

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬ- НЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

53|90



1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321-4427. Теория функций, функционал. анализ и их прил. 1990. Вып. 53. 1—128.

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ
ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО
ЗНАМЕНИ И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
межведомственный
научный
сборник

Основан в 1965 г.

В Ы П У С К 53

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО «ОСНОВА» ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
1990

Сборник содержит статьи по теории итераций рациональных функций и полиномов, теории субгармонических функций, проблеме моментов, аналитическим оператор-функциям, теории дифференциальных уравнений, геометрии банаховых пространств.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: *В. А. Марченко* (отв. ред.), *В. К. Дзядык* (зам. отв. ред.), *И. В. Островский* (отв. секр.), *Ю. М. Березанский*, *М. С. Бродский*, *Н. А. Давыдов*, *Л. Е. Дундученко*, *М. Г. Крейн*, *А. В. Кужель*, *Б. Я. Левин*, *Н. И. Симонов*, *И. Г. Соколов*

Адрес редакционной коллегии: 310077 Харьков, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция литературы по естественным наукам и филологии
Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

О СВЯЗЯХ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ ВИДАМИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП

Представлением топологической группы G в банаховом пространстве B называется гомоморфизм $T: G \rightarrow \text{Aut} B$, сильно непрерывный в том смысле, что все орбиты $g \rightarrow T(g)x$ ($g \in G, x \in B$) непрерывны. $\text{Aut} B$ — группа всех ограниченных и ограниченно обратимых линейных операторов $B \rightarrow B$. Представление T называется почти периодическим (п. п.), если все орбиты относительно компактны; слабо п. п., если все орбиты относительно слабо компактны; скалярно п. п., если все скалярные функции $* \tau_{f, x}(g) = f(T(g)x)$ ($x \in B, f \in B^*$) на группе G почти периодичны.

Напомним, что непрерывная ограниченная функция $\varphi(g)$ называется п. п. справа, если семейство ее правых сдвигов $\varphi_h(g) = \varphi(gh)$ ($h \in G$) относительно компактно в равномерной метрике. Аналогично определяется п. п. слева, но, в действительности, по известной лемме Маака эти две п. п. эквивалентны, и поэтому можно говорить просто п. п. С каждой группой G связана компактная группа $\bar{G}$ (боровский компакт группы G) и непрерывный гомоморфизм $R: G \rightarrow \bar{G}$ с плотным образом так, что каждая п. п. ф. $\varphi(g)$ продолжается до непрерывной функции $\bar{\varphi}$ на $\bar{G}$: $\varphi(g) = \bar{\varphi}(R(g))$. Это боровское продолжение является изометрическим изоморфизмом банаховой алгебры п. п. ф. $AP(G)$ и банаховой алгебры непрерывных функций $C(\bar{G})$. Для любого п. п. представления $\bar{T}$ группы G существует и единственно представление $\bar{T}$ боровского компакта $\bar{G}$ (в том же банаховом пространстве B), такое что $T = \bar{T}R$. Обратно, если $\bar{T}$ — какое-нибудь представление боровского компакта $\bar{G}$, то $T = \bar{T}R$ — п. п. представление группы G . Эти и дальнейшие необходимые нам сведения о банаховых представлениях имеются в работе*. Там же (с. 104—105) доказано, что, если пространство B рефлексивно, то любое скалярно п. п. представление является п. п. (обратное, очевидно, справедливо в любом банаховом пространстве). Требование рефлексивности существенно, как показывает следующий

Пример. В пространстве c сходящихся комплексных последовательностей $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty$ рассмотрим оператор A умножения на сходящуюся последовательность $\lambda = (\lambda_k)_{k=1}^\infty$. Рассмотрим представление $t \rightarrow e^{iAt}$ аддитивной группы $\mathbb{R}$. Оно скалярно п. п., но, как мы сейчас убедимся, не является п. п. даже слабо, если λ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) линейно независимы над полем рациональных чисел. Действительно, в этом случае слабое замыкание орбиты точки $u = (1, 1, \dots)$ есть множество

* Они называются обобщенными матричными элементами представления T .

