

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

И. Г. Витензон

(Х а р ь к о в)

§ 1. Введение

В работах, посвящённых динамике тел переменной массы, изучается, как правило, движение такого тела по отношению к галилеевой, инерциальной системе отсчёта. Исключения представляют собой работы, посвящённые проблеме двух тел переменной массы, где речь, естественно, идёт об относительном движении двух взаимодействующих материальных точек. Однако и в этих работах авторы не пользуются общей теорией относительного движения переменной массы, а применяют, обычно, уравнение вида (2.8), имеющее, как будет показано ниже, ограниченное поле применения в случае тел переменной массы.

Настоящая работа посвящена, прежде всего, выводу общих дифференциальных уравнений относительного движения материальной точки переменной массы, т. е. её движения по отношению к любой неинерциальной системе координат, а также некоторым применениям этих уравнений к общей задаче двух тел. Этим результатам посвящён § 2.

Далее, в § 3 даны дифференциальные уравнения относительного движения свободной материальной точки переменной массы в гравитационном поле вращающейся Земли. При выводе этих уравнений оказывается необходимым пересмотреть понятие о весе. Последние параграфы посвящены приложениям дифференциальных уравнений, приведённых в § 3, к решению двух задач. В § 4 изложены результаты решения задачи о падении испаряющейся сферической капли в сопротивляющейся среде, причём отдельно рассмотрены случаи линейного и квадратичного закона для сил сопротивления. В § 5 приводятся результаты решения задачи о движении относительно вращающейся Земли материальной точки переменной массы, брошенной под некоторым углом к горизонтальной плоскости.

§ 2. Дифференциальные уравнения относительного движения

Дифференциальные уравнения движения материальной точки переменной массы в инерциальной, галилеевой системе координат были выведены И. В. Мещерским [1]. Они соответствуют векторному равенству

$$m(t) \frac{dv}{dt} = F + (u - v) \frac{dm}{dt}. \quad (2.1)$$

Здесь $m(t)$ — зависящая от времени масса движущейся материальной точки, $\mathbf{F}$ — главный вектор сил, приложенных к этому телу, $\mathbf{v}$ — его скорость, $\mathbf{u}$ — скорость частиц, изменяющих массу основного тела (так называемых изменяющих частиц) в момент изменения ими массы основного тела.

Пользуясь обычным в механике методом, нетрудно из уравнений И. В. Мещерского получить общие дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки переменной массы.

Рассмотрим материальную точку переменной массы, движущуюся относительно некоторого твёрдого тела, обладающего, в свою очередь, произвольным, но заданным движением по отношению к инерциальной системе осей.

Пусть $\vec{\omega}$ представляет собой вектор мгновенной угловой скорости переноса твёрдого тела, $\mathbf{v}^*$ — вектор относительной скорости материальной точки переменной массы, $\mathbf{v}'$ — вектор переносной скорости этой точки, $\mathbf{w}^*$ и $\mathbf{w}'$ — вектора относительного и переносного ускорения этой точки, $\mathbf{u}^*$ и $\mathbf{u}'$ — вектора относительной и переносной скорости изменяющих частиц в момент изменения ими массы основного тела. Тогда относительное движение материальной точки переменной массы описывается равенством

$$m(t) \mathbf{w}^* = \mathbf{F} + (\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^* + \mathbf{u}' - \mathbf{v}') \frac{dm}{dt} - m(t) \mathbf{w}' - 2m(t) [\vec{\omega} \mathbf{v}^*]. \quad (2.2)$$

Условие относительного равновесия этой точки имеет вид

$$\mathbf{F} + (\mathbf{u}^* + \mathbf{u}' - \mathbf{v}') \frac{dm}{dt} - m(t) \mathbf{w}' = 0. \quad (2.3)$$

Интересен тот случай, когда можно считать переносные скорости основного тела и изменяющих частиц равными между собой

$$\mathbf{u}' = \mathbf{v}'. \quad (2.4)$$

Это будет иметь место, например, в том случае, когда переносящее твёрдое тело движется поступательно. На вращающейся Земле этому соответствует предположение, что географическая широта и долгота основного тела и изменяющих частиц в момент изменения ими массы имеют всегда одинаковое значение.

