УДК 517.53

И. В. ОСТРОВСКИЙ

ОДНОРОДНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НА КРИВОЛИНЕЙНОМ КОНТУРЕ. II

Введение. Настоящая статья является продолжением [1], и ее результаты дают обобщения на случай криволинейного контура результатов [2]. Дополнительно к цитированным в [1] работам, связанным с рассматриваемой темой, отметим работы Б. А. Каца [4] и С. А. Плаксы [3].

В качестве контуров будем рассматривать кривые вида $L=\{z:z=re^{i\varphi(r)},\ 2\leqslant r_0\leqslant r<\infty\}$, где φ — вещественная непрерывно дифференцируемая функция, такая, что

$$\exists \lim_{r\to\infty}(r\varphi'(r)-\varphi(r)/\ln r)=0,\ \overline{\lim_{r\to\infty}}\,|\varphi(r)|/\ln r<\infty, \tag{0.1}$$

и, кроме того, $\varphi'\in\Delta$, где Δ — класс непрерывных на $[r_0,\infty)$ функций g, модуль непрерывности которых $\omega_R(\delta,g)$ на $[r_0,R]$ при любом $R>r_0$ удовлетворяет условию $\int\limits_0 \omega_R(\delta,g)\,\delta^{-1}\,d\delta<\infty$. Такие кривые

образуют класс, несколько более узкий, чем класс допустимых кривых из [1], но мы сохраним за ними название допустимых и будем, как и в [1], характеризовать их величинами

$$C(L)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\,|\varphi(r)|/\ln r,\ c(L)=\underline{\lim_{r\to\infty}}\,|\varphi(r)|/\ln r.$$

Рассмотрим на L однородную краевую задачу Римана:

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t),\ t\in L\setminus\{t_0\},\ t_0=r_0e^{i\varphi(r_0)}. \tag{0.2}$$

Будем считать, что $G(t)\neq 0$ на L, $-2\pi<\arg G(t_0)\leqslant 0$, $\ln G(re^{i\varphi(r)})\in\Delta$. Относительно поведения $\ln G$ на бесконечности будем предполагать следующее. Найдутся пара уточненных порядков Бутру $(l(r),\ l_1(r))$, такая, что

$$p=[\lambda]<\lambda=\underline{\lim_{r\to\infty}}\,l(r)\leqslant\overline{\lim_{r\to\infty}}\,l(r)=\rho<\min\left\{p+1,\ \frac{1}{2}(1+c^2(L))\right\}, \tag{0.3}$$

$$V_1(r)=o(V(r)/\ln r),\ r\to\infty,\ (V(r)=r^{l(r)},\ V_1(r)=r^{l_1(r)}),$$

и целозначная неубывающая функция $n(r)\geqslant 0$, $r_0\leqslant r<\infty$, связанные с $\ln G$ и кривой L следующим образом. Полагая $\Lambda(t)=\frac{1}{2\pi}\arg G(t)-$ $-n(|t|)$, имеем

А) справедливо представление

$$\Lambda(t)=V(|t|)+o(V_1(|t|)),\ t\to\infty;$$

Б) имеет место соотношение

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\,V^{-1}(r)\int\limits_0^{k(r)}(\Lambda(t^+(r,\sigma))-\Lambda(t^-(r,\sigma)))\,\sigma^{-1}\,d\sigma\quad 0, \tag{0.4}$$

где $k(r) = \exp\{-V(r)/(V_1(r)\ln r)\}$, а $t^{\pm}(r, \sigma)$ — точки на L так[ие], что $|t^{\pm}(r, \sigma) - re^{i\varphi(r)}| = \sigma$, $|t^{+}(r, \sigma)| > r > |t^{-}(r, \sigma)|$ (как мы покаж[ем] далее, при $0 < \sigma < k(r)$ и достаточно большом r точки $t^{\pm}(r, \sigma)$ определяются однозначно);

(В) справедлива оценка

$$|\ln|G(t)||\left\{1 + |t| \int_0^{k(|t|/2)} \omega_{3|t|}(\delta, \varphi')\,\delta^{-1}\,d\delta\right\} = o(V_1(|t|)), \quad t \to \infty. \quad (0.5)$$

Условие (А) означает, что функция $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ достаточно хоро[шо] аппроксимируется неубывающей; этот характер условия особен[но] ясен, когда $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ быстро растет (например, быстрее люб[ой] степенной функции). Условие (Б) можно рассматривать как огра[ни]чение на регулярность поведения $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ при больших r. К[ак] будет показано ниже (см. доказательство теоремы 3), оно, наприм[ер], всегда выполняется, если функция $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ непрерывно диф[фе]ренцируема и ее производная имеет не более чем степенной ро[ст]. Однако (см. доказательство теоремы 4) последнее не является нео[б]ходимым для выполнения (Б). Условие (В) включает, вообще гово[ря], одновременно ограничения и на рост $|\ln|G(re^{i\varphi(r)})||$, и на регуля[р]ность поведения кривой L на бесконечности. Конечно, оно тривиаль[но] выполняется, если $|G| \equiv 1$, и в этом случае не накладывает доп[ол]нительных ограничений на L. В общем случае оно влечет оце[нку] $|\ln|G(t)|| = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$, и будет выполнено, если L при[на]лежит классу C^2 и $|\ln|G(t)||(1 + |t|k(|t|)|\varphi''(|t|)|) = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$. Для выполнения последнего, конечно, достаточно, чт[о] $|\ln|G(t)||(1 + |t||\varphi''(|t|)|) = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$.

Основным результатом статьи является следующая теорема, [а]налогичная теореме 1 из [2].

Теорема 1. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Если коэ[ф]фициент G задачи* (0.2) *таков, что* $\ln G \in \Delta$, *и выполнены услови[я] (А), (Б), (В), то задача* (0.2) *имеет нетривиальное решение* Φ, *допускающее в области* $D = \mathbf{C} \setminus L$ *оценку*

$$|\Phi(z)| \leqslant C\exp\{-CV(|z|)\}. \quad (0.6)$$

Рассмотрим также следующие ограничения более простого хара[к]тера, чем (А) — (В). Найдется целозначная неубывающая функци[я] $0 \leqslant n(r) \uparrow \infty$, $r_0 \leqslant r \uparrow \infty$, такая, что

(А′) выполняется $\Lambda(t) = O(1)$, $t \to \infty$;

(Б′) при некотором $q > 0$ имеем

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}(\ln r)^{-1}\int_0^{r^{-q}}(\Lambda(t^{+}(r, \sigma)) - \Lambda(t^{-}(r, \sigma)))\,\sigma^{-1}\,d\sigma < \infty;$$

(В′) справедлива оценка, получающаяся из (0.5) заменой в лев[ой] и правой частях соответственно $k(|t|)$ на $|t|^{-q}$ и $o(V_1(|t|))$ на $O(1)$.

