sigma) = T(\sigma)U_1^*(\sigma), \quad \tilde{C}_0(\sigma) = T(\sigma)U_2^*(\sigma), \quad \tilde{D}_0(\sigma) = T(\sigma)$$

с некоторой $T(\sigma) \in H_{-\infty}$, причем $T^{-1}(\sigma) \in H_{-\infty}$.

Доказательство. Действительно,

$$Q(\sigma,t) = \begin{cases} e^{(t-c)\tilde{A}_1(\sigma)}G^{-1}(\sigma) & t \in [a,c); \\ e^{(t-c)\tilde{A}_2(\sigma)}G^{-1}(\sigma) & t \in (c,b]. \end{cases}$$

где $G(\sigma) = \left(\tilde{B}(\sigma)e^{(a-c)\tilde{A}_1(\sigma)} + \tilde{D}(\sigma) + \tilde{C}(\sigma)e^{(b-c)\tilde{A}_2(\sigma)}\right)$. А фундаментальная матрица модельной задачи

$$Q_M(\sigma,t) = \begin{cases} e^{(t-c)\tilde{A}_1}(E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))^{-1}T^{-1}(\sigma) & t \in [a,c); \\ e^{(t-c)\tilde{A}_2}(E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))^{-1}T^{-1}(\sigma) & t \in (c,b]. \end{cases}$$

Значит $T(\sigma) = G(\sigma)(E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))^{-1}$. Покажем, что $T(\sigma) \in H_{-\infty}$. Но $T(\sigma) = G(\sigma)(E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))^{-1} = \tilde{B}(\sigma)e^{(a-c)\tilde{A}_1(\sigma)}(E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))^{-1} + \tilde{D}(\sigma)(E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))^{-1} + \tilde{C}(\sigma)e^{(b-c)\tilde{A}_2(\sigma)}(E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))^{-1} \in H_{-\infty}$, т.к. все слагаемые этой суммы принадлежат пространству $H_{-\infty}$, что следует из корректности модельной задачи и включения $C^\infty_{-\infty} \in H_{-\infty}$. Аналогично доказывается, что $T^{-1}(\sigma) = (E+H_1(\sigma)+H_2(\sigma))G(\sigma)^{-1} \in H_{-\infty}$.

Вернемся к доказательству теоремы. Т.к. $Q(\sigma,t) = Q_M(\sigma,t)$, то по теореме 3 верна оценка

$$\|Q(\sigma,t)\| \leq C_1(1+|\sigma|)^{p_k}\exp\{-b\rho_k(t)|\sigma|^{h_k}\},$$

т.е. задача будет параболической. Следовательно, $\tilde{u}(\sigma,t) = Q(\sigma,t)\varphi(\sigma) \in H_\infty$, т.к. убывает быстрее любой степени (при $t \neq c$). Значит $u(x,t) \in H^\infty$, $t \in (a,c)\cup(c,b)$, т.е. бесконечно дифференцируема по x.

Покажем, что условие неограниченности собственых значений является необходимым для параболичности скалярной краевой задачи в бислое.

Теорема 5. *Если* $\exists \sigma_\nu \in R^n : |\sigma_\nu| \to \infty$ *и* $|$ *Re* $A_k(\sigma_\nu)| < M$ *для некоторого* k, *то не существует параболической краевой задачи в бислое.*

Доказательство. Предположим, что существует параболическая краевая задача. Тогда по лемме она эквивалентна модельной краевой задаче. Но

$$|Q_M(\sigma,t)| = |e^{(t-c)\ \mathrm{Re}\ \bar{A}_k(\sigma_\nu)}\left(1 + e^{(a-c)\ \mathrm{Re}\ \bar{A}_1(\sigma_\nu)} + e^{(b-c)\ \mathrm{Re}\ \bar{A}_2(\sigma_\nu)}\right)^{-1}| \geq$$

$$\geq e^{-|t-c|M}\left(1 + e^{\max(|a-c|;|b-c|)}\right)^{-1} \geq M_1.$$

Значит не выполнено условие параболичности.