При соблюдении условия (2.4) равенства (2.2) и (2.3) превращаются соответственно в равенства

$$m(t) \mathbf{w}^* = \mathbf{F} + (\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*) \frac{dm}{dt} - m(t) \mathbf{w}' - 2m(t) [\vec{\omega} \mathbf{v}^*]; \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F} + \mathbf{u}^* \frac{dm}{dt} - m(t) \mathbf{w}' = 0. \quad (2.6)$$

Равенство (2.6) мы используем ниже при введении понятия о весе тела переменной массы. Но прежде всего применим уравнение (2.5) к общей задаче двух тел переменной массы.

Рассмотрим две взаимодействующие материальные точки M_1 и M_2 переменных масс $m_1(t)$ и $m_2(t)$, движущиеся по отношению к некоторой инерциальной системе координат. Свяжем с точкой M_1 подвижную систему осей, направление которых будет всё время совпадать с направлением осей инерциальной системы. Рассмотрим движе-

ние точки M_2 относительно осей, связанных с точкой M_1 . В этом случае имеет место условие (2.4), поэтому для описания интересующего нас движения точки M_2 воспользуемся уравнением (2.5). Будем пользоваться до сих пор, обозначая дополнительно индексом (1) величины, относящиеся к точке M_1 , и индексом (2) — относящиеся к точке M_2 . Тогда, постулируя для взаимодействия тел переменной массы закон равенства действия и противодействия, мы получим, на основании (2.1) и (2.5), следующее уравнение относительного движения тела M_2 :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{w}_2^* = \mathbf{F} + (\mathbf{u}_2^* - \mathbf{v}_2^*) \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{dm_2}{dt} - (\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{dm_1}{dt}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим два частных случая.

Пусть $\mathbf{u}_2^* - \mathbf{v}_2^* = \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 = 0$ и $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 = 0$.

Это значит, что на обоих телах центр масс изменяющих частиц в момент изменения массы неподвижен относительно соответствующего основного тела. Как видно из (2.1), реактивная сила изменяющих частиц на обоих телах при этом равна нулю. Уравнение (2.7) даёт

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{w}_2^* = \mathbf{F}. \quad (2.8)$$

Получаем классический результат Ньютона (Principia, кн. I, раздел 11) с тем отличием, что приведённая масса системы

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

будет величиной переменной.

Пусть

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 = -(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) = -(\mathbf{u}_2^* - \mathbf{v}_2^*) \quad \text{и} \quad m_1 + m_2 = \text{const.}$$

Сумма масс остаётся постоянной, а скорости изменяющих частиц, вычисленные относительно основного тела в каждый момент изменения массы на обоих телах равны по величине и противоположны по направлению. Такой случай представится, например, если масса, теряемая одним телом, целиком переходит на другое при соблюдении указанного условия для относительных скоростей изменяющих частиц. В этом случае уравнение (2.7) даёт

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{w}_2^* = \mathbf{F} + (\mathbf{u}_2^* - \mathbf{v}_2^*) \frac{d}{dt} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right). \quad (2.9)$$

Сравнение с уравнением И. В. Мещерского (2.1) показывает, что в этом случае тело M_2 движется относительно тела M_1 так, как если бы тело M_1 было неподвижно или двигалось прямолинейно и равномерно, а тело M_2 имело переменную массу, равную приведённой массе системы.

Запишем теперь равенство (2.7) в таком виде

$$m_2 w_2^* = \frac{m_1 + m_2}{m_1} F + (u_2^* - v_2^*) \frac{dm_2}{dt} - (u_1 - v_1) \frac{m_2}{m_1} \frac{dm_1}{dt}. \quad (2.7)'$$

Из этого уравнения видно, что если масса $m_2(t)$ при любом значении t будет достаточно мала по сравнению с массой $m_1(t)$, то тогда относительное движение тела M_2 по отношению к телу M_1 будет описываться с достаточной степенью точности равенством

$$m_2 w_2^* = F + (u_2^* - v_2^*) \frac{dm_2}{dt}, \quad (2.10)$$

т. е. это движение будет происходить так, как если бы просто тело M_1 было неподвижно или двигалось прямолинейно и равномерно.