всех $x = (\xi_k)_1^\infty \in c$, таких, что $|\xi_k| = 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Оно не является слабо компактным, так как, полагая

$$\xi_k^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k & (1 \leq k \leq n) \\ 1 & (k > n), \end{cases}$$

получаем последовательность $u^{(n)} = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^\infty \in c$, из которой нельзя выделить последовательность, слабо сходящуюся в c (последовательность $\{u^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ ω^* — сходится к $((-1)^k)_{k=1}^\infty$ в пространстве m всех ограниченных последовательностей).

Замечание. Если представление T слабо п. п. или скалярно п. п., то оно ограничено:

$$c_T \equiv \sup_g \|T(g)\| < \infty.$$

В рефлексивном пространстве любое ограниченное представление является слабо п. п., но не обязательно скалярно п. п. Например, если A — ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве и система собственных векторов оператора A неполна, то унитарное представление $t \rightarrow e^{iAt}$ группы $\mathbb{R}$ не является скалярно п. п.

Теорема. В любом банаховом пространстве B представление T , являющееся одновременно скалярно и слабо п.п., является п.п.

Доказательство проводится с соответствующими модификациями по тому же плану, что и в рефлексивном случае.

Рассмотрим боровские продолжения $\tau_{f, x}$ обобщенных матричных элементов. Так как $\|\tau_{f, x}\| \leq c_T \|f\| \|x\|$, при фиксированных $x \in B$, $\gamma \in \bar{G}$ величина $\tau_{f, x}(\gamma)$ является непрерывным линейным функционалом от f . Следовательно,

$$\overline{\tau_{f, x}(\gamma)} = (\tilde{T}(\gamma)x)(f), \quad (1)$$

где $\tilde{T}(\gamma)$ — непрерывный гомоморфизм $B \rightarrow B^{**}$; функция $\gamma \rightarrow \tilde{T}(\gamma)x$ непрерывна, если B^{**} снабдить ω^* -топологией. Из тождества

$$(\tilde{T}(R(g))x)(f) = \overline{\tau_{f, x}(R(g))} = \tau_{f, x}(g) = f(T(g)x)$$

следует, что $\tilde{T}(g)x = T(R(g))x$ при всех $g \in G$, $x \in B$. Так как $\text{Im } R$ плотен в боровском компакте $\bar{G}$, то $\tilde{T}(\gamma)x$ при любом $\gamma \in \bar{G}$ является ω^* -предельной точкой орбиты $T(g)x$. Но эта орбита, по условию, относительно слабо компактна, т. е. ее слабое замыкание в B ω^* -компактно как подмножество в B^{**} , а, значит, оно ω^* -замкнуто. Следовательно, ω^* -замыкание рассматриваемой орбиты в B^{**} лежит в B . Но тогда $\tilde{T}(\gamma)x \in B$ при всех $\gamma \in \bar{G}$, т. е. $\tilde{T}(\gamma)$ оказывается оператором в B (очевидно, ограниченным). Поскольку $T = \tilde{T}R$, то остается проверить, что $\tilde{T}$ — представление боровского компакта. Это получается дословным повторением соответствующих рассуждений из* на

* Любич Ю. И. Введение в теорию банаховых представлений групп, X., 1985. 143 с.

основании формулы (1), которую теперь можно записать в виде $\varphi_{i, x}(\gamma) = f(T(\gamma)x)$.

Поступила в редколлегию 22.04.88.

УДК 517.5

И. Е. ОВЧАРЕНКО, В. А. ФИЛЬШТИНСКИЙ

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОДКЛАССОВ В РЕШЕНИИ ОДНОМЕРНОЙ И ДВУМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

Пусть $\{a_{nm}\}_{n,m=0}^{\infty}$ — двумерная моментная последовательность, т. е.

$$a_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \mu^m \sigma(d\lambda; d\mu), \quad \sigma(d\lambda; d\mu) \geq 0. \quad (1)$$

Совокупность всех мер, задающих представление (1), будем обозначать через Σ_a . Предметом наших рассмотрений будут такие последовательности a_{nm} , у которых существуют меры из Σ_a , обладающие априорной локализацией, т. е. у которых предписанные области свободны от масс. Если D — некоторая область в $\mathbb{R}^2$, то через Σ_{exD} (Σ_{inD}) будем обозначать подсовокупности Σ_a , выделяемые условиями $\text{supp} \sigma \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus D$ ($\text{supp} \sigma \subseteq D$). Имея в виду априорную локализацию меры, естественно рассмотреть традиционные для проблемы моментов вопросы существования, единственности и описания множества решений. Мы будем пользоваться подходом, разработанным в [1] (одномерная часть) и [2, 3] (сведение двумерной проблемы к набору одномерных). С целью сокращения числа проверяемых условий несколько изменены построения работы [1]. Будем придерживаться терминологии, принятой в монографии [4]. Заметим, что в интересном обзоре [5] отражены результаты о локализации представляющей меры иного характера, чем приводимые ниже.