Можно доказать необходимость условий теоремы 2 для системы дифференциальных уравнений (см. [2]), также необходимость бесконечной дифференцируемости решения по пространственным переменным для параболичности задачи (1) - (4).

В заключение приведем пример, когда при стыковке двух некорректных задач может получится корректная краевая задача.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{i\partial x_1} + \frac{\partial u(x,t)}{i\partial x_2} & -T \leq t < 0; \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{i\partial x_1} - \frac{\partial u(x,t)}{i\partial x_2} & 0 < t \leq T; \\ u(x,-0) = u(x,+0); \\ u(x,-T) + u(x,0) + u(x,T) = \varphi(x). \end{cases}$$

Фундаментальная функция данной краевой задачи имеет вид

$$Q(\sigma,t) = \begin{cases} e^{(\sigma_1+i\sigma_2)}\left(e^{-T(\sigma_1+i\sigma_2)} + 1 + e^{T(\sigma_1+i\sigma_2)}\right)^{-1} & t < 0; \\ e^{(\sigma_1-i\sigma_2)}\left(e^{-T(\sigma_1+i\sigma_2)} + 1 + e^{T(\sigma_1+i\sigma_2)}\right)^{-1} & t > 0. \end{cases}$$

Легко увидеть, что $Q(\sigma,t)$ удовлетворяет следующей оценке

$$|Q(\sigma,t)| \leq \frac{C_1 e^{t\sigma_1}}{2chT\sigma_1 - 1} \leq C_0^{(|t|-T)|\sigma_1|} \qquad t \in [-T;T],$$

т.е. корректна, хотя не корректны краевые задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{i\partial x_1} + i\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_2} & -T \leq t < 0; \\ \gamma u(x,0) + \beta u(x,T) = \varphi(x). \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,t)}{i\partial x_1} - i\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_2} & 0 < t \leq T; \\ \gamma u(x,0) + \beta u(x,T) = \varphi(x). \end{cases}$$

при любых γ и β (см. [1])

ЛИТЕРАТУРА

1. Макаров А. А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений // Дифф. уравнения – 1994. – Т. 30, 1. – С. 144–150.

2. Макаров А. А. Параболические краевые задачи для систем псевдодифференциальных уравнений в бесконечном слое // Дифф. уравнения – 1996. – Т. 32, 5. – С. 572–579.

3. Фардигола Л. В. О нелокальной двухточечной краевой задаче в слое для уравнений с переменными коэффициентами // Сибирский математический журнал – 1997 – Т. 38, 2. – С. 424–438.

4. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: 1974.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 512.54 № 475, 2000, с. 266–272

О вложении группы финитных перестановок

М. С. Бойко, С. Л. Гефтер

Харьковский национальный университет, Украина

В работе изучается вопрос о вложении группы S_f финитных перестановок счетного множества в локально компактные группы. Доказано, что группу S_f нельзя вложить в почти связную локально компактную группу и можно плотно вложить в непрерывную вполне несвязную локально компактную группу.

В 1967 году Е. Д. Гауан [9] показал, что на группе $S(\mathbb{N})$ всех перестановок счетного множества нельзя ввести топологию, превращающую $S(\mathbb{N})$ в непрерывную локально компактную группу. Тем самым был дан ответ на вопрос С. Улама [5, стр. 71]. В настоящей работе изучается вопрос о вложении группы S_f *финитных* перестановок счетного множества в локально компактные группы. В §1 доказано, что группа S_f не может быть вложена в почти связную (и, в частности, в связную) локально компактную группу (см. следствие 1.3). Этот результат выводится из общей теоремы 1.2, в которой доказывается невозможность вложения простой нелинейной группы в почти связную локально компактную группу. Во втором параграфе показано, что S_f можно плотно вложить в непрерывную вполне несвязную локально компатную группу (см. следствие 2.5). Для построения такого вложение на группе S_f вводится недискретная локально ограниченная топология (см. теорему 2.4).