Предположим, что масса m_1 тела M_1 остаётся постоянной. Тогда из (2.7)' получаем

$$m_1 m_2 w_2^* = (m_1 + m_2) F + (u_2^* - v_2^*) \frac{d}{dt} (m_1 m_2). \quad (2.11)$$

Это значит, что материальная точка M_2 переменной массы движется относительно материальной точки M_1 постоянной массы так, как если бы точка M_1 была неподвижной, но при этом масса точки M_2 возросла в m_1 раз, а сила, на неё действующая, изменила свою величину, увеличившись в $(m_1 + m_2)$ раз. Аналогичный результат получается и в том случае, когда обе массы изменяются, но

$$u_1 - v_1 = -(u_2^* - v_2^*).$$

Если сила взаимодействия F является силой Ньютоновского притяжения, то классический по форме результат, гласящий, что точка M_2 движется относительно точки M_1 так, как если бы тело M_1 было неподвижным и обладало массой, равной сумме масс $m_1 + m_2$, мы получаем в таких случаях:

- 1) когда $u_1 - v_1 = 0$, т. е. когда частицы, изменяющие массу тела M_1 , не оказывают на него реактивного воздействия;
- 2) когда масса тела M_1 остаётся постоянной.

В некоторых работах, посвящённых задаче двух тел переменной массы, авторы пользуются дифференциальными уравнениями, соответствующими равенству (2.8). Приведённые выше результаты показывают ограниченность поля применения таких уравнений.

§ 3. Дифференциальные уравнения относительного движения на Земле

Рассмотрим материальную точку переменной массы $m(t)$, движущуюся относительно Земли, массу которой будем считать постоянной. Для введения понятия о весе этой материальной точки рассмотрим математический маятник, находящийся в положении относительного равновесия и такой, что его масса меняется так же, как и у движущейся материальной точки. Примем для тел переменной массы справедливость обычной формы закона всемирного тяготения и определим и для тела переменной массы $m(t)$ вес, как силу

$$P = -T,$$

где T — реакция нити нашего отвеса.

Тогда, согласно условию относительного равновесия (2.6), получаем для веса тела переменной массы выражение

$$\mathbf{p} = m(t) \mathbf{g} + \mathbf{u}^* \frac{dm}{dt}. \quad (3.1)$$

Здесь вектор $\mathbf{g}$ — обычное ускорение свободного падения тела постоянной массы, направленное по вертикали и сохраняющее на данной широте постоянное значение, а вектор $\mathbf{u}^*$ — скорость относительно Земли изменяющих массу частиц.

Пусть на точку переменной массы, движущуюся относительно Земли со скоростью $\mathbf{v}^*$, действует только сила Ньютонианского притяжения к центру Земли и сила сопротивления $\mathbf{D}$. Тогда, согласно (2.5), ускорение $\mathbf{w}^*$ этой точки относительно Земли определяется равенством

$$m(t) \mathbf{w}^* = \mathbf{D} + \mathbf{p} - \mathbf{v}^* \frac{dm}{dt} - 2m(t) [\vec{\omega} \mathbf{v}^*], \quad (3.2)$$

где $\vec{\omega}$ — угловая скорость суточного вращения Земли.

Последнее равенство можно переписать, согласно (3.1), в таком, более удобном для составления дифференциальных уравнений движения, виде

$$\mathbf{w}^* = \frac{1}{m} \mathbf{D} + \mathbf{g} + (\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^*) \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} - 2[\vec{\omega} \mathbf{v}^*]. \quad (3.3)$$

Если силы сопротивления отсутствуют, то уравнение (3.3) не будет содержать массу и, следовательно, будет таким же, как и для тела постоянной массы в следующих случаях:

1) Скорость изменяющих частиц относительно основного тела в момент изменения массы всегда равна нулю, т. е.

$$\mathbf{u}^* - \mathbf{v}^* = 0.$$

Изменяющие частицы не оказывают в этом случае реактивного воздействия на основное тело.