§1. Одномерная проблема моментов. 1. Разрешимость и единственность. Пусть $E_j = (\alpha_j, \beta_j)$, $j = 1, \dots, m$ — система интервалов, $-\infty < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \dots < \beta_m < +\infty$, $E = \bigcup E_j$. Множеству E сопоставим две системы из 2^m многочленов:

$$P_{ex} = \{P_{\varepsilon}(\lambda) = \prod_{k=1}^m (\lambda - \alpha_k)^{\varepsilon_k} (\lambda - \beta_k)^{\varepsilon_k}\},$$

$$P_{in} = \{\bar{P}_{\varepsilon}(\lambda) = (-1)^{\sum \varepsilon_k} P_{\varepsilon}(\lambda)\}, \quad \varepsilon_k = 0, 1; \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m) \quad (2)$$

пробегает всевозможные наборы из нулей и единиц. По системам P_{in} , P_{ex} определим теперь две системы операторов D_{in} и D_{ex} над последовательностью $\{s_k\}$, положив $\{P_{\varepsilon}s\}_k = \sum a_n s_{k+n}$, если $P_{\varepsilon}(\lambda) = \sum a_n \lambda^n$, $P_{\varepsilon} \in P_{in} \vee P_{ex}$.

Теорема 1. (см. [1], см. также [5]).

Для того чтобы вещественная последовательность $\{s_n\}$ представлялась в виде

$$s_n = \int_{ExtE} \lambda^n \rho(d\lambda), \quad (3)$$

$$\left(s_n = \int_E \lambda^n \rho(d\lambda)\right), \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (3a)$$

необходимо и достаточно, чтобы она оставалась позитивной под действием всех операторов системы $D_{ex}(D_{in})$. Эквивалентным последнему является также позитивность последовательности $\{s_n\}$ относительно множества $ExtE$:

$$((\forall P(x)_{|ExtE} \geq 0) \wedge P(x) \neq 0) \rightarrow (F\{P\} > 0), \quad F(P) = \sum a_k x_k, \quad x_k := s_k.$$

Теорема 2. ([1]). Пусть для последовательности $\{S_n\}$ выполнены условия теоремы 1. Для того чтобы в представлении (3) мера $\rho(d\lambda)$ определялась неединственным (единственным) образом, необходимо и достаточно, чтобы проблема моментов Гамбургера для всех 2^m последовательностей $Dex\{s_n\}$ (по крайней мере, для одной из 2^m последовательностей) были неопределенными (определенной).

Заметим, что проблема моментов (3a) всегда определенная.

Общий критерий определенности, выражаемый теоремой 2, допускает следующую аналитическую конкретизацию. Пусть $\{P_N(z)\}_{N=0}^\infty$ — система ортонормированных многочленов относительно последовательности $\{s_n\}$. Известно (см. [4], с. 67), что для определенности проблемы моментов Гамбургера

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \sigma(d\lambda), \quad n = 0, 1, \dots \quad (4)$$

необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum [P_N(z)]^2$ расходился хотя бы в одной не вещественной точке. Чтобы сформулировать такого рода критерий определенности в нашем случае, воспользуемся теоремой Кристоффеля, из которой следует, что ортонормированные системы многочленов $P_N(P_\varepsilon(s_n); z)$, порождаемые последовательностями $P_\varepsilon(s_n)$, выражаются через $\{P_k(z)\}$ следующим образом:

$$P_N(P_E(S_n); z) = \gamma_N(P_E) \cdot \prod_{j=1}^l (z - \alpha_{kj})^{-1} (z - \beta_{kj})^{-1} \cdot \det \begin{pmatrix} P_N & P_{N+1} & P_{N+2} & \dots & P_{N+2l} \\ z & \alpha_{k_1} & \beta_{k_1} & \dots & \beta_{k_l} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\varepsilon_{kj} = 1$, $\varepsilon_r = 0$ при $r \neq k_j$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Для определенности проблемы моментов (3) необходимо и достаточно, чтобы расходился, по крайней мере, один из 2^m рядов:

$$\sum_{N=0}^{\infty} [P_N(P_z(s_n); z)]^2 \quad (6)$$

хотя бы в одной не вещественной точке z .

