

К-14038

ISSN 0453-8048
ISSN 0135-1850

П300985

205

ВЕСТНИК

**ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА**

№ 205

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА
Выпуск 45**

І р. 40 к.



Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 205, 1 — 138 + 2.

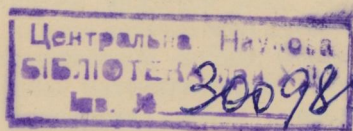
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА
№ 205

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

В Ы П У С К 45

Основан в 1965 г.



ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»

1980

Прикладная математика и механика, вып. 45.— Вестн. Харьк. ун-та, № 205.— Харьков: Вища школа. Изд-во при Харьк. ун-те, 1980.—138+2 с.

В вестнике приведены сведения об истории и традициях Харьковского математического общества, изложены материалы, отражающие дальнейшее развитие теории функций, функционального анализа, дифференциальных уравнений, математической теории устойчивости по Ляпунову. Освещены отдельные вопросы современной алгебры и теоретической механики.

Для научных работников и специалистов.

Списки лит. в конце статей.

Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов, В. И. Коробов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко.

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 9 от 11 декабря 1979 года)

Адрес редакционной коллегии:
310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, госуниверситет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40.

Редакция естественнонаучной литературы

ХАРЬКОВСКОМУ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ ОБЩЕСТВУ — 100 ЛЕТ

Харьковское математическое общество было организовано при Харьковском университете в 1879 г. по инициативе проф. В. Г. Имшенецкого. Деятельность работавших в Харькове в конце XIX — начале XX века великих математиков А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова принесла Обществу и его научному журналу «Сообщения Харьковского Математического общества» мировую известность. В этом журнале была опубликована значительная часть работ одного из крупнейших математиков С. Н. Бернштейна, который в течение 25 лет жил и работал в Харькове.

После Великой Октябрьской революции Харьков становится одним из ведущих математических центров страны. Не случайно он был избран местом проведения Первого всесоюзного съезда математиков (1930 г.) Одно из заседаний съезда было посвящено 50-летию Харьковского математического общества.

В тридцатые годы деятельность Общества тесно связана с организованным при ХГУ Научно-исследовательским институтом математики и механики. Будучи директором института и главным редактором журнала Общества, проф. Н. И. Ахиезер сыграл исключительно важную роль в создании в Харькове сильного математического коллектива. Усилия проф. Д. М. Синцова привели к возникновению в Харькове геометрической школы, руководителем которой в наше время является акад. А. В. Погорелов. Проф. А. К. Сушкевич явился зачинателем алгебраической школы.

После Великой Отечественной войны Общество возглавило работу по восстановлению математической жизни в Харькове и много сделало для повышения уровня преподавания математики в школах и вузах.

Харьковское математическое общество имеет все основания гордиться выполненными в Харькове работами по геометрии, функциональному анализу, теории функций и алгебре.

Редколлегия

В. А. МАРЧЕНКО, акад. АН УССР, И. В. ОСТРОВСКИЙ,
чл. кор. АН УССР

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ КОНЕЧНОЗОННЫМИ

Введение. Дифференциальная операция Штурма — Лиувилля

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1)$$

с вещественным периодическим потенциалом $v(x) = v(x + \pi)$ порождает в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ самосопряженный оператор Хилла H . Спектр этого оператора непрерывен и состоит из последовательности сегментов

$$[\mu_0, \mu_1^-], [\mu_1^+, \mu_2^-], [\mu_2^+, \mu_3^-], \dots \quad (2)$$

где $\mu_0 < \mu_2^- \leq \mu_2^+ < \mu_4^- \leq \mu_4^+ < \dots$ — собственные значения периодической ($y(0) = y(\pi)$, $y'(0) = y'(\pi)$), а $\mu_1^- \leq \mu_1^+ < \mu_3^- \leq \mu_3^+ < \dots$ — антипериодической ($y(0) = -y(\pi)$, $y'(0) = -y'(\pi)$) краевых задач, порождаемых операцией (1) на отрезке $[0, \pi]$. Сегменты (2) называются зонами непрерывного спектра, а разделяющие их интервалы $(-\infty, \mu_0)$, (μ_1^-, μ_1^+) , $\dots$ — лакунами. Если строгие неравенства $\mu_k^- < \mu_k^+$ выполняются лишь для конечного числа индексов $k = k_1, k_2, \dots, k_{l-1}$, то почти все зоны слипаются, и в этом случае спектр оператора Хилла состоит только из l зон:

$$[\mu_0, \mu_{k_1}^-], [\mu_{k_1}^+, \mu_{k_2}^-], \dots, [\mu_{k_{l-2}}^+, \mu_{k_{l-1}}^-], [\mu_{k_{l-1}}^+, \infty).$$

Такие операторы Хилла и соответствующие им потенциалы называются конечнозонными.

В работе [1] описаны необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять последовательность сегментов, для того, чтобы она была спектром некоторого оператора Хилла, что позволило, в частности, доказать плотность множества конечнозонных потенциалов в пространстве всех периодических потенциалов $v(x) \in L_2(0, \pi)$. (Уточненный вариант этой теоремы содержится в книге [2, с. 258]). В приложениях теоремы о плотности

множества конечнозонных потенциалов часто оказывается необходимым дать явную конструкцию последовательности конечнозонных потенциалов $v_N(x)$, сходящихся при $N \rightarrow \infty$ к данному потенциалу $v(x)$, и оценить скорость сходимости. Настоящая работа посвящена решению этих задач. Основные теоремы опубликованы без доказательств в [3], а их первоначальные весьма громоздкие доказательства остались неопубликованными.

Результаты работ [1, 3] обобщены Т. В. Мисюрой [4—6] на случай операторов Дирака с периодическими потенциальными матрицами. Такое обобщение потребовало существенных изменений доказательств, поскольку методы, использованные нами при исследовании скалярного уравнения Хилла, не поддавались непосредственному обобщению на случай векторного уравнения Дирака. Это побудило нас пересмотреть первоначальный вариант доказательства, что в конечном счете привело к заметным упрощениям, а также уточнению оценочных констант. Предлагаемое доказательство базируется на двух новых спектральных тождествах (см. леммы 1, 3), которые, как нам кажется, представляют и самостоятельный интерес. Они являются аналогами соответствующих тождеств для операторов Дирака, впервые доказанных в [5].

Сформулируем основные результаты работы [1] в удобной для нас форме. Везде в дальнейшем используются следующие обозначения: l — дифференциальная операция вида (1); $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$ — фундаментальная система решений уравнения $l[y] = \lambda^2 y$, определенная начальными условиями

$$c(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) = 1, \quad c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = 0; \quad (3)$$

$u_+(\lambda)$ — функция Ляпунова,

$$u_+(\lambda) = \frac{1}{2} [c(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi)]; \quad (4)$$

$u_-(\lambda)$ — функция, описываемая равенством

$$u_-(\lambda) = \frac{1}{2} [c(\lambda, \pi) - s'(\lambda, \pi)]; \quad (5)$$

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ — собственные значения первой краевой задачи ($y(0) = y(\pi) = 0$), порождаемой операцией (1) на отрезке $[0, \pi]$.

Как известно, собственные значения периодической ($\mu_0 < \mu_2^- \leq \mu_2^+ < \dots$), антипериодической ($\mu_1^- \leq \mu_1^+ < \mu_3^- \leq \mu_3^+ < \dots$) и первой ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$) краевых задач являются корнями уравнений $u_+(V\bar{z}) - 1 = 0$, $u_+(V\bar{z}) + 1 = 0$ и $s(V\bar{z}, \pi) = 0$, а их взаимное расположение таково:

$$-\infty < \mu_0 < \mu_1^- \leq \lambda_1 \leq \mu_1^+ < \mu_2^- \leq \lambda_2 \leq \mu_2^+ < \dots \quad (6)$$

Последовательность (6) не определяет потенциал $v(x)$ однозначно, но согласно теореме единственности Г. Борга [7] эта последовательность вместе с последовательностью

$$\sigma_1 = \text{sign } u_-(V\bar{\lambda}_1), \quad \sigma_2 = \text{sign } u_-(V\bar{\lambda}_2), \quad \dots \quad (6')$$

уже однозначно определяют потенциал. Для краткости пару последовательностей (6), (6') мы будем называть спектральными данными оператора Хилла. Часто оказывается целесообразным вместо (6) рассматривать последовательности $\sqrt{\mu_k^{\pm} - \mu_0}$, $-\sqrt{\mu_k^{\mp} - \mu_0}$, $\sqrt{\lambda_k - \mu_0}$, для которых удобно ввести такие обозначения:

$$\alpha_0^{\pm} = 0, \alpha_k^{\pm} = \sqrt{\mu_k^{\pm} - \mu_0}, \alpha_{-k}^{\pm} = -\sqrt{\mu_k^{\mp} - \mu_0},$$

$$\beta_k = \sqrt{\lambda_k - \mu_0} \quad (k \geq 1). \quad (7)$$

Проведем в комплексной z -плоскости горизонтальные разрезы $\{\operatorname{Im} z = 0, \alpha_k^- \leq \operatorname{Re} z \leq \alpha_k^+\}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, и в полученной области

$$Z(\alpha) = \{|z| < \infty\} \setminus \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \{\operatorname{Im} z = 0, \alpha_k^- \leq \operatorname{Re} z \leq \alpha_k^+\}$$

выберем однозначную ветвь радикала $\sqrt{1 - u_+^2 (V \overline{z^2 + \mu_0})}$ так, чтобы он был положителен на интервале $(0, \alpha_1^-)$. Полагая

$$\theta(z) = - \int_0^z \frac{du_+ (V \overline{\xi^2 + \mu_0})}{\sqrt{1 - u_+^2 (V \overline{\xi^2 + \mu_0})}}, \quad (8)$$

будем иметь $u_+ (\sqrt{z^2 + \mu_0^2}) = \cos \theta(z)$. Функция $\theta(z)$ осуществляет конформное отображение области $Z(\alpha)$ на область $\Theta(h) = \{|\theta| < \infty\} \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\operatorname{Re} \theta = \pm k\pi, -h_k \leq \operatorname{Im} \theta \leq h_k\}$, однозначно определяемое условиями

$$\theta(0) = 0, \lim_{y \rightarrow \infty} (iy)^{-1} \theta(iy) = \pi \quad (8')$$

и величинами $h_k \geq 0$, которые находятся из уравнений

$$\operatorname{ch} h_k = \sup_{\alpha_k^- < x < \alpha_k^+} |u_+ (\sqrt{x^2 + \mu_0})| = \sup_{\mu_k^- < x < \mu_k^+} |u_+ (\sqrt{x})|. \quad (9)$$

Обозначим через $z(\theta)$ функцию, обратную $\theta(z)$. Равенства

$$\theta_0 = \mu_0, \quad |\theta_k| = h_k;$$

$$\operatorname{Im} \theta_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{Im} \theta (\sqrt{\lambda_k - \mu_0} + i\varepsilon u_- (\sqrt{\lambda_k})), \quad (10)$$

$$\operatorname{sign} \operatorname{Re} \theta_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \operatorname{sign} \operatorname{Re} \{\theta (\sqrt{\lambda_k - \mu_0} + i\varepsilon) - k\pi\}$$

определяют некоторый нелинейный оператор T : $T[v] = \theta$, отображающий множество вещественных потенциалов $v(x) = v(x + \pi)$ в множество последовательностей $\theta = \{\theta_0, \theta_1, \dots\}$ ($\theta_0 = \bar{\theta}_0$) комплексных чисел θ_k .

Пусть $\tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$ — пространство вещественных периодических функций $v(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{2ikx}$ ($v_k = \bar{v}_{-k}$) с нормой

$$\|v\|_{(n)} = \sqrt{\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} (1 + |k|^n)^2 |v_k|^2},$$

и $\tilde{W}_2^n$ — пространство последовательностей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots)$ ($\theta_0 = \bar{\theta}_0$) с нормой

$$\|\theta\|_{(n)} = \sqrt{\theta_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |k^n \theta_k|^2}.$$

Заметим, что пространство $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$ совпадает с пространством вещественных функций $v(x) \in L_2(0, \pi)$, периодически продолженных на всю ось, и норма $\|v\|_{(0)}$ совпадает с обычной нормой в пространстве $L_2(0, \pi)$, которую мы будем обозначать через $\|v\|_{\pi}$:

$$\|v\|_{(0)} = \|v\|_{\pi} = \left[\int_0^{\pi} v^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Основной результат работы [1] эквивалентен следующей теореме:

Теорема А. *Определенный равенствами (8)–(10) оператор T*

взаимнооднозначно отображает пространство $\tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$ на пространство $\tilde{W}_2^n$. При этом функции Ляпунова $u_+(\lambda)$ и спектральные данные (6), (6') операторов Хилла с потенциалами $v(x) = T^{-1}[\theta]$ выражаются через последовательности $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots)$ по формулам:

$$u_+(z) = \cos \theta \left(\sqrt{z^2 - \mu_0} \right), \quad (11)$$

$$\mu_0 = \theta_0, \quad \mu_k^{\pm} = \theta_0 + z^2 (k\pi \pm 0),$$

$$\lambda_k = \theta_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} z^2 (k\pi + i \operatorname{Im} \theta_k + \varepsilon \operatorname{Re} \theta_k), \quad (12)$$

$$\operatorname{sign} u_- \left(\sqrt{\lambda_k} \right) = \operatorname{sign} \operatorname{Im} \theta_k,$$

где функции $\theta(z)$, а значит, и $z(\theta)$, однозначно определяются условиями (8) и величинами $h_k = |\theta_k|$ ($k = 1, 2, \dots$).

Теорема А дает полное решение обратной задачи для операторов Хилла. Эта задача имеет специфические особенности, отсутствующие в других обратных задачах спектрального анализа. Пусть, например, $\{\lambda_k\}$, $\{\nu_k\}$ — последовательности собственных значений краевых задач $l[y] = \lambda y$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = y(\pi) = 0$, $l[y] = \nu y$, $0 \leq x \leq \pi$, $y(0) = y'(\pi) = 0$. Тогда существует такое положительное число δ , что любые последовательности $\{\tilde{\lambda}_k\}$, $\{\tilde{\nu}_k\}$, удовлетворяющие неравенству $\sum_{k=1}^{\infty} [(\lambda_k - \tilde{\lambda}_k)^2 + (\nu_k - \tilde{\nu}_k)^2] < \delta$, тоже состоят из собственных значений тех же краевых задач,

порождаемых некоторой другой операцией Штурма — Лиувилля

1. Значит, последовательности собственных значений этих краевых задач образуют открытое множество в соответствующем пространстве последовательностей. Иначе обстоит дело с последовательностями собственных значений периодической и антипериодической краевых задач: если в них изменить только одно собственное значение, оставив все остальные прежними, то полученные последовательности уже не могут быть спектрами периодической и антипериодической краевых задач. Таким образом, последовательности собственных значений этих краевых задач образуют некоторые многообразия в соответствующем пространстве последовательностей, и особенность обратной задачи для оператора Хилла состоит в необходимости параметризовать эти многообразия с помощью независимых параметров. Формулы (12) и дают представление спектральных данных операторов Хилла через независимые параметры $\theta_0, \theta_1, \dots$

Отметим некоторые свойства отображения T , непосредственно вытекающие из определяющих его равенств (10) и теоремы А.

1) Если $T[v(x)] = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$ и c — произвольное вещественное число, то $T[v(x) + c] = (\theta_0 + c, \theta_1, \theta_2, \dots)$.

2) Если $T[v(x)] = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$, то $u_+(\sqrt{\lambda_k}) = (-1)^k \operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta_k$, $u_-(\sqrt{\lambda_k}) = \operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_k$, $s'(\sqrt{\lambda_k}, \pi) = (-1)^k \exp \{(-1)^k \operatorname{Im} \theta_k\}$. (13)
Действительно, согласно (11), (12)

$$u_+(\sqrt{\lambda_k}) = \cos \theta(\sqrt{\lambda_k} - \mu_0) = \cos(k\pi + i \operatorname{Im} \theta_k) = (-1)^k \operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta_k.$$

Далее, из тождества $c(\lambda, x)s'(\lambda, x) - c'(\lambda, x)s(\lambda, x) \equiv 1$ и равенства $c(\lambda, \pi)s'(\lambda, \pi) = u_+^2(\lambda) + u_-^2(\lambda)$, вытекающего из определения функций $u_+(\lambda)$, $u_-(\lambda)$, следует, что $1 = c(\lambda, \pi)s'(\lambda, \pi) - c'(\lambda, \pi)s(\lambda, \pi) = u_+^2(\lambda) - u_-^2(\lambda) - c'(\lambda, \pi)s(\lambda, \pi)$ и, значит,

$$u_-^2(\sqrt{\lambda_k}) = u_+^2(\sqrt{\lambda_k}) - 1, \quad \text{поскольку} \quad s(\sqrt{\lambda_k}, \pi) = 0. \quad \text{Поэтому}$$

$$\begin{aligned} u_-(\sqrt{\lambda_k}) &= \{\operatorname{sign} u_-(\sqrt{\lambda_k})\} \sqrt{u_+^2(\sqrt{\lambda_k}) - 1} = \\ &= \{\operatorname{sign} \operatorname{Im} \theta_k\} \operatorname{sh} |\operatorname{Im} \theta_k| = \operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_k, \quad s'(\sqrt{\lambda_k}, \pi) = \\ &= u_+(\sqrt{\lambda_k}) - u_-(\sqrt{\lambda_k}) = (-1)^k \operatorname{ch} \operatorname{Im} \theta_k - \operatorname{sh} \operatorname{Im} \theta_k = \\ &= (-1)^k \exp \{(-1)^k \operatorname{Im} \theta_k\}. \end{aligned}$$

3) Для последовательностей $\alpha_k^\pm, \beta_k$, определенных формулами (7), справедливы равенства

$$\alpha_k^\pm = z(k\pi \pm 0), \quad \beta_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} z(k\pi + i \operatorname{Im} \theta_k + \varepsilon \operatorname{Re} \theta_k).$$

4) Множество $\tilde{W}^{(\infty)}[\pi] = \bigcap_{n=0}^{\infty} \tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$ бесконечно дифференцируемых периодических потенциалов оператор T взаимнооднозначно

отображает на множество $\omega^\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \omega_n^2$ последовательностей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\theta_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} |k^n \theta_k|^2 < \infty$$

при всех $n = 1, 2, \dots$

5) Для данного значения k $\mu_k^+ = \mu_k^-$ тогда и только тогда, когда $\theta_k = 0$. Поэтому множество V_N потенциалов, для которых $\mu_k^+ = \mu_k^-$ при всех $k \geq N$, оператор T взаимнооднозначно отображает на множество последовательностей $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N-1}, 0, 0, \dots)$, у которых $\theta_k = 0$ при всех $k \geq N$, а множество $V = \bigcup_N V_N$ всех конечнозонных потенциалов он взаимнооднозначно отображает на множество всех финитных последовательностей. Отсюда согласно свойству 4) следует также, что все конечнозонные потенциалы бесконечно дифференцируемы. (На самом деле они являются аналитическими функциями, что вытекает из результатов работы [8]).

§ 1. Вспомогательные спектральные тождества. Рассмотрим дифференциальную операцию Штурма — Лиувилля

$$l = -\frac{d^2}{dx^2} + v(x) \quad (0 \leq x < \infty) \quad (1.1)$$

с вещественным потенциалом $v(x)$, суммируемым с квадратом на каждом конечном сегменте $[0, a]$. На дважды непрерывно дифференцируемых функциях $y(x) \in L_2(0, \infty)$, удовлетворяющих граничному условию $y'(0) - hy(0) = 0$ ($y(0) = 0$, если $h = \infty$), (1.2) где $h = \bar{h}$, операция l порождает симметрический оператор, индексы дефекта которого равны $(0, 0)$ или $(1, 1)$. Обозначим через $L(h)$ — какое-нибудь самосопряженное расширение этого оператора. Та же операция l , рассматриваемая на дважды дифференцируемых функциях $y(x) \in L_2(0, \pi)$ ($y''(x) \in L_2(0, \pi)$), удовлетворяющих граничным условиям (1.2) и $y'(\pi) - Hy(\pi) = 0$ ($y(\pi) = 0$, если $H = \infty$), (1.2') где $H = \bar{H}$, порождает в пространстве $L_2(0, \pi)$ самосопряженный оператор, который мы обозначим через $L_\pi(h, H)$. Формулы разложения по собственным функциям операторов $L(h)$ и $L_\pi(h, H)$ имеют такой вид:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(V_{\bar{\mu}}, f) \omega_h(V_{\bar{\mu}}, x) d\rho_h(\mu), \quad (f(x) \in L_2(0, \infty)), \quad (1.3)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_h(V_{\bar{\nu}_k}, f) \omega_h(V_{\bar{\nu}_k}, x)}{\|\omega_h(V_{\bar{\nu}_k}, x)\|_\pi^2}, \quad (f(x) \in L_2(0, \pi)), \quad (1.4)$$

де $\omega_h(\lambda, x)$ — решение уравнения $l[y] = \lambda^2 y$ при начальных данных $\omega_h(\lambda, 0) = 1, \omega'_h(\lambda, 0) = h$ ($\omega_\infty(\lambda, 0) = 0, \omega'_\infty(\lambda, 0) = 1$),

ν_k — собственные значения оператора $L_\pi(h, H)$ и

$$\omega_h(\lambda, g) = \int_0^\pi g(x) \omega_h(\lambda, x) dx, \quad \|\omega_h(\lambda, x)\|_\pi^2 = \int_0^\pi |\omega_h(\lambda, x)|^2 dx.$$

Неубывающая функция $\rho_h(\mu)$ называется спектральной функцией оператора $L(h)$. Будем обозначать скалярное произведение и норму в пространстве $L_2(0, \infty)$ через $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$, а в пространстве $L_2(0, \pi)$ — через $(\cdot, \cdot)_\pi$, $\|\cdot\|_\pi$. Функции $F(x) \in L_2(0, \pi)$, продолженные нулем на полуось $[\pi, \infty)$, обозначаются тоже через $F(x)$.

Лемма 1. Пусть целые функции $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ экспоненциального типа $\leq \pi$ удовлетворяют условиям $f(\lambda)$, $g(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$, если $h \neq \infty$, (1.5) $\lambda f(\lambda)$, $\lambda g(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$, если $h = \infty$ (1.5') и $f(\lambda) = f(-\lambda)$, $g(\lambda) = -g(\lambda)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(V\bar{\mu})|^2 d\rho_h(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(V\bar{\nu}_k)|^2}{\|\omega_h(V\bar{\nu}_k, x)\|_\pi^2}, \quad (1.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(V\bar{\mu})|^2 \frac{\mu}{|\mu|} d\rho_h(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k}{|\nu_k|} \frac{|g(V\bar{\nu}_k)|^2}{\|\omega_h(V\bar{\nu}_k, x)\|_\pi^2}. \quad (1.7)$$

Доказательство. Если $h = \infty$, и, следовательно, выполнено условие (1.5'), то по теореме Пели — Винера

$$\lambda f(\lambda) = \int_0^\pi F(x) \sin \lambda x dx; \quad (1.8)$$

$$\lambda g(\lambda) = \int_0^\pi G_1(x) \cos \lambda x dx = \lambda \int_0^\pi G(x) \sin \lambda x dx, \quad (1.9)$$

где $F(x)$, $G_1(x) \in L_2(0, \pi)$ и $G(x) = \int_0^x G_1(x) dx$, $G(0) = G(\pi) = 0$. Используя операторы преобразования, находим, что

$$\sin \lambda x = \lambda \left\{ \omega_\infty(\lambda, x) + \int_0^x L(x, t; \infty) \omega_\infty(\lambda, t) dt \right\}, \quad (1.10)$$

где ядро $L(x, t; \infty)$ и его частные производные первого порядка локально суммируемы с квадратом по каждому переменному. Подставляя в равенства (1.8), (1.9) вместо $\sin \lambda x$ правую часть формулы (1.10), получаем

$$f(\lambda) = \int_0^\pi \hat{F}(x) \omega_\infty(\lambda, x) dx, \quad \hat{F}(x) = F(x) + \int_x^\pi L(\xi, x, \infty) F(\xi) d\xi, \quad (1.11)$$

$$\lambda^{-1} g(\lambda) = \int_0^\pi \hat{G}(x) \omega_\infty(\lambda, x) dx; \quad \hat{G}(x) = G(x) +$$

$$+ \int_x^\pi L(\xi, x, \infty) G(\xi) d\xi, \quad (1.12)$$

где функции $\hat{F}(x)$, $\hat{G}(x)$ и $\hat{G}'(x)$ принадлежат пространству $L_2(0, \pi)$. Из (1.11) и равенств Парсеваля, порожденных формулами разложения (1.3), (1.4), следует, что

$$\int_0^\pi |\hat{F}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^\infty |f(V\bar{\mu})|^2 d\rho_\infty(\mu) = \sum_{k=1}^\infty \frac{|f(V\bar{\nu}_k)|^2}{\|\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)\|_\pi^2}.$$

Таким образом, справедливость равенства (1.6) доказана.