2) Величина $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$ достаточно мала во всё время движения, т. е. масса $m(t)$ велика по сравнению со скоростью своего изменения.

В этих случаях, при отсутствии сил сопротивления, движение основного тела относительно Земли будет происходить так, как если бы его масса не изменялась.

При наличии сил сопротивления $\mathbf{D}$ уравнение (3.3) будет содержать массу, и движение тела переменной массы будет существенно отличаться от аналогичного движения тела постоянной массы.

Перейдём теперь к применениям уравнения (3.3).

§ 4. Падение испаряющейся капли в сопротивляющейся среде

Рассмотрим однородную шарообразную каплю, с поверхности которой происходит испарение, благодаря чему её масса является некоторой монотонно убывающей функцией времени. Допустим, что начальная скорость капли равна нулю

$$v_0^* = 0$$

и что изменение массы при испарении происходит так, что капля во всё время движения остаётся шарообразной, а скорость центра масс

слоя испаряющихся частиц, вычисленная относительно центра капли, всегда равна нулю в момент отделения этого слоя от капли. Это будет иметь место, например, в простейшем случае, когда испарение происходит с центральной симметрией.

Такое предположение относительно скорости изменяющихся частиц означает, что

$$u^* - v^* = 0 \quad (4.1)$$

Наличие сил сопротивления (роль которых в рассматриваемом явлении весьма существенна) усложняет задачу, так как в этом случае коэффициенты в уравнении (3.3) будут являться функциями времени. Мы рассмотрим прежде всего тот случай, когда сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости. В дальнейшем будет рассмотрен и случай квадратичного закона.

Свяжем с Землёй обычную прямоугольную систему осей, направленных соответственно к востоку, северу и вертикально вверх. Составив на основании (3.3) и (4.1) дифференциальные уравнения относительного движения центра капли, можно, прежде всего, применяя метод последовательных приближений, доказать, что в первом приближении относительно угловой скорости суточного вращения Земли координаты y и z центра капли будут меняться по тому же закону, что и в нулевом приближении, т. е. при предположении, что $\omega = 0$. Поэтому, ставя своей задачей изучение вертикальной координаты и вертикальной составляющей скорости капли и ограничиваясь, при этом, первым приближением, мы положим в уравнении движения $\omega = 0$.

При линейном законе сила сопротивления

$$D = -\alpha \sigma v^*. \quad (4.2)$$

Здесь α — положительный численный коэффициент, а σ — переменное при испарении мидделеево сечение капли, равное

$$\sigma = \pi^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{m}{\rho} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (4.3)$$

где ρ — постоянная плотность капли.

Введём в рассмотрение положительный численный коэффициент

$$\lambda = \alpha \pi^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{4\rho} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.4)$$

и назовём

$$m^{-\frac{1}{3}} = f(t). \quad (4.5)$$

Функция $f(t)$ положительна и монотонно возрастает в области определения функции $m(t)$.

Для составляющей скорости центра капли в вертикальном направлении получается такое решение дифференциального уравнения

$$v_z = -g \cdot \exp \left(-\lambda \int_0^t f(t) dt \right) \cdot \int_0^t \exp \left(\lambda \int_0^t f(t) dt \right) dt. \quad (4.6)$$

Задавая закон изменения массы, воспользуемся законом испарения сферических капель жидкости, принятым в метеорологии. Этот

закон выводится из уравнения диффузии и проверен в ряде экспериментальных работ для достаточно крупных капель [2], [3], [4]. Мы будем считать этот закон справедливым во всё время движения капли, как бы мал ни делался при этом её радиус.

