УДК 517.946.9

Л. В. БЕРЛЯНД

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТЯХ С МЕЛКОЗЕРНИСТОЙ ГРАНИЦЕЙ. II

Нестационарная задача. Рассмотрим задачу о колебаниях упругого тела с пустотами, описанного в первой части работы*

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}^{(s)}}{\partial t^2} + A^0 \vec{u}^{(s)} = 0; \; x \in G^{(s)}; \; t > 0; \tag{1}$$

$$\vec{t}\,(\vec{u}^{(s)}|_{\partial F^{(s)}} = 0; \; \vec{u}^{(s)}|_{\partial G} = 0; \; t > 0; \tag{2}$$

---

* Берлянд Л. В. Задача о колебаниях и собственных значениях упругого тела с пустотами. I.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1982, вып. 39.

$$\vec{u}^{(s)}(x,\ 0)=\vec{\varphi}(x);\ \ \frac{\partial u^{(s)}}{\partial t}(x,\ 0)=\vec{\psi}(x), \tag{3}$$

где ρ — плотность среды, функции $\vec{\varphi}(x)$, $\vec{\psi}(x)$ из $C_0^2(G)$.

Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Если выполнены условия 1) и 2) теоремы 1, то решения $u^{(s)}(x,\ t)$ задачи (1) — (3) при каждом $t>0$ сходятся в смысле теоремы 1 к решению такой осредненной задачи*

$$\rho b\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{iklm}\varepsilon_{lm}(\vec{u})\right)\vec{e}_k=0,\ \ x\in G,\ \ t>0; \tag{4}$$

$$\vec{u}\,|_{\partial G}=0; \tag{5}$$

$$\vec{u}(x,\ 0)=\vec{\varphi}(x);\ \ \frac{\partial\vec{u}}{\partial t}(x,\ 0)=\vec{\psi}(x). \tag{6}$$

Таким образом, исходное изотропное упругое тело с пустотами колеблется как сплошное упругое тело, вообще говоря, неоднородное и анизотропное с коэффициентами упругости $a_{iklm}(x)$ и плотностью $\rho b(x)$.

Доказательство. Обозначим через $L_2^b(G)$ гильбертово пространство вектор-функций, в котором скалярное произведение берется с весом $b(x)$. Введем следующие операторы:

1. $Q^{(s)}$ — оператор вложения $L_2(G^{(s)})$ в $L_2(G)$ $[Q^{(s)}\vec{g}](x)=\begin{cases}\vec{g}(x), & x\in G^{(s)}\\ 0, & x\in F^{(s)}\end{cases}$ $(\vec{g}\in L_2(G^{(s)}))$.

2. $P^{(s)}$ — оператор ограничения $L_2(G)$ на $L_2(G^{(s)})$ $[P^{(s)}\vec{f}](x)=\vec{f}(x)$, $x\in G^{(s)}$ $(\vec{f}\in L_2(G))$.

3. $\tilde{A}^{(s)}\vec{u}=-\mu\Delta\vec{u}-(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{u}$; $D_{\tilde{A}^{(s)}}=\{\vec{u}^{(s)}\colon \vec{u}^{(s)}\in C^2(G^{(s)})\cap C^1(\bar{G}^{(s)});\ \vec{t}(\vec{u}^{(s)})|_{\partial F^{(s)}}=0;\ \vec{u}^{(s)}|_{\partial G}=0\}$.

4. $\tilde{A}\vec{u}=-b^{-1}\frac{\partial}{\partial x_l}(a_{iklm}(x)\,\varepsilon_{lm}((\vec{u}))\,\vec{e}_k$; $D_{\tilde{A}}=\{\vec{u}:\vec{u}\in C^2(G)\cap C^1(\bar{G}),\ \vec{u}|_{\partial G}=0\}$.

Операторы $\tilde{A}^{(s)}$, $\tilde{A}$ положительно определены и симметричны в $L_2(G^{(s)})$ и $L_2^b(G)$ соответственно. Поэтому можно построить их самосопряженные расширения по Фридрихсу. Эти расширения обозначим соответственно $A^{(s)}$ и A. Предположим, что функции $\vec{\varphi}$ и $\vec{\psi}$ удовлетворяют условию $\vec{\varphi}$, $\vec{\psi}\in D_A$.