Заметим, что соотношения (5) выражают ортогональные многочлены для последовательностей $D_{\text{ex} s_n}$ непосредственно через систему ортогональных многочленов для последовательности $\{s_n\}$.

2. Характеризация решений проблемы моментов с люками. Пусть теперь проблема моментов Гамбургера для последовательности $\{s_n\}$ неопределенная, $Q_N(z)$ — многочлены 2-го рода (см. [4], с. 18):

$$W(z) = \|W_{ij}(z)\|_{i,j=1}^2 = \begin{bmatrix} z \sum_0^{\infty} Q_k(0) Q_k(z) & 1 + z \sum_0^{\infty} P_k(0) Q_k(z) \\ -1 + z \sum_0^{\infty} Q_k(0) P_k(z) & z \sum_0^{\infty} P_k(0) P_k(z) \end{bmatrix} \quad (7)$$

матрица-функция Неванлинны (см. [4], с. 72).

Теорема 4. Пусть проблема моментов (3) на множестве $\text{Ext} E$ неопределенная. Равенством

$$\int_{\text{Ext} E} \frac{\sigma(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{w_{11}(z) \varphi(z) + w_{12}(z)}{w_{21}(z) \varphi(z) + w_{22}(z)} (= W(z) \cdot \varphi(z)) \quad (8)$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между совокупностью Σ_E решений проблемы моментов (3) и совокупностью функций $\varphi(z)$ класса Неванлинны, удовлетворяющих условиям $(z - \beta_j)(z - \alpha_j)^{-1} \times \times \psi_j(z) \in N$, $j = 1, 2, \dots, m$. Здесь

$$\varepsilon_{\alpha_j \beta_j} := \begin{bmatrix} W_{21}(\alpha_j) & W_{22}(\alpha_j) \\ W_{21}(\beta_j) & W_{22}(\beta_j) \end{bmatrix} \\ \psi_j(z) := \varepsilon_{\alpha_j \beta_j} \cdot \varphi,$$

$W(z) \cdot \varphi(z)$ означает результат действия дробно-линейного преобразования с коэффициентами $w_{ij}(z)$ над функцией $\varphi(z)$.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы 4, сделаем замечания:

1. Для случая $m = 1$ проблема моментов (3) была рассмотрена К. И. Швецовым (см. [4], с. 297). В случае $m > 1$, насколько нам известно, впервые описание решений проблемы моментов с люками было дано в [1].

2. В целях «самозамкнутости» изложения и соблюдения специфики, свойственной проблеме моментов, доказательство приводится для операторов, отвечающих проблеме моментов. Читатель, знакомый с теорией Луи де Бранжа [6] гильбертовых пространств целых функций, может восстановить аналог теоремы 4 применительно к области высказываний этой теории. В работе [8] для общего эрмитова оператора рассматриваются вопросы, близкие к изучаемым в § 1 для оператора, отвечающего проблеме моментов.

3. Общая проблема исследования эрмитовых операторов, самосопряженные расширения которых могут иметь *a priori* предписанную систему люков в спектре, неоднократно ставилась М. Г. Крейном на его семинарах.

Доказательство. Отправляясь от системы $\{P_N\}$ ортогональных многочленов относительно последовательности $\{s_n\}$, построим специальные квазиортогональные многочлены $P_N(z; \gamma) = b_{N-1} [P_N(z) \times \times P_{N-1}(\gamma) - P_N(\gamma) P_{N-1}(z)]$, где $\{b_{N-1}\}$ — элементы якобиевой матрицы (см. [4]), ассоциированной с проблемой моментов Гамбургера, γ принимает значения $\alpha_j, \beta_j, j = 1, 2, \dots, m$. При каждом N многочлены $P_N(z; \alpha_j), P_N(z; \beta_j)$, обращаясь в нуль при $z = \alpha_j$ (соответственно при $z = \beta_j$), сохраняют знак на оставшейся части $[\alpha_j, \beta_j]$. Это следует из того, что любой квазиортогональный многочлен для последовательности $\{s_n\}$ (см. [4]) в каждом из $[\alpha_k, \beta_k]$ может иметь не более одного нуля. Последнее в свою очередь следует из позитивности $\{s_n\}$ на множестве $ExtE$. В самом деле, пусть $R_N(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_{N-v}) \cdot (x - \gamma_1) \cdot \dots \cdot (x - \gamma_v)$ — квазиортогональный многочлен, нули $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_v (v > 1)$ которого $\in [\alpha_k, \beta_k]$. В случае четного v для многочлена $Q(x) = \text{sign } a \cdot R_N(x) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{N-v})$ должны были бы выполняться взаимоисключающие соотношения: $F\{Q\} > 0$ (ввиду того что $Q(x)|_{ExtE} \geq 0$), и $F\{Q\} = 0$ в силу квазиортогональности многочлена R_N . В случае нечетного v в качестве $Q(x)$ может быть принят многочлен $Q(x) = \text{sign } a \cdot R_N(x) \cdot (x - \gamma_1) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{N-v})$.

