ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXV 1957

ОБ ИЗОМОРФНЫХ НЕПРИВОДИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

Э. М. Жмудь

Харьков

В настоящей работе дается новое доказательство теоремы Вайснера о структуре конечных групп, допускающих изоморфные неприводимые представления [1].

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: Γ — конечная группа; E — единица группы Γ; $[\mathbf{H}]$ и $[\Gamma/\mathbf{H}]$ — соответственно порядок и индекс нормального делителя $\mathbf{H}$ группы Γ; S — система нормальных делителей группы Γ; S^* — совокупность всех нормальных делителей, не содержащих ни одной из подгрупп системы S; $\mathbf{H}_s$ — композит всех подгрупп, входящих в S; $\mu(S)=(-1)^s$, где s — число членов системы S; $\mathbf{M}$ — цоколь группы Γ (то есть композит всех минимальных нормальных делителей группы Γ); $M_{\mathbf{H}}$ — совокупность всех минимальных нормальных делителей группы Γ, входящих в нормальный делитель $\mathbf{H}$; $M=M_{\mathbf{M}}$; P — поле, характеристика которого не делит порядка группы Γ; $\mathbf{R}$ — групповая алгебра группы Γ над полем P; $\mathbf{R}_0$ — центр алгебры $\mathbf{R}$; через u всегда обозначаются примитивные идемпотенты алгебры $\mathbf{R}_0$; если $v,\ w \in \mathbf{R}_0$, $v^2=v$, $w^2=w$, то $v<w$ означает, что $wv=v$; $\approx$ — символ, служащий для указания эквивалентности линейных представлений группы Γ.

1. Сопоставим с подгруппой $\mathbf{H}$ группы Γ элемент $j_{\mathbf{H}} \in \mathbf{R}$

$$j_{\mathbf{H}}=\frac{1}{[\mathbf{H}]}\sum_{H\in\mathbf{H}} H. \tag{1}$$

Имеет место.

Лемма 1. а) $j_{\mathbf{H}}$ есть идемпотент алгебры $\mathbf{R}$; б) если $\mathbf{H}$ — нормальный делитель группы Γ, то $j_{\mathbf{H}} \in \mathbf{R}_0$.

Доказательство. Если $H' \in \mathbf{H}$, то, очевидно, $j_{\mathbf{H}}H'=j_{\mathbf{H}}$. Отсюда $j^2_{\mathbf{H}}=j_{\mathbf{H}}\frac{\sum H'}{[\mathbf{H}]}=j_{\mathbf{H}}$. Тем самым утверждение а) доказано. Утверждение б) очевидно.

Пусть $\mathbf{H}$ — нормальный делитель группы Γ. Тогда, в силу леммы 1, $j_{\mathbf{H}}$ — идемпотент алгебры $\mathbf{R}_0$. Как идемпотент коммутативной алгебры, $j_{\mathbf{H}}$ единственным (с точностью до порядка слагаемых) образом представляется в виде суммы примитивных идемпотентов этой алгебры.

Выясним характер этого разложения. С этой целью введем понятие подгруппы ассоциированной с заданным идемпотентом алгебры **R**.

Подгруппой $\mathbf{I}_v$, ассоциированной с идемпотентом v алгебры **R**, назовем совокупность всех элементов $H \in \Gamma$ таких, что $Hv = v$; идемпотент v будем называть принадлежащим к подгруппе $\mathbf{I}_v$.

Легко видеть, что если $v \in \mathbf{R}_0$, то $\mathbf{I}_v$ — нормальный делитель.

Имеет место.