Известно [1], что в этом случае решение задачи (4) — (6) можно представить в виде

$$\vec{u}(x,\ t) = \int_0^\infty \cos\sqrt{\nu}\, t dE_\nu \varphi + \int_0^\infty \nu^{-\frac{1}{2}} \sin\sqrt{\nu}\, t dE_\nu \vec{\psi}, \tag{7}$$

где E_ν — разложение единицы оператора A.

Построим последовательность функций $\vec{\varphi}^{(s)}$ и $\vec{\psi}^{(s)}$, таких что $\vec{\varphi}^{(s)}$, $\vec{\psi}^{(s)} \in D_{\tilde{A}(s)}$ и

$$\lim_{s\to\infty} \| \vec{\varphi}^{(s)} - P^{(s)} \vec{\varphi} \|_{L_2(G^{(s)})} = 0; \ \lim_{s\to\infty} \| \vec{\psi}^{(s)} - P^{(s)} \vec{\psi} \|_{L_2(G^{(s)})} = 0. \tag{8}$$

Решение задачи (1) — (3) имеет аналогичный вид

$$\vec{u}^{(s)}(x,\ t) = \int_0^\infty \cos\sqrt{\nu}\, t dE_\nu^{(s)} \varphi^{(s)} + \int_0^\infty \nu^{-\frac{1}{2}} \sin\sqrt{\nu}\, t dE_\nu^{(s)} \varphi^{(s)}, \tag{7'}$$

где $E_\nu^{(s)}$ — разложение единицы оператора $A^{(s)}$.

Обозначим $R_\omega^{(s)}$, R_ω резольвенты операторов $A^{(s)}$, $A\,(\omega < 0)$. Если выполняются условия теоремы 1, то из нее следует, что для произвольной функции $\vec{f} \in L_2(G)$

$$\lim_{s\to\infty} \| Q^{(s)} R_\omega^{(s)} P^{(s)} \vec{f} - Q^{(s)} P^{(s)} R_\omega \vec{f} \|_{L_2(G)} = 0. \tag{9}$$

В [2] доказано, что из (9) следует аналогичное равенство для разложений единицы операторов $R_\omega^{(s)}$, R_ω

$$\lim_{s\to\infty} \| Q^{(s)} E_\nu^{(s)} P^{(s)} \vec{f} - Q^{(s)} P^{(s)} E_\nu \vec{f} \|_{L_2(G)} = 0 \tag{10}$$

для любого ν не принадлежащего дискретному спектру A. Известно, что разложения единицы операторов A и $A^{(s)}$ получаются из разложений единицы их резольвент простой заменой [3]. Поэтому (10) остается верным, если E_ν, $E_\nu^{(s)}$ разложения единицы операторов A и $A^{(s)}$. Воспользовавшись определением операторов $Q^{(s)}$ и $P^{(s)}$, а также формулами (7), (7'), (8), получаем утверждение теоремы 2.

Периодическая структура. Коэффициенты осредненного оператора $a_{iklm}(x)$ в общем случае выражаются через достаточно сложную характеристику множества $F^{(s)}$. Однако в некоторых конкретных ситуациях, например, в случае периодической структуры их можно выразить через более простые характеристики. Пусть $F^{(s)}$ — множество в области $G \subset \mathbf{R}^3$, состоящее из шаров $F_i^{(s)}$ радиуса r с центрами в узлах периодической решетки с периодами $h_k\,(h_k > 2r,\quad k = 1,\quad 2,\quad 3)$ при $s \to \infty$ $r = O(\sqrt[-3]{s}) \to 0$; $h_k = O(\sqrt[-3]{s}) \to 0$; $h_k/r = \text{const}$.