Вернемся теперь к квазиортогональным многочленам $P_N(z; \gamma)$ и отвечающим им многочленам второго рода, которые можно записать в виде $Q_N(z; \gamma) = b_{N-1} [Q_N(z) P_{N-1}(\gamma) - Q_{N-1}(z) P_N(\gamma)]$.

Из определения $P_N(z; \gamma), Q_N(z; \gamma)$ следует соотношение

$$Q_N(z; \alpha) P_N(z; \beta) - Q_N(z; \beta) P_N(z; \alpha) \equiv P_N(\alpha; \beta) < 0 \quad (9)$$

и требуется лишь проверить, что $P_N(\alpha; \beta) < 0$. Но из формулы Кристоффеля-Дарбу ([4], с. 19) при $z = \beta$ и $\mu \rightarrow \beta$ следует, что

$$0 < \sum_{k=0}^{N-1} [P_k(\beta)]^2 = b_{N-1} [P_{N-1}(\beta) P'_N(\beta) - P_N(\beta) P'_{N-1}(\beta)] = P'_N(\beta; \beta).$$

Так как $P_N(\beta; \beta) = 0, P'_N(\beta; \beta) > 0$ и $P_N(z; \beta)$ в $[\alpha, \beta]$ отличен от нуля, то $P_N(z; \beta) < 0$ при $z \in [\alpha, \beta]$ и, в частности, $P_N(\alpha; \beta) < 0$.

Непосредственным вычислением проверяется, что многочлены

$$\frac{P_N(z; \alpha_k)}{z - \alpha_k}, \frac{P_N(z; \beta_k)}{z - \beta_k} \quad (10)$$

являются квазиортогональными многочленами степени $N - 1$ относительно моментной последовательности

$$t_j^{(k)} = s_{j+2} - (\alpha_k + \beta_k) s_{j+1} + \alpha_k \beta_k s_j, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

а соответствующие многочлены второго рода определяются формулами

$$\begin{aligned} (z - \beta_k) Q_N(z; \alpha_k) - P_N(z; \alpha_k) \frac{s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0}{z - \alpha_k}, \\ (z - \alpha_k) Q_N(z; \beta_k) - P_N(z; \beta_k) \frac{s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0}{z - \beta_k}. \end{aligned} \quad (12)$$

Моментные последовательности $\{s_j\}$ и $\{t_j^{(k)}\}$ порождают, по условию, неопределенные проблемы моментов. Поэтому существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(z; \alpha_k) = H(z; \alpha_k), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P_N(z; \beta_k) = H(z; \beta_k),$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{P_N(z, \alpha_k)}{z - \alpha_k} = \frac{H(z; \alpha_k)}{z - \alpha_k} = H_1(z; \alpha_k),$$

$$\begin{aligned} \frac{H(z; \beta_k)}{z - \beta_k} &= H_1(z; \beta_k), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ (z - \beta_k) Q_N(z; \alpha_k) - \frac{P_N(z; \alpha_k)}{z - \alpha_k} \times \right. \\ &\times [s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0] \Big\} = (z - \beta_k) G(z; \alpha_k) - H_1(z; \alpha_k) [s_1 + (z - \\ &- \alpha_k - \beta_k) s_0] = G_1(z; \alpha_k), \quad (z - \alpha_k) G(z; \beta_k) - H_1(z; \beta_k) \times \\ &\times [s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0] = G_1(z; \beta_k). \end{aligned}$$

Далее используем два утверждения.