Далее, из формулы разложения (1.4), равенств (1.12) и асимптотических формул для ν_k , $\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)$, $\omega'_\infty(V\bar{\nu}_k, x)$ следует, что при $N \rightarrow \infty$ функции

$$\hat{G}_N(x) = \sum_{k=1}^N \frac{g(V\bar{\nu}_k)}{V\bar{\nu}_k} \frac{\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)}{\|\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)\|_\pi^2}$$

равномерно сходятся к $\hat{G}(x)$, а их производные $\hat{G}'_N(x)$ сходятся к $\hat{G}'(x)$ в метрике пространства $L_2(0, \pi)$. Следовательно, $\hat{G}(0) = \hat{G}(\pi) = 0$, и так как

$$l[\hat{G}_N(x)] = \sum_{k=1}^N \frac{g(V\bar{\nu}_k)}{V\bar{\nu}_k} \frac{\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)}{\|\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)\|_\pi^2},$$

то в силу равенства Парсеваля, вытекающего из (1.4),

$$(\hat{G}(x), l[\hat{G}_N(x)]_\pi = \sum_{k=1}^N \frac{\nu_k}{|\nu_k|} \frac{|g(V\bar{\nu}_k)|^2}{\|\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)\|_\pi^2},$$

где

$$\begin{aligned} (\hat{G}(x), l[\hat{G}_N(x)]_\pi &= \int_0^\pi \{-\hat{G}(x) \hat{G}_N''(x) + v(x) \hat{G}(x) \hat{G}_N(x)\} dx = \\ &= \int_0^\pi \{\hat{G}'(x) \hat{G}_N'(x) + v(x) \hat{G}(x) \hat{G}_N(x)\} dx, \end{aligned}$$

поскольку $\hat{G}(0) = \hat{G}(\pi) = 0$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{\nu_k}{|\nu_k|} \frac{|g(V\bar{\nu}_k)|^2}{\|\omega_\infty(V\bar{\nu}_k, x)\|_\pi^2} = \int_0^\pi (|\hat{G}'(x)|^2 + v(x) |\hat{G}(x)|^2) dx. \quad (1.13)$$

Аналогичные построения, опирающиеся на теорему Пели — Винера и формулу (1.10), показывают, что для функций $g_\varepsilon(\lambda) = g(\lambda) \left(\frac{\sin \varepsilon \lambda}{\varepsilon \lambda} \right)^2$ справедливы представления

$$\lambda^{-1} g_\varepsilon(\lambda) = \int_0^\infty \hat{G}_\varepsilon(x) \omega_\infty(\lambda, x) dx; \quad \lambda g_\varepsilon(\lambda) = \int_0^\infty l[\hat{G}_\varepsilon(x)] \omega_\infty(\lambda, x) dx,$$

из которых согласно равенству Парсеваля, вытекающему из (1.3), следует, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mu}{|\mu|} |g_\varepsilon(V\bar{\mu})|^2 d\rho_\infty(\mu) &= (\hat{G}_\varepsilon(x), l[\hat{G}_\varepsilon(x)]) = \\ &= \int_0^\infty \{ |\hat{G}'_\varepsilon(x)|^2 + v(x) |\hat{G}_\varepsilon(x)|^2 \} dx, \end{aligned}$$

где функции $\hat{G}_\varepsilon(x)$, $\hat{G}'_\varepsilon(x)$ принадлежат пространству $L_2(0, \infty)$ и равны нулю при $x \geq \pi + \varepsilon$. Так как при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $\hat{G}'_\varepsilon(x)$ сходятся в метрике пространства $L_2(0, \infty)$ к функции $\hat{G}'(x)$, продолженной нулем на полуось $[\pi, \infty)$, то, устремляя в последнем равенстве ε к нулю, получаем

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\mu}{|\mu|} |g_\varepsilon(V\bar{\mu})|^2 d\rho_\infty(\mu) = \int_0^\pi \{ |\hat{G}'(x)|^2 + v(x) |\hat{G}(x)|^2 \} dx,$$

откуда согласно (1.13) вытекает справедливость формулы (1.7). Доказательство тождеств (1.6), (1.7) при $h \neq \infty$ проводится аналогично.

В дальнейшем будет использован только частный случай леммы 1, когда $v(x) \equiv 0$ при $x \in [\pi, \infty)$, $h = H = \infty$, оператор $L(\infty)$, а значит, и $L_\pi(\infty, \infty)$, неотрицателен. Операторы $L(h)$, $L_\pi(h, H)$ при $h = H = \infty$ будем в дальнейшем обозначать через L , L_π , а собственные значения оператора L_π (т. е. нули функции $\omega_\infty(V\bar{\lambda}, \pi)$) — через λ_k .

Как известно, в рассматриваемом случае ($v(x) \equiv 0$ при $x \in [\pi, \infty)$) и оператор L неотрицателен)

$$d\rho_\infty(\mu) = \begin{cases} \pi^{-1} V\bar{\mu} |e(V\bar{\mu}, 0)|^2 d\mu, & \mu \geq 0, \\ 0, & \mu < 0, \end{cases}$$

где через $e(\lambda, x)$ обозначено решение уравнения $l[y] = \lambda^2 y$, совпадающее с $e^{i\lambda x}$ при $x \in [\pi, \infty)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty |f(V\bar{\mu})|^2 d\rho_\infty(\mu) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |f(V\bar{\mu})|^2 V\bar{\mu} |e(V\bar{\mu}, 0)|^{-2} d\mu = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \lambda^2 |f(\lambda)|^2 |e(\lambda, 0)|^{-2} d\lambda; \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu}{|\mu|} |g(V_{\mu}^{-})|^2 d\rho_{\infty}(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |g(V_{\mu}^{-})|^2 V_{\mu}^{-} |e(V_{\mu}^{-}, 0)|^{-2} d\mu =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |g(\lambda)|^2 |e(\lambda, 0)|^{-2} d\lambda$$

и так как $\lambda_k > 0$, то оба тождества (1.6), (1.7) можно объединить в одно:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \{|f(\lambda)|^2 + |g(\lambda)|^2\} |e(\lambda, 0)|^{-2} d\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f(V_{\lambda_k}^{-})|^2 + |g(V_{\lambda_k}^{-})|^2}{\|\omega_{\infty}(V_{\lambda_k}^{-}, x)\|_{\pi}^2}. \quad (1.14)$$

Лемма 2. Пусть дифференциальные операции l_j ($j = 1, 2$) вида (1.1) удовлетворяют условиям: 1) $v_j(x) = v_j(x) \in L_2(0, \infty)$, $v_j(x) = 0$ при $x \in [\pi, \infty)$; 2) операторы L_j неотрицательны; 3) $\int_0^{\infty} v_1(x) dx = \int_0^{\infty} v_2(x) dx$. Тогда

$$-\frac{1}{2} \{v_1(x) - v_2(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\} \{e_1(\lambda, x) e_2(\lambda, x)\}' d\lambda, \quad (1.15)$$

где

$$S_j(\lambda) = \frac{e_j(-\lambda, 0)}{e_j(\lambda, 0)}. \quad (1.15')$$

Доказательство. Если выполнены условия 1, 2, то краевые задачи $l_j[y] = \lambda^2 y$, $y(0) = 0$ ($0 \leq x < \infty$, $j = 1, 2$) не имеют дискретных собственных значений, так что их данные рассеяния состоят только из S -функций, определяемых равенством (1.15'). Поэтому справедливо тождество

$$\frac{1}{2} \int_x^{\infty} \{v_1(t) - v_2(t)\} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\} e_1(\lambda, x) e_2(\lambda, x) d\lambda \quad (1.16)$$

(см. [9, с. 199, формула (4.2.6)]), и для доказательства леммы нужно проверить, что условие 3 позволяет продифференцировать правую часть этого тождества по x под знаком интеграла. Так как $v_j(x) \equiv 0$ при $x \in [\pi, \infty)$, то решения $e_j(\lambda, x)$ ($e_j(\lambda, x) = e^{i\lambda x}$ при $x \in [\pi, \infty)$) уравнений $l_j[y] = \lambda^2 y$ представимы в виде $e_j(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K_j(x, t) e^{i\lambda t} dt$, где ядра $K_j(x, t)$ и их первые производные суммируемы с квадратом по каждому переменному, причем

$K_I(x, t) \equiv 0$ при $x + t \geq 2\pi$ и $K_I(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty v_I(t) dt$ (см. [2, леммы 3.1.1., 3.1.2]). Поэтому

$$e'_j(\lambda, x) = i\lambda e^{i\lambda x} - K_I(x, x) e^{i\lambda x} + \int_x^\infty e^{i\lambda t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} K_I(x, t) \right\} dt; \quad (1.17)$$

$$e_j(\lambda, x) = e^{i\lambda x} - (i\lambda)^{-1} K_I(x, x) e^{i\lambda x} - (i\lambda)^{-1} \int_x^\infty e^{i\lambda t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} K_I(x, t) \right\} dt \quad (1.17')$$

и, значит, $\frac{d}{dx}(e_1(\lambda, x) e_2(\lambda, x)) = 2i\lambda e^{2i\lambda x} + e^{2i\lambda \pi} \varphi(\lambda, x)$, (1.18) где $\varphi(\lambda, x)$ при каждом фиксированном значении x является целой функцией экспоненциального типа $\leq 2(\pi - x)$ ограниченной на вещественной оси. Следовательно, для обоснования возможности дифференцирования правой части тождества (1.16) под знаком интеграла достаточно проверить, что условие 3 гарантирует принадлежность функции $\lambda \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\}$ пространству $L_2(-\infty, \infty)$. Так как

$$S_1(\lambda) - S_2(\lambda) = \frac{[e_1(-\lambda, 0) - e_2(-\lambda, 0)] + S_2(\lambda) [e_2(\lambda, 0) - e_1(\lambda, 0)]}{e_1(\lambda, 0)} \quad (1.19)$$

и $|S_j(\lambda)| = 1$, $e_j(\lambda, 0) = \overline{e_j(-\lambda, 0)}$, достаточно, чтобы $\lambda [e_2(\lambda, 0) - e_1(\lambda, 0)] \in L_2(-\infty, \infty)$. Полагая в формулах (1.17') $x = 0$, получаем

$$\begin{aligned} \lambda [e_2(\lambda, 0) - e_1(\lambda, 0)] &= K_1(0, 0) - K_2(0, 0) + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} [K_1(0, t) - \\ &- K_2(0, t)] e^{i\lambda t} dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty [v_1(t) - v_2(t)] dt + \\ &+ \int_0^\infty e^{i\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} [K_1(0, t) - K_2(0, t)] dt, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\lambda [e_2(\lambda, 0) - e_1(\lambda, 0)] = \int_0^\infty e^{i\lambda t} \frac{\partial}{\partial t} [K_1(0, t) - K_2(0, t)] dt \in L_2(-\infty, \infty),$$

если выполнено условие 3.

Замечание. Так как $v_I(x) \equiv 0$ при $x \geq \pi$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\} e^{i\lambda x} d\lambda = 0$$

при $x \geq 2\pi$ [2, следствие на с. 221]. Отсюда, согласно (1.15) и (1.18),

$$-\frac{1}{2} \{v_1(x) - v_2(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{S_1(\lambda) - S_2(\lambda)\} 2i\lambda \left\{ e^{2i\lambda x} + \frac{e^{2i\lambda x} [\varphi(\lambda, x) - \varphi(0, x)]}{2i\lambda} \right\} d\lambda, \quad (1.20)$$

где функция $\varphi(\lambda, x) = e^{-2i\lambda\pi} \{(e_1(\lambda, x) e_2(\lambda, x))' - 2i\lambda e^{2i\lambda x}\}$ при каждом фиксированном значении x является целой функцией от λ экспоненциального типа $\leq 2(\pi - x)$.

Рассмотрим теперь дифференциальную операцию l с потенциалом $v(x) \in \tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$. В этом случае уравнение $l[y] = \lambda^2 y$ имеет решения $y(\lambda, x)$, $y(-\lambda, x)$ вида

$$y(\lambda, x) = \exp \left\{ i\lambda x + \int_0^x \sigma(\lambda, t) dt \right\}; \quad (1.21)$$

$$\sigma(\lambda, t) = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k(t)}{(2i\lambda)^k} + \frac{\sigma_n(\lambda, t)}{(2i\lambda)^n}, \quad (1.22)$$

где 1) функции $\sigma_k(t)$ определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= v(t), \quad \sigma_2(t) = -v'(t), \quad \sigma_3(t) = v''(t) - v^2(t); \\ \sigma_{k+1}(t) &= -\sigma_k'(t) - \sum_{j=1}^{k-1} \sigma_{k-j}(t) \sigma_j(t), \end{aligned} \quad (1.23)$$

из которых в частности следует, что $\sigma_{k+1}(t) = (-1)^k v^{(k)}(t) + s_{k-2}(t)$, (1.23') ($s_{k-2}(t)$ — полином от $v(t)$, $v'(t)$, ..., $v^{(k-2)}(t)$).

2) $\sigma_n(\lambda, 0) = 0$, и в каждой полосе $|\operatorname{Im} \lambda| < C$ выполняются асимптотические равенства $\sigma_n(\lambda, t) = o(1)$,

$$\int_0^x \sigma_n(\lambda, t) dt = o(\lambda^{-1}) + \frac{1}{2i\lambda} \int_0^x \sigma_{n+1}(t) dt \quad (|\lambda| \rightarrow \infty)$$

(см., например, [2, лемма 1.4.2]).

Выражая решения $c(\lambda, x)$, $s(\lambda, x)$ через $y(\lambda, x)$, $y(-\lambda, x)$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} s(\lambda, x) &= \frac{y(\lambda, x) - y(-\lambda, x)}{\omega(\lambda)}; \\ c(\lambda, x) &= \frac{y(\lambda, x) [i\lambda - \sigma(-\lambda, 0)] + y(-\lambda, x) [i\lambda + \sigma(\lambda, 0)]}{\omega(\lambda)}; \\ \omega(\lambda) &= 2i\lambda + \sigma(\lambda, 0) - \sigma(-\lambda, 0) = 2i\lambda \left[1 + 2 \sum_{2j+1 \leq n} \frac{\sigma_{2j+1}(0)}{(2i\lambda)^{2(j+1)}} \right], \end{aligned}$$

из которых вытекает следующая формула для функции Ляпунова:

$$u_+(\lambda) = \frac{1}{2} [c(\lambda, \pi) + s'(\lambda, \pi)] = \frac{1}{2} \left\{ y(\lambda, \pi) \left[1 + \frac{\sigma(\lambda, \pi) - \sigma(\lambda, 0)}{\omega(\lambda)} \right] + y(-\lambda, \pi) \left[1 - \frac{\sigma(-\lambda, \pi) - \sigma(-\lambda, 0)}{\omega(\lambda)} \right] \right\}. \quad (1.24)$$

Так как $v(x) \in \tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$, то $v^{(k)}(\pi) = v^{(k)}(0)$ при $k = 0, 1, \dots, n-1$, а следовательно и $\sigma_k(\pi) = \sigma_k(0)$ при $k = 1, 2, \dots, n$. Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\lambda, \pi) - \sigma(\lambda, 0)}{\omega(\lambda)} &= \frac{1}{\omega(\lambda)} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k(\pi) - \sigma_k(0)}{(2i\lambda)^k} + \frac{\sigma_n(\lambda, \pi) - \sigma_n(\lambda, 0)}{(2i\lambda)^n} \right\} = \\ &= \frac{\sigma_n(\lambda, \pi)}{(2i\lambda)^n \omega(\lambda)} = o(\lambda^{-n-1}) \quad (|\operatorname{Im} \lambda| < C, |\lambda| \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

откуда согласно (1.21), (1.22), (1.24) находим, что в каждой полосе $|\operatorname{Im} \lambda| \leq C$ функция Ляпунова удовлетворяет такому асимптотическому равенству:

$$\begin{aligned} u_+(\lambda) &= \exp \left\{ \sum_{2 \leq 2s \leq n+1} \frac{\sigma_{2s}}{(2i\lambda)^{2s}} \right\} \cos \left(\lambda\pi + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq 2s+1 \leq n+1} \frac{\sigma_{2s+1}}{(2\lambda)^{2s+1}} (-1)^{s+1} \right) + o(\lambda^{-n-1}), \end{aligned} \quad (1.25)$$

где $\sigma_k = \int_0^\pi \sigma_k(x) dx$. С другой стороны, если $v(x) \in \tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$, то по теореме А $T[v(x)] = (\theta_0, \theta_1, \dots) \in \omega_2^{n+1}$, откуда согласно [1 теореме 2.1 и формулам (2.17), (2.18)] следует, что функция $\theta(z)$ (см. формулу (8)) в каждой полосе $0 < \delta \leq \operatorname{Im} z \leq C$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\theta(z) = \pi z - \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq 2s+1 \leq n+1} \frac{d_{2s}}{z^{2s+1}} + o(z^{-n-1}) \quad (|z| \rightarrow \infty),$$

$$\text{где } d_{2s} = \int_{-\infty}^{\infty} i^{2s} \operatorname{Im} \theta(t) dt.$$

Но, если потенциал $v(x) \in \tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$ таков, что $\mu_0 = \theta_0 = 0$, то $u_+(\lambda) = \cos \theta(\lambda)$. Поэтому в этом случае функция Ляпунова в каждой полосе $0 < \delta \leq \operatorname{Im} \lambda \leq C$ удовлетворяет также асимптотическому равенству:

$$u_+(\lambda) = \cos \left(\lambda\pi - \frac{1}{\pi} \sum_{1 \leq 2s+1 \leq n+2} \frac{d_{2s}}{\lambda^{2s+1}} \right) + o(\lambda^{-n-1}) \quad (|\lambda| \rightarrow \infty). \quad (1.26)$$

Сопоставляя равенства (1.25) и (1.26) находим, что

$$\sigma_{2s} = 0 \quad (2 \leq 2s \leq n+1), \quad \sigma_{2s+1} = \frac{1}{\pi} (-1)^s 2^{2s+1} d_{2s} \quad (1 \leq 2s+1 \leq n+1),$$

откуда следует

Лемма 3. Если потенциал $v(x) \in \tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$ и $T[v(x)] = (0, \theta_1, \theta_2, \dots)$, то для $k = 1, 2, \dots, n, n+1$ выполняются равенства

$$\sigma_k = \begin{cases} 0, & k = 2m, \\ \frac{(-1)^m}{\pi} 2^k d_{k-1}, & k = 2m+1, \end{cases}$$

где $\sigma_k = \int_0^\pi \sigma_k(x) dx$, $d_k = \int_{-\infty}^\infty t^k \operatorname{Im} \theta(t) dt$ и функции $\sigma_k(x)$ находятся из рекуррентных формул (1.23).

Если $T[v(x)] = (\theta_0, \theta_1, \dots)$, то согласно свойству 1 отображения T потенциал $v(x) - \theta_0 = v(x) - \mu_0$ удовлетворяет условиям леммы 3, причем для этого потенциала $\sigma_1(x) = v(x) - \theta_0$, $\sigma_3(x) = v''(x) - (v(x) - \theta_0)^2$. Это приводит нас к тождествам

$$\int_0^\pi (v(x) - \theta_0) dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{Im} \theta(t) dt = \frac{2}{\pi} d_0; \quad (1.27)$$

$$\int_0^\pi (v(x) - \theta_0)^2 dx = \frac{8}{\pi} \int_{-\infty}^\infty t^2 \operatorname{Im} \theta(t) dt = \frac{8}{\pi} d_2, \quad (1.28)$$

первое из которых верно для всех потенциалов из пространства $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi] = L_2(0, \pi)$, а второе доказано пока только для потенциалов $v(x) \in \tilde{W}_2^{(3)}[\pi]$. Из тождества (1.28) и неравенства

$$\int_{-\infty}^\infty t^2 \operatorname{Im} \theta(t) dt \leq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right)^2 \sum_{k=-\infty}^\infty k^2 |\theta_k|^2$$

(см. [2, с. 245]) вытекает следующая оценка нормы потенциала $v(x) - \theta_0$ через норму $\|\theta\|_1 = \left(\sum_{k=1}^\infty (k |\theta_k|)^2\right)^{1/2}$ отвечающей ему последовательности $T[v(x) - \theta_0] = (0, \theta_1, \theta_2, \dots)$:

$$\|v(x) - \theta_0\|_\pi \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \|\theta\|_1, \quad (1.29)$$

где $H = \max_{1 \leq k < \infty} |\theta_k|$.

Впоследствии будет доказано, что тождество (1.28) и вытекающая из него оценка (1.29) верны для всех потенциалов $v(x) \in \tilde{W}_2^{(0)}[\pi] = L_2[0, \pi]$.

§ 2. Предварительная оценка нормы разности двух потенциалов. Пусть потенциалы $v_1(x)$, $v_2(x)$ принадлежат пространству $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi] = L_2(0, \pi)$. Положим

$$a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_j(x) dx \quad (j = 1, 2), \quad b^2 = \max_{j=1,2} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (v_j(x) - a_j)^2 dx \quad (2.1)$$

и рассмотрим операции

$$\tilde{l}_j = -\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{v}_j(x), \quad 0 \leq x < \infty \quad (j = 1, 2),$$

где

$$\tilde{v}_j(x) = \begin{cases} v_j(x) - a_j + \left(\frac{\pi b}{2}\right)^2, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для всех величин, функций и операторов, связанных с операциями $\tilde{l}_j$, мы сохраним введенные в предыдущих параграфах обозначения, добавляя к ним сверху значок $\sim$.

Лемма 4. Операторы $\tilde{L}_\infty(j)$, $\tilde{L}_\pi(j)$ неотрицательны; при всех $k = 1, 2, \dots$ $2\tilde{\lambda}_k(j) \geq 1$ и

$$\left\| V_{\tilde{\lambda}_k(j)} \tilde{s} \left(V_{\tilde{\lambda}_k(j)} \right), x \right\|_\pi^2 \geq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2\pi} \right) (1 + 5b)^{-4}. \quad (2.3)$$

Доказательство. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $y(x)$ удовлетворяет граничному условию $y(0) = 0$ и равна нулю в окрестности $+\infty$, то

$$\begin{aligned} (\tilde{L}_\infty(j)y, y) &= - \int_0^\infty y''(x) \overline{y(x)} dx + \int_0^\pi \tilde{v}_j(x) |y(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^\infty |y'(x)|^2 dx + \int_0^\pi (v_j(x) - a_j) |y(x)|^2 dx + \\ &\quad + \left(\frac{\pi b}{2}\right)^2 \int_0^\pi |y(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Так как $y(x) = \int_0^x y'(t) dt$, то в силу неравенства Буняковского

$$|y(x)| \leq \sqrt{x} \left(\int_0^x |y'(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\pi} \|y'\|_\pi \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (2.4)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi (v_j(x) - a_j) |y(x)|^2 dx \right| &\leq \int_0^\pi |v_j(x) - a_j| \sqrt{\pi} \|y'\|_\pi |y(x)| dx \leq \\ &\leq \sqrt{\pi} \|y'\|_\pi \|y\|_\pi \|v_j(x) - a_j\|_\pi \leq \pi b \|y'\|_\pi \|y\|_\pi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\tilde{L}_\infty(j)y, y) &\geq \|y'\|_\pi^2 - 2\|y'\|_\pi \|y\|_\pi \frac{\pi b}{2} + \\ &+ \left(\frac{\pi b}{2} \|y\|_\pi\right)^2 = \left(\|y'\|_\pi - \frac{\pi b}{2} \|y\|_\pi\right)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

откуда вытекает неотрицательность операторов $\tilde{L}_\infty(j)$. Если функция $y(x)$ удовлетворяет двум граничным условиям $y(0) = y(\pi) = 0$, то $y(x) = -\int_x^\pi y'(t) dt$, откуда следует, что в этом случае кроме (2.4) справедливо также неравенство

$$|y(x)| \leq \sqrt{\pi - x} \|y'\|_\pi, \quad 0 \leq x \leq \pi. \quad (2.4')$$

Сопоставление неравенств (2.4), (2.4') показывает, что

$$|y(x)| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|y'\|_\pi, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (\tilde{L}_\pi(j)y, y)_\pi &= -\int_0^\pi y''(x) \overline{y(x)} dx + \int_0^\pi \tilde{v}_j(x) |y(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^\pi |y'(x)|^2 dx + \int_0^\pi (v_j(x) - a_j) |y(x)|^2 dx + \left(\frac{\pi b}{2}\right)^2 \int_0^\pi |y(x)|^2 dx \geq \\ &\geq \|y'\|_\pi^2 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \|y'\|_\pi \int_0^\pi |v_j(x) - a_j| |y(x)| dx + \left(\frac{1}{2} \pi b \|y\|_\pi\right)^2 \geq \\ &\geq \|y'\|_\pi^2 - \frac{\pi b}{\sqrt{2}} \|y'\|_\pi \|y\|_\pi + \left(\frac{1}{2} \pi b \|y\|_\pi\right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \|y'\|_\pi^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \|y'\|_\pi - \frac{1}{2} \pi b \|y\|_\pi\right)^2 \geq \frac{1}{2} \|y'\|_\pi^2, \end{aligned}$$

и, так как для дважды дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям $y(0) = y(\pi) = 0$, справедливо неравенство $\|y'\|_\pi \geq \|y\|_\pi$, то

$$(\tilde{L}_\pi(j)y, y) \geq \frac{1}{2} \|y\|_\pi^2,$$

откуда вытекает положительность операторов $\tilde{L}_\pi(j)$ вместе с оценкой $\tilde{\lambda}_k(j) \geq 0,5$ ($k = 1, 2, \dots$). Наконец, из уравнения

$$\tilde{\lambda}_j(\lambda, x) = \sin \lambda x + \int_0^x \frac{\sin \lambda(x-t)}{\lambda} \tilde{v}_j(t) \tilde{\lambda}_j(\lambda, t) dt, \quad (2.5)$$

которому удовлетворяют функции $\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)$, следует

$$\|\sin \lambda x\|_{\pi} \leq \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi} + \left\| \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} \tilde{v}_j(t) \tilde{\lambda s}_j(\lambda, t) dt \right\|_{\pi}.$$

Но при вещественных значениях λ

$$\begin{aligned} \|\sin \lambda x\|_{\pi} &= \left(\int_0^{\pi} \sin^2 \lambda x dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\pi\lambda}{2\pi\lambda} \right)}, \\ \left| \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} \tilde{v}_j(\lambda) \tilde{\lambda s}_j(\lambda, t) dt \right| &\leq \int_0^x (x-t) |\tilde{v}_j(t)| |\tilde{\lambda s}_j(\lambda, t)| dt \leq \\ &\leq x \|\tilde{v}_j(x)\|_{\pi} \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\left\| \int_0^x \frac{\sin \lambda (x-t)}{\lambda} \tilde{v}_j(t) \tilde{\lambda s}_j(\lambda, t) dt \right\|_{\pi} \leq \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \|\tilde{v}_j(x)\|_{\pi} \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi}.$$

Поэтому при $\lambda \in (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\pi\lambda}{2\pi\lambda} \right)} &\leq \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \|\tilde{v}_j\|_{\pi} \right\} \leq \\ &\leq \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \left[\|v_j(x) - a_j\|_{\pi} + \frac{\pi^2 b^2}{4} \sqrt{\pi} \right] \right\} \leq \\ &\leq \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \left[\sqrt{\pi} b + \frac{\pi^2 b^2}{4} \sqrt{\pi} \right] \right\} \leq \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi} \times \\ &\times \left(1 + \frac{\pi^2 b}{2\sqrt{3}} \right)^2 \leq \|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi} (1 + 5b)^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, x)\|_{\pi}^2 \geq \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\pi\lambda}{2\pi\lambda} \right) (1 + 5b)^{-4},$$

откуда вытекают неравенства (2.3), если учесть, что $\sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)} \geq \sqrt{0,5}$ ($k = 1, 2, \dots$) и

$$\inf_{\lambda \geq \sqrt{0,5}} \left(1 - \frac{\sin 2\pi\lambda}{2\pi\lambda} \right) > 1 - \frac{1}{2\pi}.$$