Таким образом, в области G выделены ячейки $P_i^{(s)}$ — параллелепипеды $\Pi_i^{(s)}$ со сторонами h_1, h_2, h_3, из которых выброшены шары $F_i^{(s)}$ радиуса r. Будем считать, что ребра ячеек ориентированы по координатным осям. Растянув такую ячейку в r^{-1} раз, получим параллелепипед $\Pi = \{x \in \boldsymbol{R}^3,\ |x^i| < h_i/2r,\ i = 1,\ 2,\ 3\}$ с выброшенным единичным шаром F.

В области $P = \Pi/F$ рассмотрим функцию $\vec{u}_{ik}(x)$, которая является решением задачи $A^0 \vec{u}_{ik} = 0$, $x \in P$ **(11)**; $\vec{u}_{ik} - \frac{1}{2}(x^i \vec{e}_k + x^k \vec{e}_i)$ — периодично с периодом Π **(12)**; $\vec{t}(\vec{u}_{ik})$ — периодично с периодом Π **(13)**; $\vec{t}(\vec{u}_{ik}) = 0$ $x \in \partial F$ **(14)**, где A^0 — оператор теории упругости в изотропной среде, определенный в части 1. Отметим, что вектор напряжений $\vec{t}(\vec{u})$ зависит от направления нормали и в (13) предполагается, что нормали на противоположных гранях Π сонаправлены. Задача (11) — (14) имеет единственное решение с точностью до аддитивной векторной постоянной.

Положим

$$A_{iklm} = \int\limits_P W(\vec{u}_{ik},\ \vec{u}_{lm})\, dx, \tag{15}$$

где $W(\vec{u}, \vec{u})$ — плотность потенциальной энергии упругой деформации, определенная в части 1, коэффициенты которой выражаются через λ, μ. Покажем, что в рассматриваемой ситуации коэффициенты осредненной задачи вычисляются по формулам $a_{iklm} = r^3 (h_1 h_2 h_3)^{-1} A_{iklm}$ **(16)**. Докажем (16) при $i = k = l = m = 1$. Пусть $K^0 = K(x_0, h) \subset G$ куб с центром в точке $x_0 \in G$ и ребрами длины $h > 0$, ориентированными по координатным осям. Рассмотрим в K^0 функцию $\vec{v}_{11}^{(s)}(x)$, задаваемую в каждой ячейке $P_i^{(s)} = \Pi_i^{(s)} \diagdown F_i^{(s)}$ формулой $\vec{v}_{11}^{(s)} = r\vec{u}_{11}\left(\frac{x - x_i}{r}\right) + (x_i^1 - x_0^1)\vec{e}_1$ **(17)**, где $\vec{u}_{11}(x)$ — решение задачи (11) — (14) при $i = k = 1$, x_i — центр ячейки $P_i^{(s)}$. Из граничных условий (12) — (13) следует, что на стыках ячеек функции $\vec{v}_{11}^{(s)}(x)$ и вектор напряжений $\vec{t}(\vec{u}_{11})$ непрерывны. Поэтому $\vec{v}_{11}^{(s)}$ в области $K^0 \cap G^{(s)}$ удовлетворяет уравнению $A^0 \vec{v}_{11}^{(s)} = 0$, а на границах шаров $F_i^{(s)}$ вектор напряжений равен нулю. Будем искать функцию $\vec{g}_{11}^{(s)}$ минимизирующую функционал $T_R(s, h, x_0)$, когда тензор R_{ik} имеет единственную отличную от нуля компоненту $R_{11} = 1$ в виде $\vec{g}_{11}^{(s)} = \vec{v}_{11}^{(s)} + \vec{w}^{(s)}$ **(18)**. Из определения функционала $T_R(s, h, x_0)$ следует, что $\vec{w}^{(s)}$ минимизирует функционал

$$I(\vec{w}^{(s)}) = \int\limits_{K^0 \cap G^{(s)}} \{W(\vec{w}^{(s)}) + h^{-2-\theta} |w^{(s)}|^2\} \, dx +$$

$$+ 2 \int\limits_{\partial K^0 \cap G^{(s)}} (\vec{t}(v_{11}^{(s)}), \ \vec{w}^{(s)}) \, d\Gamma + 2h^{-2-\theta} \int\limits_{K^0 \cap G^{(s)}} (\vec{v}_{11}^{s} -$$