Лемма 1. *Формулы Неванлинны*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_{11}(z) \varphi(z) + W_{12}(z)}{W_{21}(z) \varphi(z) + W_{22}(z)} \quad (13)$$

(в обозначениях монографии [4] $W_{11}(z) = -A(z)$, $W_{12}(z) = C(z)$, $W_{21}(z) = B(z)$, $W_{22}(z) = -D(z)$) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_1(z; \beta_k) \Psi(z) + W_1(z; \alpha_k)}{W_2(z; \beta_k) \Psi(z) + W_2(z; \alpha_k)}, \quad (14)$$

где $W_1(z; \beta_k) = -G(z; \beta_k)$, $W_1(z; \alpha_k) = G(z; \alpha_k)$, $W_2(z; \beta_k) = H(z; \beta_k)$, $W_2(z; \alpha_k) = -H(z; \alpha_k)$, а $\Psi(z)$ пробегает класс N и связана с $\varphi(z)$ формулой $\Psi(z) = \varepsilon_{\alpha_k \beta_k} \odot \varphi(z)$.

В самом деле, как следует из определения, многочлены $P_N(z; \gamma)$, $Q_N(z; \gamma)$ выражаются через специальные комбинации $A_N(z)$, $B_N(z)$, $C_N(z)$, $D_N(z)$ (см. [4], с. 25), переходящие в пределе в элементы матрицы-функции Неванлинны, ортогональных многочленов $P_N(z)$ и многочленов $Q_N(z)$. Именно, $P_N(z; \gamma) = B_N(z) D_N(\gamma) - D_N(z) B_N(\gamma)$, $Q_N(z; \gamma) = A_N(z) D_N(\gamma) - C_N(z) B_N(\gamma)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N(z) = -W_{11}(z)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} C_N(z) = W_{12}(z)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} B_N(z) = W_{21}(z)$, $\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(z) = -W_{22}(z)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{W_1(z; \beta_k) \Psi(z) + W_1(z; \alpha_k)}{W_2(z; \beta_k) \Psi(z) + W_2(z; \alpha_k)} &= -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{Q_N(z; \beta_k) \Psi(z) - Q_N(z; \alpha_k)}{P_N(z; \beta_k) \Psi(z) - P_N(z; \alpha_k)} = \\ &= -\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{A_N(z) \frac{D_N(\beta_k) \Psi(z) - D_N(\alpha_k)}{B_N(\beta_k) \Psi(z) - B_N(\alpha_k)} - C_N(z)}{B_N(z) \frac{D_N(\beta_k) \Psi(z) - D_N(\alpha_k)}{B_N(\beta_k) \Psi(z) - B_N(\alpha_k)} - D_N(z)} = \\ &= \frac{W_{11}(z) [\varepsilon_{\alpha_k \beta_k}^{-1} \odot \Psi(z)] + W_{12}(z)}{W_{21}(z) [\varepsilon_{\alpha_k \beta_k}^{-1} \odot \Psi(z)] + W_{22}(z)}, \end{aligned}$$

что и есть (13). Покажем, что Ψ пробегает класс N . Для этого достаточно проверить выполнение неравенства $I = W_{21}(\alpha_k) W_{22}(\beta_k) - W_{21}(\beta_k) W_{22}(\alpha_k) > 0$. Прямое вычисление показывает, что $I = -H(\alpha_k; \beta_k)$. Выше отмечено было, что $-P_N(\alpha_k; \beta_k) > 0$ при всех N . Поэтому $I \geq 0$. Если $I = 0$, то $G(z; \alpha_k)/H(z; \alpha_k) = G(z; \beta_k)/H(z; \beta_k)$ и точки $W_1 = G(z; \alpha_k)/H(z; \alpha_k)$, $W_2 = G(z; \beta_k)/H(z; \alpha_k)$ предельной окружности $K_\infty(z)$ [4] слились бы в одну, что невозможно, так как значениям ω_1 , ω_2 отвечают разные меры ρ_1 и ρ_2 (у одной из них среди точек роста имеется точка $t = \alpha_k$ и нет точки $t = \beta_k$, а у другой — имеется точка $t = \beta_k$ и нет точки $t = \alpha_k$). Лемма доказана.