Лемма 5. При всех вещественных значениях λ выполняются следующие неравенства:

$$|\tilde{\lambda s}_j(\lambda, \pi)| \leq \exp \{2\pi^2 b\}, |\tilde{s}'_j(\lambda, \pi)| \leq \left(1 + \frac{\pi^2 b}{2} \right) \exp \{2\pi^2 b\}; \quad (2.6)$$

$$| \{ \tilde{e}_1(\lambda, x) \tilde{e}_2(\lambda, x) \}' - 2i\lambda x e^{2i\lambda x} | \leq 3\pi b \exp \{3\pi^2 b\}. \quad (2.7)$$

Доказательство. Положим для краткости $c = \frac{1}{2} \pi b$. Из неравенств

$$| \tilde{v}_i(x) | \leq | v_i(x) - a_i | + c^2, \quad | \lambda^{-1} \sin \lambda (x - t) | \leq x - t \quad (-\infty < \lambda < \infty)$$

и уравнения (2.5) следует

$$| \tilde{s}_j(\lambda, x) | \leq x + \int_0^x (x - t) \{ | v_i(t) - a_i | + c^2 \} | \tilde{s}_j(\lambda, t) | dt,$$

$$| \lambda \tilde{s}_j(\lambda, x) | \leq 1 + \int_0^x (x - t) \{ | v_i(t) - a_i | + c^2 \} | \lambda \tilde{s}_j(\lambda, t) | dt.$$

Поэтому

$$| \tilde{s}_j(\lambda, x) | \leq s_j(x), \quad | \lambda \tilde{s}_j(\lambda, x) | \leq c_j(x), \quad (2.8)$$

где $s_j(x)$, $c_j(x)$ — решения интегральных уравнений

$$s_j(x) = x + \int_0^x (x - t) \{ | v_i(t) - a_i | + c^2 \} s_j(t) dt;$$

$$c_j(x) = 1 + \int_0^x (x - t) \{ | v_i(t) - a_i | + c^2 \} c_j(t) dt,$$

или, что то же самое, решения дифференциальных уравнений

$$-y'' + \{ | v_i(x) - a_i | + c^2 \} y = 0$$

при начальных данных $s_j(0) = c_j'(0) = 0$, $s_j'(0) = c_j(0) = 1$. Но эти решения удовлетворяют также интегральным уравнениям

$$s_j(x) = c^{-1} \operatorname{sh} cx + \int_0^x c^{-1} \operatorname{sh} c(x - t) | v_i(t) - a_i | s_j(t) dt;$$

$$c_j(x) = \operatorname{ch} cx + \int_0^x c^{-1} \operatorname{sh} c(x - t) | v_i(t) - a_i | c_j(t) dt,$$

из которых вытекают неравенства

$$s_j(x) e^{-cx} \leq x + \int_0^x (x - t) | v_i(t) - a_i | s_j(t) e^{-ct} dt;$$

$$c_j(x) e^{-cx} \leq 1 + \int_0^x (x - t) | v_i(t) - a_i | c_j(t) e^{-ct} dt.$$

Тем более при $x \in [0, \pi]$ справедливы неравенства

$$s_j(x) e^{-cx} \leq x \left(1 + \int_0^x | v_i(t) - a_i | s_j(t) e^{-ct} dt \right);$$

$$c_j(x) e^{-cx} \leq 1 + \int_0^x (\pi - t) |v_j(t) - a_j| c_j(t) e^{-ct} dt,$$

откуда следует, что

$$\frac{d}{dx} \ln \left(1 + \int_0^x |v_j(t) - a_j| s_j(t) e^{-ct} dt \right) \leq x |v_j(x) - a_j|;$$

$$\frac{d}{dx} \ln \left(1 + \int_0^x (\pi - t) |v_j(t) - a_j| c_j(t) e^{-ct} dt \right) \leq (\pi - x) |v_j(x) - a_j|,$$

и, значит,

$$\begin{aligned} s_j(x) &\leq x \exp \left\{ cx + \int_0^x t |v_j(t) - a_j| dt \right\}, \\ c_j(x) &\leq \exp \left\{ cx + \int_0^x (\pi - t) |v_j(t) - a_j| dt \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В силу неравенства Буняковского и определения чисел b, c

$$\int_0^\pi (\pi - t) |v_j(t) - a_j| dt \leq \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \|v_j(x) - a_j\|_\pi \leq \frac{\pi^2 b}{\sqrt{3}},$$

$$c_j(\pi) \leq \exp \left\{ c\pi + \frac{\pi^2 b}{\sqrt{3}} \right\} = \exp \pi^2 b \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right\} \leq \exp 2\pi^2 b,$$

откуда согласно (2.8) вытекает справедливость неравенства

$$|\tilde{\pi} s_j(\lambda, \pi)| \leq \exp \{2\pi^2 b\}.$$

Далее, дифференцируя уравнения (2.5), получаем

$$\tilde{s}_j'(\lambda, x) = \cos \lambda x + \int_0^x \cos \lambda (x - t) \tilde{v}_j(t) \tilde{s}_j(\lambda, t) dt,$$

и согласно (2.8), (2.9)

$$\begin{aligned} |\tilde{s}_j'(\lambda, \pi)| &\leq 1 + \int_0^\pi |\tilde{v}_j(t)| |\tilde{s}_j(\lambda, t)| dt \leq 1 + \int_0^\pi (|v_j(t) - a_j| + c^2) s_j(t) dt \leq 1 + \int_0^\pi (|v_j(t) - a_j| + c^2) t \exp \{ct + \\ &+ \int_0^t \xi |v_j(\xi) - a_j| d\xi\} dt \leq 1 + e^{c\pi} \int_0^\pi t |v_j(t) - a_j| \exp \left\{ \int_0^t \xi |v_j(\xi) - a_j| d\xi \right\} dt + \\ &+ c^2 \int_0^\pi t e^{ct} dt \exp \left\{ \int_0^\pi t |v_j(t) - a_j| dt \right\} = \\ &= 1 + e^{c\pi} \left[\exp \left\{ \int_0^\pi t |v_j(t) - a_j| dt \right\} - 1 \right] + \exp \left\{ \int_0^\pi t |v_j(t) - a_j| dt \right\} [c\pi e^{c\pi} - (e^{c\pi} - 1)] \leq \exp \left\{ c\pi + \int_0^\pi t |v_j(t) - a_j| dt \right\} [1 + c\pi]. \end{aligned}$$

Так как

$$c\pi + \int_0^\pi t |v_i(t) - a_i| dt \leq c\pi + \sqrt{\frac{\pi^3}{3}} \|v_i(x) - a_i\|_\pi \leq \pi^2 b \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \leq 2\pi^2 b,$$

то $|\tilde{s}_i'(\lambda, \pi)| \leq \left(1 + \frac{1}{2} \pi^2 b\right) e^{2\pi^2 b}$, и неравенства (2.6) доказаны.

Докажем теперь неравенство (2.7). Из уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i(\lambda, x) &= e^{i\lambda x} + \int_x^\pi \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} \tilde{v}_i(t) \tilde{e}_i(\lambda, t) dt; \\ \tilde{e}_i'(\lambda, x) &= i\lambda e^{i\lambda x} - \int_x^\pi \cos \lambda(t-x) \tilde{v}_i(t) \tilde{e}_i(\lambda, t) dt, \end{aligned} \quad (2.10)$$

которым удовлетворяют функции $\tilde{e}_i(\lambda, x)$, следует, что

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_1(\lambda, x) \tilde{e}_2(\lambda, x))' &= 2i\lambda e^{i\lambda x} - \\ &- e^{2i\lambda x} \int_x^\pi e^{-i\lambda t} \{ \tilde{v}_1(t) \tilde{e}_1(\lambda, t) + \tilde{v}_2(t) \tilde{e}_2(\lambda, t) \} dt - \\ &- \int_x^\pi \cos \lambda(t-x) \tilde{v}_1(t) \tilde{e}_1(\lambda, t) dt \int_x^\pi \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} \tilde{v}_2(t) \tilde{e}_2(\lambda, t) dt - \\ &- \int_x^\pi \cos \lambda(t-x) \tilde{v}_2(t) \tilde{e}_2(\lambda, t) dt \int_x^\pi \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} \tilde{v}_1(t) \tilde{e}_1(\lambda, t) dt, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} |(\tilde{e}_1(\lambda, x) \tilde{e}_2(\lambda, x))' - 2i\lambda e^{2i\lambda x}| &\leq \\ &\leq \int_x^\pi |\tilde{v}_1(t)| |\tilde{e}_1(\lambda, t)| dt \left(1 + \int_x^\pi (t-x) |\tilde{v}_2(t)| |\tilde{e}_2(\lambda, t)| dt \right) + \\ &+ \int_x^\pi |\tilde{v}_2(t)| |\tilde{e}_2(\lambda, t)| dt \left(1 + \int_x^\pi (t-x) |\tilde{v}_1(t)| |\tilde{e}_1(\lambda, t)| dt \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Для оценки правой части заметим, что из уравнений (2.10) вытекают неравенства

$$|\tilde{e}_i(\lambda, x)| \leq 1 + \int_x^\pi (t-x) |\tilde{v}_i(t)| |\tilde{e}_i(\lambda, t)| dt,$$

показывающие, что $|\tilde{e}_i(\lambda, x)| \leq y_i(x)$, где $y_i(x)$ — решения интегральных уравнений

$$y_i(x) = 1 + \int_x^\pi (t-x) \{ |v_i(t) - a_i| + c^2 \} y_i(t) dt,$$

или, что то же самое, решения дифференциальных уравнений

$$-y_j'' + \{|v_j(x) - a_j| + c^2\} y_j = 0$$

при начальных данных $y_j(\pi) = 1$, $y_j'(\pi) = 0$. При этом

$$\int_x^\pi |\tilde{v}_j(t)| |\tilde{e}_j(\lambda, t)| dt \leq \int_x^\pi \{|v_j(t) - a_j| + c^2\} y_j(t) dt = -y_j'(x),$$

откуда следует, что правая часть неравенства (2.11) не превышает $-(y_1(x) y_2(x))'$, а так как на интервале $(0, \pi)$ функции $y_j(x)$ положительны и убывают, причем их производные отрицательны и возрастают, то

$$|(\tilde{e}_1(\lambda, x) \tilde{e}_2(\lambda, x))' - 2i\lambda e^{2i\lambda x}| \leq -(y_1(x) y_2(x))'|_{x=0}. \quad (2.12)$$

Поскольку задачи Коши, решениями которых служат функции $c_j(x)$ и $y_j(x)$, отличаются только тем, что в первом случае начальные данные задаются в точке 0, а во втором — в точке π , из неравенства (2.9) следует

$$\begin{aligned} y_j(x) &\leq \exp \left\{ c(\pi - x) + \int_x^\pi t |v_j(t) - a_j| dt \right\} = \hat{y}_j(x); \\ -y_j'(x) &\leq \int_x^\pi \{|v_j(t) - a_j| + c^2\} \hat{y}_j(t) dt \leq \hat{y}_j(x) \int_x^\pi \{|v_j(t) - a_j| + \\ &+ c^2 e^{c(x-t)}\} dt \leq \hat{y}_j(x) \left[\int_0^\pi |v_j(t) - a_j| dt + c \right] \leq \hat{y}_j(x) [V\pi \|v_j(x) - \\ &- a_j\|_\pi + c] \leq \hat{y}_j(x) [\pi b + c] = 3c y_j(x). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} -(y_1(x) y_2(x))'|_{x=0} &\leq 6c y_1(0) y_2(0) \leq 6c \exp \times \\ &\times \left\{ 2c\pi + \int_0^\pi t |v_1(t) - a_1| dt + \int_0^\pi t |v_2(t) - a_2| dt \right\} \leq \\ &\leq 6c \exp \left\{ 2c\pi + \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^2 b \right\} = 6c \exp \left\{ \pi^2 b \left(1 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) \right\} \leq 3\pi b \exp \{3\pi^2 b\}, \end{aligned}$$

откуда согласно (2.12) вытекает неравенство (2.7).

Доказанные леммы и полученные в предыдущем параграфе тождества позволяют получить предварительную оценку $\|v_1(x) - v_2(x)\|_\pi$ для любых потенциалов $v_1(x)$, $v_2(x)$, принадлежащих пространству $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi] = L_2(0, \pi)$.

Лемма 6. Пусть потенциалы $v_j(x)$ ($j = 1, 2$) принадлежат пространству $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi] = L_2(0, \pi)$ и

$$T[v_j(x)] = (\theta_0(j), \theta_1(j), \theta_2(j), \dots).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|v_1(x) - v_2(x)\|_{\pi} &\leq \sqrt{\pi} |a_1 - a_2| + \frac{8}{\sqrt{2\pi - 1}} (1 + 5b)^2 \times \\ &\times (1 + 3\pi \sqrt{2\pi} b \exp\{3\pi^2 b\}) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ 2e^{2J} \left(\lambda_k(2) - a_2 + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\pi b}{2} \right)^2 \right) |\operatorname{Im} \theta_k(2) - \operatorname{Im} \theta_k(1)|^2 + \pi^2 e^{4\pi^2 b} \times \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(1 + 2 \left(1 + \frac{\pi^2 b}{2} \right)^2 \right) |\lambda_k(2) - \lambda_k(1) - (a_2 - a_1)|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.13) \end{aligned}$$

где числа a_j, b определены равенствами (2.1) и

$$J = \max_{j=1, 2} \left\{ \max_{1 \leq k < \infty} |\operatorname{Im} \theta_k(j)| \right\}. \quad (2.14)$$

Доказательство. Потенциалы $\tilde{v}_j(x)$, получающиеся из исходных потенциалов по формулам (2.2), удовлетворяют, очевидно, условиям 1), 3) леммы 2, а согласно лемме 4 они удовлетворяют также условию 2). Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{v_1(x) - v_2(x)\} &= \frac{1}{2} \{a_1 - a_2\} + \frac{1}{2} \{\tilde{v}_1(x) - \tilde{v}_2(x)\} = \\ &= \frac{1}{2} \{a_1 - a_2\} + u_1(x) + u_2(x), \quad (2.15) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda)\} 2i\lambda e^{2i\lambda x} d\lambda; \\ u_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda)\} 2i\lambda e^{2i\lambda\pi} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, x) - \tilde{\varphi}(0, x)}{2i\lambda} d\lambda; \\ \tilde{\varphi}(\lambda, x) &= e^{-2\pi i\lambda} \{(\tilde{e}_1(\lambda, x) \tilde{e}_2(\lambda, x))' - 2i\lambda e^{2i\lambda x}\} \end{aligned}$$

(см. лемму 2 и формулы (1.20), (1.20')).

Согласно равенству Парсеваля для интегралов Фурье

$$\begin{aligned} \|u_1(x)\|_{\pi}^2 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_1(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\tilde{S}_1(\lambda) - \\ &- \tilde{S}_2(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{\pi} \|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\|^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|u_1(x)\|_{\pi} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\|, \quad (2.16)$$

а согласно неравенству Буняковского

$$\begin{aligned} |u_2(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))| \left| \frac{\tilde{\varphi}(\lambda, x) - \tilde{\varphi}(\lambda, 0)}{\lambda} \right| d\lambda \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\| \|\lambda^{-1} (\tilde{\varphi}(\lambda, x) - \tilde{\varphi}(\lambda, 0))\|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Так как при каждом фиксированном значении $x \in [0, \pi]$ $\tilde{\varphi}(\lambda, x)$ является целой функцией экспоненциального типа $\leq 2(\pi - x)$ и согласно (2.7)

$$\begin{aligned} \sup_{-\infty < \lambda < \infty} |\tilde{\varphi}(\lambda, x)| &= \sup_{-\infty < \lambda < \infty} |(\tilde{e}_1(\lambda, x) \tilde{e}_2(\lambda, x))' - 2i\lambda e^{2i\lambda x}| \leq \\ &\leq 3\pi b \exp(3\pi^2 b), \end{aligned}$$

то в силу неравенства С. Н. Бернштейна

$$\sup_{-\infty < \lambda < \infty} \left| \frac{\partial \tilde{\varphi}(\lambda, x)}{\partial \lambda} \right| \leq 2(\pi - x) 3\pi b \exp(3\pi^2 b).$$

Поэтому при вещественных значениях λ выполняются следующие два неравенства:

$$\begin{aligned} |\lambda^{-1} (\tilde{\varphi}(\lambda, x) - \tilde{\varphi}(\lambda, 0))| &\leq 6\pi b \exp(3\pi^2 b) |\lambda|^{-1}; \\ |\lambda^{-1} (\tilde{\varphi}(\lambda, x) - \tilde{\varphi}(\lambda, 0))| &= |\lambda|^{-1} \left| \int_0^{\lambda} \frac{\partial \tilde{\varphi}(\mu, x)}{\partial \mu} d\mu \right| \leq \\ &\leq 6\pi b \exp(3\pi^2 b) (\pi - x), \end{aligned}$$

из которых следует, что при любом $a > 0$

$$\begin{aligned} \|\lambda^{-1} (\tilde{\varphi}(\lambda, x) - \tilde{\varphi}(\lambda, 0))\|^2 &\leq [6\pi b \exp(3\pi^2 b)]^2 \times \\ &\times \left\{ \int_{|\lambda| > a} |\lambda|^{-2} d\lambda + (\pi - x)^2 \int_{-a}^a d\lambda \right\} = \\ &= 2 [6\pi b \exp(3\pi^2 b)]^2 \{a^{-1} + (\pi - x)^2 a\}. \end{aligned}$$

Полагая здесь $a^{-1} = \pi - x$, получаем

$$\|\lambda^{-1} (\tilde{\varphi}(\lambda, x) - \tilde{\varphi}(\lambda, 0))\|^2 \leq [12\pi b \exp(3\pi^2 b)]^2 (\pi - x),$$

откуда согласно (2.17) находим, что

$$\begin{aligned} |u_2(x)| &\leq 6b \exp(3\pi^2 b) \|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\| \sqrt{\pi - x} \quad (0 \leq x \leq \pi), \\ \|u_2(x)\|_{\pi} &\leq 3\sqrt{2} \pi b \exp(3\pi^2 b) \|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\|. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Сопоставляя формулу (2.15) и оценки (2.16), (2.18), убеждаемся в справедливости неравенства

$$\|v_1(x) - v_2(x)\|_{\pi} \leq \sqrt{\pi} |a_1 - a_2| + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\| \|(1 + 3\sqrt{2\pi^3}b \exp\{3\pi^2 b\})^{-1}\|. \quad (2.19)$$

Оценим теперь $\|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\|$. Согласно (1.19)

$$|\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda)| \leq 2|\tilde{e}_2(\lambda, 0)|^{-1} |\tilde{e}_2(\lambda, 0) - \tilde{e}_1(\lambda, 0)|, \quad (2.20)$$

где $\tilde{e}_j(\lambda, x)$ — решения уравнений $\tilde{L}_j[y] = \lambda^2 y$, совпадающие с $\exp(i\lambda x)$ при $x \geq \pi$. Так как в точке π эти решения удовлетворяют начальным данным

$$e_j(\lambda, \pi) = \exp(i\lambda\pi), \quad \tilde{e}_j'(\lambda, \pi) = i\lambda \exp(i\lambda\pi),$$

то они следующим образом выражаются через фундаментальные системы $\tilde{c}_j(\lambda, x)$, $\tilde{s}_j(\lambda, x)$:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_j(\lambda, x) = & e^{i\lambda\pi} \{ \tilde{s}_j(\lambda, x) [i\lambda \tilde{c}_j(\lambda, \pi) - \tilde{c}_j'(\lambda, \pi)] + \\ & + \tilde{c}_j(\lambda, x) [\tilde{s}_j'(\lambda, \pi) - i\lambda \tilde{s}_j(\lambda, \pi)] \}, \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\tilde{e}_j(\lambda, 0) = e^{i\lambda\pi} \{ \tilde{s}_j'(\lambda, \pi) - i\lambda \tilde{s}_j(\lambda, \pi) \}$$

и

$$|\tilde{e}_2(\lambda, 0) - \tilde{e}_1(\lambda, 0)|^2 = f^2(\lambda) + g^2(\lambda),$$

причем функции

$$f(\lambda) = \tilde{s}_2'(\lambda, \pi) - \tilde{s}_1'(\lambda, \pi); \quad g(\lambda) = \lambda [\tilde{s}_2(\lambda, \pi) - \tilde{s}_1(\lambda, \pi)]$$

удовлетворяют всем условиям леммы 1, поскольку

$$\lambda [\tilde{e}_2(\lambda, 0) - \tilde{e}_1(\lambda, 0)] \in L_2(-\infty, \infty).$$

Отсюда в силу неравенства (2.20) и формулы (1.14) находим, что

$$\begin{aligned} \|\lambda (\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\|^2 & \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \{f^2(\lambda) + g^2(\lambda)\} |\tilde{e}_2(\lambda, 0)|^{-2} d\lambda = \\ & = 4\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^2(V\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}) + g^2(V\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)})}{\|\tilde{s}_2(V\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, x)\|_{\pi}^2}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и оценки (2.3), полученной в лемме 4, следует

$$\begin{aligned} \|\lambda(\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\|^2 &\leq 8(1+5b)^4 \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k(2) \left[f^2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}\right) + g^2\left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Так как $g(\lambda) = \lambda [s_2(\lambda, \pi) - \tilde{s}_1(\lambda, \pi)]$, а $\sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)} \tilde{s}_j(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)}, \pi) = 0$, то $g(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}) = \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} \tilde{s}_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi) - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)} \times$
 $\times \tilde{s}_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi)$, и согласно неравенству С. Н. Бернштейна

$$\begin{aligned} \left| g(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}) \right| &\leq \pi \left| \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)} \right| \sup_{-\infty < \lambda < \infty} |\lambda \tilde{s}_1(\lambda, \pi)| \leq \\ &\leq \pi \exp\{2\pi^2 b\} \left| \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)} \right|, \end{aligned}$$

поскольку $\sup_{-\infty < \lambda < \infty} |\lambda \tilde{s}_1(\lambda, \pi)| \leq \exp\{2\pi^2 b\}$ в силу леммы 5. Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k(2) g^2(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}) &\leq \pi^2 \exp(4\pi^2 b) \frac{\tilde{\lambda}_k(2)}{\left| \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} + \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)} \right|} \times \\ &\times |\tilde{\lambda}_k(1) - \tilde{\lambda}_k(2)|^2 \text{ и, тем, более,} \\ \tilde{\lambda}_k(2) g^2(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}) &\leq \pi^2 \exp(4\pi^2 b) |\tilde{\lambda}_k(1) - \tilde{\lambda}_k(2)|^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} f(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}) &= \tilde{s}'_2(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi) - \tilde{s}'_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi) = \\ &= \left[\tilde{s}'_2(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi) - \tilde{s}'_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi) \right] + \\ &+ \left[\tilde{s}'_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi) - \tilde{s}'_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi) \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

причем согласно неравенству С. Н. Бернштейна и лемме 5

$$\begin{aligned} \left| \tilde{s}'_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi) - \tilde{s}'_1(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi) \right| &\leq \\ &\leq \pi \left| \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)} \right| \sup_{-\infty < \lambda < \infty} |\tilde{s}'_1(\lambda, \pi)| \leq \end{aligned}$$

$$\leq \pi \left(1 + \frac{\pi^2 b}{2}\right) \exp(2\pi^2 b) \left| \sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)} - \sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)} \right|,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k(2) \left| \tilde{s}_2' \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi \right) - \tilde{s}_2' \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi \right) \right|^2 &\leq \\ &\leq \pi^2 \left(1 + \frac{\pi^2 b}{2}\right)^2 \exp(4\pi^2 b) |\tilde{\lambda}_k(1) - \tilde{\lambda}_k(2)|^2. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2.23) можно выразить через элементы $\theta_k(j)$ ($k = 1, 2, \dots$) последовательностей $(\theta_0(j), \theta_1(j), \dots) = T[v_j(x)]$, соответствующих потенциалам $v_j(x)$. Действительно, согласно свойству 1) отображения T потенциалам $\tilde{v}_j(x) = v_j(x) - a_j + \left(\frac{1}{2}\pi b\right)^2$ отвечают последовательности

$$T[\tilde{v}_j(x)] = (\theta_0(j) - a_j + \left(\frac{1}{2}\pi b\right)^2, \theta_1(j), \dots),$$

откуда, используя равенства (13), находим, что

$$\begin{aligned} \tilde{s}_j' \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(j)}, \pi \right) &= (-1)^k \exp((-1)^k \operatorname{Im} \theta_k(j)); \\ \tilde{s}_2' \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi \right) - \tilde{s}_1' \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi \right) &= |\exp((-1)^k \operatorname{Im} \theta_k(2)) - \\ &- \exp((-1)^k \operatorname{Im} \theta_k(1))| \leq e^J |\operatorname{Im} \theta_k(2) - \operatorname{Im} \theta_k(1)| \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k(2) \left| \tilde{s}_2' \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)}, \pi \right) - \tilde{s}_1' \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(1)}, \pi \right) \right|^2 &\leq \\ &\leq e^{2J} \tilde{\lambda}_k(2) |\operatorname{Im} \theta_k(2) - \operatorname{Im} \theta_k(1)|^2, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$J = \max_{j=1, 2} \left\{ \max_{1 \leq k < \infty} |\operatorname{Im} \theta_k(j)| \right\}.$$

Формула (2.23) и оценки (2.24), (2.25) показывают, что

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_k(2) f^2 \left(\sqrt{\tilde{\lambda}_k(2)} \right) &\leq 2e^{2J} \tilde{\lambda}_k(2) |\operatorname{Im} \theta_k(2) - \operatorname{Im} \theta_k(1)|^2 + \\ &+ 2\pi^2 \left(1 + \frac{1}{2}\pi^2 b\right) \exp(4\pi^2 b) |\tilde{\lambda}_k(2) - \tilde{\lambda}_k(1)|^2, \end{aligned} \quad (2.26)$$

а сопоставление неравенств (2.21), (2.22), (2.26) приводит к следующей оценке:

$$\begin{aligned} \|\lambda(\tilde{S}_1(\lambda) - \tilde{S}_2(\lambda))\|^2 &\leq 8(1 + 5b)^4 \left(1 - \frac{1}{2\pi}\right)^{-1} \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \{2e^{2J} \tilde{\lambda}_k(2) |\operatorname{Im} \theta_k(2) - \operatorname{Im} \theta_k(1)|^2 + \end{aligned}$$

$$+ \pi^2 \exp(4\pi^2 b) \left[1 + 2 \left(1 + \frac{1}{2} \pi^2 b \right)^2 \right] |\tilde{\lambda}_k(2) - \tilde{\lambda}_k(1)|^2.$$

Доказываемое неравенство (3.13) вытекает из этой оценки и неравенства (2.19), если заметить, что собственные значения $\tilde{\lambda}_k(j)$ и $\lambda_k(j)$ связаны между собой равенством $\tilde{\lambda}_k(j) = \lambda_k(j) - a_j + \left(\frac{1}{2} \pi b\right)^2$, поскольку $\tilde{v}_j(x) = v_j(x) - a_j + \left(\frac{1}{2} \pi b\right)^2$ при $x \in [0, \pi]$.