Теорема 2. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Если коэ[ф]фициент G задачи* (0.2) *таков, что* $\ln G \in \Delta$, *и выполнены услови[я] (А′) — (В′), то задача* (0.2) *имеет нетривиальное ограниченн[ое] решение.*

Замечание. Как будет видно из доказательств теорем 1 и 2, утверждения этих теорем сохраняют силу и без предположения, что $\varphi' \in \Delta$, если считать, что коэффициент G задачи (0.2) унимодулярен, т. е. $|G| \equiv 1$.

Теоремы 1 и 2 позволяют указать условия разрешимости задачи (0.2), допускающие возможность весьма нерегулярного поведения $\arg G(t)$ при $t \to \infty$ и сколь угодно быстрого его роста. Условия первого типа содержит теорема 3, а второго — теорема 4. Отметим, что впервые краевая задача Римана со сколь угодно быстро растущим аргументом коэффициента, однако в классах, содержащих неограниченные функции Φ, была рассмотрена С. М. Грудским [5].

Теорема 3. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Предположим, что коэффициент G задачи* (0.2) *удовлетворяет условиям:* 1) *функция* $\arg G(re^{i\varphi(r)})$ *непрерывно дифференцируема и монотонно стремится к $+\infty$ при $r \to \infty$ и для некоторого $\eta > 0$ справедлива оценка* $(d/dr) \arg G(re^{i\varphi(r)}) = O(r^{\eta})$, $r \to \infty$;
2) *функция* $\ln|G|$ *принадлежит Δ и удовлетворяет условию* (B′). *Тогда задача* (0.2) *имеет нетривиальное ограниченное решение.*

Отметим, что условие 1) выполнено, если $\arg G(t) = |t|^{l(|t|)}$, где $l(r)$ — уточненный порядок Бутру с любыми наперед заданными $0 < \lambda \leqslant \rho < \infty$, $\lambda = \varliminf_{r \to \infty} l(r)$, $\rho = \varlimsup_{r \to \infty} l(r)$.

Чтобы сформулировать теорему 4, обозначим через F_β, $\beta > 0$, класс всех целых функций h, $0 \leqslant h(r) \uparrow \infty$ $(r \uparrow \infty)$, удовлетворяющих условиям: а) $|h(z)| \leqslant h(\operatorname{Re} z)$, $z \in \mathbf{C}$; б) $h(r + h^{-\beta}(r)) = O(h(r))$, $r \to \infty$. Примерами функций, принадлежащих классу F_β при любом $\beta > 0$, могут служить $e_n(z)$, $e_n(z^2)$ (где через e_n обозначена n-я итерация e^z), а также $e_n^{(k)}(z)$, $e_n^{(k)}(z^2)$ при любом $k \in \mathbf{N}$. Легко видеть, что если $h \in F_\beta$, то $h(r) \geqslant Ce^{Cr}$ при некотором $C > 0$. В [6] установлено, что рост функций класса F_β не ограничен сверху: каковы бы ни были неубывающая функция $0 \leqslant q(r) \uparrow \infty$ и число $\beta > 0$, найдется функция $h \in F_\beta$, такая, что $h(r) \geqslant q(r)$, $r \geqslant 0$.

Теорема 4. *Пусть L — допустимая кривая и $\varphi' \in \Delta$. Предположим, что коэффициент G задачи* (0.2) *удовлетворяет условиям:* 1) *справедливо представление*

$$\frac{1}{2\pi} \arg G(re^{i\varphi(r)}) = \int_{r_0}^{r} h(u)\, du + V(r) - V(r_0), \quad r_0 \leqslant r < \infty, \qquad (0.7)$$

где $h \in F_\beta$, $\beta \in (0, 1/2)$, а $V(r) = r^{l(r)}$, причем уточненный порядок Бутру $l(r)$ удовлетворяет условию (0.3);
2) *функция* $\ln|G|$ *принадлежит Δ и удовлетворяет условию* (B). *Если*

$$r \int_0^{k(r)} \omega_{2r}(\delta, \varphi')\, \delta^{-1}\, d\delta = o(V(r)), \quad r \to \infty, \qquad (0.8)$$

то задача (0.2) *имеет нетривиальное решение Φ, допускающее оценку* (0.6).

Для доказательства теорем 1 и 2 используется следующая теорема типа Фрагмена — Линделефа (аналогичную роль в [2] играет теорема Р. Неванлинны).

Теорема 5. *Пусть* $L=\{z: z=re^{i\varphi(r)},\ 0\leqslant r<\infty\}$ — *гладкая кривая,* $D=\mathbf{C}\diagdown L$, Φ — *функция, аналитическая в* D *и ограниченная в* $D\cap\{z:|z|\leqslant R\}$ *при любом* $R>0$. *Если угловые предельные значения* $\Phi^{\pm}$ *функции* Φ *на обоих берегах разреза вдоль* L *удовлетворяют почти всюду на* L *условию*

$$|\Phi^{\pm}(\zeta)|\leqslant M<\infty, \tag{0.9}$$

и, кроме того, при некотором $\beta>1$ *справедливо соотношение*

$$\left\{\int\limits_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}(\ln^{+}|\Phi(re^{i\theta})|)^{\beta}d\theta\right\}^{1/\beta}=$$

$$=o\left\{(\ln r)^{1/\beta}\exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\,\frac{\ln^2 r+(|\varphi(r)|-4\pi)^2}{\ln r}\right)\right\},\quad r\to\infty, \tag{0.10}$$

то $|\Phi(z)|\leqslant M$ *при всех* $z\in D$.

Доказательство теоремы 5 приведем в конце статьи, а сначала с ее помощью докажем теоремы 1 и 2 и выведем из них теоремы 3 и 4.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Положим

$$\Phi(z)=\exp\left\{\frac{z^{p+1}}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\ln G(t)-2\pi i n(|t|)}{t^{p+1}(t-z)}\,dt\right\},\quad z\in D. \tag{1.1}$$

Так как из условий (A) и (B) следует, что $|\ln G(t)-2\pi i n(|t|)|\leqslant$ $\leqslant|\ln|G(t)||+2\pi|\Lambda(t)|=O(V(|t|))$, $t\to\infty$, а в силу допустимости кривой L имеем $|dt|\leqslant Cd|t|$, то учитывая (0.3), видим, что интеграл в правой части (1.1) абсолютно сходится. Так как $\ln G\in\Delta$, то по теореме Племеля — Привалова функция Φ непрерывна на множестве (D), получаемом присоединением к D обоих берегов разреза вдоль $L\diagdown\{t_0\}$. Формула Сохоцкого — Племеля показывает, что функция Φ удовлетворяет условию (0.2). Из условия $0\geqslant\arg G(t_0)>-2\pi$ вытекает (ср. [7, с. 115]), что функция Φ ограничена в окрестности точки t_0. Таким образом, функция Φ ограничена в $D\cap\{z:|z|\leqslant R\}$ при любом $R>0$. Докажем, что функция Φ удовлетворяет условиям (0.9) и (0.10) теоремы 5.