Лемма 2. Если **H** — нормальный делитель группы Γ, то $j_{\mathbf{H}}$ равен сумме всех примитивных идемпотентов алгебры $\mathbf{R}_0$, принадлежащих к нормальным делителям, содержащим **H**

$$j_{\mathbf{H}} = \sum_{\mathbf{I}_u \supseteq \mathbf{H}} u. \tag{2}$$

Доказательство. Достаточно показать, что примитивный идемпотент u алгебры $\mathbf{R}_0$ тогда и только тогда является компонентой идемпотента $j_{\mathbf{H}}$, если $\mathbf{I}_u \supseteq \mathbf{H}$. Предполагая сначала, что $u < j_{\mathbf{H}}$, в силу $j_{\mathbf{H}} u = u$ и равенства $H j_{\mathbf{H}} = j_{\mathbf{H}}$, имеющего место для любого элемента $H \in \mathbf{H}$, будем иметь

$$Hu = H(j_{\mathbf{H}} u) = (H j_{\mathbf{H}}) u = j_{\mathbf{H}} u = u.$$

Следовательно, $H \in \mathbf{I}_u$ и, вместе с тем, $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{I}_u$. Наоборот, из $\mathbf{H} \subseteq \mathbf{I}_u$ следует $Hu = u$ для любого $H \in \mathbf{H}$, откуда путем усреднения по подгруппе **H** получаем $j_{\mathbf{H}} u = u$, то есть $u < j_{\mathbf{H}}$.

Утверждение доказано.

Лемма 3. Если **A** и **B** — нормальные делители группы Γ, то

$$j_{\mathbf{AB}} = j_{\mathbf{A}} j_{\mathbf{B}}. \tag{3}$$

Доказательство. Вытекает из леммы 2 и из того факта, что примитивные идемпотенты алгебры $\mathbf{R}_0$ попарно аннулируются при перемножении.

Примечание. Так как отображение $\mathbf{H} \to j_{\mathbf{H}}$ множества нормальных делителей группы Γ в множество идемпотентов алгебры $\mathbf{R}_0$ является, очевидно, взаимно однозначным, то в силу леммы 3, этим отображением осуществляется реализация полугруппы нормальных делителей группы Γ в виде некоторой полугруппы идемпотентов алгебры $\mathbf{R}_0$.

2. Пусть S — система нормальных делителей группы Γ. Положим

$$\varphi(S) = \prod_{\mathbf{H} \in S} (E - j_{\mathbf{H}}). \tag{4}$$

Лемма 4. $\varphi(S)$ есть идемпотент алгебры $\mathbf{R}_0$, равный сумме всех примитивных идемпотентов алгебры $\mathbf{R}_0$, принадлежащих к подгруппам, не содержащим подгрупп системы S:

$$\varphi(S) = \sum_{I_u \in S^*} u. \tag{5}$$

Доказательство. Если $\mathbf{H} \in S$, то на основании леммы 2

$$E - j_{\mathbf{H}} = \sum_{I_u \not\supseteq \mathbf{H}} u,$$

то есть $u < E - j_{\mathbf{H}}$ тогда и только тогда, если $I_u \not\supseteq \mathbf{H}$.

С другой стороны, в силу (4) $u < \varphi(S)$ тогда и только тогда, если $u < E - j_{\mathbf{H}}$ для каждого $\mathbf{H} \in S$. Следовательно, $u < \varphi(S)$ тогда и только тогда, если для каждого $\mathbf{H} \in S$ имеет место $I_u \supseteq \mathbf{H}$, то есть, если $I_u \in S^*$. Лемма доказана.

3. Сопоставим с идемпотентом w алгебры $\mathbf{R}_0$ линейное представление Δ_w группы $\mathbf{H}$, связанное с левым идеалом $\mathbf{R}_w$ алгебры $\mathbf{R}$. Легко видеть, что $\mathbf{I}_w$ есть ядро гомоморфизма представления Δ_w. Действительно, если $G \in \mathbf{I}_w$ и $x \in \mathbf{R}_w$, то в силу $Gw = w$ имеет $Gx = Gxw = Gwx = wx = x$. Следовательно, элементу G в представлении Δ_w отвечает единичное преобразование. То, что каждый элемент, обладающий последним свойством, входит в $\mathbf{I}_w$, очевидно.