В дальнейшем группа финитных перестановок счетного множества будет рассматриваться как возрастающее объединение конечных симметрических групп: $S_f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$.

1. В этом разделе будет рассмотрен вопрос о возможности вложения группы S_f в почти связную локально компактную группу.

Пусть G — топологическая группа, а G_0 — её связная компонента единицы.

Определение 1.1. *Будем говорить, что группа G почти связна, если факторгруппа G/G_0 компактна.*

Теорема 1.2. *Пусть простая дискретная группа Γ не является линейной группой над полем $\mathbb{C}$ (т. е. не может быть вложена ни в какую* *группу* $GL(n,\mathbb{C})$). *Тогда* Γ *нельзя вложить в почти связную локально компактную группу.*

Доказательство проведем в несколько этапов.

(1) Покажем, что группа Γ не может быть вложена в компактную группу. Пусть G — компактная топологическая группа, а $\varphi : \Gamma \to G$ — вложение. Согласно теореме Петера - Вейля [8, стр. 438], для $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$ существует такой гомоморфизм $\psi : G \to U(n)$, что $\psi(\varphi(\gamma)) \neq I$. Можно считать, что $\psi : G \to GL(n,\mathbb{C})$. Рассмотрим гомоморфизм $\vartheta = \psi \circ \varphi : \Gamma \to GL(n,\mathbb{C})$. Тогда $\vartheta(\gamma) \neq I$. Значит, $Ker\,\vartheta \neq \Gamma$. Но $Ker\,\vartheta \lhd \Gamma$ и Γ — простая группа. Следовательно, $Ker\,\vartheta = \{e\}$, т. е. $\vartheta : \Gamma \to GL(n,\mathbb{C})$ — инъективный гомоморфизм. Это противоречит предположению о нелинейности группы Γ над $\mathbb{C}$.

(2) Проверим, что Γ нельзя вложить в связную группу Ли. Предположим, что $\varphi : \Gamma \to G$ — такое вложение. Пусть $Ad_G : G \to GL(\mathfrak{g})$ — присоединённое представление группы G, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G ($dim\,\mathfrak{g} < \infty$). Тогда, согласно [6, стр. 138], $Ker\,Ad_G = Z$, где Z — центр группы G. Можно считать, что $Ad_G : G \to GL(n,\mathbb{C})$. Рассмотрим гомоморфизм $\vartheta = Ad_G \circ \varphi : \Gamma \to GL(n,\mathbb{C})$. Так как Γ — простая группа, то $Ker\,\vartheta = \{e\}$ или $Ker\,\vartheta = \Gamma$. Но группа Γ не является линейной над полем $\mathbb{C}$. Значит, $Ker\,\vartheta = \Gamma$, т. е. $\varphi(\Gamma) \subset Ker\,Ad_G = Z$. Поскольку φ — инъекция, из вышестоящего включения вытекает, что Γ — абелева группа. Противоречие.

(3) Докажем теперь, что Γ не может быть вложена в связную локально компактную группу. Предположим, что $\varphi : \Gamma \to G$ — вложение, а G — связная локально компактная группа. Пусть U — компактная окрестность единицы группы G. Тогда, согласно [3, стр. 138], существует замкнутый нормальный делитель $N \subset U$ такой, что ${}^{G}/{}_{N}$ — связная группа Ли. Так как U компактна, то N — компактная группа. Пусть $\pi : G \to {}^{G}/{}_{N}$ — естественная проекция. Рассмотрим $\vartheta = \pi \circ \varphi$, $\vartheta : \Gamma \to {}^{G}/{}_{N}$. Как и в пункте (2) получаем, что $Ker\,\vartheta = \{e\}$ или $Ker\,\vartheta = \Gamma$. Если $Ker\,\vartheta = \{e\}$, то $\vartheta : \Gamma \to {}^{G}/{}_{N}$ — вложение Γ в связную группу Ли, что противоречит пункту (2). Если же $Ker\,\vartheta = \Gamma$, то $\varphi(\Gamma) \subset N$. Тогда $\varphi : \Gamma \to N$ — вложение Γ в компактную группу, что противоречит пункту (1).