Рассмотрим частный случай неравенства (2.13), когда потенциалам $v_j(x)$ отвечают последовательности $T[v_j(x)] = \theta(j) = (0, \theta_1(j), \theta_2(j), \dots)$. Согласно (1.27) в этом случае $a_j \geq 0$ и

$$\sqrt{\lambda_k(j)} \leq \alpha_k^+(j) \leq k \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \quad (H = \max_{1 \leq k < \infty; j=1, 2} |\theta_k(j)|)$$

(см. [2, с. 241]), откуда следует оценка

$$\begin{aligned} \lambda_k(2) - a_2 + \left(\frac{1}{2} \pi b\right)^2 &\leq k^2 \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \pi b\right)^2 \leq \\ &\leq \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} \pi b \right)^2 k^2. \end{aligned}$$

Используя эту оценку и несколько огрубляя неравенство (2.13), находим, что в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} \|v_1(x) - v_2(x)\|_\pi &\leq \sqrt{\pi} |a_2 - a_1| + 20\pi \exp(3\pi^2 b) \times \\ &\times (1 + 5b)^4 \{ \sqrt{2} e^J \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \| \operatorname{Im} \theta(2) - \operatorname{Im} \theta(1) \|_1 + \\ &+ \pi \sqrt{3} \exp(2\pi^2 b) \| \lambda_k(2) - \lambda_k(1) - (a_2 - a_1) \|_0 \}. \end{aligned} \quad (2.13')$$

Заметим еще, что согласно определению чисел a_j

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (v_j(x) - a_j)^2 dx = \frac{1}{\pi} \|v_j(x)\|_\pi^2 - a_j^2 \leq \frac{1}{\pi} \|v_j(x)\|_\pi^2$$

и, значит,

$$b \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max_{j=1, 2} \{ \|v_j(x)\|_\pi \}. \quad (2.27)$$

§ 3. Оценка нормы $\| \lambda_k(2) - \lambda_k(1) - (a_2 - a_1) \|$. Обозначим через $\lambda_k(j)$ собственные значения первой краевой задачи, порождаемой на отрезке $[0, \pi]$ операцией l_j с потенциалом $v_j(x)$, и через a_j — среднее значение этого потенциала: $a_j = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_j(x) dx$.

Лемма 7. Пусть потенциалам $v_j(x) \in \tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$ ($j = 1, 2$), отвечают последовательности $\theta(j) = (\theta_0(j), \theta_1(j), \theta_2(j), \dots) = T[v_j(x)]$, удовлетворяющие условиям: $\theta_0(1) = \theta_0(2) = 0$, $|\theta_k(1)| \leq |\theta_k(2)|$ ($k = 1, 2, \dots$) (3.1). Тогда

1) последовательность $\{\lambda_k(2) - \lambda_k(1) - (a_2 - a_1)\}_{k=1}^{\infty}$ принадлежит пространству ω_2^0 , и ее норма удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & \|\lambda_k(2) - \lambda_k(1) - (a_2 - a_1)\|_0 \leq \\ & \leq \frac{5}{\pi} \operatorname{ch}^2 H \cdot \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \left(1 + \sqrt{\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2}\right)^5 \times \\ & \times \sqrt{\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2} + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \|\operatorname{Re} \theta(2) - \operatorname{Re} \theta(1)\|_1, \quad (3.2) \\ & \text{где } H = \max_{1 \leq k < \infty} |\theta_k(2)|; \end{aligned}$$

2) число $a_2 - a_1$ неотрицательно и

$$a_2 - a_1 \leq \frac{8}{\pi^3} \{\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2\}. \quad (3.2')$$

Доказательство. Пусть $\Theta_j(z)$ — функция, осуществляющая конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ на область

$$\Theta_j^+ = \{\operatorname{Im} \Theta > 0\} / \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\operatorname{Re} \Theta = \pm k\pi, 0 \leq \operatorname{Im} \Theta \leq |\theta_k(j)|\},$$

нормированное условиями $\Theta_j(0) = 0$, $\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-1} \Theta_j(z) = \pi$. Заметим,

что в силу (3.1) $\Theta_2^+ \subset \Theta_1^+$, $\partial \Theta_2^+ \supset \partial \Theta_1^+$. Обозначим через $Z_j(\Theta)$ функцию, обратную к $\Theta_j(z)$, и положим $\psi(z) = Z_1(\Theta_2(z))$.

Функция $\psi(z)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и имеет там положительную мнимую часть. Пусть $[\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ — прообраз разреза $\{\operatorname{Re} \Theta = k\pi, 0 \leq \operatorname{Im} \Theta \leq |\theta_k(2)|\}$ при отображении $\Theta_2(z)$, а $[\gamma_k^-, \gamma_k^+]$ — прообраз части этого разреза $\{\operatorname{Re} \Theta = k\pi, |\theta_k(1)| \leq \operatorname{Im} \Theta \leq |\theta_k(2)|\}$ при том же отображении. Очевидно, что

$$\operatorname{Im} \psi(t) = 0 \text{ при } t \notin \bigcup_{|k|=1}^{\infty} (\gamma_k^-, \gamma_k^+). \quad (3.3)$$

Чтобы оценить $\operatorname{Im} \psi(t)$ на интервалах (γ_k^-, γ_k^+) , воспользуемся неравенством [2, с. 244]

$$\operatorname{Im} Z_1(\Theta) \leq \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sqrt{(\Theta - k\pi)^2 + |\theta_k(1)|^2}, \quad \Theta \in \Theta_1^+.$$

Полагая $\Theta = \Theta_2(z)$, получим

$$\operatorname{Im} \psi(z) \leq \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sqrt{(\Theta_2(z) - k\pi)^2 + |\theta_k(1)|^2}, \quad \operatorname{Im} z \geq 0. \quad (3.4)$$

Так как при $z \in (\gamma_k^-, \gamma_k^+)$ имеем $\operatorname{Re} \Theta_2(z) = k\pi$, $|\theta_k(1)| \leq \operatorname{Im} \Theta_2(z) \leq |\theta_k(2)|$, то отсюда следует, что

$$\operatorname{Im} \psi(t) \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2}, \quad t \in (\gamma_k^-, \gamma_k^+). \quad (3.5)$$

Нам понадобится также следующая оценка длин интервалов (γ_k^-, γ_k^+) :

$$\gamma_k^+ - \gamma_k^- \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2} \quad (3.6)$$

Эта оценка получается интегрированием по разрезу $\{\operatorname{Re} \Theta = k\pi, \theta_k(1) \leq \operatorname{Im} \Theta \leq |\theta_k(2)|\}$ неравенства

$$|Z'_2(\Theta)| \leq \frac{1}{\pi} |(V(\Theta - k\pi)^2 + |\theta_k(2)|^2)'|, \quad (3.7)$$

отмеченного в [2, с. 244].

Положим $\hat{\theta}_k(j) = \Theta_j(V\overline{\lambda_k(j)})$. Очевидно, $\hat{\theta}_k(j) \in \{\operatorname{Re} \Theta = k\pi, 0 \leq \operatorname{Im} \Theta \leq |\theta_k(j)|\}$, причем $\operatorname{Im} \hat{\theta}_k(j) = |\operatorname{Im} \theta_k(j)|$. Пусть $V\overline{s_k} = Z_2(\hat{\theta}_k(1))$. Ясно, что $V\overline{s_k} \in [\alpha_k^-, \alpha_k^+] \setminus (\gamma_k^-, \gamma_k^+)$, $\psi(V\overline{s_k}) = V\overline{\lambda_k(1)}$ (3.8). Оценим величину $\lambda_k(1) - s_k + 2d_0$, где

$$d_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \psi(t) dt. \quad (3.9)$$

С помощью формулы Неванлинны (аналогичное рассуждение см. [2, с. 245—246]) получаем представление

$$\psi(z) = z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \psi(t)}{t-z} dt = z - \frac{d_0}{z} + \frac{\varepsilon(z)}{z}, \quad (3.10)$$

где

$$\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t \operatorname{Im} \psi(t)}{t-z} dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{t^2 \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - z^2} dt \quad (3.10')$$

(мы использовали четность функции $\operatorname{Im} \psi(t)$). Полагая в (3.10) $z = V\overline{s_k}$, получаем

$$V\overline{\lambda_k(1)} = V\overline{s_k} - \frac{d_0}{V\overline{s_k}} + \frac{\varepsilon(V\overline{s_k})}{V\overline{s_k}},$$

откуда $\lambda_k(1) - s_k + 2d_0 = 2\varepsilon(V\overline{s_k}) + s_k^{-1}(-d_0 + \varepsilon(V\overline{s_k}))^2$. (3.11)

Далее нам понадобятся следующие неравенства ([2, с. 241]):

$$\alpha_k^+ \leq k \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right), \quad |\alpha_i - \alpha_k| \geq 2(\pi \operatorname{ch} H)^{-1} |j - k|, \quad (3.12)$$

где через α_k обозначено произвольное из чисел α_k^-, α_k^+ , а $H = \max_{1 \leq k < \infty} |\theta_k(2)|$. Нам также понадобится неравенство

$$(\operatorname{Im} \Theta_2(t))^2 - |\theta_k(1)|^2 \leq (\pi^2 \operatorname{ch} H)(t - \gamma_k^-)(\gamma_k^+ - t) \quad t \in (\gamma_k^-, \gamma_k^+), \quad (3.13)$$

которое является обобщением неравенства (3.4.38) в [2, с. 241], и доказывается аналогично.

В силу (3.10) и (3.3) имеем

$$\varepsilon(V\overline{s_k}) = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\gamma_j^-}^{\gamma_j^+} \frac{t^2 \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - s_k} dt.$$

Учитывая, что $\sqrt{s_k} \in [\alpha_k^-, \alpha_k^+]$ и используя неравенства (3.5), (3.6), (3.12), будем иметь при $j \neq k$

$$\left| \int_{\gamma_j^-}^{\gamma_j^+} \frac{t^2 \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - s_k} dt \right| \leq \gamma_j^+ \left[\max_{[\gamma_j^-, \gamma_j^+]} \operatorname{Im} \psi(t) \right] \frac{\gamma_j^+ - \gamma_j^-}{|\alpha_l - \alpha_k|} \leq \\ \leq \frac{\operatorname{ch} H}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) j (|\theta_l(2)|^2 - |\theta_l(1)|^2) |k - j|^{-1}.$$

Чтобы оценить аналогичный интеграл с $j = k$, воспользуемся неравенством $\operatorname{Im} \psi(t) \leq \sqrt{\operatorname{ch} H} \sqrt{(t - \gamma_k^-)(\gamma_k^+ - t)}$, $t \in (\gamma_k^-, \gamma_k^+)$, которое непосредственно вытекает из (3.4) и (3.13). Будем считать также, что $\sqrt{s_k} \in [\alpha_k^-, \gamma_k^-]$, поскольку случай $\sqrt{s_k} \in [\gamma_k^+, \alpha_k^+]$ рассматривается аналогично.

Имеем

$$\left| \int_{\gamma_k^-}^{\gamma_k^+} \frac{t^2 \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - s_k} dt \right| \leq \sqrt{\operatorname{ch} H} \int_{\gamma_k^-}^{\gamma_k^+} t \sqrt{\frac{\gamma_k^+ - t}{t - \gamma_k^-}} dt \leq \\ \leq \sqrt{\operatorname{ch} H} \frac{\pi}{2} \gamma_k^+ (\gamma_k^+ - \gamma_k^-) \leq \sqrt{\operatorname{ch} H} \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) k \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2}.$$

Таким образом, получаем оценку

$$|\varepsilon(\sqrt{s_k})| \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} H \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \left\{ k \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \sum_{j \neq k} \frac{j (|\theta_j(2)|^2 - |\theta_j(1)|^2)}{|k - j|} \right\}.$$

Учитывая, что

$$\|k \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2}\|_0 = \sqrt{\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2}, \\ \left\| \sum_{j \neq k} \frac{j (|\theta_j(2)|^2 - |\theta_j(1)|^2)}{|k - j|} \right\|_0^2 = \\ = \sum_{j, m=1}^{\infty} j (|\theta_j(2)|^2 - |\theta_j(1)|^2) m (|\theta_m(2)|^2 - |\theta_m(1)|^2) \times \\ \times \sum_{k \neq j, m} \frac{1}{|k - j| |k - m|} \leq \frac{\pi^2}{3} \left(\sum_{j=1}^{\infty} j (|\theta_j(2)|^2 - |\theta_j(1)|^2) \right)^2 \leq \\ \leq \frac{\pi^2}{3} (\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2) (\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2),$$

получаем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon(\sqrt{s_k})\|_0 &\leq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \operatorname{ch} H \times \\ &\times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2} \sqrt{\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2}\right). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Оценим теперь $\|\delta_k\|_0$, где $\delta_k = s_k^{-1} (-d_0 + \varepsilon(\sqrt{s_k}))^2$.
В силу (3.10) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{|\delta_k|} &= |\psi(\sqrt{s_k}) - \sqrt{s_k}| = \frac{1}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \psi(t)}{t - \sqrt{s_k}} dt \right| = \\ &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{s_k} \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - s_k} dt \right| \leq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_{\gamma_j^-}^{\gamma_j^+} \frac{\sqrt{s_k} \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - s_k} dt \right|. \end{aligned}$$

Если $k \neq j$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_j^-}^{\gamma_j^+} \frac{\sqrt{s_k} \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - s_k} dt \right| &\leq \left[\max_{[\gamma_j^-, \gamma_j^+]} \operatorname{Im} \psi(t) \right] \frac{\gamma_j^+ - \gamma_j^-}{|\alpha_j - \alpha_n|} \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \operatorname{ch} H (|\theta_j(2)|^2 - |\theta_j(1)|^2) |k - j|^{-1}. \end{aligned}$$

Кроме того (считаем без уменьшения общности, что $\sqrt{s_k} \in [\alpha_k^-, \gamma_k^-]$), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_k^-}^{\gamma_k^+} \frac{\sqrt{s_k} \operatorname{Im} \psi(t)}{t^2 - s_k} dt \right| &\leq \sqrt{\operatorname{ch} H} \int_{\gamma_k^-}^{\gamma_k^+} \sqrt{\frac{\gamma_k^+ - t}{t - \gamma_k^-}} dt = \\ &= \sqrt{\operatorname{ch} H} \frac{\pi}{2} (\gamma_k^+ - \gamma_k^-) \leq \sqrt{\operatorname{ch} H} \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\delta_k| &\leq \frac{8}{\pi^2} \operatorname{ch}^2 H \{ (|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2) + \\ &+ \frac{1}{\pi^2} \left(\sum_{j \neq k} \frac{|\theta_j(2)|^2 - |\theta_j(1)|^2}{|k - j|} \right)^2 \} \leq \frac{8}{\pi^2} \operatorname{ch}^2 H \left\{ (|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\pi^2} (\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2) \sum_{j \neq k} \frac{|\theta_j(2)|^2 - |\theta_j(1)|^2}{(k - j)^2} \right\}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|\delta_k\|_0 \leq \frac{8}{\pi^2} \operatorname{ch}^2 H \left(1 + \frac{1}{\sqrt{45}} (\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2) \right) \times \\ \times (\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2). \quad (3.15)$$

Из (3.14), (3.15) и (3.11) вытекает оценка

$$\|\lambda_k(1) - s_k + 2d_0\|_0 \leq 2\|\varepsilon(\sqrt{s_k})\|_0 + \|\delta_k\|_0 \leq \\ \leq \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \operatorname{ch}^2 H \left(1 + \sqrt{\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2} \right)^5 \times \\ \times \sqrt{\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2}. \quad (3.16)$$

Оценим теперь $\|s_k - \lambda_k(2)\|_0$. Так как $\sqrt{s_k} = Z_2(\hat{\theta}_k(1))$,

$\sqrt{\lambda_k(2)} = Z_2(\hat{\theta}_k(2))$, $\operatorname{Im} \hat{\theta}_k(j) = |\operatorname{Im} \theta_k(j)|$, то интегрируя неравенство (3.7), получаем оценку

$$|\sqrt{\lambda_k(2)} - \sqrt{s_k}| \leq \frac{1}{\pi} |\sqrt{|\theta_k(2)|^2 - (\operatorname{Im} \theta_k(2))^2} \mp \\ \mp \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - (\operatorname{Im} \theta_k(1))^2}|, \quad (3.17)$$

где знак минус перед вторым радикалом в правой части соответствует случаю, когда точки $\hat{\theta}_k(1)$, $\hat{\theta}_k(2)$ лежат на одной и той же стороне разреза $\{\operatorname{Re} \theta = k\pi, 0 \leq \operatorname{Im} \theta \leq |\theta_k(2)|\}$, т. е. когда $\operatorname{sign} \operatorname{Re} \theta_k(2) = \operatorname{sign} \operatorname{Re} \theta_k(1)$. С помощью элементарной оценки правой части (3.17), получаем неравенство

$$|\sqrt{\lambda_k(2)} - \sqrt{s_k}| \leq \frac{1}{\pi} (|\operatorname{Re} \theta_k(2) - \operatorname{Re} \theta_k(1)| + \\ + \sqrt{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2}). \quad (3.18)$$

Так как в силу (3.12) имеем $\sqrt{\lambda_k(2)} + \sqrt{s_k} \leq 2\alpha_k^+ \leq 2k \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right)$, заключаем, что

$$\|\lambda_k(2) - s_k\|_0 \leq \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \left\{ \|\operatorname{Re} \theta(2) - \operatorname{Re} \theta(1)\|_1 + \right. \\ \left. + \sqrt{\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2} \right\}.$$

Из (3.16) и (3.18) получаем оценку

$$\|\lambda_k(2) - \lambda_k(1) - 2d_0\|_0 \leq \frac{5}{\pi} \operatorname{ch}^2 H \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \times \\ \times \left(1 + \sqrt{\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2} \right)^5 \sqrt{\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2} + \\ + \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \|\operatorname{Re} \theta(2) - \operatorname{Re} \theta(1)\|_1.$$

Так как нормы $\|\lambda_k(1) - a_1\|_0$ и $\|\lambda_k(2) - a_2\|_0$ конечны, то постоянная $2d_0$ должна совпадать с $a_2 - a_1$.

Для доказательства второго утверждения леммы, заметим, что согласно (3.9), (3.3), (3.5) и (3.6)

$$0 \leq \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im} \psi(t) dt = 2d_0 = a_2 - a_1 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Im} \psi(t) dt \leq \\ \leq \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \{|\theta_k(2)|^2 - |\theta_k(1)|^2\},$$

откуда следует неотрицательность числа $a_2 - a_1$ и неравенство

$$a_2 - a_1 \leq \frac{8}{\pi^3} \{ \|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2 \}.$$

§ 4. Доказательства основных теорем. Рассмотрим произволь-

ный потенциал $v(x) \in \tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$ и отвечающую ему последовательность $\theta = (\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots) = T[v(x)]$. Согласно свойству 5) отображения T усеченным последовательностям $\theta(N) = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, 0, 0, \dots)$ отвечают потенциалы $v_N(x) = T^{-1}[\theta(N)]$, которые являются не более чем N -зонными.

Теорема 1. При $N \rightarrow \infty$ последовательность N -зонных потенциалов $v_N(x) = T^{-1}[\theta(N)]$ сходится к потенциалу $v(x)$. При этом

$$\|v(x) - v_N(x)\|_{\pi} \leq \|\theta - \theta(N)\|_1 300\pi \left\{1 + \frac{2}{\pi} H\right\} \times \\ \times (1 + 5b)^4 \exp(5\pi^2 b) \{1 + 2(1 + N^{-1} \|\theta - \theta(N)\|_1)^5\} \leq \\ \leq \|\theta - \theta(N)\|_1 A \exp(A \|\theta\|_1^2), \quad (4.1)$$

где A — абсолютная постоянная,

$$H = \max_{1 \leq k < \infty} |\theta_k|, \quad b \leq \frac{4V\sqrt{2}}{\pi V\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \sqrt{\|\theta\|_1^2 - \theta_0^2}; \\ \|\theta - \theta(N)\|_1 = \left(\sum_{k=N}^{\infty} k^2 |\theta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{\|\theta\|_1^2 - \theta_0^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\theta_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Полагая $v_2(x) = v(x) - \theta_0$; $v_1(x) = v_N(x) - \theta_0$, находим, что этим потенциалам отвечают последовательности $\theta(2) = T[v_2(x)] = (0, \theta_1, \theta_2, \dots)$; $\theta(1) = T[v_1(x)] = (0, \theta_1, \dots, \theta_{N-1}, 0, 0, \dots)$, удовлетворяющие всем условиям, при которых были доказаны неравенство (2,13') и лемма 7. Поэтому

$$\|v(x) - v_N(x)\|_{\pi} = \|v_1(x) - v_2(x)\|_{\pi} \leq \\ \leq \frac{8V\sqrt{\pi}}{\pi^3} \{ \|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2 \} + 20\pi \exp(3\pi^2 b) \times \\ \times (1 + 5b)^4 \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \{ \sqrt{2} e' \|\operatorname{Im} \theta(2) - \operatorname{Im} \theta(1)\|_1 + \quad (4.2)$$

$$+ 2\sqrt{3} \exp(2\pi^2 b) \|\operatorname{Re} \theta(2) - \operatorname{Re} \theta(1)\|_1 + \\ + 5\sqrt{3} \operatorname{ch}^2 H \left(1 + \sqrt{\|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2}\right)^5 \sqrt{\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2},$$

причем согласно определению последовательностей $\theta, \theta(N), \theta(2), \theta(1)$,

$$\|\theta(2)\|_1^2 - \|\theta(1)\|_1^2 = \sum_{k=N}^{\infty} k^2 |\theta_k|^2 = \|\theta - \theta(N)\|_1^2; \\ \|\theta(2)\|_0^2 - \|\theta(1)\|_0^2 = \sum_{k=N}^{\infty} |\theta_k|^2 \leq N^{-2} \|\theta - \theta(N)\|_1^2; \quad (4.3) \\ \|\operatorname{Re} \theta(2) - \operatorname{Re} \theta(1)\|_1 \leq \|\theta - \theta(N)\|_1; \\ \|\operatorname{Im} \theta(2) - \operatorname{Im} \theta(1)\|_1 \leq \|\theta - \theta(N)\|_1.$$

Поскольку конечнозонные потенциалы $v_1(x) = v_N(x) - \theta_0$ бесконечно дифференцируемы, для них справедлива оценка (1.29), из которой согласно (2.27) следует, что в неравенствах (4.2) $b \geq 0$ допускает оценку

$$b \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max \left\{ \|v_2(x)\|_{\pi}, \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \|\theta(1)\|_1 \right\} \leq \\ \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \max \left\{ \|v_2(x)\|_{\pi}, \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \sqrt{\|\theta\|_1^2 - \theta_0^2} \right\}, \quad (4.4)$$

которая не зависит от N . Поэтому $\lim_{N \rightarrow \infty} \|v(x) - v_N(x)\|_{\pi} = 0$, что позволяет в тождестве (1.28), заведомо справедливом для конечнозонных потенциалов $v_N(x)$, сделать предельный переход при $N \rightarrow \infty$ и распространить его, а значит, и оценку (1.29), на все потенциалы $v(x) \in \tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$. Отсюда согласно (4.4) находим, что

$$b \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \sqrt{\|\theta\|_1^2 - \theta_0^2}. \quad (4.5)$$

Доказываемое неравенство (4.1) получается из неравенства (4.2) и соотношений (4.3), (4.5), если учесть, что $J \leq H \leq b$.

Неравенство (4.1), доказанное в теореме 1, станет более наглядным, если перейти от последовательности θ к последовательности лакун в спектре оператора Хилла с потенциалом $v(x)$.

Действительно, из неравенств $k|\theta_k| \leq \frac{(\alpha_k^+)^2 - (\alpha_k^-)^2}{8} \pi^2 (\operatorname{ch} H)^{3/2}$ [2, лемма 3.4.4, с. 241] следует, что

$$\left(\sum_{k=N}^{\infty} k^2 |\theta_k|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\pi^2 (\operatorname{ch} H)^{3/2}}{8} \left(\sum_{k=N}^{\infty} (\mu_k^+ - \mu_k^-)^2 \right)^{1/2},$$

откуда согласно (4.1) находим, что

$$\|v(x) - v_N(x)\|_{\pi} \leq C \left(\sum_{k=N}^{\infty} (\mu_k^+ - \mu_k^-)^2 \right)^{1/2},$$

где константа C зависит только от аппроксимируемого потенциала $v(x)$. Таким образом, скорость сходимости N -зонных потенциалов $v_N(x)$ к данному потенциалу $v(x)$ зависит только от скорости стремления к нулю длин лакун (μ_k^-, μ_k^+) в спектре оператора Хилла с потенциалом $v(x)$.