В случае, если u примитивный идемпотент алгебры $\mathbf{R}_0$, идеал $\mathbf{R}_u$ является простой алгеброй и, следовательно, все неприводимые в P компоненты представления Δ_u эквивалентны между собой. Таким образом, каждому примитивному идемпотенту u алгебры $\mathbf{R}_0$ отвечает вполне определенный класс неприводимых представлений группы Г. Обозначив через Φ_u какой-нибудь представитель этого класса, будем иметь

$$\Delta_u \approx \mu \Phi_u, \qquad \textbf{(6)}$$

где μ — кратность представления Φ_u в регулярном представлении группы Г. Если u пробегает полную систему примитивных идемпотентов алгебры $\mathbf{R}_0$, то Φ_u пробегает полную систему представителей классов неприводимых представлений группы Г.

Из (6) непосредственно вытекает

Лемма 5. Если u примитивный идемпотент алгебры $\mathbf{R}_0$, то I_u есть ядро гомоморфизма неприводимого представления Φ_u, отвечающего идемпотенту u.

4. Назовем S-представлением группы Г — всякое ее линейное представление, ядро гомоморфизма которого входит в систему S^*.

Из лемм 4 и 5 немедленно вытекает

Лемма 6. Группа Г тогда и только тогда допускает неприводимые (в P) S-представления, если отличен от нуля идемпотент $\varphi(S)$.

Пусть $\mathbf{H}$ — нормальный делитель, входящий в цоколь $\mathbf{M}$ группы Г; $M_{\mathbf{H}}$ — совокупность всех входящих в $\mathbf{H}$ минимальных нормальных делителей группы Г. Положим

$$w(\mathbf{H}) = \varphi(M_{\mathbf{H}}). \qquad (7)$$

В силу (4) и (5) имеем:

$$w(\mathbf{H}) = \prod_{F \in M_{\mathbf{H}}} (E - j_F) = \sum_{I_u \in M^*_{\mathbf{H}}} u. \qquad (8)$$

Полагая в (8) $\mathbf{H} = \mathbf{M}$ и замечая, что $M^* = E$, получаем

$$w(\mathbf{M}) = \prod_{F \in M} (E - j_F) = \sum_{I_u = E} u. \qquad (9)$$

Из (9) вытекает

Лемма 7. Группа Г тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые в P представления, если выполняется условие $w(\mathbf{M}) \neq 0$.

5. Для получения дальнейших результатов нам необходимо доказать некоторые предложения относительно функции $\varphi(S)$. Пусть S_1 и S_2 — системы нормальных делителей группы Г. Из определения (4) функции $\varphi(S)$ (учитывая идемпотентность сомножителей $E - j_{\mathbf{H}}$ и их принадлежность к коммутативной алгебре $\mathbf{R}_0$) получаем:

Лемма 8. $\varphi(S_1 \cup S_2) = \varphi(S_1)\varphi(S_2)$.

Далее, имеет место

Лемма 9. Если $\mathbf{H}_{S_1} \cap \mathbf{H}_{S_2} = E$, то условие $\varphi(S_1 \cup S_2) \neq 0$ равносильно системе условий $\varphi(S_i) \neq 0$ $(i = 1, 2)$.

Доказательство. Полагая $S = S_1 \cup S_2$ из (4) с помощью леммы 3 получаем

$$\varphi(S) = \sum_{T \subseteq S} \mu(T) j_{\mathbf{H}_T} \tag{10}$$

$$\varphi(S_i) = \sum_{T \subseteq S_i} \mu(T) j_{\mathbf{H}_T} \quad (i = 1, 2), \tag{11}$$

где T пробегает совокупность всех подсистем (включая и пустую, для которой полагаем $\mathbf{H}_T = E$) системы S в (10) и системы S_i в (11).