(4) Пусть, наконец, G — почти связная группа, а $\varphi : \Gamma \to G$ — вложение. Рассмотрим естественное отображение $\pi : G \to {}^{G}/{}_{G_0}$. Пусть $\vartheta = \pi \circ \varphi$, $\vartheta : \Gamma \to {}^{G}/{}_{G_0}$. Если $Ker\,\vartheta = \{e\}$, то ϑ — вложение Γ в компактную группу, что противоречит пункту (1). Если же $Ker\,\vartheta = \Gamma$, то $\varphi(\Gamma) \subset G_0$. Значит, $\varphi : \Gamma \to G_0$ — вложение Γ в связную локально компактную группу, что противоречит пункту (3).

Используя теорему 1.2, получаем основной результат этого раздела

Следствие 1.3. *Группа* S_f *не может быть вложена в почти связную локально компактную группу.*

Достаточно доказать утверждение следствия для подгруппы четных перестановок A_f. Отметим, что группа A_f является простой как возрастающее объединение простых групп A_n, $n > 4$ (см. [1, стр. 189]).

Осталось показать, что A_f нелинейна над $\mathbb{C}$. Предположим, что мы вложили A_f в $GL(n, \mathbb{C})$. Тогда подгруппам A_m соответствуют в $GL(n, \mathbb{C})$ конечные подгруппы G_m. Но, как следует из классической теоремы Жордана (см. [4, стр. 404]), каждая G_m содержит абелеву нормальную подгруппу индекса $\leq J(n)$, где $J(n)$ — натуральное число, зависящее только от n. Так как G_m — простая группа при $m > 4$, то все, указанные выше, абелевы нормальные подгруппы совпадают с единичной группой $\{I\}$. Но индекс $\{I\}$ в G_m равняется порядку группы A_m, т. е. равен $m!/2$ $(m > 4)$. Выбрав число m достаточно большим мы можем добиться того, что $m!/2$ будет больше $J(n)$. Приходим к противоречию.

С помощью теоремы 1.2 можно получить результат о невозможности вложения в почти связную группу и для некоторых других групп.

Следствие 1.4. *Пусть Γ — простая дискретная конечно порожденная бесконечная группа (пример такой группы см. в [7, стр. 87] и в [10, стр. 61]). Тогда Γ нельзя вложить в почти связную локально компактную группу.*

Достаточно показать, что Γ нелинейна над $\mathbb{C}$.

Пусть $\varphi : \Gamma \to GL(n, \mathbb{C})$ — вложение. Тогда $\varphi(\Gamma)$ — конечно порожденная группа из $GL(n, \mathbb{C})$. А, значит, согласно теореме А. И. Мальцева [4, стр. 408], $\varphi(\Gamma)$ финитно аппроксимируема, т. е. для любого элемента $g \in \varphi(\Gamma)$, отличного от единицы, существует конечная группа F и такой гомоморфизм $\psi : \varphi(\Gamma) \to F$, что $\psi(g) \neq e$. Пусть $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$. Положим $g = \varphi(\gamma)$ и пусть ψ — соответствующий g гомоморфизм. Рассмотрим гомоморфизм $\vartheta = \psi \circ \varphi : \Gamma \to F$. Тогда $\vartheta(\gamma) = \psi(g) \neq e$. Значит, $Ker\,\vartheta \neq \Gamma$. Но $Ker\,\vartheta \lhd \Gamma$ и Γ — простая группа. Следовательно, $Ker\,\vartheta = \{e\}$, т. е. ϑ — инъективный гомоморфизм . Но Γ — бесконечная группа, а F — конечная. Противоречие.