Рассмотрим теперь два произвольных потенциала $v_j(x) \in \tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$, $(j = 1, 2)$, которым отвечают последовательности $\theta(j) = (\theta_0(j), \theta_1(j), \dots) = T[v_j(x)]$ (4.6). Мы хотим оценить $\|v_1(x) - v_2(x)\|_\pi$ через $\|\theta(2) - \theta(1)\|_1$. Для этого введем вспомогательную последовательность $\tilde{\theta} = (0, \theta_1, \theta_2, \dots)$, где $\theta_k = \theta_k(1)$, если $|\theta_k(1)| \geq |\theta_k(2)|$ и $\theta_k = \theta_k(2)$ в противном случае. Пусть $v(x) = T^{-1}[\tilde{\theta}]$ — соответствующий ей потенциал. Тогда

$$\begin{aligned} \|v_1(x) - v_2(x)\|_\pi &= \|\{v(x) - (v_1(x) - \theta_0(1))\} - \\ &\quad - \{v(x) - (v_2(x) - \theta_0(2))\} + \{\theta_0(2) - \theta_0(1)\}\|_\pi \leq \\ &\leq \|v(x) - (v_1(x) - \theta_0(1))\|_\pi + \|v(x) - (v_2(x) - \theta_0(2))\|_\pi + \\ &\quad + \sqrt{\pi} |\theta_0(2) - \theta_0(1)|, \end{aligned} \quad (4.7)$$

причем каждая пара потенциалов $v(x)$, $v_1(x) - \theta_0(1)$ и $v(x)$, $v_2(x) - \theta_0(2)$, удовлетворяет всем условиям, при которых были доказаны неравенство (2.13') и лемма 7. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, приходим к таким оценкам:

$$\begin{aligned} \|v(x) - (v_j(x) - \theta_0(j))\|_\pi &\leq 300\pi \left\{1 + \frac{2}{\pi} H\right\} (1 + 5b)^4 \exp(5\pi^2 b) \times \\ &\times \left\{\|\theta - \tilde{\theta}(j)\|_1 + 2\left(1 + \sqrt{\|\theta\|_0^2 - \|\tilde{\theta}(j)\|_0^2}\right)^5 \times \right. \\ &\quad \left. \times \sqrt{\|\theta\|_1^2 - \|\tilde{\theta}(j)\|_1^2}\right\}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $H = \max_{1 \leq k < \infty, j=1, 2} \{|\theta_k(j)|\}$; $b \leq \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{\pi} H\right) \|\theta\|_1$ и через

$\tilde{\theta}(j)$ обозначены последовательности, отвечающие потенциалам $v_j(x) - \theta_0(j)$ (т. е. $\tilde{\theta}(j) = (0, \theta_1(j), \theta_2(j), \dots)$). Так как каждое из чисел θ_k совпадает либо с $\theta_k(1)$, либо с $\theta_k(2)$, то

$$\begin{aligned} \|\theta - \tilde{\theta}(j)\|_1 &\leq \|\tilde{\theta}(2) - \tilde{\theta}(1)\|_1, \quad j = 1, 2, \\ \|\theta\|_s^2 - \|\tilde{\theta}(j)\|_s^2 &\leq \|\tilde{\theta}(2) - \tilde{\theta}(1)\|_s (\|\tilde{\theta}(2)\|_s + \|\tilde{\theta}(1)\|_s), \quad s = 0, 1. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Сопоставляя соотношения (4.7), (4.8) и (4.9), приходим к следующей общей теореме:

Теорема 2. *Отображение T^{-1} из пространства ω_2^1 в пространство $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$ взаимнооднозначно и непрерывно. При этом*

$$\|T^{-1}[\theta(2)] - T^{-1}[\theta(1)]\|_\pi \leq \sqrt{\pi} |\theta_0(2) - \theta_0(1)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\|\tilde{\theta}(2) - \tilde{\theta}(1)\|_1} \cdot 600\pi \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} H \right\} (1 + 5b)^4 \times \\
& \quad \times \exp(5\pi^2 b) \left\{ \sqrt{\|\tilde{\theta}(2) - \tilde{\theta}(1)\|_1} + \right. \\
& \quad \left. + 2 \left(1 + \sqrt{\|\tilde{\theta}(2) - \tilde{\theta}(1)\|_1 (\|\tilde{\theta}(2)\|_1 + \|\tilde{\theta}(1)\|_1)} \right)^5 \right\} \leq \\
& \leq \sqrt{\|\tilde{\theta}(2) - \tilde{\theta}(1)\|_1} A \exp \{ A (\|\tilde{\theta}(2)\|_1 + \|\tilde{\theta}(1)\|_1)^2 \},
\end{aligned}$$

где A — абсолютная постоянная, $\tilde{\theta}(j) = (0, \theta_1(j), \theta_2(j), \dots)$,

$$H = \max_{1 \leq k < \infty, j=1, 2} \{ \|\theta_k(j)\| \},$$

$$b \leq \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{2}{\pi} H \right) \max_{j=1, 2} \{ \|\tilde{\theta}(j)\|_1 \}.$$

Теорему 2 можно дополнить следующим утверждением.

Потенциалы всех операторов Хилла с одним и тем же спек-

тром лежат на сфере $\|v(x) - \mu_0\|_\pi = \text{const}$ пространства $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$ и образуют компактное множество в этом пространстве.

Это вытекает из тождества (1.28) (доказанного теперь для всех потенциалов из пространства $\tilde{W}_2^{(0)}[\pi]$ и теоремы 2.

Сделаем в заключение несколько замечаний.

1) Исследование прямой задачи спектрального анализа для операторов Хилла позволяет доказать непрерывность оператора T и оценить модуль его непрерывности.

2) Можно доказать непрерывность сужений операторов T и T^{-1} соответственно на пространства $\tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$, ω_2^{n+1} ($n = 1, 2, \dots$) и оценить их модули непрерывности.

3) Оператор T осуществляет гомеоморфное отображение каждого пространства $\tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$ на соответствующее пространство ω_2^{n+1} ($n = 0, 1, \dots$).

4) Для величины b можно получить оценку

$$b \leq 20 \sqrt{\|\tilde{\theta}\|_1^2 - \tilde{\theta}_0^2} \quad (b \leq 20 \max_{j=1, 2} \|\tilde{\theta}(j)\|_1).$$

5) Оценка модуля непрерывности оператора $T^{-1} : \omega_2^{n+1} \rightarrow \tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$ ($n = 1, 2, \dots$) в более слабой метрике пространства $\tilde{W}_2^{(n-1)}[\pi]$, предшествующего пространству $\tilde{W}_2^{(n)}[\pi]$, получается элементарно, если воспользоваться формулой следов.

Список литературы: 1. Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла. — Мат. сб., 1975, 97 (139), № 4, с. 540—606. 2. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. — Киев: Наук. думка, 1977. — 332 с. 3. Marcenko W. A. Spectraltheorie und nichtlineare Gleichungen. — Differential Equations, Uppsala, 1977, p. 134—143.

4. Мисюра Т. В. Характеристика спектров периодической и антиперидической краевых задач, порождаемых операцией Дирака, сообщ. I.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1978, вып. 30, с. 90—101.
5. Мисюра Т. В. Характеристика спектров периодической и антиперидической краевых задач, порождаемых операцией Дирака, сообщ. II.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1979, вып. 31, с. 102—109.
6. Мисюра Т. В. Конечноточные операторы Дирака.— Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1980, вып. 33, с. 107—111.
7. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm — Lionvilleschen Eigenwertaufgabe.— Acta mathematica, 1946, 78, p. 1—96.
8. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Об операторах Хилла с конечным числом лакунов.— Функц. анализ, 1975, 9, вып. 1, с. 69—70.
9. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля.— Киев: Наук. думка, 1972.—219 с.

Поступила 6 июня 1979 г

УДК 538.3-538.4

И. Е. ТАРАПОВ, д-р физ.-мат. наук,
Н. Ф. ПАЦЕГОН, канд. физ.-мат. наук

НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ПРОВОДЯЩЕЙ НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

В последнее время появился специальный интерес (в основном, в связи с техническими приложениями) к работам, в которых изучается движение сплошных сред, поляризующихся и намагничивающихся в электромагнитном поле. К таким средам относятся, в частности, ферромагнитные жидкости, создаваемые искусственно диспергированием частиц ферромагнетика в жидкости-носителе (либо непроводящая жидкость, либо жидкий металл). Представление об использовании этих жидкостей в технике можно получить из обзоров [1—3]. Кроме того, как известно, обычные газы, жидкости и жидкие металлы обладают поляризационными и магнитными свойствами. Хотя эти свойства у таких сред и слабо выражены, исследования различных течений сплошных сред с неоднородной поляризацией и намагниченностью позволяют выявить ряд интересных особенностей, ускользающих от нас, если в основных уравнениях сразу считать магнитную и диэлектрическую проницаемости постоянными.

1. Система основных уравнений. Рассматривается движение проводящей сплошной среды, неоднородно и изотропно намагничивающейся в магнитном поле. Скорости движения среды предполагаются нерелятивистскими, а протекающие в ней процессы квазистационарными.

В дальнейшем мы остановимся на так называемом магнито-гидродинамическом приближении, когда время релаксации свободного электрического заряда значительно меньше характерного времени диффузии магнитных силовых линий.

Соответствующая система уравнений имеет вид [4]:

$$\frac{dp}{dt} + p \operatorname{div} v = 0;$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla(p + \psi^p) + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H} \times \vec{B} + M \nabla H + \operatorname{div} \hat{\tau}; \quad (1.1)$$

$$\rho T \frac{ds'}{dt} = \operatorname{div}(\lambda^\circ \nabla T) + \tau_{ij} v_{ij} + \nu_m (\operatorname{rot} \vec{H})^2;$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{1}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \operatorname{rot} H.$$

Здесь $\vec{v}$ — скорость среды; λ° и σ — тепло- и электропроводность; $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ — магнитная вязкость; $\hat{\tau} = \{\tau_{ij}\}$ — тензор вязких напряжений, связь которого с компонентами тензора скоростей деформаций v_{ij} определяется гипотезой Ньютона; $\tau_{ij} = \eta_1 v_{ij} + (\eta_2 - 2/3 \eta_1) \delta_{ij} \operatorname{div} \vec{v}$ (1.2); η_1, η_2 — коэффициенты вязкости.

В третьем уравнении системы (1.1) s' — полная энтропия единицы объема сплошной среды,

$$s' = s + s^e, \quad s^e = \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^N \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, H} H dH,$$

где s — гидродинамическая энтропия; s^e — часть полной энтропии, обусловленная магнитокалорическими эффектами.

Вместо уравнения, определяющего изменение полной энтропии, можно воспользоваться уравнением энергии в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho U - \psi^T - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{4\pi} \right) = \\ & = -\operatorname{div} \left\{ \vec{v} \left(\rho v^2/2 + \rho U + p + \psi^p - \psi^T \right) + \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{H}) - \lambda^\circ \nabla T - \vec{v} \hat{\tau} \right\}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь U — внутренняя энергия среды в отсутствие электромагнитного поля;

$$\psi^p = \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - 1 - \rho \mu_\rho) H dH; \quad \psi^T = \frac{1}{4\pi} \int_0^H (\mu - 1 - T \mu_T) H dH.$$

Электрическое поле в магнитогидродинамическом приближении определяется из уравнения

$$\vec{E} = \nu_m/c \operatorname{rot} \vec{H} - 1/c (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.4)$$

Система уравнений (1.1)–(1.3) замыкается уравнениями состояния, которые в сжимаемой среде могут быть записаны в виде $p = p(\rho, s)$, $T = T(\rho, s)$ (1.5).

В несжимаемой жидкости ($\rho \equiv \text{const}$) первое из уравнений (1.5) отсутствует, и давление определяется из уравнения движения.

Второе уравнение (1.5) имеет вид $T = T(s)$. Если теплоемкость c жидкости постоянна, то энтропия и внутренняя энергия жидкости в зависимости от температуры определяются равенствами [5]

$$s = \tilde{c} \ln T + \text{const}; \quad U = \tilde{c} T + \text{const}. \quad (1.6)$$

Процессы намагничивания считаются обратимыми. Это предположение справедливо для парамагнитных и диамагнитных жидкостей и газов [6], а также для ферромагнитных электропроводных жидкостей (суперпарамагнитные жидкости) [7], в которых явления гистерезиса в жидком состоянии не наблюдаются. Поэтому в случае изотропных законов намагничивания, магнитная индукция B , напряженность магнитного поля H и намагниченность M связаны соотношением

$$\vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M}(\rho, T, H) = \mu(\rho, T, H) \vec{H}. \quad (1.7)$$

Зависимостью магнитной проницаемости μ от плотности и температуры учитываются магнитоstrictionные и магнитокалорические эффекты в намагничивающейся среде. Конкретный вид закона намагничивания определяется типом рассматриваемых сред. Так, для совершенного парамагнитного газа может быть принята формула Ланжевена [7]

$$M = M_0 L(\xi); \quad L(\xi) = \operatorname{cth} \xi - \xi^{-1}; \quad M_0 = \frac{m_0 \rho}{M}; \quad \xi = \frac{m_0 H}{kT}. \quad (1.8)$$

Здесь m_0 , M — магнитный момент и масса одной молекулы; k — постоянная Больцмана.

Формула (1.8) используется и для намагниченности ферромагнитных жидкостей [8]. В этом случае m_0 — магнитный момент частиц диспергированного ферромагнетика; M_0 — некоторая постоянная, определяемая физическими свойствами ферромагнитной жидкости и пропорциональная концентрации ферромагнитных частиц в жидкости-носителе.

В слабых магнитных полях ($\xi \ll 1$) из (1.8) получаем $\mu - 1 = c\rho/T$, что при $|\mu - 1| \ll 1$ совпадает с законом Клазиуса-Моссоти

$$\frac{\mu - 1}{\mu} = \frac{c\rho}{T}; \quad c = \text{const}. \quad (1.9)$$

В сильных магнитных полях ($\xi \gg 1$, состояние насыщения намагниченности) намагниченность жидкости постоянна: $M = \text{const}$.

Для некоторых феррожидкостей в сильных магнитных полях при температурах, близких к температуре Кюри θ_K , принимается полуэмпирическая формула для намагниченности [9] $M = K\rho(\theta_K - T)$; $K = \text{const}$; $\theta_K > T$. (1.10)

В том случае, когда вид закона намагничивания не конкретизируется, естественными являются следующие ограничения:

$$\frac{\partial M}{\partial H} > 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial H^2} \leq 0 \quad \text{при} \quad \mu > 1; \quad \frac{\partial M}{\partial H} < 0, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial H^2} \geq 0 \quad \text{при} \quad \mu < 1. \quad (1.11)$$

Тогда для магнитной проницаемости можно получить оценки [10]:

$$(1 - \mu)/H \leq \mu_H \leq 0 \quad \text{при} \quad \mu > 1; \quad 0 \leq \mu_H \leq (1 - \mu)/H. \quad (1.12)$$

Здесь и в дальнейшем u_η ($\eta = \rho, s, T, H$) обозначает частную производную величины u по параметру η в позиции индекса.

Рассмотрим некоторые течения несжимаемой проводящей неоднородно и изотропно намагничивающейся жидкости.

2. Слабые разрывы в идеальной жидкости. Пусть $\Phi(x, y, z, t) = 0$ — поверхность слабого разрыва, θ — скорость распространения элемента слабого разрыва с нормалью n относительно среды. Возможные скорости слабых разрывов в проводящей несжимаемой жидкости определяются из уравнения [11]:

$$\theta(\theta^2 - B_n^2/4\pi\rho\mu) [\theta^2 - mB_n^2(\mu^2 + \mu_H B_n^2/B) - N\mu^2\mu_T^2 T_s m^2 B_n^2 B_\tau^2] = 0. \quad (2.1)$$

Следовательно, в электропроводной несжимаемой намагничивающейся жидкости существуют такие типы слабых разрывов: энтропийный ($\theta = 0$), магнитогидродинамический (альвеновский) $\theta_A^2 = B_n^2/4\pi\rho\mu$, магнитозвуковой

$$\theta_M^2 = mB_n^2 [\mu^2 + \mu_H B_n^2/B + N\mu^2\mu_T^2 T_s m B_\tau^2]; \\ m^{-1} = 4\pi\rho\mu(\mu^2 + \mu_H B); N^{-1} = 1 + T_s(s_T^e - m\mu_T^2 B^2). \quad (2.2)$$

Если $\mu_H \equiv 0$, $\mu_T \equiv 0$, то $\theta_M = \theta_A$, так что магнитозвуковой разрыв в изотропно намагничивающейся жидкости появляется исключительно из-за неоднородности закона намагничивания.

На возможность существования в несжимаемой жидкости плоских волн бесконечно малой амплитуды, отличных от энтропийных и альвеновских, впервые было указано в работе [12].

Отметим, что выражение (2.2) для скоростей разрывов в несжимаемой жидкости формально может быть получено в пределе $p_p \rightarrow \infty$ из скорости распространения медленного магнитозвукового разрыва в сжимаемой проводящей неоднородно и изотропно намагничивающейся среде. Поэтому для разрывов в несжимаемой жидкости мы сохраняем название «магнитозвуковые», хотя разрывы производных плотности в них равны нулю.

Из сравнения выражения для альвеновской скорости θ_A и выражения (2.2) для θ_M получаем, что с альвеновской скоростью перемещаются элементы слабого магнитозвукового разрыва, которые ортогональны направлению магнитного поля, либо касательны к нему, либо при значениях параметров, удовлетворяющих уравнению

$$\mu^2\mu_T^2 T_s m B = \mu_H [1 + s_T^e T_s - \mu_T^2 T_s m B^2]. \quad (2.3)$$

Поскольку в уравнение не входит ориентация элемента магнитозвукового разрыва, при выполнении (2.3) вся поверхность магнитозвукового разрыва перемещается относительно жидкости с альвеновской скоростью.

Для закона Ланжевена (1.8) уравнение (2.3) приводится к виду

$$f(\xi) = \zeta(\xi \operatorname{cth} \xi - 1)(1 - \xi^2/\operatorname{sh}^2 \xi) + \xi \operatorname{cth} \xi + \xi^2/\operatorname{sh}^2 \xi - 2 = 0, \\ \zeta = \frac{M_0 k T_s}{m_0 \varphi T}. \quad (2.4)$$

При значениях $0 < \xi < \infty$ данное уравнение не имеет действительных решений и функция $f(\xi)$ положительна, поэтому в парамагнитной жидкости $\theta_M^2 \geq \theta_A^2$.

Для случая $\mu = \mu(H)$ из (2.2) имеем

$$\theta_M^2 / \theta_A^2 = 1 - \frac{\mu_H B_\tau^2 / B}{\mu^2 + \mu_H B}. \quad (2.5)$$

Учитывая неравенства (1.12), отсюда получаем, что в парамагнитной жидкости скорость магнитозвуковых разрывов всегда

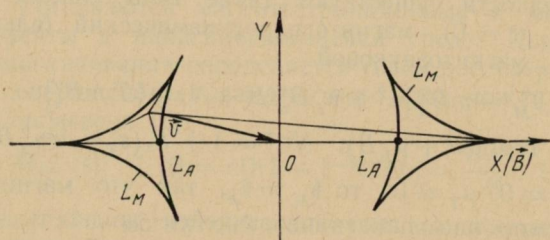


Рис. 1. Фронты слабых разрывов в несжимаемой электропроводной парамагнитной жидкости.

больше альвеновской, а в диамагнитных всегда меньше (за исключением элементов разрывов, для которых $B_n = 0$ либо $B_\tau = 0$).

Для парамагнитной жидкости $|\mu_H| \sim |\mu - 1|/H$; поэтому из

(2.5) получаем оценку $\frac{\theta_M^2 - \theta_A^2}{\theta_A^2} \leq |\mu - 1|$. Для обычных парамаг-

нитных жидкостей $|\mu - 1| \sim 10^{-5} - 10^{-6}$, так что относительное различие в скоростях распространения альвеновских и магнитозвуковых разрывов весьма мало. Это различие существенно в суперпарамагнитных жидкостях, для которых $|\mu - 1| \sim 1$.

Рассмотрим распространение слабых разрывов от точечного источника в неподвижной жидкости, предполагая, что магнитогидродинамические параметры постоянны (рис.1). Начало декартовой системы координат (x, y) поместим в источнике, направив ось (x) по вектору $\vec{B}$. Тогда энтропийный разрыв изображается точкой $x = 0, y = 0$. Фронт альвеновских разрывов соответствует двум точкам (точки L_A на рис. 1, 2), движущимся вдоль магнитной силовой линии, проходящей через источник, с альвеновской скоростью $\theta_A = \pm B_n / \sqrt{4\pi\mu}$. Сечение плоскостью (x, y) фронтов магнитозвуковых слабых разрывов по истечении единицы времени от начала действия источника задается уравнениями

$$X(\varphi) = \frac{a + b(1-l)^2}{\sqrt{a + b(1-l)}}; \quad Y(\varphi) = \frac{bl^{3/2}\sqrt{1-l}}{\sqrt{a + b(1-l)}}; \quad (2.6)$$

$$l = \cos^2 \varphi; \cos \varphi = B_n/B; a = B^2/4\pi r\mu; b = mB^2 (N\mu^2\mu_T^2 T_s mB^2 - \mu_H B).$$

В силу изложенного выше можно считать, что в парамагнитной жидкости $b > 0$, а в диамагнитной $b < 0$, при этом $a + b > 0$.

Элементарные исследования показывают, что кривые (2.6) (кривые L_M на рис. 1, 2) изображают два криволинейных треугольника, вершины которых являются точками возврата и определяются равенствами $l = 0$, $l = \frac{(3b + 2a - \sqrt{4a^2 + 3ab})}{3b}$. Выпуклость треугольников направлена внутрь ограниченной ими об-

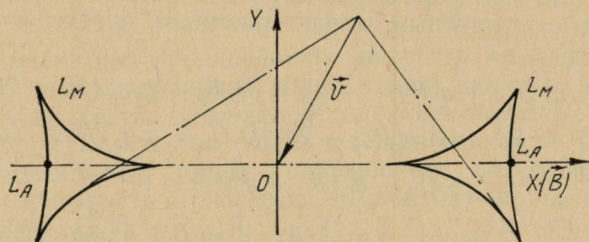


Рис. 2. Фронты слабых разрывов в несжимаемой электропроводной диамагнитной жидкости.

ласти. В парамагнитной жидкости эти треугольники заостренностью направлены от начала координат (рис. 1), а в диамагнитной жидкости — к началу координат (рис. 2).

Поверхности фронтов слабых разрывов от точечного источника получаются вращением кривых (2.6) вокруг направления магнитного поля.

Кривые L_M в неоднородно намагничивающейся жидкости существуют при значениях магнитной проницаемости, сколь угодно мало отклоняющихся от единицы, и только в однородно намагничивающейся жидкости они вырождаются в точки L_A , соответствующие альвеновским разрывам.

Для стационарных течений жидкости поверхности слабых разрывов недвижны в пространстве, так что $\theta = -v_n \equiv -(v \cdot n) = -vd$. В этом случае из (2.2) получим

$$\frac{v^2}{mB^2} d^2 = l^2 [\mu^2 + N\mu^2\mu_T^2 T_s mB^2 + l^2 (\mu_H B - N\mu^2\mu_T^2 T_s mB^2)].$$

Отсюда при условиях $d^2 \ll 1$, $l^2 \ll 1$ получаем область значений магнитогидродинамических параметров, при которых существуют действительные магнитозвуковые характеристики. В частном случае течений вдоль силовых линий магнитного поля ($d^2 = l^2$) условие существования магнитозвуковых характеристик состоит в выполнении неравенства $\mu^2 + N\mu^2\mu_T^2 T_s mB^2 \leq v^2/mB^2 \leq \mu^2 + \mu_H B$ ($\theta_M^2 \leq \theta_A^2$) либо $\mu^2 + \mu_H B \leq v^2/mB^2 \leq \mu^2 + N\mu^2\mu_T^2 T_s mB^2$ ($\theta_M^2 \geq \theta_A^2$). (2.7)

Таким образом, учет неоднородности намагничивания, даже при $|\mu - 1| \ll 1$, приводит к появлению областей гиперболичности стационарных течений, что позволяет обнаружить новые качественные особенности в динамике электропроводных жидкостей.

В плоских стационарных течениях жидкости ($v_z = 0$, $B_z = 0$) характеристические поверхности являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси z . В таких течениях возможны только магнитозвуковые и энтропийные характеристики. Последние совпадают с линиями тока.

Характеристические направления в плоскости (x, y) , соответствующие магнитозвуковым характеристикам, определяются уравнением

$$(y')^4 [Q_x^2 - q_x^2 (R_1 + q_x^2 R_2)] - 2(y')^3 [Q_x Q_y - q_x q_y (R_1 + 2q_x^2 R_2)] + (y')^2 [Q^2 - R_1 - 6q_x^2 q_y^2 R_2] - 2y' [Q_x Q_y - q_x q_y (R_1 + 2q_y^2 R_2)] + Q_y^2 - q_y^2 (R_1 + q_y^2 R_2) = 0. \quad (2.8)$$

Здесь $y' = \frac{dy}{dx}$; $\vec{Q} = \vec{v}/A$; $\vec{q} = \vec{A}/A$; $\vec{A} = \vec{B}/\sqrt{4\pi\rho\mu}$; $Q^2 = Q_x^2 + Q_y^2$,

$$R_1 = (\mu^2 + N\mu^2\mu_T^2 T_s m B^2)/(\mu^2 + \mu_H B);$$

$$R_2 = (\mu_H B - N\mu^2\mu_T^2 T_s m B^2)/(\mu^2 + \mu_H B).$$

Направления характеристик в точке потока $\vec{r}$ совпадают с направлениями касательных, проведенных из точки $-\vec{v}(\vec{r})$ к кривым L_M , построенным по параметрам потока в точке $\vec{r}$ [13]. Отсюда следует, что если конец вектора $-\vec{v}(\vec{r})$ попадает внутрь областей, ограниченных криволинейными треугольниками L_M на рис. 1, 2, то в точке потока $\vec{r}$ существует четыре действительных характеристических направления. Если же конец вектора $-\vec{v}(\vec{r})$ лежит вне треугольников L_M , то имеем только две характеристики. В случае течений жидкости вдоль силовых линий магнитного поля в областях гиперболичности течения, кроме энтропийных характеристик, имеем две магнитозвуковые характеристики. При этом в парамагнитной жидкости характеристики направлены вверх по потоку, а в диамагнитной — вниз.

3. Одномерные простые волны. Одномерные течения несжимаемой электропроводной жидкости описываются пятью магнитогидродинамическими переменными (T , v_y , v_z , B_y , B_z), $B_x = \text{const}$, $v_x = 0$ если считать, что при $x = \infty$, $v_x = 0$. Давление определяется из проекции на ось (x) уравнения движения $p + \phi - \frac{B_x^2}{4\pi\mu} = f(t)$, где $f(t)$ — некоторая функция, определяемая из граничных условий.

Одномерные нелинейные волны типа поперечных волн Альвена в несжимаемой жидкости описаны в работе [14]. Рассмотрим частный случай таких решений — одномерные простые волны [15].

Уравнения энтропийной простой волны имеют вид

$$\frac{dB_y}{dT} = \frac{\mu_T B_y}{\mu^2 + \mu_H B_x^2/B}, \quad v_y = \text{const}, \quad v_z = \text{const}, \quad B_z = 0. \quad (3.1)$$

Изменение магнитной индукции в энтропийной простой волне обусловлено магнитокалорическим эффектом. Для закона Клазиуса—Моссоти уравнение (3.1) определяет изменение магнитной индукции в зависимости от температуры в виде

$$B_y = \frac{B_{y0}}{\mu_0} \left[1 - \frac{\mu_0 - 1}{\mu_0} \frac{T_0}{T} \right]^{-1}.$$

Если магнитная проницаемость жидкости не зависит от температуры, то в энтропийной волне, также как и в намагничивающейся жидкости, изменяются только температура и энтропия.