Сначала проверим выполнение условия (0.10). Имеем при $\varphi(r)<$ $<\theta<\varphi(r)+2\pi$

$$|\ln\Phi(re^{i\theta})|\leqslant\frac{r^{p+1}}{2\pi}\int\limits_{L}\frac{|\ln|G(t)||+2\pi|\Lambda(t)|}{|t|^{p+1}|t-re^{i\theta}|}|dt|\leqslant$$

$$\leqslant Cr^{p+1}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+1}|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant Cr^{p+1}\left\{\int\limits_{r_0}^{r/2}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+1}r}+\right.$$

$$+\int_{r/2}^{3r/2}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+1}\,|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}+\int_{3r/2}^{\infty}\frac{V(s)\,ds}{s^{p+2}}\Bigg\}\leqslant$$

$$\leqslant CV(r)\left\{1+\int_{r/2}^{3r/2}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\right\} \qquad (1.2)$$

(мы воспользовались свойствами уточненного порядка Бутру [8, с. 91]).

Докажем справедливость оценки

$$\int_{r/2}^{3r/2}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant C\left(1+\left|\ln\sin\frac{\theta-\varphi(r)}{2}\right|\right),$$

$$\varphi(r)<\theta<\varphi(r)+2\pi. \qquad (1.3)$$

Ограничимся случаем $\varphi(r)<\theta\leqslant\varphi(r)+\pi$, так как случай $\varphi(r)+\pi\leqslant\theta<\varphi(r)+2\pi$ рассматривается аналогично.

Пусть $|s-r|<\delta r(\theta-\varphi(r))$, где $\delta=\min\{1/(8C(L)),\ 1/(4\pi)\}$. При достаточно больших r в силу (0.1) имеем $|\varphi'(r)|\leqslant 2C(L)/r$, поэтому $|\varphi(r)-\varphi(s)|\leqslant|r-s|\max\{|\varphi'(t)|: r/2\leqslant t\leqslant 3r/2\}\leqslant|r-s|\,4C(L)/r\leqslant\frac{1}{2}(\theta-\varphi(r))$ и, следовательно, $\frac{1}{2}(\theta-\varphi(r))\leqslant\theta-\varphi(s)\leqslant\frac{3}{2}(\theta-\varphi(r))$. Поскольку $|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|=\{(s-r)^2+4sr\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\varphi(s))\}^{1/2}\geqslant 2\sqrt{rs}\times\left|\sin\frac{1}{2}(\theta-\varphi(s))\right|$, то при $\varphi(r)<\theta\leqslant\varphi(r)+\pi/3$ имеем $|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|\geqslant 2\sqrt{rs}(\theta-\varphi(s))/\pi\geqslant C(\theta-\varphi(r))$, а при $\varphi(r)+\pi/3\leqslant\theta\leqslant\varphi(r)+\pi$ имеем $|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|\geqslant 2\sqrt{rs}\sin(\pi/12)\geqslant Cr(\theta-\varphi(r))$. Поэтому

$$\int_{|s-r|<\delta r(\theta-\varphi(r))}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant C$$

и, следовательно,

$$\int_{r/2}^{3r/2}\frac{ds}{|se^{i\varphi(s)}-re^{i\theta}|}\leqslant C+\int_{r/2\geqslant|s-r|\geqslant\delta r(\theta-\varphi(r))}\frac{ds}{|s-r|}=C+2\ln\frac{1}{2\delta(\theta-\varphi(r))}.$$

Тем самым оценка (1.3) доказана.

Из (1.2) и (1.3) следует, что для любого $\beta>1$ выполняется

$$\left(\int_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}|\ln\Phi(re^{i\theta})|^{\beta}d\theta\right)^{1/\beta}\leqslant CV(r)\left\{1+\left(\int_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi}\left|\ln\sin\frac{\theta-\varphi(r)}{2}\right|^{\beta}d\theta\right)^{1/\beta}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant CV(r). \qquad (1.4)$$

В силу условия (0.3) число β можно выбрать столь большим, чтобы $<\frac{\beta-1}{2\beta}(1+c^2(L))$. Для такого β будем иметь

$$V(r)=o\left\{(\ln r)^{1/\beta}\exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\,\frac{\ln^2 r+(|\varphi(r)|-4\pi)^2}{\ln r}\right)\right\},\quad r\to\infty.$$

Тем самым доказано, что функция Φ удовлетворяет условию (0.10).

Покажем теперь что функция Ф удовлетворяет и условию (0.)
теоремы 5.

Так как $\ln G \in \Delta$, то в силу формулы Сохоцкого—Племеля име[ем] при всех $\zeta \in L$, за исключением точек разрыва функции $n(|\zeta|)$, р[а]венство

$$\ln \Phi^{\pm}(\zeta) = \pm \frac{1}{2}(\ln G(\zeta) - 2\pi i n(|\zeta|)) + \\ + \frac{\zeta^{p+1}}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln G(t) - 2\pi i n(|t|)}{t^{p+1}(t-\zeta)} dt$$

(интеграл существует в смысле главного значения). Отделяя действи[]тельную часть и полагая $|\zeta| = r$, $\omega(r) = L \cap \{z : |z - \zeta| \leqslant k(r)\}$, $\Omega(r) = L \setminus \omega(r)$, получим

$$\ln|\Phi^{\pm}(\zeta)| = \pm \frac{1}{2}\ln|G(\zeta)| + \operatorname{Re}\frac{\zeta^{p+1}}{2\pi i} \int\limits_{\omega(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} + \\ + \operatorname{Re}\frac{\zeta^{p+1}}{2\pi i} \int\limits_{\Omega(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} + \operatorname{Re}\zeta^{p+1} \int\limits_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} + \\ + \operatorname{Re}\zeta^{p+1} \int\limits_{\Omega(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)} = \pm\frac{1}{2}\ln|G(\zeta)| + \sum_{j=1}^{4}\operatorname{Re} I_j(\zeta). \quad (\ldots)$$

Имеем

$$I_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\omega(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t-\zeta} + \sum_{k=0}^{p} \frac{\zeta^k}{2\pi i} \int\limits_{\omega(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t^{k+1}}.$$