2. Очевидно, что любую дискретную группу Γ можно вложить в непрерывную локально компактную группу (в качестве такой группы, можно взять, например, группу $\Gamma \times \mathbb{R}$). Поэтому в следствии 1.3 условие почти связности отбросить нельзя. В этом разделе мы докажем, что группу S_f можно *плотно* вложить в непрерывную вполне несвязную локально компактную группу (см. следствие 2.5). Согласно [2, стр. 26] и результатам §1 для этого достаточно показать, что на S_f можно ввести непрерывную локально ограниченную топологию (см. определение 2.1). Идея построения требуемой топологии навеяна работой [9], где доказанно, что на группе *всех* перестановок множества $\mathbb{N}$ такой топологии ввести нельзя.

Определение 2.1. *Топологическую группу G будем называть локально ограниченной, если существует окрестность единицы U_0, такая, что для каждой окрестности U единицы можно найти конечное число элементов s_i, для которых $U_0 \subset \bigcup_i s_i U$.*

Перейдем к построению искомой топологии на S_f.

Пусть $M \subset \mathbb{N}$ — конечное множество. Положим $E_M = \{\sigma \in S_f : \sigma(m) = m, m \in M\}$. Кроме того, введем следующее множество перестановок: $A = \{\sigma \in S_f : \sigma(2n-1) \in \{2n-1, 2n\}, \sigma(2n) \in \{2n-1, 2n\}, n \in \mathbb{N}\}$. Множество A удобно описать также другим способом. Пусть $\tau_n \in S_f$ — перестановка, действующая по следующему правилу: $\tau_n(2n-1) = 2n$, $\tau_n(2n) = 2n-1$, $\tau_n(m) = m$, если $m \notin \{2n-1, 2n\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n{}^2 = e$ (e — тождественная перестановка, являющаяся единицей группы S_f), а для любых $n, k \in \mathbb{N}$, $\tau_n\tau_k = \tau_k\tau_n$. Пусть $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, в которой конечное число 1, а остальные числа — 0. Тогда произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \tau_n{}^{\alpha_n}$ понимается как композиция конечного числа перестановок, причём, в силу сделанных выше замечаний, порядок перестановок не существенен. Теперь множество A можно задать как множество перестановок вида $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \tau_n{}^{\alpha_n}$.

Определим $A_M = E_M \cap A = \left\{\sigma \in S_f : \sigma = \prod\limits_{n:\{2n-1,2n\}\cap M=\emptyset} \tau_n{}^{\alpha_n}\right\}$. Будем по определению считать, что $E_\emptyset = S_f$ и $A_\emptyset = A$.

Зададим следующее семейство множеств:
$\mathcal{U} = \{A_M : |M| < \infty\} \cup \{E_M : |M| < \infty\}$.

Лемма 2.2. *Система множеств $\{\sigma U\}$, где σ пробегает все элементы S_f, а U — все множества системы $\mathcal{U}$, является открытой базой топологии на S_f, относительно которой S_f является непрерывной топологической группой.*

Сначала покажем, что система $\{\sigma U\}$, $\sigma \in S_f$, $U \in \mathcal{U}$, является открытой базой топологии на S_f, относительно которой S_f является топологической группой. В силу [8, стр. 33] для этого достаточно доказать следующие свойства $\mathcal{U}$:

(i) $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{U} : V^2 \subset U$;

(ii) $\forall U \in \mathcal{U}\ \exists V \in \mathcal{U} : V^{-1} \subset U$;

(iii) $\forall U \in \mathcal{U}\ \forall \sigma \in U\ \exists V \in \mathcal{U} : \sigma V \subset U$;

(iv) $\forall U \in \mathcal{U}\ \forall \sigma \in S_f\ \exists V \in \mathcal{U} : \sigma V \sigma^{-1} \subset U$;

(v) $\forall U, V \in \mathcal{U}\ \exists W \in \mathcal{U} : W \subset U \cap V$

Докажем эти свойства.

(i) Рассмотрим $A_M{}^2$ для некоторого множества M. С одной стороны $A_M{}^2 \supset A_M$. Но $A_M{}^2 = \left\{\prod\limits_{n:\{2n-1,2n\}\cap M=\emptyset} \tau_n{}^{\alpha_n} \prod\limits_{n:\{2n-1,2n\}\cap M=\emptyset} \tau_n{}^{\beta_n}\right\} = \left\{\prod\limits_{n:\{2n-1,2n\}\cap M=\emptyset} \tau_n{}^{\alpha_n+\beta_n}\right\} \subset A_M$. Значит, $A_M{}^2 = A_M$.