В силу (10) и (11) для $\varphi(S)$ и $\varphi(S_i)$ имеют место представления:

$$\varphi(S) = \sum_{H \in \mathbf{H}_S} \alpha_H H \qquad (\alpha_H, \alpha_{H_i} \in P)$$

$$\varphi(S_i) = \sum_{H_i \in \mathbf{H}_{S_i}} \alpha_{H_i}^{(i)} H_i \quad (i = 1, 2).$$

Так как, в силу леммы 8, $\varphi(S) = \varphi(S_1)\varphi(S_2)$, то

$$\sum_{H \in \mathbf{H}_S} \alpha_H H = \sum_{H_i \in \mathbf{H}_{S_i}\ (i=1,\ 2)} \alpha_{H_1}^{(1)} \alpha_{H_2}^{(2)} H_1 H_2. \tag{12}$$

Замечая, что $\mathbf{H}_S = \mathbf{H}_{S_1} \times \mathbf{H}_{S_2}$, из (12) немедленно получаем: если $H \in \mathbf{H}_S$ и $H = H_1 H_2$, где $H_i \in \mathbf{H}_{S_i}$ $(i = 1, 2)$, то

$$\alpha_H = \alpha_{H_1}^{(1)} \alpha_{H_2}^{(2)}. \tag{13}$$

Отсюда уже легко вытекает утверждение леммы. Действительно, если $\varphi(S_i) \neq 0$ $(i = 1, 2)$, то найдутся такие элементы $H_i \in \mathbf{H}_{S_i}$, что $\alpha_{H_i}^{(i)} \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Тогда, в силу (13), отличен от нуля будет и коэффициент $\alpha_{H_1 H_2}$. Следовательно, $\varphi(S) \neq 0$. Обратное же утверждение тривиально.

Таким образом, лемма доказана полностью.

6. Пусть $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — входящие в $\mathbf{M}$ нормальные делители группы Γ. Введем обозначение

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \circ \mathbf{H}_2,$$

означающее, что 1) $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2$ и, 2) $M_{\mathbf{H}} = M_{\mathbf{H}_1} \cup M_{\mathbf{H}_2}$.

Из (7) и лемм 8 и 9 вытекают

Лемма 10. Если $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \circ \mathbf{H}_2$, то $w(\mathbf{H}) = w(\mathbf{H}_1)\, w(\mathbf{H}_1)$.

Лемма 11. Если $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \circ \mathbf{H}_2$, то условие $w(\mathbf{H}) \neq 0$ равносильно системе условий $w(\mathbf{H}_i) \neq 0$ $(i = 1, 2)$.

7. Обозначим через $\mathbf{A}$ композит всех абелевых, через $\mathbf{N}$—композит всех неабелевых минимальных нормальных делителей группы Γ (подгруппы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{N}$ называются соответственно абелевой и неабелевой компонентами цоколя группы Γ).

Легко видеть, что

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \circ \mathbf{N}. \tag{14}$$

Действительно, из определения подгрупп $\mathbf{A}$ и $\mathbf{N}$ непосредственно вытекает, что

$$M = M_{\mathbf{A}} \cup M_{\mathbf{N}} \text{ и } \mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{N}.$$

Остается поэтому показать, что $\mathbf{A} \cap \mathbf{N} = E$. С этой целью заметим, что (как можно показать, например, с помощью теоремы Ремака — Шмидта) $\mathbf{N}$ единственным образом (с точностью до порядка сомножителей) разлагается в прямое произведение неабелевых минимальных нормальных делителей $\mathbf{N}_i$ группы Γ:

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \times \ldots \times \mathbf{N}_t. \tag{15}$$

Так как каждый входящий в $\mathbf{N}$ минимальный нормальный делитель является прямым множителем в некотором прямом разложении подгруппы $\mathbf{N}$, то каждый такой делитель находится в числе сомножителей разложения (15). Отсюда вытекает, что неабелевыми минимальными нормальными делителями $\mathbf{N}_i$ исчерпывается множество $M_{\mathbf{N}}$. Пересечение $M_{\mathbf{A}} \cap M_{\mathbf{N}}$ поэтому пусто, откуда и следует, что $\mathbf{A} \cap \mathbf{N} = E$.