Альвеновская простая волна поляризована по окружности. В ней изменяются только направления векторов магнитной индукции и скорости в плоскости, перпендикулярной направлению распространения.

Уравнения магнитозвуковых простых волн следующие:

$$\frac{dT}{dB_y} = -N\mu_T T_s m B_y; \quad \frac{dv_y}{dB_y} = -\theta_M/B_x;$$

$$B_x = \text{const}; \quad v_x = \text{const}; \quad B_z \equiv 0; \quad v_z \equiv 0. \quad (3.2)$$

Поскольку для парамагнитной жидкости намагниченность убывает с возрастанием температуры ($\mu_T < 0$), в магнитозвуковых простых волнах, как это следует из (3.2), температура монотонно возрастает, а скорость, наоборот, монотонно убывает с увеличением магнитной индукции.

В случае закона намагничивания $\mu = \mu(\rho, H)$ температура в простой волне не изменяется, а зависимость поперечной составляющей скорости от индукции определяется вторым уравнением (3.2), причем

$$\theta_M = \theta = \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}}, \quad \gamma = \frac{\mu^2 B + \mu_H B_x^2}{\mu^2 B + \mu_H B^2}.$$

Поскольку

$$\theta \frac{d\theta}{dB_y} = - \frac{B_y B_x^2 \mu^3}{8\pi\rho\gamma^2 (\mu^2 B + \mu_H B^2)} \cdot \frac{3B_x^2 \mu_H (\mu^2 + \mu_H B)^3 + 4\pi B_y^2 \mu^4 M_{HH}}{(\mu^3 H + \mu_H B_x^2)^2},$$

то из неравенств (1.11), (1.12) следует, что в парамагнитной жидкости $d\theta/dB_y > 0$, а в диамагнитной — $d\theta/dB_y < 0$ для волн, распространяющихся в положительном направлении оси (x). В результате начальный профиль простой магнитозвуковой волны деформируется с течением времени и в конечном итоге «прокидывается» (рис. 3а, б). Таким образом, деформирование профилей

простых магнитозвуковых волн в несжимаемой намагничивающейся электропроводной жидкости приводит к образованию сильных разрывов. При этом в парамагнитной жидкости возникают ударные волны намагничивания, а в диамагнитной — ударные волны размагничивания.

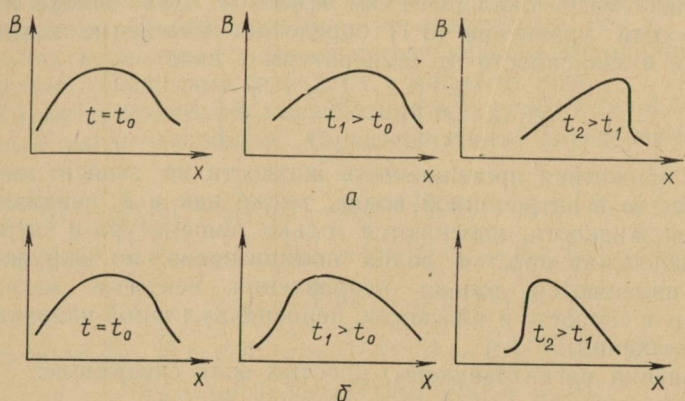


Рис. 3. Деформирование с течением времени первоначального профиля простой магнитозвуковой волны: *а* — в парамагнитной жидкости. Возникновение ударной волны намагничивания (волна движется в положительном направлении оси (*x*)); *б* — в диамагнитной жидкости. Возникновение ударной волны размагничивания.

Условия на ударных волнах в несжимаемой жидкости, получаемые из законов сохранения в интегральной форме, имеют вид

$$\begin{aligned} \langle v_n \rangle &= 0, \quad \langle B_n \rangle = 0, \quad \langle p \rangle = \langle \rho^2 u_p + (4\pi)^{-1} \mu H_n^2 \rangle, \\ \rho v_n \langle \vec{v}_\tau \rangle &= \frac{B_n}{4\pi} \langle \vec{H}_\tau \rangle, \quad v_n \langle \vec{B}_\tau \rangle = B_n \langle \vec{v}_\tau \rangle, \quad (3.3) \\ \left\langle U - u + T u_T + \frac{\mu H^2}{4\pi\rho} - \frac{B_n^2 H_\tau^2}{32\pi^2 \rho^2 v_n^2} \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

$$u = (4\pi\rho)^{-1} \int_0^H \mu(\rho, T, H) H dH.$$

Здесь угловые скобки обозначают скачок величины в разрыве, индексы *n* и *τ* — нормальные и касательные составляющие векторов по отношению к поверхности разрыва.

Из первых двух соотношений (3.3) следует, что в ударных волнах в несжимаемой жидкости изменяются только касательные составляющие скорости и магнитной индукции. Третье уравнение (3.3) служит для определения скачка давления.

Система условий (3.3) определяет три типа разрывов с перетеканием вещества через поверхность [15]: вращательные, плоскополяризованные и неполяризованные.

В неполяризованных разрывах изменяются термодинамические параметры и векторы магнитной индукции и скорости (по величине и направлению). Для их расчета имеем

$$\langle \rho \rangle = \langle \rho^2 u_p \rangle; \quad \langle \mu \rangle = 0; \quad \left\langle U - u + Tu_T + \frac{\mu H^2}{8\pi\rho} \right\rangle = 0. \quad (3.4)$$

Если в жидкости можно пренебречь магнитокалорическими эффектами, то из второго уравнения (3.4) получаем $\langle H \rangle = 0$, $\langle u \rangle = \langle u_p \rangle = 0$. Соотношения (3.4) приводятся к условиям для альвеновских разрывов.

К настоящему времени не известно решений на неполяризованных разрывах (кроме решений, отвечающих альвеновским разрывам), которые удовлетворяли бы необходимым условиям устойчивости среды, неубыванию полной энтропии в разрыве и эволюционности. Однако эти разрывы принципиально возможны: они могли бы, например, возникать при взаимодействии других типов разрывов в несжимаемой жидкости.

Во вращательных разрывах векторы скорости и магнитной индукции изменяются по направлению, по величине оставаясь постоянными.

Для плоскополяризованных разрывов из (3.3) получаем следующее уравнение ударной адиабаты:

$$\langle U \rangle = \left\langle u - Tu_T - \frac{\mu H^2}{4\pi\rho} \right\rangle + \frac{\langle B_\tau \rangle (H_{\tau_1} + H_{\tau_2})}{8\pi\rho}.$$

Индексы 1, 2 относятся к состояниям до и за ударной волной соответственно. Отсюда для ударных волн слабой интенсивности в случае закона $\mu = \mu(\rho, H)$ имеем

$$\langle U \rangle = - \frac{\langle B_\tau \rangle^3 B_{\tau_1}}{48\pi\rho\mu(\mu^2 B + \mu_H B^2)} \{ 4\pi\mu^4 M_{HH} B_{\tau_1}^2 + 3\mu_H B_{n1}^2 (\mu^2 + \mu_H B)^2 \}. \quad (3.5)$$

Таким образом, ударные волны намагничивания слабой интенсивности в парамагнитной жидкости и размагничивания в диамагнитной жидкости — термодинамически устойчивы.

Условия эволюционности ударных волн в парамагнитной жидкости имеют вид $\theta_{M1} \leq v_n \leq \theta_{M2}$, $v_n > \theta_{A2}$, а в диамагнитной $\theta_{M2} \leq v_n \leq \theta_{M1}$, $v_n < \theta_{A1}$. Используя неравенства (1.11), (1.12), получаем, что в случае закона намагничивания $\mu = \mu(\rho, H)$ в парамагнитной жидкости эволюционными являются только ударные волны намагничивания (произвольной интенсивности), а в диамагнитной — волны размагничивания. Магнитная проницаемость в ударных волнах намагничивания убывает, а в ударных волнах размагничивания — возрастает.

Система уравнений (3.2) имеет решения и в виде автомодельных простых волн. Если магнитокалорический эффект не учитывается, то в парамагнитной жидкости в автомодельных волнах магнитная

индукция убывает с течением времени, а в диамагнитной — возрастает.

4. Стационарные простые волны. Рассмотрим стационарные течения идеальной намагничивающейся несжимаемой электропроводной жидкости, в которых все параметры зависят только от угла φ , отсчитываемого в плоскости (x, y) , и не зависят от координаты z [16]. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) такие течения определяются решениями следующей системы уравнений

$$\begin{aligned} v_\varphi' + v_r &= 0; \quad B_\varphi' + B_r = 0; \quad v_\varphi(s + s^e)' = 0; \\ v_\varphi(v_r' - v_\varphi) &= B_\varphi(B_r' - B_\varphi)/(4\pi\rho\mu) - \mu'B_\varphi B_r/(4\pi\rho\mu^2); \\ v_\varphi(B_r' - B_\varphi) &= B_\varphi(v_r' - v_\varphi); \\ v_\varphi v_z' &= B_\varphi B_z'/(4\pi\rho\mu) - \mu'B_\varphi B_z/(4\pi\rho\mu^2); \\ v_\varphi B_z' &= B_\varphi v_z'; \quad \left(p + \psi^p + \frac{B^2}{4\pi\mu^2}\right)' = -\frac{B_\varphi^2 \mu'}{4\pi\mu^2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Штрихом обозначена производная по φ .

При постоянной магнитной проницаемости ($\mu' \equiv 0$) система уравнений (4.1) определяет два типа решений: однородный поступательный поток и стационарную вращательную волну [17].

Для течений с изменяющейся магнитной проницаемостью система (4.1) имеет ряд первых интегралов. Отметим, прежде всего, что из уравнения энергии (1.3) следует

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{4\pi\rho} \int_0^H (T\mu_T - \rho\mu_\rho) H dH + \frac{\mu H^2}{4\pi\rho} - \int \frac{B_\varphi (\vec{H}v)'}{v_\varphi} d\varphi = \text{const.} \quad (4.2)$$

где постоянная справа не зависит от линии тока.

Уравнение (4.2) служит для определения давления в жидкости после того, как из системы (4.1) будут найдены температура, скорость и магнитная индукция. Оно является интегралом системы (4.1) для течений жидкости вдоль силовых линий магнитного поля. Поэтому, последнее уравнение (4.1) в дальнейшем можно не рассматривать.

Из третьего уравнения (4.1) следует, что полная энтропия жидкости сохраняется во всей области течения

$$s + s^e = \text{const.} \quad (4.3)$$

Из первого, второго и пятого уравнений (4.1) получаем

$$v_r = \frac{v_\varphi B_r - c_3}{B_\varphi}, \quad c_3 = \text{const.} \quad (4.4)$$

Кроме того, система (4.1) имеет еще один алгебраический интеграл

$$v_\varphi^2 - m B_\varphi^2 [\mu^2 + \mu_H B_\varphi^2/B + N \mu^2 \mu_T^2 T_s m (B_r^2 + B_\varphi^2)] = 0 \quad (4.5)$$

указывающий, что нормальная к лучу $\varphi = \text{const}$ составляющая скорости жидкости совпадает со скоростью слабых магнитозвуковых разрывов, так что лучи $\varphi = \text{const}$ являются характеристиками в искомом решении. Вдоль характеристик все магнитогидродинамические переменные постоянны.

Наличие интегралов (4.3)—(4.5) позволяет свести задачу (4.1) к интегрированию системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения компонент вектора магнитной индукции. Мы укажем точное решение этой системы уравнений для парамагнитной жидкости, намагниченной до насыщения ($M = \text{const}$) для случая плоских течений вдоль силовых линий магнитного поля ($\vec{B} = C\vec{v}$). Это решение позволит выяснить основные качественные особенности стационарных течений такой жидкости. Оно имеет вид

$$v_r = \frac{K_1}{c_1^{3/2}} \frac{\mu \sqrt{\mu - c_1}}{(\mu - 1)^{3/2}}; \quad v_\varphi = \frac{K_1 \sqrt{c_1 - 1}}{c_1^{3/2}} \left(\frac{\mu}{\mu - 1} \right)^{3/2}; \quad (4.6)$$

$$\frac{p}{\rho} + \frac{K_1}{2c_1^2} \left(\frac{\mu}{\mu - 1} \right)^2 = \text{const}; \quad T = \text{const};$$

$$\mu = \frac{c_1 (1 - \sin \alpha)}{2 - c_1 (1 + \sin \alpha)}; \quad \alpha = \frac{2}{3} \varphi; \quad K_1 = \frac{MC}{\rho}; \quad C = \text{const}; \quad c_1 = \frac{C^2}{4\pi\rho}.$$

Это решение описывает волну размагничивания: с ростом угла φ увеличиваются давление и магнитная проницаемость, а скорость, напряженность магнитного поля и магнитная индукция — убывают. Указанное решение аналогично решению Прандтля—Майера в газовой динамике.

Постоянная c_1 в решении (4.6) характеризует отношение скорости жидкости на бесконечности к альвеновской скорости. Ее значения ограничены неравенством $1 < c_1 < \mu_-$; это неравенство получается из (2.7) и эквивалентно требованию гиперболичности системы (1.1) для идеальной жидкости, намагниченной до насыщения (μ_- — минимальное значение магнитной проницаемости в потоке).

На рис. 4 представлены графики магнитной проницаемости, а на рис. 5 — безразмерной скорости $v^* = c_1 v / K_1$ в зависимости от угла α для различных значений постоянной c_1 . Из рис. 4 видно, что для каждого значения c_1 существует область углов α (или φ), при которых происходит быстрое изменение магнитной проницаемости в потоке. Это, в свою очередь, приводит к значительному понижению напряженности магнитного поля, что обуславливает в соответствующей области углов φ неприменимость решения (4.6), справедливого для парамагнитной жидкости в сильных полях. В этом случае, для интегрирования системы (4.1) необходимо привлекать закон Ланжевена в виде (1.8).

Для угла χ , образованного вектором скорости с некоторым фиксированным направлением в плоскости (x, y) , имеем $\chi = \varphi + \arctg(v_\varphi/v_r)$. Используя решение (4.6), отсюда получим

$$\frac{d\chi}{d\varphi} = \frac{2}{3}. \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что намагничивающаяся жидкость в волне размагничивания поворачивается в направлении обхода вокруг особой линии и угол поворота течения пропорционален углу φ .

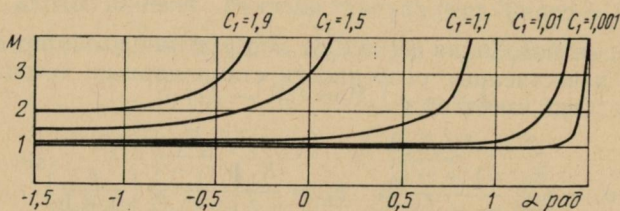


Рис. 4. Зависимость магнитной проницаемости от угла α при различных значениях параметра c_1 в стационарной простой волне размагничивания.

Рассмотрим задачу обтекания бесконечно проводящего выпуклого угла стационарным потоком идеальной электропроводной намагничивающейся жидкости.

Введем декартову систему координат (x, y, z) с вершиной в угловой точке, направив ось z по ребру угла (рис. 6, $\angle AOB = \beta$). Магнитное поле в потоке должно быть параллельным скорости, поскольку в противном случае решение задачи, зависящее только от угла φ , не существует [18].

В набегающем однородном потоке (Область 1) значение магнитной проницаемости равно μ_1 . Из (2.9) получим, что характеристика Oa , разделяющая области поступательного потока и волну размагничивания, задается уравнением $y/x = \sqrt{\mu_1(c_1 - 1)/(\mu_1 - c_1)}$. Ей соответствует значение угла φ , равное φ_1 , $\varphi_1 = \varphi(\mu_1)$, $\varphi(\mu) = \frac{3}{2} \arcsin \frac{2\mu - c_1(\mu + 1)}{(\mu - 1)c_1}$.

Уравнение (4.7) определяет угол χ в виде $\chi = \frac{2}{3}(\varphi - \varphi_1)$ (отсчет угла χ ведется от направления потока к оси (x) при $x = -\infty$).

Отсюда следует, что в случае парамагнитной жидкости, намагниченной до насыщения, поток поворачивается в углу aOb , не зависящем от параметров набегающего потока и равном $\frac{3}{2}(\pi - \beta)$.

После разрыва Ob поток становится параллельным стороне угла OB .

В качестве примера рассмотрим обтекание угла $\beta = 150^\circ$ при $\mu_1 = 1.2$, $c_1 = 1.1$. Тогда угол наклона характеристики Oa к оси (x) равен 48° . Волна размагничивания занимает угол aOb , равный

45°. После поворота в волне размагничивания поток становится поступательным со значением магнитной проницаемости в нем, равным $\mu_2 = 1,457$.

При обтекании выпуклой стенки вниз от характеристики Oa имеем непрерывный размагничивающийся поток. При обтекании вогнутой стенки угол наклона вектора скорости к оси (x) увеличивается вниз по течению. Вместе с ним увеличивается и угол наклона характеристик, исходящих от тела. В этом случае характеристики пересекаются друг с другом и непрерывное течение

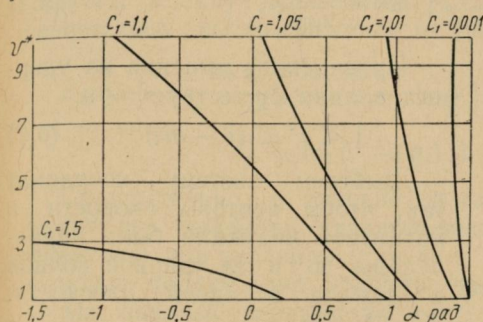


Рис. 5. То же, что на рис. 4 для безразмерной скорости v^* .

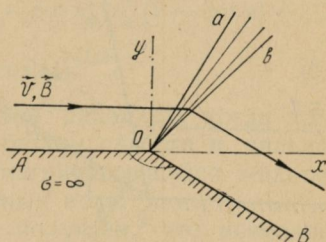


Рис. 6. Обтекание выпуклого идеально проводящего угла стационарным потоком идеальной электропроводной намагничивающейся жидкости. Волна размагничивания занимает область aOb .

во всей области невозможно. Следовательно, при обтекании вогнутого профиля либо угла в потоке должны возникать ударные волны намагничивания.

5. Уравнение ударной поляры. Обтекание вогнутого угла. Для получения уравнения ударной поляры в несжимаемой электропроводной жидкости необходимо разрешить условия (3.6) на ударных волнах. Воспользуемся известным решением [14] этих условий для жидкости, намагничивающейся по закону (1.10) в

случае $m = \frac{4\pi K \rho \theta_k}{B_n} \ll 1$; $\beta = \frac{B_n^2}{4\pi \rho c T} \ll 1$. Тогда для скачка температуры в ударной волне имеем

$$\langle \tau \rangle = \beta \left[\frac{m \sqrt{1 + b_1^2} (1 - \lambda)}{\lambda} - \frac{b_1^2 (\xi - 1) m_1 (\xi \lambda - 1)}{2} \right], \quad \tau = \frac{T}{\theta_k};$$

$$b_i = \frac{B_{\tau i}}{B_n}; \quad m_1 = \frac{m (1 - \tau)}{\sqrt{1 + b_1^2}}; \quad \lambda = \lambda(\xi, b_1) = \sqrt{\frac{1 + b_1^2}{1 + b_1^2 \xi^2}};$$

$$\xi = \frac{b_2}{b_1} \quad (i = 1, 2).$$

Поскольку $\beta \ll 1$, температура в ударной волне не изменяется. Условия неубывания полной энтропии в разрыве и условия эволюционности допускают только ударные волны намагничивания. Скачок давления определяется из равенства

$$-\frac{8\pi}{B_n^2} \langle p \rangle = \langle (\sqrt{1+b^2} - m(1-\tau))^2 + \frac{2m(1-\tau)}{\sqrt{1+b^2}} \rangle,$$

а интенсивность ξ ударной волны удовлетворяет уравнению

$$\frac{\alpha^2 - 1}{m_1 \alpha^2} = \frac{\xi \lambda - 1}{\xi - 1}; \quad \alpha^2 = \frac{B_n^2}{4\pi \rho v_n^2}. \quad (5.1)$$

Приведенное решение на ударных волнах существует при

$$1 \leq \alpha^2 \leq (1 - m_1)^{-1}. \quad (5.2)$$

Выберем систему координат так, чтобы векторы скорости и магнитной индукции были параллельны до и за ударной волной и лежали в одной плоскости:

$\vec{B} = c\vec{v}$. При этом из условий $\langle B_n \rangle = 0$, $\langle v_n \rangle = 0$ следует, что c сохраняется в ударной волне. Направим ось (x) по направлению скорости до ударной волны (рис. 7). Тогда уравнение (5.1) записывается в виде

$$\frac{v_1}{v_*} = \frac{v_1 v_{x2} - v_{x1} v_2}{(v_{x2} - v_{x1}) v_2}; \quad v_* = \frac{4\pi \rho K_0 c (1 - \tau)}{c^2 - 4\pi \rho}, \quad (5.3)$$

а условие (5.2) существования ударных волн имеет вид $v_1 \leq v_*$.

Отметим, что v_* тоже сохраняется в ударной волне, поскольку температура не изменяется при переходе через ударную волну.

Введем угол φ наклона ударной волны к оси (x) , тогда из условия непрерывности нормальной составляющей скорости в ударной волне получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_{2y}}{(v_{2x} - v_1)}. \quad (5.4)$$

Отсюда следует, что $v_{2x} > v_1$, поскольку в противном случае в ударной волне должен происходить поворот касательной составляющей скорости на угол π , что в плоскополяризованных ударных волнах невозможно.

Из (5.3), (5.4) получаем следующее уравнение ударной волны:

$$\begin{aligned} \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} [(v_{2x} - v_1)^2 + v_* (v_{2x} - v_1) + v_{2y}^2] = \\ = v_* [v_{2x} (v_{2x} - v_1) + v_{2y}^2]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

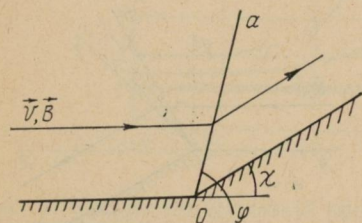


Рис. 7. Обтекание вогнутого угла потоком идеальной электропроводной несжимаемой намагничивающейся жидкости. Поворот потока осуществляется в плоскополяризованной ударной волне намагничивания, отходящей от края угла.

Это уравнение определяет искомую связь $v_{2y} = v_{2y}(v_{2x})$ в косой ударной волне в зависимости от двух параметров v_1 и v_* .

Пусть α -угол поворота течения в ударной волне ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Тогда $v_{2x} = v_2 \cos \alpha$ и уравнение (5.5) приводится к следующему.

$$v_2^2 - v_2 [v_* (1 - \cos \alpha) + 2v_1 \cos \alpha] + v_1^2 - v_1 v_* (1 - \cos \alpha) = 0. \quad (5.6)$$

Это уравнение дает два действительных значения v_2 , одно из которых, в силу неравенства $v_1 \leq v_*$, отрицательно и не имеет физического смысла. Поэтому из (5.6) имеем

$$v_2 = \frac{v_* (1 - \cos \alpha) + 2v_1 \cos \alpha}{2} + \frac{1}{2} \{ (1 - \cos \alpha) [v_*^2 (1 - \cos \alpha) + 4v_1 (v_* - v_1) (1 + \cos \alpha)] \}^{1/2}. \quad (5.7)$$

Следовательно, в отличие от газовой динамики, когда существует два семейства ударных волн (волны слабого и сильного семейства) при заданном угле α , в намагничивающейся жидкости возможно только одно семейство ударных волн.

Из анализа неравенства $v_{2x} > v_1$ получаем, что возможные углы поворота течения в ударной волне ограничены неравенством $\cos \alpha > v_1 / v_*$.

Поскольку $v_2 \geq v_{2x} > v_1$, условия термодинамической устойчивости и эволюционности для решений (5.7) выполнены. При известном угле α и параметрам потока до ударной волны значение скорости за ударной волной определяется из (5.7), а угол наклона ударной волны из уравнения (5.4).

Полученные результаты можно непосредственно применить для построения решения задачи обтекания идеально проводящего вогнутого угла. Рассмотрим в качестве примера случай течения, когда $v_1 = v_*/2$. Тогда $v_2 = v_1 \left(1 + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right)$; $\tan \varphi = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha/2}{\cos \alpha - \sin \alpha/2}$.

Отсюда, например, при $\alpha = 30^\circ$ имеем $v_2 = 1,52v_1$, $\varphi = 68^\circ$.

6. Поглощение плоских волн в проводящей жидкости. Коэффициент поглощения δ определяет уменьшение по закону $\exp(-\delta x)$ амплитуды звуковой волны, распространяющейся в положительном направлении оси (x). Коэффициенты поглощения равны для альвеновской волны $\delta_A = \frac{\omega^2}{2\theta_A^3} \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \frac{\nu_m}{\mu} \right)$; для магнитозвуковой

волны

$$\delta_M = \frac{\omega^2}{2\theta_M^3} \left\{ \frac{\lambda^0}{\rho T \theta_M^2} N^2 \mu^2 \mu_T^2 T_s m^2 B_x^2 B_y^2 + \frac{\eta_1}{\rho} + \frac{\nu_m}{\mu} \frac{\theta_M^2}{\theta_A^2} \right\} \quad (6.1)$$

(ω — частота плоских волн).

Таким образом, поглощение магнитозвуковых волн обусловлено всеми диссипативными процессами в жидкости. В слабых

магнитных полях, когда верен закон Клазиуса — Моссоги, $|\mu_T| \sim \sim |\mu - 1|/T$, поглощение магнитозвуковых волн в парамагнитных жидкостях, обусловленной теплопроводностью, пренебрежимо мало по сравнению с затуханием за счет вязкой и джоулевой диссипаций. Все три механизма диссипации в равной мере влияют на поглощение магнитозвуковых волн только в суперпарамагнитной жидкости.

Если магнитокалорический эффект не учитывается, то, используя неравенства (1.12), получаем $\mu^{-3/2}\delta_A \leq \delta_M \leq \delta_A$ ($\mu > 1$); $\delta_A \leq \leq \delta_M \leq \mu^{-3/2}\delta_A$ ($\mu < 1$), что свидетельствует о более слабом поглощении магнитозвуковых волн в парамагнитной жидкости по сравнению с поглощением альвеновских волн. Такие оценки, в частности, имеют место в парамагнитной жидкости, намагниченной до насыщения.