Согласно этому закону поверхность S капли при её испарении убывает с постоянной скоростью

$$\frac{dS}{dt} = -c \quad (c > 0). \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что масса капли меняется по закону

$$m(t) = (a - bt)^{\frac{3}{2}}, \quad (4.8)$$

где

$$a = m_0^{\frac{2}{3}} = (4\pi)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{\rho}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot S_0, \quad (4.9)$$

$$b = (4\pi)^{-\frac{1}{3}} \left(\frac{3}{\rho}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot c. \quad (4.10)$$

Из (4.8) видно, что масса капли, монотонно убывая, обращается в нуль за конечное время.

Капля обладает продолжительностью жизни, равной

$$\bar{t} = \frac{a}{b} = \frac{S_0}{c}. \quad (4.11)$$

Это равенство получило экспериментальное подтверждение в работе Е. Г. Зак [3]. Если воспользоваться законом изменения массы капли (4.8), то равенство (4.6) даёт

$$v_z = -g \left\{ \frac{1}{\lambda} \sqrt{a - bt} + \frac{b}{2\lambda^2} - \left(\frac{\sqrt{a}}{\lambda} + \frac{b}{2\lambda^2} \right) e^{-\frac{2\lambda}{b}(\sqrt{a} - \sqrt{a - bt})} \right\}. \quad (4.12)$$

Исследование этой функции показывает, что скорость падения капли по своей абсолютной величине меняется следующим образом. Начиная от начального момента времени, когда она равна нулю, скорость растёт, достигает в определённый момент своего максимального значения, после чего, убывая, стремится при $t \rightarrow \frac{a}{b}$, т. е. к моменту полного испарения, к определённому, отличному от нуля пределу.

Максимум скорости достигается при

$$t = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \left[\sqrt{a} - \frac{b}{2\lambda} \ln \left(1 + \frac{2\lambda \sqrt{a}}{b} \right) \right]^2 \quad (4.13)$$

и равен

$$v_{\max} = g \left\{ \frac{\sqrt{a}}{\lambda} - \frac{b}{2\lambda^2} \ln \left(1 + \frac{2\lambda \sqrt{a}}{b} \right) \right\}. \quad (4.14)$$

Предельная скорость при $t \rightarrow \frac{a}{b}$ равна

$$\bar{v} = g \left\{ \frac{b}{2\lambda^2} - \left(\frac{\sqrt{a}}{\lambda} + \frac{b}{2\lambda^2} \right) e^{-\frac{2\lambda \sqrt{a}}{b}} \right\}. \quad (4.15)$$

Заметим, что, рассматривая в (4.12) скорость как функцию параметра b , пропорционального скорости с изменения поверхности капли, мы получаем при

$$b \rightarrow 0$$

известный в механике тел постоянной массы результат, а именно монотонный рост скорости, стремящейся при $t \rightarrow \infty$ к пределу

$$\bar{v} = \frac{m_0 g}{\alpha \sigma_0}.$$

Указанные особенности в поведении скорости испаряющейся капли связаны со следующим характером изменения вертикальной проекции ускорения, равной

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{g}{\sqrt{a-bt}} \left\{ \frac{b}{2\lambda} - \left(\sqrt{a} + \frac{b}{2\lambda} \right) e^{-\frac{2\lambda}{b}(\sqrt{a} - \sqrt{a-bt})} \right\}. \quad (4.16)$$

В начальный момент времени это ускорение равно g и направлено вертикально вниз. Затем оно убывает и в момент времени, определяемый равенством (4.13), обращается в нуль. После этого ускорение делается направленным вертикально вверх и растёт неограниченно, так что

$$\frac{dv_z}{dt} \rightarrow +\infty, \quad \text{когда } t \rightarrow \frac{a}{b}.$$