Из (9) и (10) вытекает тождество $G_1(z; \beta_k) H_1(z; \alpha_k) - G_1(z; \alpha_k) \times H_1(z; \beta_k) \equiv -H(\alpha_k; \beta_k) > 0$, из которого, в сочетании с леммой 1, следует

Лемма 2. Для моментной последовательности (11) формулу Неванлинны можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_3(z; \beta_k) \omega(z) + W_3(z; \alpha_k)}{W_4(z; \beta_k) \omega(z) + W_4(z; \alpha_k)}, \quad (15)$$

где $W_3(z; \beta_k) = -G_1(z; \beta_k)$, $W_3(z; \alpha_k) = G_1(z; \alpha_k)$, $W_4(z; \beta_k) = H_1(z; \beta_k)$, $W_4(z; \alpha_k) = -H_1(z; \alpha_k)$, а $\omega(z)$ пробегает класс N .

Вернемся теперь к доказательству теоремы. Пусть мера $\xi(d\lambda)$ является одним из решений проблемы моментов (3). В частности, $\rho(d\lambda)$ будет решением проблемы моментов Гамбургера и потому в равенстве (13) ей отвечает некоторая функция $\varphi(z) \in N$. Мера $\tau_k(d\lambda) = (\lambda - \alpha_k)(\lambda - \beta_k)\rho(d\lambda)$ является решением проблемы моментов

$$t_j^{(k)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^j \tau_k(d\lambda), \quad j = 0, 1, \dots \quad (16)$$

и в формуле (15) ей отвечает функция $\omega(z) \in N$. Воспользовавшись соотношениями, связывающими $H_1(z; \gamma)$, $G_1(z; \gamma)$ и $H(z; \gamma)$, $G(z; \gamma)$, получим равенство

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda - z} &= s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0 - (z - \alpha_k)(z - \beta_k) \times \\ &\times \frac{G(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) - G(z; \alpha_k)}{H(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) - H(z; \alpha_k)} \end{aligned}$$

и сравним его с получающимся из вида функции $\tau_k(d\lambda)$ равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda - z} = s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0 - (z - \alpha_k)(z - \beta_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z}.$$

В результате получаем следующее соотношение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_1(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) + W_1(z; \alpha_k)}{W_2(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) + W_2(z; \alpha_k)}.$$

По лемме 1 функции $\rho(d\lambda)$ отвечает функция $\Psi(z) = \varepsilon_{\alpha_k \beta_k} \odot \varphi(z)$ и, следовательно,

$$\frac{z - \alpha_k}{z - \beta_k} \omega(z) = \varepsilon_{\alpha_k \beta_k} \odot \varphi(z),$$

т. е.

$$N \ni \omega(z) = \frac{z - \beta_k}{z - \alpha_k} \varepsilon_{\alpha_k \beta_k} \odot \varphi(z),$$

и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $\varphi(z) \in N$, $\omega(z) = (z - \beta_k)(z - \alpha_k)^{-1} \cdot \varepsilon_{\alpha_k \beta_k} \odot \varphi(z) \in N$. По лемме 2 функции $\omega(z)$ отвечает некоторая представляющая мера $\tau_k(d\lambda)$ для последовательности (11), а функции $\varphi(z)$ по формуле (13) — решение $\rho(d\lambda)$ проблемы моментов (4). Из леммы 1 следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_1(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) + W_1(z; \alpha_k)}{W_2(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) + W_2(z; \alpha_k)},$$

$$\omega(z) = (z - \beta_k)(z - \alpha_k)^{-1} \psi(z), \quad \psi(z) = \varepsilon_{\alpha_k \beta_k} \odot \varphi(z).$$

В соответствии с леммой 2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda - z} = \frac{W_3(z; \beta_k) \omega(z) + W_3(z; \alpha_k)}{W_4(z; \beta_k) \omega(z) + W_4(z; \alpha_k)} =$$

$$= s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0 + (z - \alpha_k)(z - \beta_k) \cdot$$

$$\frac{W_1(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) + W_1(z; \alpha_k)}{W_2(z; \beta_k)(z - \alpha_k)(z - \beta_k)^{-1} \omega(z) + W_2(z; \alpha_k)}.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_k(d\lambda)}{\lambda - z} = s_1 + (z - \alpha_k - \beta_k) s_0 + (z - \alpha_k)(z - \beta_k) \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(d\lambda)}{\lambda - z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \alpha_k)(\lambda - \beta_k)}{\lambda - z} \rho(d\lambda).$$

Следовательно, $0 \leq \tau_k(d\lambda) = (\lambda - \alpha_k)(\lambda - \beta_k) \rho(d\lambda)$ и, значит, $\rho((\alpha_k, \beta_k)) = 0$. Теорема доказана.