7. Структура ударных волн слабой интенсивности. Альвеновские разрывы в однородно намагничивающейся жидкости не имеют стационарной структуры [19]. Их ширина с течением времени изменяется по закону $\Delta_A \sim \sqrt{(\nu_1 + \nu_m)t}$, что обусловлено диффузией альвеновских волн в жидкости с конечной электропроводностью и вязкостью. Поскольку альвеновские волны в намагничивающейся жидкости такие же, как и в жидкости, для которой $\mu = \text{const}$, то и здесь они не имеют стационарной ширины и существуют ограниченное время. При учете неоднородности намагничивания для ширины альвеновских волн получаем оценку $\Delta_A \sim \sqrt{(\nu_1 + \nu_m/\mu)t}$. В связи с этим представляет интерес структура плоскополяризованных волн в намагничивающейся жидкости.

Воспользовавшись тем, что условия (3.3) инвариантны относительно добавления к вектору $\vec{v}_\tau$ произвольного постоянного вектора, выберем систему координат таким образом, чтобы движение с обеих сторон от разрыва было плоским, а векторы скорости и магнитной индукции были параллельны на больших расстояниях от ударной волны. Направим, кроме того, одну из осей в плоскости скачка по вектору $\vec{B}_\tau$. В выбранной системе координат уравнения, описывающие структуру, имеют вид [20]

$$\begin{aligned} \nu_1 \frac{dv_\tau}{dx} &= v_0 \delta v_\tau - \frac{B_0}{4\pi\rho} \delta H_\tau; \quad \nu_m \frac{dH_\tau}{dx} = v_0 \delta B_\tau - B_0 \delta v_\tau; \\ \lambda^0 \frac{dT}{dx} + \frac{\eta_1}{2} \frac{dv_\tau^2}{dx} &= \rho v_0 \delta \left(\frac{v_\tau^2}{2} + U + \frac{B_0^2}{4\pi\rho\mu} - \frac{\psi_T}{\rho} - \frac{H^2}{8\pi\rho} \right); \\ \frac{dv_\tau}{dx} &\rightarrow 0, \quad \frac{dH_\tau}{dx} \rightarrow 0, \quad \frac{dT}{dx} \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Здесь δa обозначает разность между значениями a в разрыве и на $+\infty$ перед ним; $v_0 \equiv v_x = \text{const}$; $B_0 \equiv B_x = \text{const}$.

Укажем на одну особенность системы уравнений (7.1). Если в жидкости не учитывается магнитокалорический эффект, то первые два уравнения полностью определяют изменение ско-

рости и магнитной индукции в разрыве, а третье уравнение служит для определения температуры. При учете магнитокалорического эффекта все три уравнения оказываются связанными.

Рассмотрим поэтому сначала случай зависимости $\mu = \mu(\rho, H)$. В качестве величины, характеризующей интенсивность слабой ударной волны, выберем изменение магнитной индукции $\varepsilon = \delta B_z$. Из дальнейшего следует, что дифференцирование по x в структуре повышает порядок малости слагаемого на единицу. Поэтому с точностью до малых второго порядка по ε включительно имеем [21]

$$\delta v_z = q_0 \varepsilon + q_1 \varepsilon^2 + q_2 \frac{d\varepsilon}{dx}.$$

Подставляя это разложение в первое уравнение (5.1), получаем неизвестные коэффициенты

$$q_0 = \frac{B_0 c_1}{4\pi \rho v_0}; \quad q_1 = \frac{B_0 c_2}{4\pi \rho v_0}; \quad q_2 = \frac{\gamma_1 c_1 B_0}{4\pi \rho^2 v_0^2},$$

где

$$c_1 = \frac{\gamma}{\mu}; \quad c_2 = - \frac{4\pi \mu^3 B_{\tau 1}^2 M_{HH} + 3\mu \mu_H B_n^2 (\mu + \mu_H H)^2}{2\mu^3 B^2 (\mu + \mu_H H)^3} B_{\tau 1}.$$

Теперь второе уравнение (5.1) приводится к виду

$$\frac{dB_z}{dx} = - \frac{c_2}{c_1} \frac{\omega^2 B_{\tau 1}}{2\gamma \delta_M A_0^2} (B_z - B_{\tau 1})(B_z - B_{\tau 2}); \quad A_0^2 = \frac{B_0^2}{4\pi \rho \mu_1}. \quad (7.2)$$

Здесь δ_M — коэффициент поглощения плоских магнитозвуковых волн бесконечно малой амплитуды и частоты ω , который определяется из (6.1) в случае зависимости $\mu = \mu(\rho, H)$.

Из (7.2) получаем $B_z - \frac{B_{\tau 1} + B_{\tau 2}}{2} = \frac{B_{\tau 2} - B_{\tau 1}}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\Delta_M}$, где Δ_M — ширина ударной волны,

$$|\Delta_M| = \left| \frac{8\gamma^2 \mu^2 B^3 A_0^2 \delta_M (\mu + \mu_H H)^3}{\omega^2 B_{\tau 1} (B_{\tau 2} - B_{\tau 1}) [4\pi \mu^3 M_{HH} B_{\tau 1}^2 + 3\mu \mu_H B_0^2 (\mu + \mu_H H)^2]} \right|. \quad (7.3)$$

Она существенно зависит от ориентации магнитного поля по отношению к фронту ударной волны.

Таким образом, магнитная индукция в ударной волне изменяется по закону гиперболического тангенса. В парамагнитной жидкости она непрерывно возрастает от значения $B_{\tau 1}$ при $x = -\infty$ до $B_{\tau 2}$ при $x = +\infty$. В диамагнитной жидкости, наоборот, $B_{\tau 2} < B_{\tau 1}$, так что магнитная индукция убывает.

Для определения хода изменения температуры (и энтропии) воспользуемся третьим уравнением (5.1). С точностью до малых ε^2 включительно это уравнение записывается в виде

$$\lambda^0 \frac{dT}{dx} = \rho v_0 \delta U = \rho v_0 \tilde{c} (T - T_1).$$

Единственное решение этого уравнения, ограниченное на бесконечности, есть $T = T_1$. Таким образом, в рассматриваемом приближении энтропия во всем потоке постоянна, в следующем приближении, как это следует из (3.8), она возрастает (рис. 8, а).

При учете магнитокалорического эффекта структура ударной волны слабой интенсивности рассматривалась для закона намагничивания (1.10). В этом случае все магнитогидродинамические

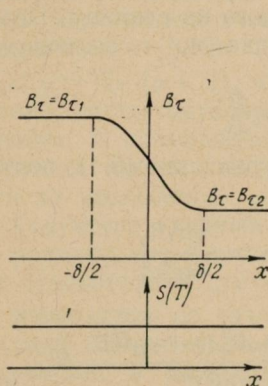


Рис. 8, а. Структура ударной волны в диамагнитной жидкости.

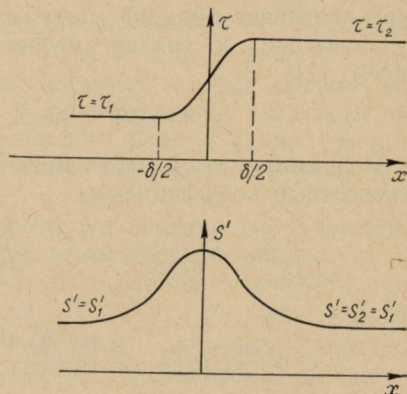


Рис. 8, б. Структура ударной волны в парамагнитной жидкости. Учитывается магнитокалорический эффект.

переменные монотонно возрастают, изменяясь по закону гиперболического тангенса. Интересно отметить, что и гидродинамическая энтропия изменяется также. Полная энтропия изменяется немонотонно, и ее полное изменение в разрыве равно нулю. В следующем приближении по интенсивности ударной волны полная энтропия возрастает (рис. 8, б).

Список литературы: 1. Bertrand A. R. V. Les Ferrofluides.—Rev. Inst. Fr. Petrole. Ann. Combust Liquides, 1970, No 25, p. 16—35. 2. Баштовой В. Г., Берковский Б. М. Термомеханика ферромагнитных жидкостей.—Магнитная гидродинамика, 1973, № 3, с. 3—14. 3. Berkovsky B. M., Rosensweig R. E. Magnetic Fluid Mechanics; a Report on an International Advanced Course and Workshop.—Journ. Fluid Mech, 1978, 87, No 3, p. 521—532. 4. Таранов И. Е. К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред.—Магнитная гидродинамика, 1972, № 1, с. 3—11. 5. Седов Л. И. Механика сплошной среды.—М.: Наука, 1970.—Т. 1. 492 с. 6. Вонсовский С. В. Магнетизм.—М.: Наука, 1971. 1032 с. 7. Charles S. W., Poplewell J. The Magnetic Properties of Ferromagnetic Liquids Containing Iron Particles in Mercury.—IEEE Trans: on Magn., 1976, vol.—mag. 12, No 6, p. 795—797. 8. Шапошников И. Г., Шлиomis М. И. Гидродинамика намагничивающихся сред.—Магнитная гидродинамика, 1975, № 1, с. 47—58. 9. Curtis R. A. Flows and Wave propagations in Ferrofluids.—Phys. Fl., 1971, 14, No10, p. 2096—2102. 10. Пацегон Н. Ф. Слабые разрывы в электропроводной намагничивающейся жидкости.—Журн. прикл. механ. и техн. физ., 1980, № 2, с. 40—45. 11. Пацегон Н. Ф., Таранов И. Е. Звуковые и простые волны в проводящей намагничивающейся

среде.— Укр. физ. журн., 1974, 19, № 6, с. 896—902. 12. Тарапов И. Е. Звуковые волны в намагничивающейся среде.— Журн. прикл. мех. и техн. физ., 1974, № 4 с. 35—40. 13. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.— М.: ГИФМЛ, 1962. 246 с. 14. Тарапов И. Е. Поперечные волны и разрывы в идеальной намагничивающейся жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6, с. 116—124. 15. Пацегон Н. Ф., Половин Р. В., Тарапов И. Е. Простые волны и сильные разрывы в намагничивающейся среде.— Прикл. мат. и механика, 1979, 43, № 1 с. 57—64. 16. Пацегон Н. Ф. Некоторые особенности движения несжимаемой электропроводной жидкости в сильном магнитном поле.— Семинар по прикл. магнитной гидродинамике. Тез. докл., ч. 2. Пермь, 1978, с. 68—71. 17. Любимов Г. А. Стационарное обтекание угла потоком бесконечно проводящего газа.— Докл. АН СССР, 1959, 126, № 4, с. 30—41. 18. Grad H. Reducible Problems in Magneto-Fluid Dynamic Steady Flows.— Rev. Mod. Phys., 1960, 32, No 4, p. 830—847. 19. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: ГИТТЛ, 1957.—532 с. 20. Пацегон Н. Ф. Структура скачка слабой интенсивности в проводящей намагничивающейся жидкости.— Магнитная гидродинамика, 1978, № 2, с. 19—22. 21. Сиротина Е. П., Сыроватский С. И. Структура ударных волн слабой интенсивности в магнитной гидродинамике.— Журн. эксп. теор. физ., 1960, 39, № 3.

Поступила 5 июня 1979 г.

УДК 517.977.1

В. И. КОРОБОВ, канд. физ.-мат. наук

ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ

При решении задач оптимального управления, основанном на принципе максимума Понтрягина [1], возникает задача синтеза ограниченных управлений, которая формулируется следующим образом.

Пусть задана система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x, u)$ (1), где $x \in E_n$, $u \in \Omega_1 \subset E_r$. Требуется построить управление u в виде $u = u(x)$ ($u \in \Omega_1$) такое, что траектория $x(t)$ системы $\dot{x} = f(x, u(x))$ (2), начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in E_n$, оканчивается в точке $x_1 \in E_n$ в конечный момент времени $T(x_0)$.

Решение данной задачи, основанное на использовании функции управляемости $\Theta(x)$, дано в работе [2]. Используя ее некоторые результаты, проведем построение функции $\Theta(x)$ явным способом. Кроме того, рассмотрим более общую, возникающую в теории дифференциальных игр [3—5] аналогичную задачу, которая формулируется таким образом.

Пусть задана система дифференциальных уравнений $\dot{x} = f(x, u, v)$, где $x \in E_n$, $u \in \Omega_1$, $v \in \Omega_2$. Требуется построить стратегию (управление) $u(x) \in \Omega_1$, переводящую произвольную точку $x_0 \in E_n$ согласно системе

$$\dot{x} = f(x, u(x), v(t, x)) \quad (3)$$

в точку x_1 при любой неизвестной функции $v(t, x) \in \Omega_2$. Функция $v(t, x)$ может быть разрывной, даже неизмеримой, поэтому может и не быть функции $x(t)$, удовлетворяющей уравнению (3). Поэтому ставится задача отыскания управления $u(x)$ такого, что соответствующее движение $\tilde{x}(t)$, порожденное системой (3) [5], удовлетворяло бы условиям $\tilde{x}(0) = x_0$, $\tilde{x}(T) = x_1$.

Решение данной задачи будем проводить также с использованием функции $\Theta(x)$.

В случае, когда существует управление $u_1 \in \Omega_1$ такое, что $f(x_1, u_1) = 0$, функция управляемости $\Theta(x)$ будет и функцией Ляпунова [6]. С другой стороны, функция Беллмана [1, 7] является одним из примеров функции управляемости.

Применение функции Ляпунова для решения задачи управляемости на $(n-1)$ -мерную поверхность рассматривал В. И. Зубов [8]. Использование функции Ляпунова для задач стабилизации, т. е. для построения управления $u = u(x)$ такого, что нулевое решение системы (2) (предполагается, что $f(0, u(0)) = 0$) было устойчивым, асимптотически устойчивым, приводилось Зубовым [8], Летовым [9], Красовским [10] и другими.

Отметим, что теория устойчивости [6] создана А. М. Ляпуновым в период его работы в Харьковском университете.

Основные теоремы об управляемости

Рассмотрим случай, когда функция управляемости гладкая всюду, кроме, быть может, нуля.

Теорема 1. [2]. *Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением $\dot{x} = f(x, u)$, где $x \in E_n$, $u \in M \subset E_r$, $f \in E_n$ вектор-функция f в каждой области $\{(x, u) : 0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1, u \in M\}$ удовлетворяет условию Липшица $\|f(x'', u'') - f(x', u')\| \leq L_1(\rho, \rho_1) \|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|$.*

Пусть существует функция $\Theta(x)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\Theta(x) \geq 0$ и $\Theta(x) = 0$ только при $x = 0$; 2) $\Theta(x)$ непрерывна всюду и непрерывно дифференцируема всюду за исключением, быть может, точки $x = 0$; 3) существует функция $u(x)$ при $x \in Q$, где $Q = \{x : \Theta(x) \leq c, c > 0\}$ (c таково, что множество Q ограничено), удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u) \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$$

при некотором $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, причем $u(x)$ при $0 < \rho \leq \|x\| < \rho_1$ и $x \in Q$ удовлетворяет условию Липшица, т. е. $\|u(x'') - u(x')\| \leq L_2(\rho, \rho_1) \|x'' - x'\|$. Тогда траектория системы $\dot{x} = f(x, u(x))$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q$ при $t = 0$, оканчивается в точке $x = 0$ в некоторый конечный момент времени $T \leq \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/\alpha}(x_0)$.

Теорема 2 [2]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in E_n$, где $\varphi(0) = 0$, пусть $\rho_0 > 0$ такое, что при $0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_0$ вектор-функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq L(\rho, \rho_0) \|x - y\|$. Пусть существует функция $\Theta(x)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\Theta(x) \geq 0$ и $\Theta(x) = 0$ только при $x = 0$; 2) $\Theta(x)$ непрерывна всюду и непрерывно-дифференцируема за исключением, быть может, точки $x = 0$; 3) при $x \in Q$, где $Q = \{x: \Theta(x) \leq c, c > 0\}$ (c таково, что множество Q ограничено); справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) \leq -\beta \Theta^{1-1/\alpha}$$

при некотором α , $0 < \alpha \leq \infty$.

I. Если условие 3 справедливо при некотором α , $0 < \alpha < \infty$, то траектория системы $\dot{x} = \varphi(x)$, начинающаяся в произвольной точке $x_0 \in Q$ при $t = 0$, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в некоторый конечный момент времени $T(x_0)$, причем

$$T(x_0) \leq \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/\alpha}(x_0).$$

II. Если $\alpha = \infty$, то $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Теорема 3. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением $\dot{x} = f(x, u, v)$, где $x \in E_n$, $u \in \Omega_1 \subset E_r$, $v \in \Omega_2 \subset E_s$, множества Ω_1 и Ω_2 ограничены, функция $f(x, u, v)$ непрерывна по совокупности переменных, множество $f(x, \Omega_1, v)$ выпукло при $x \in S(\rho)$ ($S(\rho)$ — замкнутый шар радиуса ρ с центром в 0) и $v \in \Omega_2$.

Пусть существует функция $\Theta(x)$, удовлетворяющая условиям: 1) $\Theta(x) \geq 0$ и $\Theta(x) = 0$ только при $x = 0$;

2) $\Theta(x)$ непрерывна всюду, непрерывно-дифференцируема всюду за исключением, быть может, точки $x = 0$;

3) существует $c > 0$ такое, что множество $Q = \{x: \Theta(x) \leq c\} \subset S(\rho)$;

4) существует функция $u(x)$ при $x \in Q$ такая, что при любом $v \in \Omega_2$ и при $x_0 \in Q$ на некотором отрезке времени $[0, \tau(x_0)]$ существует абсолютно непрерывная функция $x(t)$, удовлетворяющая для почти всех $t \in [0, \tau(x_0)]$ уравнению $\dot{x} = f(x, u(x), v)$ с произвольным начальным условием $x(0) = x_0 \in Q$;

5) при $x \in Q$ и $x \neq 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{v \in \Omega_2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} f_i(x, u(x), v) \leq -\beta \Theta^{1-1/\alpha}(x).$$

Тогда, какова бы ни была функция $v(t, x) \in \Omega_2$, произвольное движение $x(t)$, порожденное системой (3), которое начинается в

точке x_0 в момент времени $t=0$ и оканчивается в точке $x_T=0$ в некоторый момент времени $T(x_0, v(t, x)) \leq \frac{\alpha}{\beta} \Theta^{1/2}(x_0)$.

Построение стратегии $u(x)$ с помощью функции $\Theta(x)$, заданной в неявном виде. Построим стратегию $u(x)$, переводящую произвольную точку x_0 из некоторой окрестности начала координат в 0 согласно линейной системе $\dot{x} = Ax + b(u+v)$ (4) при ограничении на управление $|u| \leq d_1$, $|v| \leq \gamma$, где $\gamma < d_1$. Предположим, что векторы $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ линейно независимы. Тогда система (4) невырожденным преобразованием $z_i = (c, A^{i-1}x)$, $i = 1, \dots, n$, где вектор c ортогонален векторам $b, Ab, \dots, A^{n-2}b$ и $(c, A^{n-1}b) = 1$, приводится к виду $\dot{z}_i = z_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$); $\dot{z}_n = -\sum_{i=1}^n p_i z_i + u + v$, p_i — коэффициенты характеристического полинома, $\lambda^n + p_n \lambda^{n-1} + \dots + p_1 = 0$ матрицы A .

Введем новое управление w следующим образом:

$$w = -\sum_{i=1}^n p_i z_i + u \quad (5)$$

и будем рассматривать задачу построения управления $w(z)$ такого, что траектория системы $\dot{z}_i = z_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$); $\dot{z}_n = w + v$, начинающаяся в произвольной окрестности Q начала координат, оканчивается в 0 в конечный момент времени при любом управлении $v(t, x)$, лишь бы $|v(t, x)| \leq \gamma$. Множество Q будем предполагать принадлежащим множеству $Q_1 = \{z : |z_i| \leq d_2\}$, где $d_2 < \frac{d_1}{\sum |p_i|}$. Потребуем, чтобы $|w| \leq d$, где $d = d_1 - d_2 \sum |p_i|$,

тогда управление u , которое находится по w из (5), удовлетворяет ограничению $|u| \leq d_1$. Пусть d_2 еще таково, что удовлетворяется неравенство $\gamma < d = d_1 - d_2 \sum |p_i|$.

Определим функцию управляемости $\Theta(z)$. Для этого выберем коэффициенты a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ так, чтобы нулевое решение системы $\dot{z}_i = z_{i+1}$ ($i = 1, \dots, n-1$); $\dot{z}_n = \sum_{i=1}^n a_i z_i$ (6) было асимптотически устойчивым. Построим по произвольной отрицательной определенной квадратичной форме W положительно определенную квадратичную форму $V = \frac{1}{2} (Fz, z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} z_i z_j$ так, чтобы $\dot{V} = W$, где $\dot{V}$ — производная в силу системы (6). Известно [6], что такая форма существует и единственная, а $W = -\sum_{i=1}^n z_i^2$ тогда коэффициенты f_{ij} определяются из системы

$$f_{ij} = f_{ji}, \quad i < j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = i+1, i+2, \dots, n;$$

$$a_i f_{jn} + a_j f_{in} + f_{i-1j} (1 - \delta_i) + f_{i-1} (1 - \delta_j) = 2\delta_{ij},$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = i, i+1, \dots, n, f_{0n} = f_{n0} = 0, \quad (7)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Рассмотрим уравнение

$$2a_0 \Theta^{1+\frac{2n-1}{\alpha}} - \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}} z_i z_j = 0.$$

Согласно [2] это уравнение при любом $a_0 > 0$ и достаточно большом α , таком что $\alpha > -v_1^0$ (8), где v_1^0 наименьший корень уравнения

$$\begin{vmatrix} f_{11}(2n-1-v) & f_{12}(2n-2-v) & \dots & f_{1n}(n-v) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(n-v) & f_{n2}(n-1-v) & \dots & f_{nn}(1-v) \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

имеет при $z \neq 0$ единственное положительное решение $\Theta(z)$. Кроме того, полученная функция $\Theta(z)$ (при $z=0$ положим $\Theta(0)=0$) непрерывна, непрерывно-дифференцируема всюду, кроме, быть может, точки $z=0$.

Можно показать, что условия теоремы 3 выполняются при

$$w(z) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{\Theta^{\frac{n-i+1}{\alpha}}} z_i - d_3 \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n f_{in} \Theta^{\frac{i-1}{\alpha}}(z) z_i,$$

если α таково, что кроме неравенства (8) выполняется еще неравенство $(F^\alpha y, y) > 0$ при $y \neq 0$, где

$$F^\alpha = \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{2n-1}{\alpha}\right) f_{11} & \left(1 + \frac{2n-2}{\alpha}\right) f_{12} & \dots & \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) f_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(1 + \frac{n}{\alpha}\right) f_{n1} & \left(1 + \frac{n-1}{\alpha}\right) f_{n2} & \dots & \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) f_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\text{При } a_0 < \min \left\{ \frac{d_2^2 \lambda_{\min}}{2}, \frac{(d_1 - d_2 \sum |p_i| - \gamma)^2}{2(F^{-1}a, a)} \right\},$$

где a — вектор с компонентами a_i , выполняются ограничения на управление, т. е. $|w(z)| \leq d$.

В исходной системе (4) стратегия $u(x)$ имеет вид

$$u(x) = \sum_{i=1}^n a_i \Theta^{(-n+i-1)/\alpha}(c, A^{i-1}x) + \sum_{i=1}^n p_i(c, A^{i-1}x) -$$

$$- \left(d_1 - d_2 \sum_{i=1}^n |p_i| - \sqrt{2a_0} \sqrt{(F^{-1}a, a)} \right) \operatorname{sign} \sum_{i=1}^n \Theta^{\frac{i-1}{\alpha}}(c, A^{i-1}x), f_{in}$$

где $\Theta(x)$ — решение уравнения

$$\Theta^{1+\frac{2n-1}{\alpha}} = \frac{1}{2a_0} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} \Theta^{\frac{i+j-2}{\alpha}}(c, A^{i-1}x)(c, A^{j-1}x).$$

Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости, заданной в явном виде. Продолжим рассмотрение решения задачи синтеза с помощью функции управляемости $\Theta(x)$. Вначале формулируется и доказывается теорема, аналогичная теореме 1, но с ее помощью для линейных систем вида $\dot{x} = Ax + Bu$ уже строится функция управляемости в явном виде. Она выражается через бесконечную последовательность функций Ляпунова. В связи с этим и управление, разрешающее задачу синтеза, задается в явном виде и определяется бесконечной последовательностью функций. Будут определены области, в каждой из которых управление совпадает с некоторым элементом этой последовательности.

Общая теорема.

Предполагаем, что функция управляемости $\Theta(x)$ построена следующим образом. В окрестности начала координат $\Theta(x)$ задается с помощью некоторой последовательности непрерывно-дифференцируемых функций $\Theta_k(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $k = 1, 2, \dots$. Заддим две последовательности $\{b_k\}$ и $\{c_k\}$ положительных чисел, монотонно сходящихся к нулю, причем $c_k \leq b_{k+1}$. Предположим, что функции $\Theta_k(x)$ и числа b_k, c_k таковы, что области $B^k = \{x: \Theta_k(x) \leq b_k\}$ ограничены при любом k , выполнены включения $B^{k+1} \subset B^k$, $C^k \subset B^{k+1}$ (где $C^k = \{x: \Theta_k(x) \leq c_k\}$) и $\bigcap_{k=1}^{\infty} B^k = 0$.

Обозначим $B_k = \{x: b_k < \Theta_k(x)\}$, $C_k = \{x: c_k < \Theta_k(x)\}$, пусть $P_k = B^k \cap C_k$, а $Q_k = B_{k+1} \cap B^k$. Функцию $\Theta(x)$, определенную равенством $\Theta(x) = \Theta_k(x)$ при $x \in Q_k$, назовем функцией управляемости.