Анализ изменения сил, действующих на испаряющуюся каплю, позволяет объяснить эти особенности в поведении скорости и ускорения. Вес капли всё время направлен вниз и монотонно убывает от значения $p_0 = m_0 g$ в начальный момент до нуля при $t \rightarrow \frac{a}{b}$. Сила сопротивления направлена вверх и меняется не монотонно, она равна нулю в начальный момент (так как $v_0 = 0$) и стремится, как и вес, к нулю при $t \rightarrow \frac{a}{b}$ (так как мидделеево сечение стремится при этом к нулю). В первой стадии движения вес больше, чем сила сопротивления, ускорение направлено вниз, а скорость возрастает. В момент времени, определяемый равенством (4.13), обе силы оказываются равными. Во второй стадии движения, после того, как скорость достигает максимального значения, сила сопротивления становится больше чем вес, ускорение направлено вверх, а скорость убывает (вес убывает как r^3 , а сила сопротивления как r^2).

Ускорение стремится к бесконечности при $t \rightarrow \frac{a}{b}$ по следующей причине. Равнодействующая сила, равная $D - p$, при $t \rightarrow \frac{a}{b}$ убывает пропорционально r^2 (т. е. так, как и сила сопротивления), в то время как масса капли убывает как r^3 . Но в нашем случае ускорение равно силе, делённой на массу (так как в нашем случае $u^* - v^* = 0$), поэтому ускорение растёт неограниченно как $\frac{1}{r}$.

Из равенства (4.12), задавая высоту капли над горизонтальной плоскостью в начальный момент

$$z_0 = h,$$

легко определить закон изменения координаты z падающей капли.

Значение координаты z капли при $t = \frac{a}{b}$, т. е. высота над горизонтальной плоскостью, на которой капля полностью испаряется, оказывается равной

$$\bar{z} = h - g \left\{ \frac{2\sqrt{a^3}}{3b\lambda} - \frac{a}{2\lambda^2} + \frac{b^2}{4\lambda^4} - \frac{b}{2\lambda^2} \left(\frac{\sqrt{a}}{\lambda} + \frac{b}{2\lambda^2} \right) e^{-\frac{2\lambda\sqrt{a}}{b}} \right\}. \quad (4.17)$$

Отсюда видно, что капля либо упадёт на Землю, либо испарится полностью в момент достижения поверхности Земли, либо, наконец, вовсе не достигнет поверхности Земли в зависимости от того, будет ли начальная высота h соответственно меньшей, равной или большей, чем величина

$$g \left\{ \frac{2\sqrt{a^3}}{3b\lambda} - \frac{a}{2\lambda^2} + \frac{b^2}{4\lambda^4} - \frac{b}{2\lambda^2} \left(\frac{\sqrt{a}}{\lambda} + \frac{b}{2\lambda^2} \right) e^{-\frac{2\lambda\sqrt{a}}{b}} \right\}.$$

Рассмотрим теперь задачу о падении испаряющейся капли в том случае, когда сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

В этом случае для величины $v = -v_z$ получаем дифференциальное уравнение типа Риккати

$$\frac{dv}{dt} + \lambda v^2 f(t) - g = 0, \quad (4.18)$$

где функция $f(t)$ определяется равенством (4.5). Введём в рассмотрение функцию W такую, что

$$v = \frac{1}{\lambda f(t) W} \frac{dW}{dt}; \quad (4.19)$$

будем, далее, пользоваться тем же законом (4.8) изменения массы капли, что и раньше, а вместо времени введём новую независимую переменную

$$\tau = \frac{2}{b} \sqrt{a - bt}. \quad (4.20)$$

Эта переменная остаётся положительной и убывает от начального значения $\tau_0 = \frac{2\sqrt{a}}{b}$ при $t=0$ до нуля при $t = \frac{a}{b}$. Уравнение (4.18) после указанной замены приобретает вид

$$\frac{d^2 W}{d\tau^2} - \gamma \tau W = 0, \quad (4.21)$$

где $\gamma = \frac{bg\lambda}{2}$ — положительная постоянная, пропорциональная, как и b , скорости изменения поверхности капли.

Найдя из уравнения (4.21) функцию $W(\tau)$, определяем скорость

$$v = -\frac{1}{\lambda W} \frac{dW}{d\tau}. \quad (4.22)$$

Это решение получается в виде хорошо и всюду сходящихся степенных рядов.