В силу условия (В) выполняется $\ln|G(t)| = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$, поэтому

$$\left|\frac{\zeta^k}{2\pi i} \int\limits_{\omega(r)} \frac{\ln|G(t)|}{t^{k+1}} dt\right| \leqslant \frac{r^k}{2\pi} \int\limits_{r-k(r)}^{r+k(r)} \frac{o(V_1(s))\,ds}{s^{k+1}} = o(V_1(r)), \quad r \to \infty;$$

$$\operatorname{Re} I_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega(r)} \ln|G(t)| \operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) + o(V_1(r)), \quad r \to \infty. \quad (1.6)$$

При $t = se^{i\varphi(s)}$, $\zeta = re^{i\varphi(r)}$ выполняется

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) = |t-\zeta|^{-2}\{s\varphi'(s)(s - r\cos(\varphi(s) - \varphi(r))) - r\sin(\varphi(s) - \\ - \varphi(r))\}\,ds = |t-\zeta|^{-2}\{s(\varphi(r) - \varphi(s) - \varphi'(s)(r-s)) + B(r, s)\}\,ds,$$

где $B(r, s)$ при $|s - r| \leqslant r/2$ допускает оценку $|B(r, s)| \leqslant r \times \sin^2\frac{1}{2}(\varphi(s) - \varphi(r)) + r|\sin(\varphi(s) - \varphi(r)) - (\varphi(s) - \varphi(r))| + |r - s| \times |\varphi(s) - \varphi(r)| \leqslant Cr^{-1}(s-r)^2$ (мы использовали формулу конечны[х] приращений и условие $\varphi'(r) = O(1/r)$, $r \to \infty$). В силу формул[ы] конечных приращений имеем $|\varphi(r) - \varphi(s) - \varphi'(s)(r-s)| \leqslant \omega_{2r}(|r - s|, \varphi')|r-s|$, $|r - s| \leqslant r/2$, поэтому

$$\operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) \leqslant \left(s\frac{\omega_{2r}(|r-s|, \varphi')}{|r-s|} + \frac{C}{r}\right) ds, \ |r-s| \leqslant r/2.$$

Отсюда следует, что для некоторого $t' \in \omega(r)$ имеем

$$\left|\int\limits_{\omega(r)} \ln|G(t)| \operatorname{Im}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right)\right| \leqslant |\ln|G(t')|| \int\limits_{r-k(r)}^{r+k(r)} \left(s\frac{\omega_{2r}(|s-r|, \varphi')}{|s-r|} + \frac{C}{r}\right) ds \leqslant$$

$$\leqslant |\ln|G(t')|| \left\{4|t'| \int\limits_0^{k(r)} \omega_{2r}(\delta)\,\delta^{-1} d\delta + 2k(r)C/r\right\} \leqslant$$

$$\leqslant |\ln|G(t')|| \left\{C|t'| \int\limits_0^{k(|t'|/2)} \omega_{3|t'|}(\delta)\,\delta^{-1} d\delta + o(1/r)\right\},$$

и с помощью условия (В) из (1.6) заключаем, что $|\operatorname{Re} I_1(\zeta)| \leqslant o(V_1(|t'|)) + o(V_1(r)) = o(V(r))$, $r \to \infty$.

Так как в силу (0.1) имеем $|se^{i\varphi(s)} - re^{i\varphi(r)}| \geqslant C_0|s-r|$, то $\Omega(r) \subset \{se^{i\varphi(s)} : |s-r| \geqslant k(r)/C_0\}$. Поскольку из условия (В) следует, что $\ln|G(t)| = o(V_1(|t|))$, $t \to \infty$, получаем

$$|I_2(\zeta)| \leqslant Cr^{p+1}\left(\int\limits_{r_0}^{r-k(r)/C_0} + \int\limits_{r+k(r)/C_0}^{\infty}\right) \frac{o(V_1(s))\,ds}{s^{p+1}|s-r|} =$$

$$= Cr^{p+1}\left\{\frac{1}{r}\int\limits_{r_0}^{r/2} o(V_1(s))\,s^{-p-1} ds + o(V_1(r)\,r^{-p-1}) \int\limits_{r/2}^{r-k(r)/C_0} \frac{ds}{r-s} +\right.$$

$$\left. + o(V_1(r)\,r^{-p-1}) \int\limits_{r+k(r)/C_0}^{3r/2} \frac{ds}{s-r} + \int\limits_{3r/2}^{\infty} o(V_1(s))\,s^{-p-2} ds\right\} =$$

$$= o\left(V_1(r) \ln \frac{rC_0}{2k(r)}\right) = o(V(r)), \quad r \to \infty. \tag{1.7}$$

Имеем

$$I_3(\zeta) = \int\limits_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t-\zeta} + \sum_{k=0}^{p} \zeta^k \int\limits_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t)}{t^{k+1}} dt.$$

В силу условия (А) выполняется $\Lambda(t) = O(V(|t|))$, $t \to \infty$, поэтому

$$\left|\zeta^k \int\limits_{\omega(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t^{k+1}}\right| \leqslant r^k \int\limits_{r-k(r)}^{r+k(r)} \frac{CV(s)}{s^{k+1}} ds = o(V(r)), \quad r \to \infty,$$

$$\operatorname{Re} I_3(\zeta) = \int\limits_{\omega(r)} \Lambda(t) \operatorname{Re}\left(\frac{dt}{t-\zeta}\right) + o(V(r)) = A(\zeta) + o(V(r)), \quad r \to \infty. \tag{1.8}$$

Чтобы оценить интеграл $A(\zeta)$, покажем сначала, что величина $\sigma = |t-\zeta| = \{s^2 + r^2 - 2sr\cos(\varphi(s) - \varphi(r))\}^{1/2}$ является при достаточно больших r возрастающей функцией от s при $s \in (r, r+k(r))$ и убывающей — при $s \in (r-k(r), r)$. Действительно, при $|s-r| = o(r)$, $r \to \infty$, имеем $\frac{1}{s-r}\frac{d\sigma^2}{ds} = \frac{2}{s-r}\left\{s - r + 2r\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(s) - \varphi(r)) + sr \times\right.$ $\left.\times \varphi'(s)\sin(\varphi(s) - \varphi(r))\right\} = 2 + o(1) + 2sr(\varphi'(s))^2 + \frac{2sr\varphi'(s)}{s-r}\{\varphi(s) -$

$-\varphi(r)-\varphi'(s)(s-r)\}+o(1)$. Последнее выражение положительно при достаточно больших r, так как из теоремы Лагранжа и первого условия в (0.1) следует, что при некоторых s', s'', лежащих между r и s, выполняется $\frac{r}{s-r}\{\varphi(s)-\varphi(r)-\varphi'(s)(s-r)\}=r\{\varphi'(s')-$ $-\varphi'(s)\}=r\left\{\frac{\varphi(s')}{s'\ln s'}-\frac{\varphi(s)}{s\ln s}+o\left(\frac{1}{r}\right)\right\}=r(s'-s)\frac{d}{du}\left(\frac{\varphi(u)}{u\ln u}\right)_{u=s''}+o(1)=$ $=o(1)$.