$$- (x^1 - x_0^1) \vec{e}_1, \ \vec{w}^{(s)}) \, dx. \qquad (19)$$

Так как $I(0) = 0$, то $I(w^{(s)}) \leqslant 0$, поэтому

$$\int\limits_{K^0 \cap G^{(s)}} \{W(\vec{w}^{(s)}) + h^{-2-\theta} |\vec{w}^{(s)}|^2\} \, dx \leqslant 2 \int\limits_{\partial K^0 \cap G^{(s)}} |(\vec{t}(v^{(s)}, \ \vec{w}^{(s)})| \, d\Gamma +$$

$$+ 2h^{-2-\theta} \int\limits_{K^0 \cap G^{(s)}} |(\vec{w}^{(s)}, \ \vec{v}_{11}^{(s)} - (x^1 - x_0^1) \vec{e}_1)| \, dx. \qquad (20)$$

Оценим правую часть этого неравенства

$$\int\limits_{K^0 \cap G^{(s)}} |\vec{v}_{11}^{(s)} - (x_1 - x_0^1) \vec{e}_1|^2 \, dx = \sum_i r^2 \int\limits_{K^0 \cap P_i^{(s)}} \left| \vec{u}_{11} \left(\frac{x - x_i}{r} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{x^1 - x_i^1}{r} \vec{e}_1 \right|^2 dx \sim r^5 h^3 / (h_1 h_2 h_3) \int\limits_P |\vec{u}_{11}(\xi) - \xi^1 \vec{e}_1|^2 \, d\xi, \qquad (21)$$

где $\xi = \dfrac{x}{r}$

$$\int\limits_{\partial K^0 \cap G^{(s)}} |\vec{t}(v_{11}^{(s)})|^2 \, d\Gamma \leqslant 2h^2 r^2 \frac{h_1 + h_2 + h_3}{h_1 h_2 h_3} \max_{\Gamma} \int\limits_{\Gamma \cap P} |\vec{t}(\vec{u}_{11})|^2 \, d\Gamma, \qquad (22)$$

где Γ — плоскость, параллельная координатным осям $\Gamma = \{\xi \in | R^3; \xi_k = t\}$ $(-h_k/2r \leqslant t \leqslant h_k/2r, \ k = 1, \ 2, \ 3)$.

Продолжим функцию $\vec{w}^{(s)} \in H^1(K^0 \cap G^{(s)})$ на множество $F^{(s)}$ так, чтобы полученная функция $\vec{\tilde{w}}^{(s)}$ удовлетворяла неравенствам

$$\int\limits_{\Pi_i^{(s)}} |\vec{\tilde{w}}^{(s)}|^2 \, dx \leqslant C_0 \left(r^2 \int\limits_{P_i^{(s)}} \sum \varepsilon_{lm}^2 (\vec{\tilde{w}}^{(s)}) \, dx + \int\limits_{P_i^{(s)}} |\vec{w}^{(s)}|^2 \, dx \right); \qquad (23)$$

$$\int\limits_{\Pi_i^{(s)}} \sum \varepsilon_{lm}^2 (\vec{\tilde{w}}^{(s)}) \, dx \leqslant C_1 \int\limits_{P_i^{(s)}} \sum \varepsilon_{lm}^2 (\vec{w}^{(s)}) \, dx \qquad (24)$$

(такое продолжение построено в первой части работы).

Для функции $\vec{\tilde{w}}^{(s)}$ справедливо неравенство ([5])

$$\int_{\partial K^0} |\vec{\tilde{w}}^{(s)}|^2 d\Gamma \leqslant 6\varepsilon \int_{K^0} |\nabla \vec{\tilde{w}}^{(s)}|^2 dx + 6\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{h}\right) \int_{K^0} |\vec{\tilde{w}}|^2 dx, \quad (25)$$

где ε — произвольное положительное число. Для того, чтобы оценить правую часть в (25), воспользуемся вторым неравенством Корна [6]

$$C'\left(\int_{K^0} \left\{\sum \varepsilon_{lm}^2 (\vec{\tilde{w}}^{(s)}) + |\vec{\tilde{w}}^{(s)}|^2\right\} dx\right) \geqslant \int_{K^0} \{ |\nabla \vec{\tilde{w}}|^2 + |\vec{\tilde{w}}|^2\} dx. \quad (26)$$