Теперь рассмотрим E_M. Очевидно включение $E_M{}^2 \supset E_M$. С другой стороны, $E_M{}^2 = \{\sigma_1\sigma_2 : \sigma_1, \sigma_2 \in E_M\}$. Но $\sigma_1\sigma_2(m) = \sigma_1(m) = m$ для $m \in M$. Значит, $\sigma_1\sigma_2 \in E_M$. Следовательно, $E_M{}^2 \subset E_M$. Итак, $E_M{}^2 = E_M$. Получаем, что $\forall U \in \mathcal{U} : U^2 = U$, т. е. свойство (i) выполнено.

(ii) $A_M^{-1} = \{\sigma^{-1} : \sigma \in A_M\}$. Но для любого $n \in \mathbb{N}$, ${\tau_n}^2 = e$. Следовательно, ${\tau_n}^{-1} = \tau_n$. Тогда $\left(\prod\limits_{n:\{2n-1,2n\}\cap M=\emptyset} {\tau_n}^{\alpha_n}\right)^{-1} = \prod\limits_{n:\{2n-1,2n\}\cap M=\emptyset} {\tau_n}^{-\alpha_n} = \prod\limits_{n:\{2n-1,2n\}\cap M=\emptyset} {\tau_n}^{\alpha_n}$, т. е. $\forall \sigma \in A_M : \sigma^{-1} = \sigma$. Значит, $A_M^{-1} = A_M$. Равенство $E_M^{-1} = E_M$ верно, так как условия $\sigma(m) = m$ и $\sigma^{-1}(m) = m$ эквивалентны. Итак, $\forall U \in \mathcal{U} : U^{-1} = U$. Значит, (ii) выполнено.

(iii) Рассмотрим $U \in \mathcal{U}$. Тогда, согласно (i), $U^2 = U$. Но $\forall \sigma \in U : \sigma U \subset U^2 = U$. Следовательно, $\forall U \in \mathcal{U}\ \forall \sigma \in U : \sigma U \subset U$, т. е. (iii) верно.

(iv) Заметим, что, если $M \subset N \subset \mathbb{N}, |N| < \infty$, то $E_M \supset E_N$, $A_M \supset A_N$. Возьмём $\sigma \in S_f$. Тогда $\exists k \in \mathbb{N} : \sigma(n) = n,\ n > k$. Пусть $U \in \mathcal{U}$. Так как $A_M \subset E_M$, достаточно доказать утверждение для $U = A_M$. Положим $N = M \cup \{1, 2, 3 \ldots, k\}$. Тогда $N \supset M$, и, значит, $A_M \supset A_N$. Положим $V = A_N$. Тогда $V \in \mathcal{U}$, $V \subset U$. Рассмотрим $\sigma V \sigma^{-1} = \sigma A_N \sigma^{-1} = \{\sigma\tau\sigma^{-1} : \tau \in A_N\}$. Пусть $n > k$, а $\tau \in A_N$. Тогда $\sigma^{-1}(n) = n$, т. е. $\sigma\tau\sigma^{-1}(n) = \sigma\tau(n)$. Так как $\tau \in A_N \subset E_N$, то $\tau(n) > k$. Значит, $\sigma(\tau(n)) = \tau(n)$. Итак, $\sigma\tau\sigma^{-1}(n) = \tau(n)$ для $n > k$. Теперь пусть $n \leq k$. Тогда $\tau(n) = n$, а $\sigma^{-1}(n) \leq k$. Получаем, что $\tau\sigma^{-1}(n) = \sigma^{-1}(n)$. Но тогда $\sigma\tau\sigma^{-1}(n) = \sigma\sigma^{-1}(n) = n = \tau(n)$. Следовательно, $\sigma\tau\sigma^{-1} = \tau$, $\tau \in A_N$. Получаем, что $\sigma V \sigma^{-1} = V$. Таким образом, $\forall U \in \mathcal{U}\ \forall \sigma \in S_f\ \exists V \in \mathcal{U} : \sigma V \sigma^{-1} = V \subset U$, т. е. (iv) справедливо.