Из доказанного свойства величины σ следует, что точки $t^{\pm}(r,\sigma)$, о которых говорится в условии (Б), определяются однозначно, и интеграл $A(\zeta)$ (в смысле главного значения) может быть записан в виде

$$A(\zeta)=\int\limits_{\omega(r)}\Lambda(t)\,d\ln|t-\zeta|=\int\limits_{0}^{k(r)}\{\Lambda(t^{+}(r,\sigma))-\Lambda(t^{-}(r,\sigma))\}\frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (1.9)$$

Поэтому из условия (Б) и соотношения (1.8) непосредственно вытекает, что

$$\varlimsup_{r\to\infty}V^{-1}(r)\operatorname{Re}I_3(\zeta)\leqslant 0. \quad (1.10)$$

Интеграл $I_4(\zeta)$ запишем в виде

$$I_4(\zeta)=\zeta^{p+1}\int\limits_{\Omega(r)}\frac{\Lambda(t)-V(|t|)}{t^{p+1}(t-\zeta)}dt-\zeta^{p+1}\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)}+$$
$$+\zeta^{p+1}\int\limits_{L}\frac{V(|t|)\,dt}{t^{p+1}(t-\zeta)}=A_1(\zeta)-A_2(\zeta)+A_3(\zeta).$$

Используя условие (А), с помощью выкладки, аналогичной проведенной при оценке (1.7) интеграла I_2, убеждаемся, что $A_1(\zeta)=$ $=o(V(r))$, $r\to\infty$. Далее имеем

$$A_2(\zeta)=\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t-\zeta}+\sum_{k=0}^{p}\zeta^k\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t^{k+1}}=\int\limits_{\omega(r)}\frac{V(|t|)\,dt}{t-\zeta}+o(V(r)),\ r\to\infty. \quad (1.11)$$

Аналогично (1.9) верно равенство

$$\int\limits_{\omega(r)}V(|t|)\,d\ln|t-\zeta|=\int\limits_{0}^{k(r)}\{V(|t^{+}(r,\sigma)|)-V(|t^{-}(r,\sigma)|)\}\frac{d\sigma}{\sigma}, \quad (1.12)$$

поэтому

$$\operatorname{Re}A_2(\zeta)=\int\limits_{0}^{k(r)}\frac{d\sigma}{\sigma}\int\limits_{|t^{-}(r,\sigma)|}^{|t^{+}(r,\sigma)|}V'(u)\,du+o(V(r)),\ r\to\infty.$$

Так как $V'(u)\leqslant CV(u)u^{-1}$, $|t^{+}(r,\sigma)|-|t^{-}(r,\sigma)|\leqslant|t^{+}(r,\sigma)-\zeta|+$ $+|t^{-}(r,\sigma)-\zeta|=2\sigma$, то

$$|\operatorname{Re}A_2(\zeta)|\leqslant 2CV(r)r^{-1}k(r)+o(V(r))=o(V(r)),\ r\to\infty. \quad (1.13)$$

Интеграл $A_3(\zeta)$ связан с интегралом $I(|z|)$, определяемым равенством (10) из [1] формулой

$$\lim_{\theta\to\varphi(r)+0} 2\pi i I(re^{i\theta}) = \pi i V(|\zeta|) + A_3(\zeta),\ \zeta = re^{i\varphi(r)}.$$

Так как для $\operatorname{Im} I(re^{i\theta})$ справедлива равномерная относительно $\theta\in(\varphi(r), \varphi(r)+2\pi)$ оценка (20) из [1], то имеем

$$\operatorname{Re} A_3(\zeta) = -2\pi \lim_{\theta\to\varphi(r)+0} \operatorname{Im} I(re^{i\theta}) \leqslant -CV(r).$$

Таким образом, для достаточно больших r выполняется

$$\operatorname{Re} I_4(\zeta) \leqslant -CV(r). \tag{1.14}$$

Подставляя оценки (1.6), (1.7), (1.10) и (1.14) в (1.5) и учитывая условие (В), заключаем, что

$$\ln|\Phi^{\pm}(\zeta)| \leqslant -CV(r),\ r \geqslant r_1 \geqslant r_0. \tag{1.15}$$

Так как функция Φ ограничена в $D\cap\{z: |z|\leqslant R\}$ при любом $R>r_0$, то из (1.15) следует, что условие (0.9) теоремы 5 также выполнено. Тем самым мы доказали, что функция Φ ограничена в D.

Остается установить справедливость оценки (0.6). Для этого рассмотрим функцию $\Phi_\varepsilon(z) = \Phi(z)\exp\{-\varepsilon 2\pi i I(z)\}$, где $\varepsilon>0$, а $I(z)$ определяется равенством (10) из [1]. Легко видеть, что функция Φ_ε при любом $\varepsilon>0$ удовлетворяет условию (0.10) теоремы 5. Из соотношения (23) из [1] и ограниченности входящей в него величины $B(\beta(r),\alpha)$ следует, что функция Φ_ε при достаточно малом ε удовлетворяет также и условию (0.9). Поэтому функция Φ_ε при достаточно малом ε ограничена в D. Отсюда с помощью оценки (20) из [1] получаем (0.6).

§ 2. Доказательство теоремы 2

Положим

$$\Phi_0(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t) - 2\pi i n(|t|)}{t(t-\zeta)}\,dt\right\},\ z\in D.$$

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве (1.4), но использующим условия (А′), (В′), вместо (A), (B), убеждаемся, что для любого $\beta>1$ имеем

$$\left(\int_{\varphi(r)}^{\varphi(r)+2\pi} |\ln \Phi_0(re^{i\theta})|^\beta\,d\theta\right)^{1/\beta} = O(\ln^2 r),\ r\to\infty.$$

Полагая $\zeta\in L$, $|\zeta| = r$, $\omega_0(r) = L\cap\{z: |z-\zeta|\leqslant r^{-q}\}$, $\Omega_0(r) = L\setminus\omega_0(r)$, где q — число, фигурирующее в условии (Б′), получим аналогичное (1.5) равенство

$$\ln|\Phi_0^{\pm}(\zeta)| = \pm\ln|G(\zeta)| + \operatorname{Re}\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{\omega_0(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t(t-\zeta)} +$$

$$+ \operatorname{Re}\frac{\zeta}{2\pi i}\int_{\Omega_0(r)} \frac{\ln|G(t)|\,dt}{t(t-\zeta)} + \operatorname{Re}\zeta\int_{\omega_0(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t(t-\zeta)} +$$

$$+ \operatorname{Re}\zeta\int_{\Omega_0(r)} \frac{\Lambda(t)\,dt}{t(t-\zeta)} = \pm\frac{1}{2}\ln|G(\zeta)| + \sum_{j=1}^{4}\operatorname{Re} I_j^0(\zeta).$$

Оценки интегралов I_1^0, I_2^0, I_3^0 получаются так же, как оценки интегралов I_1, I_2, I_3 в доказательстве теоремы 1 (но используются условия (А′), (Б′), (В′), вместо (А), (Б), (В)), а оценка интеграла I_4^0 получается существенно проще, чем оценка интеграла I_4 — так же, как оценка I_2. Из этих оценок следует, что для достаточно больших r имеем $\ln|\Phi_0^{\pm}(\zeta)| \leqslant C \ln r$.