Таким образом, (14) доказано. Вместе с тем, как видно из доказательства, имеет место разложение

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 \circ \ldots \circ \mathbf{N}_t.$$

Замечая, что $w(\mathbf{N}_i) = E - j_{\mathbf{N}_i} \neq 0$, на основании леммы 11 заключаем, что $w(\mathbf{N}) \neq 0$. Поэтому, в силу (14) и той же леммы 11, идемпотент $w(\mathbf{M})$ отличен от нуля тогда и только тогда, если отличен от нуля идемпотент $w(\mathbf{A})$. Обозначив через $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}, \ldots$ силовские подгруппы группы $\mathbf{A}$, будем, очевидно, иметь:

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \circ \mathbf{Q} \circ \ldots$$

Поэтому, в силу леммы 11, $w(\mathbf{M}) \neq 0$ тогда и только тогда, если выполняется система условий $w(\mathbf{P}) \neq 0$, $w(\mathbf{Q}) \neq 0, \ldots$

Принимая во внимание все эти результаты и лемму 7, получаем:

Лемма 12. Группа Γ тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые представления, если для каждой силовской подгруппы $\mathbf{P}$ группы $\mathbf{A}$ выполнено условие $w(\mathbf{P}) \neq 0$.

Заметим далее, что идемпотент $w(\mathbf{P})$ можно рассматривать как элемент групповой алгебры группы $\mathbf{P}$. Применяя лемму 6 к тому случаю, когда в роли группы Γ взята подгруппа $\mathbf{P}$, а в качестве S взята система $M_{\mathbf{P}}$, получаем:

Лемма 13. $w(\mathbf{P}) \neq 0$ тогда и только тогда, если группа $\mathbf{P}$ допускает неприводимое (в P) представление, ядро гомоморфизма которого не содержит ни одной из подгрупп системы $M_{\mathbf{P}}$.

С другой стороны, известно, что ядрами гомоморфизмов неприводимых представлений абелевой группы являются подгруппы с циклической фактор-группой. Так как $\mathbf{P}$ является абелевой группой типа $(p, p \ldots)$, где p — некоторое простое число, то подгруппа $I \subseteq \mathbf{P}$ тогда и только тогда является ядром гомоморфизма неприводимого представления группы $\mathbf{P}$, если $I = \mathbf{P}$ либо $[\mathbf{P}/I] = p$. Принимая это во внимание, из леммы 13 получаем:

Лемма 14. $w(\mathbf{P}) \neq 0$ тогда и только тогда, если существует подгруппа I индекса p в $\mathbf{P}$, не содержащая ни одного минимального нормального делителя группы Γ.

Из лемм 12 и 14 получаем окончательно:

Теорема. (Вайснер [1]). Группа Г тогда и только тогда допускает изоморфные неприводимые в P представления, если каждая силовская подгруппа **P** (порядка p^{α}) группы **A** содержит подгруппу индекса p в **P**, не содержащую ни одного нормального делителя группы Г.

Примечание. Разлагая **A** в прямое произведение так называемых когерент Ремака [5], [3], аналогичным способом приходим к известной теореме Шода [2] о конечных группах, допускающих изоморфные неприводимые представления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Weisner L. Finite group multiply isomorphe with irredueible representations. Amer. journ. of Math, **61**, 709—712 (1939).

2. Shoda K. Über direkt zerlegbare Gruppe, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect **1**,**2**, 1929, 51—72.

3. Kochendörffer R. Über treue irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen, Math. Nachrichten, **1**, 25—39 (1948).

4. Gaschütz W. Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen, Math. Nachrichten, **12**, № 3/4 (1954).

5. Remak R. Über minimale invariante Untergruppen in die Theorie der endlichen Gruppen, J. reine u. angew. Mathem., **162** (1930).