Получаем

$$\int_{\partial K^0} |\vec{\tilde{w}}^{(s)}|^2 d\Gamma \leqslant 6\varepsilon C' \int_{K^0} \sum \varepsilon_{lm}^2 (\vec{\tilde{w}}^{(s)})\, dx +$$
$$+ 6\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{h} + C'\varepsilon\right) \int_{K_0} |\vec{\tilde{w}}^{(s)}|^2 dx.$$

Выбирая $\varepsilon = h^{1+\frac{\theta}{2}}$ с учетом (23) и (24), получаем неравенство

$$\int_{\partial K^0 \cap G^{(s)}} |\vec{w}^{(s)}|^2 d\Gamma \leqslant Ch^{1+\frac{\theta}{2}} \int_{K^0 \cap G^{(s)}} \left\{\sum \varepsilon_{lm}^2 (\vec{w}^{(s)}) + h^{-2-\theta} |\vec{w}^{(s)}|^2\right\} dx. \quad (27)$$

В силу (21), (22) и (27) правую часть в (20) можно оценить

$$2\int_{\partial K^0 \cap G^{(s)}} |(\vec{t}(\vec{v}_{11}^{(s)}), \vec{w}^{(s)})|\, d\Gamma + 2h^{-2-\theta} \int_{K^0 \cap G^{(s)}} |(\vec{w}^{(s)},$$
$$\vec{v}_{11}^{(s)} - (x^1 - x_0^1)\, \vec{e}_1|^2 dx \leqslant C\left(rh^{\frac{1-\theta}{2}} + h^{\frac{3}{2}+\frac{\theta}{4}}\right) \times$$
$$\times \int_{K^0 \cap G^{(s)}} \{W(\vec{w}^{(s)}) + h^{-2-\theta} |\vec{w}^{(s)}|\}\, dx.$$

Поэтому из (20) следует, что при $s \geqslant s(h)$

$$\int_{K^0 \cap G^{(s)}} \{W(\vec{w}^{(s)}) + h^{-2-\theta} |\vec{w}^{(s)}|^2\}\, dx \leqslant Ch^{3+\frac{\theta}{2}}. \quad (28)$$

Теперь, используя (17), (18), (15) и условие 2) теоремы 1 с помощью оценок (28), (21), приходим к требуемому равенству (16).

Из симметрии ячеечной задачи (11)—(14) относительно перестановки индексов i и k и формулы (15) ясно, что коэффициенты осредненной задачи удовлетворяют соотношениям симметрии $a_{iklm} = a_{lmik} = a_{kilm} = a_{kiml}$. (29). Поэтому осредненные уравнения описывают сплошное однородное упругое тело, вообще говоря, анизотропное. Если же пространственная решетка кубическая, т. е. $h_1 = h_2 = h_3$, то среди коэффициентов осредненной задачи не более трех различных. Это означает, что осредненные уравнения описывают ортотропную упругую среду, обладающую кубической симметрией.

Докажем это утверждение, причем для простоты рассмотрим двумерный случай. Положим $h/2r = 1$. Из (15), (11) — (14) ясно, что $a_{1111} = a_{2222}$, $a_{1122} = a_{2211}$, $a_{1212} = a_{2112} = a_{1221} = a_{2121}$. Остается доказать, что $a_{1112} = 0$, т. е. $A_{1112} = 0$. Воспользовавшись формулой Бетти [7], получаем

$$A_{1112} = \int\limits_P W(\vec{u}_{11}, \vec{u}_{12})\,dx = \int\limits_{\partial P} (\vec{t}(\vec{u}_{11}), \vec{u}_{12})\,d\Gamma =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (\vec{t}(\vec{u}_{11}(1, x_2)), \vec{u}_{12}(1, x_2))\,dx_2 + \int\limits_{-1}^{1} (\vec{t}(\vec{u}_{11}(-1, x_2)),$$

$$\vec{u}_{12}(-1, x_2))\,dx_2 + \int\limits_{-1}^{1} (\vec{t}(\vec{u}_{11}(x_1, 1)), \vec{u}_{12}(x_1, 1))\,dx_1 +$$

$$+ \int\limits_{-1}^{1} (\vec{t}(\vec{u}_{11}(x_1, -1)), \vec{u}_{12}(x_1 - 1))\,dx_1. \qquad (30)$$