Пусть h — полином, степень которого не меньше постоянной C из последнего неравенства, а корни лежат в тех точках $re^{i\varphi(r)} \in L$, в которых $n(r)$ имеет разрыв. Тогда функция $\Phi = \Phi_0/h$ удовлетворяет условиям теоремы 5 и, следовательно, ограничена в D. Она, очевидно, является искомым решением краевой задачи (0.2).

§ 3. Доказательство теоремы 3

Убедимся, что коэффициент G удовлетворяет условиям теоремы 2. Положим $n(s) = \left[\frac{1}{2\pi}\arg G(se^{i\varphi(s)})\right] + 1$. Очевидно, функция n — целозначная неотрицательная и монотонно стремится к $+\infty$ при $s \to +\infty$. Так как $\Lambda(t) = \frac{1}{2\pi}\arg G(t) - n(|t|) = O(1)$, $t \to \infty$, то условие (А′) выполнено. Так как $|t^+(r, \sigma)| > |t^-(r, \sigma)|$, то $n(|t^+(r, \sigma)|) - n(|t^-(r, \sigma)|) > 0$, и, следовательно, $\Lambda(t^+(r, \sigma)) - \Lambda(t^-(r, \sigma)) \leqslant \frac{1}{2\pi}\{\arg G(t^+(r,\sigma)) - \arg G(t^-(r,\sigma))\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t^-(r,\sigma)|}^{|t^+(r,\sigma)|}(d/ds)\arg G(se^{i\varphi(s)})\,ds \leqslant C|t^+(r, \sigma)|^{\eta}(|t^+(r, \sigma)| - |t^-(r, \sigma)|)$. Поскольку $|t^+(r, \sigma)| - |t^-(r,\sigma)| \leqslant 2\sigma$, $|t^+(r, \sigma)| \leqslant r + \sigma \leqslant 2r$ при $\sigma \leqslant r$, то условие (Б′) выполнено при любом $q \geqslant \eta$. Так как условие (В′) входит в формулировку теоремы 3, то условия теоремы 2 выполнены.

§ 4. Доказательство теоремы 4

Убедимся, что выполнены условия (А) и (Б) с $V(r)$, взятым из (0.7), и любым $V_1(r) = o(V(r)/\ln r)$, $r \to \infty$. Так как условие (В) входит в формулировку теоремы 4, справедливость этой теоремы будет следовать из теоремы 1.

Положим $H(s) = \int\limits_{r_0}^{s} h(u)\,du$, $s \geqslant r_0$, и обозначим через $\vartheta(x)$, $x \geqslant 0$, функцию, обратную к H. В качестве $n(s)$, $s \geqslant r_0$, возьмем целозначную неубывающую функцию, определяемую условиями

$$n(\vartheta(m)) = H(\vartheta(m)) = m, \quad \int\limits_{\vartheta(m)}^{\vartheta(m+1)} (H(s) - n(s))\,ds = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что

$$|H(s) - n(s)| \leqslant 1, \quad s \geqslant r_0, \tag{4.1}$$

поэтому выполнение условия (A) очевидно.

Обозначим через $Z(r)$ интеграл, стоящий в левой части соотношения (0.4) в условии (Б). С помощью введенных обозначений его можно записать в виде

$$Z(r) = \int_0^{k(r)} \{(H(|t^+(r,\sigma)|) - H(|t^-(r,\sigma)|)) - (n(|t^+(r,\sigma)|) -$$

$$- n(|t^-(r,\sigma)|))\} \frac{d\sigma}{\sigma} + \int_0^{k(r)} (V(|t^+(r,\sigma)|) - V(|t^-(r,\sigma)|)) \frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= Z_1(r) + Z_2(r). \tag{4.2}$$

Интеграл $Z_2(r)$ был оценен при доказательстве теоремы 1 (см оценку $I_2(\zeta)$, (1.12) — (1.13)), где было установлено, что

$$Z_2(r) = o(V(r)),\ r \to \infty. \tag{4.3}$$

Оценим интеграл $Z_1(r)$. Пусть $E = \{r: r \geqslant r_0,\ k(r) > 1/h(r)\}$. Рассмотрим два случая: α) E — ограничено, β) E — неограничено. В случае α) для достаточно больших r выполняется $k(r) \leqslant 1/h(r)$, и оценка получается так:

$$Z_1(r) \leqslant \int_0^{k(r)} (H(|t^+(r,\sigma)|) - H(|t^-(r,\sigma)|)) \frac{d\sigma}{\sigma} \leqslant \int_0^{1/h(r)} (H(|t^+(r,\sigma)|) -$$

$$- H(|t^-(r,\sigma)|)) \frac{d\sigma}{\sigma} \leqslant \int_0^{1/h(r)} h(|t^+(r,\sigma)|)(|t^+(r,\sigma)| - |t^-(r,\sigma)|) \frac{d\sigma}{\sigma} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{1/h(r)} h(r+\sigma)\, 2\sigma \frac{d\sigma}{\sigma} \leqslant 2h(r + 1/h(r))/h(r) \leqslant C$$

в силу условия б) из определения класса F_β.

Рассмотрим случай β). Достаточно получить оценку для $Z_1(r)$ при $r \in E$, так как оценка в случае α) показывает, что при $r \notin E$ выполняется $Z_1(r) \leqslant C$. Запишем при $r \in E$ интеграл $Z_1(r)$ в виде

$$Z_1(r) = \int_0^{1/h(r)} \{(H(|t^+(r,\sigma)|) - H(|t^-(r,\sigma)|)) - (n(|t^+(r,\sigma)|) -$$

$$- n(|t^-(r,\sigma)|))\} \frac{d\sigma}{\sigma} + \int_{1/h(r)}^{k(r)} \{H(|t^+(r,\sigma)|) - n(|t^+(r,\sigma)|)\} \frac{d\sigma}{\sigma} -$$

$$- \int_{1/h(r)}^{k(r)} \{H(|t^-(r,\sigma)|) - n(|t^-(r,\sigma)|)\} \frac{d\sigma}{\sigma} = W_1(r) + W_2^{(1)}(r) - W_2^{(2)}(r).$$

Интеграл $W_1(r)$ оценивается так же, как интеграл $Z_1(r)$ в случае α), т. е. мы имеем $W_1(r) \leqslant C$.