(v) Пусть $U, V \in \mathcal{U}$, причём $U = X_M$, $V = X_N$, где $X_M \in \{A_M, E_M\}$, $X_N \in \{A_N, E_N\}$. Тогда $U \cap V = X_M \cap X_N \supset A_M \cap A_N$. Положим $K = M \cup N$. Тогда $|K| < \infty$. Кроме того, $A_K \subset A_M$ и $A_K \subset A_N$, так как $K \supset M$ и $K \supset N$. Отсюда $A_K \subset A_M \cap A_N \subset U \cap V$. Положим $W = A_K$. Получаем, что $\forall U, V \in \mathcal{U}\ \exists W \in \mathcal{U} : W \subset U \cap V$, т. е. свойство (v) выполнено.

Будем обозначать топологию на S_f, порожденную системой $\{\sigma U\}$ через $\mathcal{T}$. Топологическое пространство $(S_f, \mathcal{T})$ хаусдорфово. Действительно, пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in S_f$, и k — такое, что $\sigma_1(n) = n$, $\sigma_2(n) = n$ при $n > k$. Положим $M = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$ и рассмотрим окрестности $\sigma_1 E_M$ и $\sigma_2 E_M$ перестановок σ_1 и σ_2, соответственно. Тогда $\sigma_1 E_M \cap \sigma_2 E_M = \emptyset$.

Осталось показать, что $(S_f, \mathcal{T})$ не является дискретной группой. Предположим, что $\{e\}$ — открытое множество. Тогда множество $\{e\}$ должно входить в систему $\mathcal{U}$, что не выполнено. Лемма доказана.

Замечание 2.3. Используя конструкцию из работы [9], можно доказать следующее утверждение:

Если на S_f задана такая топология $\mathcal{T}$, что $(S_f, \mathcal{T})$ — топологическая группа, то следующие условия эквивалентны:

- *$(S_f, \mathcal{T})$ — хаусдорфово пространство;*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, E_n — замкнутое множество;*
- *$\forall n \in \mathbb{N}$, E_n — открытое множество.*

Это утверждение объясняет, в частности, почему нам пришлось в систему $\mathcal{U}$ включить множества вида E_M.

Теорема 2.4. *Топологическая группа $(S_f, \mathcal{T})$ является непрерывной локально ограниченной группой.*

В силу леммы 2.2 в доказательстве нуждается только локальная ограниченность группы. В качестве U_0 выберем множество $A = A_\emptyset \in \mathcal{U}$. Надо показать, что для любой окрестности единицы U существует набор перестановок $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in S_f$ такой, что $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \sigma_i U$. Ясно, что можно считать $U \in \mathcal{U}$. Так как $E_M \supset A_M$, то достаточно рассмотреть $U = A_M$, $|M| < \infty$. Так как M — конечное множество, то существует k такое, что множество $N = \{1, 2, 3, \ldots 2k\} \supset M$. Тогда $A_N \subset A_M$. Рассмотрим 2^k перестановок вида $\prod_{i=1}^{k} \tau_i^{\alpha_i}$, где τ_i — перестановка, определенная при построении множества A, а α_i — 0 или 1. Обозначим $\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} \tau_i^{\alpha_i}$. Докажем, что $A \subset \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} A_N$. Действительно, $A_N = \left\{ \sigma \in S_f : \sigma = \prod_{i=k+1}^{\infty} \tau_i^{\alpha_i} \right\}$. Тогда $\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} A_N = \left\{ \sigma \in S_f : \sigma = \prod_{i=1}^{\infty} \tau_i^{\alpha_i}, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ при } n > k \right\}$. Но если $\sigma \in A$, то $\sigma = \prod_{i=1}^{\infty} \tau_i^{\alpha_i}$. Зафиксируем набор $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, соответствующий σ, и по нему построим перестановку $\sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$. Тогда $\sigma \in \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} A_N$. Значит, $A \subset \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} \sigma_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k} A_N$ и теорема доказана.