Из условия (13), учитывая знаки нормали, следует, что $\vec{t}(\vec{u}_{11}(1, x^2)) = -\vec{t}(\vec{u}_{11}(-1, x^2))$ **(31)**. Из (12) получаем $\vec{u}_{12}(1, x^2) - \vec{u}_{12} \times \times (-1, x^2) = \vec{e}_2$. Таким образом,

$$\int\limits_{-1}^{1} \vec{t}(\vec{u}_{11}), \vec{u}_{12}(1, x^2))\,dx^2 + \int\limits_{1}^{1} (\vec{t}(\vec{u}_{11}), \vec{u}_{12}(-1, x^2))\,dx^2 =$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} (\vec{t}(\vec{u}_{11}(1, x^2)), \vec{e}_2)\,dx^2. \qquad (32)$$

Выпишем разложение вектора напряжений по базису $\vec{t}(\vec{u}_{11}(1, x^2)) = = \tau_{11}(1, x^2)\vec{e}_1 + \tau_{21}(1, x^2)\vec{e}_2$; $\vec{t}(\vec{u}_{11}(-1, x^2)) = -\tau_{11}(-1, x^2) \times \vec{e}_1 - -\tau_{21}(-1, x^2)\vec{e}_2$, **(33)**, где τ_{ik} — компоненты тензора напряжений. Из (13) следует, что $\tau_{21}(1, x^2) = \tau_{21}(-1, x^2)$ **(34)**. Покажем, что $\tau_{21}(1, x^2) = -\tau_{21}(-1, x^2)$ **(35)**. Рассмотрим функцию $\vec{v}(x^1, x^2) = = (-\overset{1}{u}_{11}(-x^1, x^2), \overset{2}{u}_{11}(-x^1, x^2))$. Легко видеть, что эта функция является решением задачи (11) — (14), поэтому $\vec{v}(x^1, x^2) = \vec{u}_{11} \times \times (x^1, x^2)$ и, следовательно, $\tau_{21}(\vec{u}_{11}(1, x^2)) = \tau_{21}(\vec{v}(1, x^2)) =$

$= -\mu\left(\frac{\partial u^1}{\partial x_2}(-1,\ x^2) + \frac{\partial u^2}{\partial x_1}(-1,\ x^2)\right) = -\tau_{21}(u_{11}(-1, x^2))$, т. е. доказали (35). Из (33) — (35) следует, что вектор $\vec{t}(\vec{u}_{11}(1,\ x^2))$ ортогонален $\vec{e}_2$. Поэтому из (32) следует, что сумма первых двух интегралов в правой части (30) равна нулю. Аналогично можно показать, что и сумма двух оставшихся интегралов в правой части (30) равна нулю.

Список литературы: 1. *Морен К.* Методы гильбертова пространства.—М.: Мир, 1965, с. 426—432. 2. *Берлянд Л. В.* О сходимости разложений единицы операторов второй краевой задачи.—Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1980, вып. 33, с. 3—7. 3. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей.—К.: Наук. думка, 1974. —285 с. 4. *Хруслов Е. Я.* О сходимости решений второй краевой задачи в слабо связанных областях.—Теория операторов в функцион. пространствах и ее прил. 1981, с. 129—174. 5. *Хруслов Е. Я.* Асимптотическое поведение решений второй краевой задачи при измельчении границы области.— Мат. сб., 1978, **106**, вып. 4, с. 604—621. 6. *Дюво Г., Ж—Л Лионс.* Неравенства в механике и физике.—М.: Наука, 1980, с. 110—111. 7. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала.—М.: Гостехиздат, 1952.—214 с.

Поступила в редколлегию 01.07.81.