Оценим интеграл $W_2^{(1)}(r)$. Обозначим через $s = s(r,\sigma) > r$ решение уравнения $|se^{i\varphi(s)} - re^{i\varphi(r)}| = \sigma$. Как было установлено при доказательстве теоремы 1, функция $s(r,\sigma)$ строго возрастает по $\sigma \in [0,$

$k(r)]$ и допускает оценку $r+\sigma \geqslant s(r, \sigma) \geqslant r+\sigma/C_0$. Пусть $\sigma=\sigma(r, s)$ — функция, обратная к $s(r, \sigma)$. Делая в интеграле $W_2^{(1)}(r)$ замену переменной $\sigma \to s$, получим

$$W_2^{(1)}(r)=\int\limits_{s(r,1/h(r))}^{s(r,k(r))}\{H(s)-n(s)\}\frac{\sigma'(r, s)}{\sigma(r, s)}\,ds.$$

Положим

$$\tilde{W}_2^{(1)}(r)=\int\limits_{s(r,1/h(r))}^{s(r,k(r))}\{H(s)-n(s)\}\frac{ds}{s-r}.$$

Интеграл, несколько отличный от $\tilde{W}_2^{(1)}(r)$, а именно

$$Y_2^{(1)}(r)=\int\limits_{r+1/h(r)}^{r+k(r)}\{H(s)-n(s)\}\frac{ds}{s-r},$$

рассматривался в [2, § 7], где было установлено, что $Y_2^{(1)}(r)=O(1)$, $r\to\infty$. Поскольку $s(r, k(r))\leqslant r+k(r)$, $s(r, 1/h(r))\geqslant r+1/(C_0h(r))$, то рассуждения, проведенные в [2, § 7], показывают также, что и $\tilde{W}_2^{(1)}(r)=O(1)$, $r\to\infty$.

Рассмотрим разность

$$W_2^{(1)}(r)-\tilde{W}_2^{(1)}(r)=\int\limits_{s(r,1/h(r))}^{s(r,k(r))}\{H(s)-n(s)\}\left\{\frac{\sigma'(r, s)}{\sigma(r, s)}-\frac{1}{s-r}\right\}ds.$$

Из (4.1) следует, что

$$|W_2^{(1)}(r)-\tilde{W}_2^{(1)}(r)|\leqslant\int\limits_{r}^{r+k(r)}\left|\frac{\sigma'(r, s)}{\sigma(r, s)}-\frac{1}{s-r}\right|ds.$$

Оценим подынтегральное выражение:

$$\left|\frac{\sigma'(r, s)}{\sigma(r, s)}-\frac{1}{s-r}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{d}{ds}\ln\frac{\sigma^2(r, s)}{(s-r)^2}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{d}{ds}\ln\left(1+\frac{4rs\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(r)-\varphi(s))}{(s-r)^2}\right)\right|\leqslant 2r\left|\frac{d}{ds}\,\frac{s\sin^2\frac{1}{2}(\varphi(r)-\varphi(s))}{(s-r)^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\left(1+r\frac{|\varphi(s)-\varphi(r)-\varphi'(s)(s-r)|}{(s-r)^2}\right)\leqslant C\left(1+r\frac{\omega_{2r}(|s-r|, \varphi')}{|s-r|}\right).$$

Используя условие (0.8), получаем

$$|W_2^{(1)}(r)-\tilde{W}_2^{(1)}(r)|\leqslant Ck(r)+Cr\int\limits_0^{k(r)}\omega_{2r}(\delta, \varphi')\frac{d\delta}{\delta}=o(V(r)),\ r\to\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что $W_2^{(1)}(r)=o(V(r))$, $r\to\infty$.

Оценка интеграла $W_2^{(2)}(r)$ проводится аналогично; при этом используется установленная в [2, § 7] оценка $Y_2^{(2)}(r)=O(1)$, $r\to\infty$, где

$$Y_2^{(2)}(r)=\int\limits_{r-k(r)}^{r-1/h(r)}\{H(s)-n(s)\}\frac{ds}{r-s}.$$

Подставляя полученные оценки для W_1, $W_2^{(1)}$ и $W_2^{(2)}$ в (4.4), заключаем, что в случае β) выполняется соотношение

$$\varlimsup_{r\to\infty} V^{-1}(r)\, Z_1(r) \leqslant 0.$$

Так как в случае α) справедливо даже $Z_1(r) \leqslant C$, то из (4.2) и (4.3) вытекает, что выполняется условие (Б). Тем самым теорема 4 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 5

Полагая $f(z) = \Phi(e^z)$, $y(x) = \varphi(e^x)$, видим, что достаточно доказать следующий эквивалент теоремы 5:

Теорема 5′. *Пусть функция f аналитична в криволинейной полосе $S = \{z = x + iy : y(x) < y < y(x) + 2\pi,\ -\infty < x < \infty\}$, $y(x) \in C^1(\boldsymbol{R})$, и ограничена в $S_R = S \cap \{z : \operatorname{Re} z < R\}$ при любом $R > 0$. Если угловые предельные значения функции f на ∂S почти всюду на ∂S удовлетворяют условию $|f(z)| \leqslant M$ и, кроме того, при некотором $\beta > 1$ справедливо соотношение*

$$\left\{\int\limits_{y(x)}^{y(x)+2\pi} (\ln^+|f(x+iy)|)^\beta\, dy\right\}^{1/\beta} = o\left\{x^{1/\beta} \exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\, \frac{x^2 + (|y(x)| - 4\pi)^2}{x}\right)\right\}, \quad (5.1)$$

то $|f(z)| \leqslant M$ при всех $z \in S$.