Теорема 4. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad (10)$$

где вектор-функция $f(x, u)$ в каждой области $\{(x, u): 0 < \rho \leq \|x\| \leq \rho_1, u \in M\}$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x'', u'') - f(x', u')\| \leq L_1(\rho, \rho_1) (\|x'' - x'\| + \|u'' - u'\|).$$

Пусть существует функция управляемости $\Theta(x)$, описанная выше. Предположим, что в каждой области P_k существует функция $u_k(x) \in M$, удовлетворяющая условию Липшица $\|u(x'') - u(x')\| \leq L_k \|x'' - x'\|$ такая, что при некотором $\alpha \geq 1$ и $\beta > 0$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta_k}{\partial x_i} f_i(x, u_k(x)) \leq -\beta \Theta_k^{1-\frac{1}{\alpha}}(x), x \in P_k. \quad (11)$$

Пусть сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{1/\alpha} - c_k^{1/\alpha})$. Тогда траектория си-

стемы (10) при $u(x) = u_k(x)$, $x \in Q_k$, начинающаяся при $t = 0$ в произвольной точке $x_0 \in B^1$, оканчивается в точке $x_1 = 0$ в конечный момент времени

$$T(x_0) \leq \frac{\alpha}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{1/\alpha} - c_k^{1/\alpha}). \quad (12)$$

Доказательство. Вычислим производную по времени от функции $\Theta_k(x)$ в силу системы $\dot{x} = f(x, u_k(x))$ (13) на траектории $x(t)$, начинающейся в точке $x_0 \in Q_k$. Имеем

$$\dot{\Theta}_k(x(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Theta_k(x(t))}{\partial x_i} f_i(x(t), u_k(x(t))).$$

В силу (11)

$$\dot{\Theta}_k(x(t)) \leq -\beta \Theta_k^{1-\frac{1}{\alpha}}(x(t)). \quad (14)$$

Так как $\Theta_k(x) > 0$ при $x \neq 0$, то отсюда следует, что при $x(t) \neq 0$ $\frac{d}{dt} \Theta_k^{1/\alpha}(x(t)) \leq -\frac{\beta}{\alpha}$.

Пусть $\tau > 0$ — произвольное число, но такое, что решение $x(t)$ существует на отрезке $[0, \tau]$. Проинтегрируем последнее неравенство от 0 до τ , тогда

$$\Theta_k^{1/\alpha}(x(\tau)) \leq \Theta_k^{1/\alpha}(x_0) - \frac{\beta}{\alpha} \tau. \quad (15)$$

Обозначим через ρ_k радиус шара (с центром в нуле), содержащегося в области C^k , а через τ_k — радиус шара (с центром в нуле), содержащего множество B^k , тогда в области P_k выполняется неравенство $\|f(x'', u_k(x'')) - f(x', u_k(x'))\| \leq L(\rho_k, r_k)(1 + L_k)\|x'' - x'\|$. В силу этого неравенства решение $x(t)$ продолжимо на отрезок $[0, T_k]$ такой, что $x(t) \in P_k$ при $0 \leq t \leq T_k$. Для $\tau \in [0, T_k]$ справедливо (15), так как $\Theta_k(x(\tau)) > c_k > 0$. Покажем, что за время $T_k^* < \frac{\alpha}{\beta}(b_k^{1/\alpha} - c_k^{1/\alpha})$ траектория $x(t)$ попадает на границу области C^k , т. е. $\exists t' : \Theta(x(t')) = c_k$. Предположив противное, получим, что $c_k < \Theta(x(t)) \leq b_k$ при $0 \leq t \leq T_k^*$, причем $T_k^* \geq \frac{\alpha}{\beta}(b_k^{1/\alpha} - c_k^{1/\alpha})$. Но при $\tau = T_k^*$ правая часть неравенства (15) не превосходит $c_k^{1/\alpha}$, а левая часть этого неравенства при $\tau = T_k^*$ строго больше $c_k^{1/\alpha}$. Противоречие.

Так как $C^k \subset B^{k+1}$, то из доказанного следует, что траектория $x(t)$ за время, меньшее $\frac{\alpha}{\beta}(b_k^{1/\alpha} - c_k^{1/\alpha})$, пересекает границу области B^{k+1} , а следовательно, в момент пересечения оказывается в области Q_{k+1} . Далее траектория $x(t)$ через время, меньшее $\frac{\alpha}{\beta}(b_{k+1}^{1/\alpha} - c_{k+1}^{1/\alpha})$, оказывается в области Q_{k+2} и т. д. Таким обра-

зом, траектория последовательно пересекает границы множества B^k и так как $\cap B^k = 0$, то за время $T \leq \frac{\alpha}{\beta} \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^{1/\alpha} - c_k^{1/\alpha})$ траектория $x(t)$ попадает в 0.

Построение функции управляемости и управления в явном виде для линейной системы. Проведем процесс построения функции управляемости $\Theta(x)$ и ограниченного управления $u(x)$, решающего задачу синтеза, для системы $\dot{x} = Ax + bu$ (16) при ограничениях на управление $|u| \leq d_1$, где матрица A размера $n \times n$, b — n -мерный вектор. Предполагается, что векторы $b, Ab, \dots, A^{n-1}b$ линейно независимы.

Как уже отмечалось, достаточно рассмотреть задачу синтеза для системы

$$\dot{z}_{i+1} = z_i \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad \dot{z}_n = v \quad (17)$$

в области $|z_i| \leq d_2 < \frac{d_1}{\sum_{i=1}^n |p_i|}$ (p_i — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A), при ограничениях на управление

$$|v| \leq d, \text{ где } d = d_1 - d_2 \sum_{i=1}^n |p_i|.$$

Зададим управление v в виде $v = \sum_{i=1}^n a_i z_i$, где коэффициенты a_i , как и ранее, выбираются из условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы:

$$\dot{z}_i = z_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n-1); \quad \dot{z}_n = \sum_{i=1}^n a_i z_i. \quad (18)$$

Построим по квадратичной форме $W = - \sum_{i=1}^n z_i^2$ положительно определенную квадратичную форму (функцию Ляпунова) $V = \frac{1}{2} (Fz, z) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{ij} z_i z_j$, такую, что $\dot{V} = W$, где $\dot{V}$ — производная по времени в силу системы (18). Для определения коэффициентов f_{ij} получаем систему уравнений (7).

Функцию $\Theta_k(z)$ возьмем в виде

$$\Theta_k(z) = \frac{1}{2a_0} \sum_{i,j=1}^n k^{2n-i-i+1} f_{ij} z_i z_j = \frac{1}{2a_0} (F_k z, z),$$

число $a_0 > 0$ выбирается далее. Положим $b_k = \frac{b_0}{k^\alpha}$; $c_k = \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1}\right) \frac{b_0}{(k+1)^\alpha}$. Покажем, что при некоторых $\alpha \geq 1$ и β_1 и любых $b_0 > 0$ условия теоремы выполняются.

Проверим выполнение включений $B^{k+1} \subset B^k$ и $C^k \subset B^{k+1}$.
 Для установления включения $B^{k+1} \subset B^k$ вначале найдем такие $\gamma > 0$ и $\alpha \geq 1$, что область $\{z: \Theta_k(z) \leq \gamma\}$ содержит область $B^{k+1} = \left\{z: \Theta_{k+1}(z) \leq \frac{b_0}{(k+1)^\alpha}\right\}$. Решение задачи сводится к на-

хождению $\max \Theta_k(z)$, если z таково, что $\Theta_{k+1}(z) = \frac{b_0}{(k+1)^\alpha}$. Обозначим через $\gamma_{\max}$ максимум. При $\gamma \geq \gamma_{\max}$ область $\{z: \Theta_k(z) \leq \gamma\}$ содержит область B^{k+1} , поэтому если $\gamma = \frac{b_0}{k^\alpha} \geq \gamma_{\max}$, то включение $B^{k+1} \subset B^k$ справедливо.

Аналогично этому для проверки включения $C^k \subset B^{k+1}$ найдем $\min \Theta_k(z)$, если $\Theta_{k+1}(z) = \frac{b_0}{(k+1)^\alpha}$. Если этот минимум, который обозначим через $\gamma_{\min}$, окажется не менее $\left(1 + \frac{\beta_1}{k+1}\right) \times \frac{b_0}{(k+1)^\alpha}$, то требуемое включение $C^k \subset B^{k+1}$ справедливо.

Для нахождения $\gamma_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ введем функцию Лагранжа

$$\Theta_k(z) - \lambda \left[\Theta_{k+1}(z) - \frac{b_0}{(k+1)^\alpha} \right] = \frac{1}{2a_0} (F_k z, z) - \lambda \left[\frac{1}{2a_0} (F_{k+1} z, z) - \frac{b_0}{(k+1)^\alpha} \right].$$

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа дают $F_k z = \lambda F_{k+1} z$. Умножая это равенство скалярно на $\frac{1}{2a_0} z$ и используя равенство $\frac{1}{2a_0} (F_{k+1} z, z) = \frac{b_0}{(k+1)^\alpha}$, получаем

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2a_0} (F_k z, z) = \frac{\lambda_{\max}}{2a_0} (F_{k+1} z, z) = \frac{\lambda_{\max} b_0}{(k+1)^\alpha}; \quad \gamma_{\min} = \frac{\lambda_{\min} b_0}{(k+1)^\alpha},$$

где $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ — соответственно наименьший и наибольший корни уравнения $\det |F_k - \lambda F_{k+1}| = 0$. Это уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} f_{11}[k^{2n-1} - (k+1)^{2n-1}\lambda] & f_{12}[k^{2n-2} - (k+1)^{2n-2}\lambda] & \dots & \dots & \dots \\ \dots & f_{1n}[k^n - (k+1)^n\lambda] & \dots & \dots & \dots \\ f_{21}[k^{2n-2} - (k+1)^{2n-2}\lambda] & f_{22}[k^{2n-2} - (k+1)^{2n-3}\lambda] & \dots & \dots & \dots \\ \dots & f_{2n}[k^{n-1} - (k+1)^{n-1}\lambda] & \dots & \dots & \dots \\ \dots & f_{n1}[k^n - (k+1)^n\lambda] & f_{n2}[k^{n-1} - (k+1)^{n-1}\lambda] & \dots & \dots \\ \dots & \dots & f_{nn}[k - (k+1)\lambda] & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Его нетрудно преобразовать к виду

$$\begin{vmatrix} f_{11} [(1-\delta)^{2n-1} - \lambda] & \dots & f_{1n} [(1-\delta)^n - \lambda] \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} [(1-\delta)^n - \lambda] & \dots & f_{nn} [(1-\delta) - \lambda] \end{vmatrix} = 0,$$

где $\delta = \frac{1}{k+1}$. Будем искать λ в виде $\lambda = 1 - \delta v$, тогда это уравнение преобразуется к виду

$$\begin{vmatrix} f_{11} [(2n-1) + 0(\delta) - v] & \dots & f_{1n} [n + 0(\delta) - v] \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} [n + 0(\delta) - v] & \dots & f_{nn} [1 - v] \end{vmatrix} = 0.$$

При любом достаточно малом $\delta > 0$ наименьший $v_{\min}$ и $v_{\max}$ — наибольший корни этого уравнения имеют вид [11]

$$v_{\min} = v_{\min}^0 + \varphi_1(\delta), \quad v_{\max} = v_{\max}^0 + \varphi_2(\delta),$$

где $\varphi_1(\delta)$ и $\varphi_2(\delta)$ — непрерывные функции, а $v_{\min}^0$ и $v_{\max}^0$ наименьший и наибольший корни уравнения (9). Если задать $\varepsilon > 0$, то при достаточно малом δ , т. е. при достаточно большом k

$$\lambda_{\max} \leq 1 - \delta(v_{\min}^0 - \varepsilon) \quad (19); \quad \lambda_{\min} \geq 1 - \delta(v_{\max}^0 + \varepsilon) \quad (20).$$

Найдем теперь такое α , чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{1 - \delta(v_{\min}^0 - \varepsilon)}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{при } k \geq k_0. \quad (21)$$

Из этого неравенства следует, что

$$-(v_{\min}^0 - \varepsilon) \leq \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha - 1 \right] (k+1). \quad (22)$$

$$\text{Так как } \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^\alpha - 1 \right] (k+1) \geq \left[\left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) - 1 \right] (k+1) \geq \alpha,$$

то при $\alpha \geq -(v_{\min}^0 - \varepsilon)$ неравенство (22), а следовательно, и (21) выполнено. Если выбирать $\alpha > -v_{\min}^0$, то при достаточно малом ε и при достаточно большом $k \geq k_1$, справедливо (21) и (19), а это означает, что при этих k выполнено неравенство $\gamma_{\max} \leq \leq b_0/k^\alpha$, т. е. $B^{k+1} \subset B^k$.

Неравенство

$$\frac{1 - \delta(v_{\max}^0 + \varepsilon)}{(k+1)^\alpha} \geq \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1}\right) \frac{1}{(k+1)^\alpha} \quad (23)$$

выполняется при достаточно больших k и любых $\alpha \geq 1$, если выбрать $\beta_1 \leq -v_{\max}^0$. Поэтому неравенство $\gamma_{\min} \geq \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1}\right) \times \times \frac{b_0}{(k+1)^\alpha}$ также выполняется, а следовательно, $C^k \subset B^{k+1}$ при достаточно больших k .

Установим, что при $z \in P_k$ выполняется неравенство (11), если в качестве f_i брать правые части уравнения (17), а управление v выбирать в виде

$$v = v_k(z) = \sum_{i=1}^n a_i k^{n-i+1} z_i. \quad (24)$$

Непосредственной проверкой с использованием равенств (7) можно убедиться в том, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial \theta_k}{\partial z_i} z_{i+1} + \frac{\partial \theta_k}{\partial z_n} \sum_{i=1}^n a_i k^{n-i+1} z_i = -\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n k^{2n-2i+2} z_i^2.$$

Для получения оценки (11) найдем $\min \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n k^{2n-2i+2} z_i^2$ на множестве C_k , в свою очередь эта задача сводится к нахождению

$\gamma_{\min} = \min \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n k^{2n+2-2i} z_i^2$ на множестве $\left\{ z: \Theta_k(z) = \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1}\right) \times \right.$
 $\times \frac{b_0}{(k+1)^\alpha} \left. \right\}$. Далее будет установлено, что $\gamma_{\min} = \frac{\beta_2 b_0}{k^\alpha - 1}$ при не-
 котором $\beta_2 > 0$. Откуда, учитывая, что при $z \in P_k$ имеем $\Theta_k(z) \leq$
 $\leq \frac{b_0}{k^\alpha}$, получаем $\gamma_{\min} \geq \beta_2 b_0^{\frac{1}{\alpha}} \Theta_k^{1-\frac{1}{\alpha}}$. Следовательно,

$$-\frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n k^{2(n-i+1)} z_i^2 \leq -\gamma_{\min} \leq -\beta \Theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(z),$$

где $\beta = \beta_2 b_0^{1/\alpha}$.

Установление того факта, что $\bigcap_{k=1}^{\infty} B^k = 0$, состоит в решении подобной задачи. Действительно, достаточно показать, что диаметр множества B^k стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Для того чтобы это показать, найдем, при каком γ эллипсоид $\left\{ z: \sum_{i=1}^n \right.$
 $\times k^{2(n-i+1)} z_i^2 \leq \gamma \left. \right\}$ содержит множество B^k . Для этого достаточно
 найти $\gamma_{\max} = \max \sum_{i=1}^n k^{2(n+1-i)} z_i^2$ на множестве $\left\{ z: \Theta_k(z) = \frac{b_0}{k^\alpha} \right\}$,
 тогда эллипсоид $\left\{ z: \sum_{i=1}^n k^{2(n-i+1)} z_i^2 \leq \gamma_{\max} \right\}$, диаметр которого лег-
 ко оценить, содержит B^k .

Для нахождения $\lambda_{\min}$ и $\gamma_{\max}$ введем функцию Лагранжа

$$L_1(z, \lambda) = \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n k^{2(n-i+1)} z_i^2 - \lambda \left[\Theta_k(z) - \frac{b_0}{(k+1)^\alpha} \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1}\right) \right];$$

$$L_2(z, \lambda) = \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^n k^{2(n-i+1)} z_i^2 - \lambda \left[\Theta_k(z) - \frac{b_0}{k^\alpha} \right].$$

Необходимые условия экстремума функции $L_1(z, \lambda)$ и $L_2(z, \lambda)$ дают $P_k z = \lambda F_k z$, где P_k — диагональная матрица, i -й диагональный элемент которой равен $k^{2(n-i+1)}$. Из этого равенства следует

$$\frac{1}{2a_0} (P_k z, z) = \frac{\lambda}{2a_0} (F_k z, z) = \lambda \Theta_k(z). \quad (25)$$

Поэтому

$$\gamma_{\min} = \min (P_k z, z) = \lambda (F_k z, z) = \frac{\lambda_{\min} b_0}{(k+1)^\alpha} \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1} \right);$$

$$\gamma_{\max} = \max (P_k z, z) = \frac{\lambda_{\max} b_0}{k^\alpha}.$$

В свою очередь, числа $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ являются наименьшим и наибольшим корнями уравнения

$$\det (P_k - \lambda F_k) = 0$$

или в развернутой форме

$$\begin{vmatrix} k^{2n-1}(\lambda f_{11} - k) & k^{2n-2}\lambda f_{12} & \dots & k^n \lambda f_{1n} \\ k^{2n-1}\lambda f_{21} & k^{2n-3}(\lambda f_{22} - k) & \dots & k^{n-1}\lambda f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k^n \lambda f_{n1} & k^{n-1}\lambda f_{n2} & \dots & k(\lambda f_{nn} - k) \end{vmatrix} = 0.$$

Ищем λ в виде $\lambda = \frac{k}{\mu}$, тогда это уравнение принимает вид

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \mu & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} - \mu & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, $\lambda_{\min} = \frac{k}{\mu_{\max}}$, $\lambda_{\max} = \frac{k}{\mu_{\min}}$, где $\mu_{\min} > 0$ и $\mu_{\max} > 0$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы F . Поэтому

$$\gamma_{\max} = \frac{b_0}{\mu_{\min} k^{\alpha-1}}, \quad \gamma_{\min} = \frac{k b_0}{\mu_{\max} (k+1)^\alpha} \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1} \right).$$

Отсюда эллипсоид $\left\{ z: \sum_{i=1}^n k^{2(n-i+1)+\alpha-1} \frac{\mu_{\min} z_i^2}{a_i b_0} \leq 1 \right\}$ содержит множество B^k . Диаметр эллипсоида стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, так как величина i -й полуоси равна $\frac{b_0}{\mu_{\min}} k^{\frac{-(2(n-i+1)+\alpha-1)}{2}}$.

Поэтому диаметр множества B^k стремится к нулю и $\bigcap_{k=1}^{\infty} B^k = 0$.

Установим теперь, при каких ρ_2 выполняется неравенство $\gamma_{\min} \geq \beta_2 b_0 / k^{\alpha-1}$. Имеем

$$\frac{k b_0}{\mu_{\max} (k+1)^{\alpha}} \left(1 + \frac{\beta_1}{k+1} \right) \geq \frac{\beta_2 b_0}{k^{\alpha-1}}, \quad (26)$$

откуда $1 + \beta_1 / (k+1) \geq \beta_2 \mu_{\max} (1 + 1/k)^{\alpha}$.

Возьмем k достаточно большим, чтобы $1 + \beta_1 / (k+1) \geq \beta_3$, где β_3 — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \beta_3 < 1$. После этого выбираем β_2 так, чтобы $\beta_2 \mu_{\max} (1 + 1/k)^{\alpha} \leq \beta_3$, положив $\beta_2 = \frac{\beta_3}{e \mu_{\max}}$, тогда неравенство (26) выполняется, а следовательно, выполняется неравенство (11).

Покажем теперь ограниченность управления. Для этого найдем наибольшее и наименьшее значение функции (24) при $z \in Q_k$. Так как $Q_k \subset B^k$, то достаточно показать ограниченность управления на множестве B^k , а в силу линейности функции (24) будем искать ее максимум и минимум на границе области B^k , т. е. на множестве $\left\{ z : \Theta_k(z) = b_k = \frac{b_0}{k^{\alpha}} \right\}$. Для решения задачи введем функцию Лагранжа

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n a_i k^{n-i+1} z_i - \frac{\lambda}{2a_0} \sum_{i,j=1}^n k^{2n-i-j+1} f_{ij} z_i z_j - \frac{b_0}{k^{\alpha}}.$$

Необходимые условия экстремума этой функции дают

$$a_i k^{n-i+1} - \frac{\lambda}{a_0} \sum_{j=1}^n k^{2n-i-j+1} f_{ij} z_j = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ищем z_j в виде $z_j = k^{j-n} y_j$, тогда относительно y_j получается следующая система уравнений:

$$\lambda \sum_{j=1}^n f_{ij} y_j = a_i a_0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (27)$$

Если через a обозначить вектор с компонентами $(a_1, \dots, a_n)$, а через y вектор с компонентами y_i , то равенство (27) запишем так: $Fy = a_0 a / \lambda$, откуда $y = \frac{a_0}{\lambda} F^{-1} a$.

Равенство $\Theta_k(z) = \frac{b_0}{k^{\alpha}}$ запишем в виде $\frac{1}{2} \frac{k}{a_0} (Fy, y) = \frac{b_0}{k^{\alpha}}$. Используя его, получаем

$$\lambda^2 = \frac{k^{\alpha+1}}{2b_0} (a, F^{-1}a) a_0. \quad (28)$$

Управление (24) представим таким образом:

$$v = k(y, a) = \frac{k a_0}{\lambda} (a, F^{-1}a).$$

Тогда, применяя равенство (28), получаем: $|v_k| \leq k^{-\frac{1}{2}(1-\alpha)}$ ($F^{-1}a)^{1/2} \sqrt{b_0} \sqrt{2a_0}$.

Выбрав достаточно малым a_0 , b_0 , получим, что заранее заданные ограничения на управление $|v_k| \leq d$ выполняются.

Рассмотрим теперь уравнение $\dot{x} = Ax + bu$ (29). В этом случае функция управляемости имеет вид

$$\Theta(x) = \Theta_k(x) = \frac{1}{2a_0} \sum_{i,j=1}^n k^{2n-i-j+1} f_{ij}(c, A^{i-1}x)(c, A^{j-1}x)$$

при $x \in Q_k$. Принадлежность x множеству Q_k означает, что

$$\frac{b_0}{(k+1)^\alpha} \leq \Theta_{k+1}(x), \quad \Theta_k(x) \leq \frac{b_0}{k^\alpha}.$$

Вектор c определяется из равенств $(c, A^i b) = 0$, $i = 0, \dots, n-2$, $(c, A^{n-1}b) = 1$. Управление при $x \in Q_k$ имеет вид

$$u_k(x) = \sum_{i=1}^n a_i k^{n-i+1}(c, A^{i-1}x) + \sum_{i=1}^n p_i(c, A^{i-1}x). \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что при увеличении d_1 область, где строится управление $u(x)$, решающее задачу синтеза, расширяется.

Замечание. Рассмотрим один из способов построения траектории, ведущей из точки x_0 в начало координат.

Пусть $x_0 \in Q_{k_0}$. Интегрируем систему (29) с управлением (30) при $k = k_0$ и при $t \in [0, T_{k_0}]$, $T_{k_0} = \frac{\alpha}{\beta} (b_k^{1/\alpha} - c_k^{1/\alpha})$. Затем находим то наименьшее k_1 , для которого выполняется неравенство

$$\frac{b_0}{(k_1+1)^\alpha} \leq \Theta_{k_1+1}(T_{k_0}), \quad \Theta_{k_1}(T_{k_0}) \leq \frac{b_0}{k_1^\alpha},$$

т. е. находим k_1 такое, что $x(T_{k_1}) \in Q_{k_1}$. После этого процесс повторяется с заменой k_0 на k_1 .

Пример. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u, \quad |u| \leq 1. \end{aligned}$$

Пусть $a_1 = -1$, $a_2 = -2$. Решив систему (7), найдем f_{ij} , в данном случае $f_{11} = 3$, $f_{12} = f_{21} = f_{22} = 1$. Поэтому $\Theta_k(x) = \frac{1}{2a_0} (3k^3 x_1^2 + 2k^2 x_1 x_2 + k x_2^2)$. Управление имеет вид $u_k(x) = -k^2 x_1 - 2k x_2$.

Уравнение (9) представим так:

$$\begin{vmatrix} 3(3-\gamma) & 2-\gamma \\ 2-\gamma & 1-\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Откуда $\gamma_{\min}^0 = 2 - \frac{\sqrt{6}}{2}$, $\gamma_{\max}^0 = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$, поэтому число α можно брать равное 1.

Список литературы: 1. Математическая теория оптимальных процессов, Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе и др.—М.: Физматгиз, 1969.—384 с. 2. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости.—Мат. сб., 1979, 109 (151), вып. 4, с. 582—606. 3. Айзекс Р. Дифференциальные игры.—М.: Мир, 1967.—479 с. 4. Понтрягин Л. С. К теории дифференциальных игр.—Усп. мат. наук, 1966, 21, вып. 4, с. 50—132. 5. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.—М.: Наука, 1974.—455 с. 6. Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения.—Изд. Харьк. Мат. о-ва, 1892.—250 с. 7. Беллман Р. Динамическое программирование.—М.: ИЛ, 1960.—400 с. 8. Зубов В. И. Лекции по теории управления.—М.: Наука, 1975.—496 с. 9. Летов А. М. Динамика полета и управление.—М.: Наука, 1969.—359 с. 10. Красовский Н. Н. О выборе параметров оптимальных устойчивых систем.—Тр. I Междунар. конгресса ИФАК.—М.: Изд-во АН СССР, т. 2, 1961. с. 254—266. 11. Гурса Э. Курс математического анализа, т. 2, изд. 3-е.—М.—Л.: Главн. ред. общетехн. лит., 1936.—322 с.

Поступила 6 июня 1979 г.

УДК 517. 977.1

В. М. ГАВРИЛЯКО

О СИНТЕЗЕ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ

В статье рассматривается обобщение основной теоремы В. И. Коробова [1] для системы дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in R_n, \quad u \in M \subset R_m, \quad (1)$$

основанное на теории дифференциальных неравенств Т. Важевского [2]. Теорема может быть распространена на основе метода В. М. Матросова [3] на вектор-функции управляемости [4]. Рассмотрена задача синтеза кусочно-постоянного управления, вычисляемого в некоторые дискретные моменты времени. Исследуется сходимость разностной аппроксимации системы (1). Показывается, что если $T(x_0)$ момент времени, в который траектория системы (1), начинающаяся в точке $x_0 \in R_n$, попадает в точку $x = 0$ согласно системе $\dot{x} = f(x, u(x))$, то для $\forall \nu > 0$ можно указать явное выражение для шага h вычислений такое, что разностная траектория попадает в точку $x = 0$ за время $t \leq T(x_0) + \nu$. Приводятся также некоторые результаты численного эксперимента на ЭВМ.

Рассмотрим уравнение (уравнение сравнения)

$$\dot{v} = \omega(v), \quad (2)$$

в котором функция $\omega(v)$ непрерывна при $v \geq 0$ и имеет единственное решение $v = v(t, v_0)$ в каждой области $J_\varepsilon = \{v : 0 < \varepsilon \leq v \leq c\}$. При этом для $\forall v \in J_\varepsilon$ имеем

$$\omega(v) \leq 0 \quad (3)$$