С помощью теоремы 2.4 получаем

Следствие 2.5. *Группа S_f может быть плотно вложена в непрерывную вполне несвязную локально компактную группу.*

Из теоремы 2.4 и [2, стр. 26] вытекает, что мы можем плотно вложить S_f в некоторую непрерывную локально компактную группу G. Пусть $\varphi : S_f \to G$ — плотное вложение, а G_0 — связная компонента единицы группы G. Тогда группа G/G_0 вполне несвязна. Рассмотрим естественное отображение $\pi : G \to G/G_0$ и положим $\vartheta = \pi \circ \varphi$. Покажем теперь, что $\vartheta : S_f \to G/G_0$ — плотное вложение, причём группа G/G_0 непрерывна. Пусть $N = Ker\, \vartheta \cap A_f$. Тогда $N \lhd A_f$. Следовательно, или $N = \{e\}$, или $N = A_f$. Если $N = A_f$, то $\varphi(A_f) \subset G_0$, т. е. сужение φ на A_f — это вложение A_f в связную группу, невозможность чего фактически была доказана в следствии 1.3. Значит $N = \{e\}$. Покажем, что $Ker\, \vartheta = \{e\}$. Ясно, что $Ker\, \vartheta \lhd S_f$. Но любая нормальная подгруппа H группы S_f — тривиальна, либо совпадает с A_f. Действительно, $H \cap A_f$ — это либо A_f, либо $\{e\}$. Если $H \supset A_f$, то, так как $[S_f : A_f] = 2$, то в этом случае $H = A_f$ или $H = S_f$. Если же $H \cap A_f = \{e\}$, но $H \neq \{e\}$, то для $\sigma, \tau \in H \setminus \{e\}$ имеем $\sigma\tau \in H \cap A_f$. Поэтому $\sigma\tau = e$, т. е. $\sigma^2 = e$ и $\tau = \sigma^{-1} = \sigma$. Таким образом, $H = \{e, \sigma\}$. Следовательно, ввиду нормальности H, для всех $\omega \in S_f$, $\omega\sigma\omega^{-1} = \sigma$. Значит, σ лежит в центре группы S_f, т. е. $\sigma = e$, и мы приходим к противоречию.

Итак, $Ker\, \vartheta = \{e\}$, т. е. ϑ — вложение и $\varphi(S_f) \cap G_0 = \{e\}$. Докажем теперь непрерывность группы G/G_0. Если G/G_0 дискретна, то G_0 — открытая подгруппа G, что противоречит равенству $\varphi(S_f) \cap G_0 = \{e\}$, ввиду плотности подгруппы $\varphi(S_f)$ в G. Осталось проверить, что ϑ — плотное вложение. Это непосредственно следует из плотности вложения φ и сюръективности непрерывного гомоморфизма ϑ. Утверждение полностью доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 624 с.

2. Вейль А. Интегрирование в топологических группах и его применение. – М.: ИЛ, 1950. – 222 с.

3. Капланский И. Алгебры Ли и локально компактные группы. – М.: Мир, 1974.– 150 с.

4. Мерзляков Ю.И. Рациональные группы. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

5. Улам С. Нерешенные математические задачи. – М.: Наука, 1964. – 168 с.

6. Хелгассон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. – М.: Мир, 1964. – 534 с.

7. Хигман Г. Конечно определенные бесконечные простые группы // Серия: Математика. Новое в зарубежной науке. – М.: Мир, 1981. – вып. 21. – С. 87–147.

8. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. – т.1 – М.: Наука, 1975. – 656 с.

9. Gaughan E. D. Topological group structures of infinite symmetric groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, – 1967. – **58**. – P. 907–910.

10. Higman G. A finitely generated infinite simple group // J. London Math Soc., – 1951. – **26**. – P. 61–64.