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $M = 1$. Пусть z_0 — произвольная точка в S; выберем R столь большим, чтобы $z_0 \in S_R$. Обозначая через g_R функцию Грина области S_R, имеем

$$\ln^+|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial S_R} \ln^+|f(\zeta)|\, (\partial/\partial n_\zeta)\, g_R(z_0, \zeta)\, |d\zeta|,$$

где через n_ζ обозначена внутренняя нормаль к ∂S_R в точке ζ. Так как $|f(\zeta)| \leqslant 1$ на ∂S, то отсюда следует, что

$$\ln^+|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} \ln^+|f(R+iy)|\, (\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0, R+iy)\, dy.$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\ln^+|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\ln^+|f(R+iy)|)^\beta\, dy\right\}^{1/\beta} \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} ((\partial/\partial n_{R+iy}) \times\right.$$

$$\left.\times\, g_R(z_0, R+iy))^{\beta/(\beta-1)}\, dy\right\}^{(\beta-1)/\beta} \leqslant \frac{1}{2\pi} \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\ln^+|f(R+iy)|)^\beta\, dy\right\}^{1/\beta} \times$$

$$\times \left\{\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0, R+iy)\, dy\right\}^{(\beta-1)/\beta} \max\{(\partial/\partial n_{R+iy}) \times$$

$$\times\, g_R(z_0, R+iy) : y(R) \leqslant y \leqslant y(R) + 2\pi\}^{1/\beta}. \quad (5.2)$$

Так как область S_R содержится в полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Re} z \leqslant R\}$, то в силу принципа расширения области имеем

$$(\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0,\ R+iy) \leqslant \operatorname{Re}(R+iy-z_0)^{-1} = O(1/R),\ R\to\infty, \tag{5.3}$$

равномерно относительно $y \in (y(R),\ y(R)+2\pi)$. Обозначая через $\omega(z,\ E,\ G)$, $z \in G$, гармоническую меру относительно области G множества $E \subset \partial G$ и полагая $E_R = \{\zeta\colon \operatorname{Re}\zeta = R,\ y(R) \leqslant \operatorname{Im}\zeta \leqslant y(R) + 2\pi\}$, имеем

$$\int\limits_{y(R)}^{y(R)+2\pi} (\partial/\partial n_{R+iy})\, g_R(z_0,\ R+iy)\, dy = \omega(z_0,\ E_R,\ S_R). \tag{5.4}$$

Оценим величину $\omega(z_0,\ E_R,\ S_R)$. Обозначим через $w = w(z)$ функцию, конформно отображающую криволинейную полосу S на прямолинейную $S_0 = \{w\colon 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$, $w(\pm\infty) = \pm\infty$. В силу конформной инвариантности гармонической меры имеем $\omega(z_0,\ E_R,\ S_R) = \omega(w(z_0),\ w(E_R),\ w(S_R))$. Положим $\beta_R = \min\{\operatorname{Re} w(R+iy)\colon y(R) \leqslant y \leqslant y(R)+2\pi\}$, $\tilde{E}_R = \{w\colon \operatorname{Re} w = \beta_R,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant 1\}$, $\tilde{S}_R = \{w\colon \operatorname{Re} w < \beta_R,\ 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$. В силу принципа расширения области имеем $\omega(w,\ w(E_R),\ w(S_R)) \leqslant \omega(w,\ \tilde{E}_R,\ \tilde{S}_R)$. Прямой подсчет показывает, что

$$\omega(w,\ \tilde{E}_R,\ \tilde{S}_R) = \frac{2}{\pi}\arg\frac{1+e^{\pi(w-\beta_R)}}{1-e^{\pi(w-\beta_R)}} = O(e^{-\pi\beta_R}),\ R\to\infty,$$

и, следовательно, $\omega(z_0,\ E_R,\ S_R) = O(e^{-\pi\beta_R})$, $R\to\infty$.

Учитывая последнюю оценку, из (5.2), (5.3), (5.4) и условия (5.1) заключаем, что $\ln^+|f(z_0)| \leqslant H(z_0,\ R)$, где

$$H(z_0,\ R) = o\left\{\exp\left(\frac{\beta-1}{2\beta}\,\frac{R^2+(|y(R)|-4\pi)^2}{R} - \pi\beta_R\right)\right\},\ R\to\infty.$$

Для завершения доказательства остается установить, что величина, стоящая в правой части этого соотношения, стремится к 0 при $R\to\infty$. Это вытекает из следующей леммы, любезно сообщенной автору вместе с доказательством А. А. Гольдбергом.

Лемма. *Справедлива оценка*

$$\beta_R \geqslant \frac{R^2+(|y(R)|-4\pi)^2}{2\pi R} + O(1),\ R\to\infty.$$

Доказательство. Будем пользоваться понятием экстремальной длины семейства кривых (см., напр., [9, с. 17—18]). Пусть λ_R — экстремальная длина семейства Γ_R кривых, соединяющих в S отрезки E_0 и E_R, $R > 0$. Длина каждой кривой из Γ_R не меньше $\{R^2 + (|y(R)| - 4\pi)^2\}^{1/2}$, а площадь области $S \cap \{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < R\}$ равна $2\pi R$. Поэтому, выбирая в качестве одной из допустимых функций ρ, фигурирующих в определении экстремальной длины [9, с. 18], функцию, равную 1 в $S \cap \{z\colon 0 < \operatorname{Re} z < R\}$ и равную 0 для прочих значений z, видим, что

$$\lambda_R \geqslant \frac{R^2+(|y(R)|-4\pi)^2}{2\pi R}. \tag{5.5}$$

С другой стороны, как показано в [10, с. 77], справедливо неравенство $\lambda_R \leqslant 2\Lambda(e^{\pi(\beta_R-\alpha)})$, где $\alpha = \max\{\operatorname{Re} w(z) : z \in E_0\}$, а $\Lambda(x)$ — функция Тейхмюллера, определяемая как модуль двухсвязной области $\boldsymbol{C} \setminus \{[-1,\ 0] \cup [x,\ +\infty)\}$. Для этой функции справедлива [10, с. 76, (4—21)] оценка $\Lambda(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \ln(16(x+1))$. Поэтому имеем

$$\lambda_R \leqslant \frac{1}{\pi}\left(\ln\left(e^{\pi(\beta_R-\alpha)}+1\right)+\ln 16\right) \leqslant \beta_R + O(1),\ R \to \infty. \tag{5.6}$$

Из (5.5) и (5.6) следует утверждение леммы.

Список литературы: 1. *Островский И. В.* Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом на криволинейном контуре, I // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 56. С. 95—105. 2. *Островский И. В.* Условия разрешимости однородной краевой задачи Римана с бесконечным индексом // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1991. Вып. 55. С. 3—23. 3. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн. 1990. 42, № 9. С. 1204—1213. 4. *Кац Б. А.* Об исключительном случае задачи Римана с осциллирующим коэффициентом // Изв. вузов. Математика. 1981. № 12. С. 41—50. 5. *Грудский С. М.* Сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом и произведения Бляшке // Math. Nachr. 1986. **120**. P. 313—331. 6. *Камынин И. П., Островский И. В.* О нулевых множествах целых эрмитов-положительных функций // Сиб. мат. журн. 1982. 23, № 3. С. 66—82. 7. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. М., 1986. 240 с. 8. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 592 с. 9. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М., 1969. 134 с. 10. *Ahlfors L.* Conformal invariants. New York, 1973. 157 p.

Поступила в редколлегию 10.12.90