Можно получить решение уравнения (4.21) и в известных функциях заменой переменных

$$\left. \begin{aligned} \tau^3 &= \frac{9}{4\gamma} x^2 \\ W &= x^{\frac{1}{3}} y \end{aligned} \right\}. \quad (4.23)$$

Тогда (4.21) превращается в уравнение типа Бесселя

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2) y = 0, \quad (4.24)$$

где $n^2 = \frac{1}{9}$, удовлетворяемое функцией $I_n(x)$ Бесселя мнимого аргумента.

Функцию $W(\tau)$ получаем в таком виде:

$$W = \sqrt{\tau} \left\{ c_1 I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^{\frac{3}{2}} \right) + c_2 I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^{\frac{3}{2}} \right) \right\}. \quad (4.25)$$

Множитель $\sqrt{\tau}$ имеет существенное значение, так как благодаря ему второе слагаемое правой части остаётся конечным при $\tau=0$.

Воспользовавшись известной формулой для производной от функции Бесселя мнимого аргумента, а также известной рекуррентной формулой для этих функций, мы получим для скорости, согласно равенству (4.22), следующее выражение:

$$v = -\frac{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau}}{\lambda} \cdot \frac{I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^{\frac{3}{2}} \right) + c I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^{\frac{3}{2}} \right)}{I_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^{\frac{3}{2}} \right) + c I_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau} \tau^{\frac{3}{2}} \right)}. \quad (4.26)$$

Множители τ в числителе и $\sqrt{\tau}$ в знаменателе предохраняют $I_{-\frac{1}{3}}$ и $I_{\frac{1}{3}}$ от обращения в бесконечность при $\tau=0$.

Произвольная постоянная c интегрирования определяется из условия, что $v=0$, когда $\tau = \frac{2\sqrt{a}}{b}$ при помощи известного разложения для функции $I_n(x)$. Определяя это c , можно найти далее предельную скорость при $t \rightarrow \frac{a}{b}$, т. е. когда $\tau \rightarrow 0$ при помощи того же разложе-

ния для функции $I_n(x)$. Предел скорости, когда $\tau \rightarrow 0$, при наших начальных условиях, оказывается равным

$$\frac{v}{b} = \frac{ag}{b} \cdot \frac{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k! 2^{2k} \left(\frac{2}{3} + 1\right) \cdots \left(\frac{2}{3} + k\right)}}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2k}}{k! 2^{2k} \left(-\frac{2}{3} + 1\right) \cdots \left(-\frac{2}{3} + k\right)}}, \quad (4.27)$$

где α — положительное число, равное

$$\alpha = \frac{4 \sqrt[3]{g \lambda a^{\frac{3}{2}}}}{3b}. \quad (4.28)$$

§ 5. Движение на вращающейся Земле тела переменной массы, брошенного под некоторым углом к горизонту

Выберем систему прямоугольных осей, связанных с Землёй, так же, как и в предыдущем параграфе. Пусть в северном полушарии Земли на широте φ из начала координат брошена в пустоте материальная точка переменной массы с начальной относительной скоростью v_0^* , лежащей в плоскости меридиана и образующей угол β с осью y , направленной к северу.

Предположим, что скорость u^* изменяющихся частиц относительно Земли отличается во всё время движения от аналогичной скорости v^* основного тела на постоянный вектор, т. е., что изменяющиеся частицы имеют в момент изменения массы относительно основного тела всегда одну и ту же по величине и направлению скорость.

Пусть проекции разности $u^* - v^*$ будут постоянные

$$a, b, c.$$

Предположим далее, что закон изменения массы $m(t)$ основного тела известен.

Введём такие функции времени:

$$f(t) = \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}; \quad l(t) = \int_0^t f(t) dt; \quad n(t) = \int_0^t l(t) dt; \quad h(t) = \int_0^t n(t) dt;$$

$$F(t) = 2\omega v_0^* \sin(\varphi - \beta) + 2\omega \cos \varphi \cdot gt + af(t) + 2\omega l(t) (b \sin \varphi - c \cos \varphi).$$

Составляя на основании уравнения (3.3) систему дифференциальных уравнений движения основного тела и интегрируя эти уравнения, мы получим полное решение задачи, выполнив четыре квадратуры.

Это решение имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \int_0^t F(t) \cos 2\omega t dt - \frac{\cos 2\omega t}{2\omega} \int_0^t F(t) \sin 2\omega t dt; \\ y &= tv_0^* \cos \beta + b \cdot n(t) - 2\omega \sin \varphi \int_0^t x dt; \\ z &= tv_0^* \sin \beta - \frac{gt^2}{2} + c \cdot n(t) + 2\omega \cos \varphi \int_0^t x dt. \end{aligned} \right. \quad (5.1)$$

Для получения решения в первом приближении относительно угловой скорости ω Земли нужно выполнить две последовательные квадратуры, определить функции $n(t)$ и $h(t)$.

В первом приближении координаты основного тела

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \omega v_0^* t^2 \sin(\varphi - \beta) + \omega \cos \varphi \frac{gt^3}{3} + a \cdot n(t) + 2\omega (b \sin \varphi - c \cos \varphi) h(t); \\ y &= tv_0^* \cos \beta + b \cdot n(t) - 2a\omega \sin \varphi \cdot h(t); \\ z &= tv_0^* \sin \beta - \frac{gt^2}{2} + c \cdot n(t) + 2a\omega \cos \varphi \cdot h(t). \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

При $a=b=c=0$ получаем известный результат механики тел постоянной массы, так как силы сопротивления отсутствуют, а при $\mathbf{u}^* = \mathbf{v}^* = 0$ изменяющие частицы не оказывают реактивного воздействия на основное тело.

Задачу, решение которой сейчас приведено, можно назвать прямой: в ней задано движение изменяющих частиц и требуется определить движение основного тела. Но возможны задачи и обратного типа: определить движение изменяющих частиц, при котором основное тело совершало бы заданное движение. Укажем два примера решения задач такого типа, полученные также из системы дифференциальных уравнений движения тела переменной массы, брошенного под некоторым углом к горизонту, выведенной из уравнения (3.3).

1) Для того чтобы основное тело двигалось относительно Земли прямолинейно и равномерно в направлении своей начальной скорости, необходимо и достаточно, чтобы координаты ξ, η, ζ изменяющих частиц, определяемые в момент изменения массы, были

$$\left. \begin{aligned} \xi &= 2\omega v_0^* \sin(\beta - \varphi) \int_0^t \frac{dt}{f(t)} \\ \eta &= v_0^* \cos \varphi \cdot t \\ \zeta &= v_0^* \sin \varphi \cdot t + g \int_0^t \frac{dt}{f(t)} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Здесь приняты оси координат, начальные условия и обозначения, указанные в начале § 5.

2) Для того чтобы основное тело описывало параболу по закону движения тела постоянной массы, необходимо и достаточно, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \xi &= -2\omega \cos \varphi \cdot g \int_0^t \frac{tdt}{f(t)} + 2\omega v_0^* \sin (\beta - \varphi) \int_0^t \frac{dt}{f(t)} \\ \eta &= v_0^* \cos \beta \cdot t \\ \zeta &= -\frac{gt^2}{2} + v_0^* \sin \beta \cdot t \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. И. В. Мещерский, Динамика точки переменной массы (1897).
2. Проф. Оболенский, Метеорология, ч. I, гл. VII.
3. Е. Г. Зак, Кинетика испарения капель жидкости. Журнал геофизики, т. VI, вып. 5 (1926).
4. М. Д. Кидин, Испарение капель в атмосфере газа. Сборник „Вопросы экспериментальной метеорологии“ под редакцией проф. Оболенского (1941).
5. А. А. Космодемьянский, Общие теоремы динамики тела переменной массы. Труды Академии им. Жуковского (1947).