§ 2. Двумерная проблема моментов. 1. Общие положения. Опираясь на теорему 4 и приводимую ниже теорему 5 из [3], покажем, какой класс «подставляемых параметров» приводит к решениям с предписанной локализацией в некотором классе областей. Приведем необходимые определения и факты.

Моментная последовательность (M -последовательность a_{nm} называется λ -полуопределенной, если a_{n0} — определенная моментная последовательность, т. е. мера $\rho(d\lambda)$ в представлении

$$a_{n0} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \rho(d\lambda) \quad (17)$$

единственна.

Пусть $H_{0,\lambda}$ — гильбертово пространство, получающееся замыканием множества многочленов по метрике, порождаемой последовательностью a_{n0} , а $P_N(\lambda) = \sum_{k=0}^N \gamma_{kN} \lambda^k$ — ортогональные многочлены, построенные по последовательности a_{n0} .

Теорема 5. Пусть a_{nm} — λ -полуопределенная M -последовательность. Она представима в виде

$$a_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_{\lambda}(m) \rho(d\lambda), \quad (18)$$

где $\rho(d\lambda)$ — мера из (17), а

$$s_{\lambda}(m) := \sum_{N=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^N a_{km} \gamma_{kN} \right) P_N(\lambda). \quad (19)$$

Сходимость ряда понимается в пространстве $H_{0,\lambda} (= L^2_0)$. При любом m $s_{\lambda}(m)$ — ρ -измеримая функция λ и ρ — п. в. $s_{\lambda}(m)$ -одномерная моментная последовательность.

Определение. Мету $\rho(d\lambda)$ и $s_{\lambda}(m)$ будем называть параметрами λ -полуопределенной M -последовательности a_{nm} .

В терминах параметров легко формулируется общий критерий единственности меры σ из (1). Именно, чтобы σ из (1) была единственной, необходимо и достаточно, чтобы ρ -п. в. $s_{\lambda}(m)$ были определенными моментными последовательностями. Справедливо также аналитическое описание множества Σ_a представляющих мер из (1). Если ρ -п. в. последовательности $S_{\lambda}(m)$ неопределенные, то равенствами

$$\sigma(\Delta' \times \Delta'') = \int_{\Delta' \times \Delta''} \eta_{\lambda}(d\mu) \rho(d\lambda), \quad (20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_{\lambda}(d\mu)}{\mu - z} = W(z; \lambda) \odot \varphi(z; \lambda) \quad (21)$$

устанавливается одно-однозначное соответствие между Σ_a и семействами функций класса N , ρ -измеримых по λ . Здесь $W(z; \lambda)$ — матрица Неванлинны для последовательности $s_{\lambda}(m)$.

2. Общие критерии разрешимости и единственности. Пусть теперь $-\infty < \alpha_1(\lambda) < \beta_1(\lambda) < \alpha_2(\lambda) < \dots < \beta_m(\lambda) < \infty$, $E_{\alpha_k(\lambda), \beta_k(\lambda)} = \{(\lambda, \mu) : -\infty < \lambda < \infty, \alpha_k(\lambda) < \mu < \beta_k(\mu)\}$ — «криволинейная полоса»

$$E^{\text{in}} := \bigcup_{j=1}^m \bar{E}_{\alpha_k(\lambda), \beta_k(\lambda)}, \quad E^{\text{ex}} := \text{Ext} E^{\text{in}}.$$

Теорема 6. Для того чтобы λ -полуопределенная M -последовательность a_{nm} допускала представление (1) с $\text{supp } \sigma \subseteq E^{\text{in}}$ ($\text{supp } \sigma \subseteq E^{\text{ex}}$), необходимо и достаточно, чтобы ρ -п. в. последовательности $s_\lambda(m)$ оставались моментными при применении всех операторов системы $D_{\text{in}}(D_{\text{ex}})$.

Теорема 7. Пусть выполняются условия теоремы 6 и E — множество тех λ , при которых какая-либо из моментных последовательностей $P_E(s_\lambda(m))$ определена. Для того чтобы множество $\Sigma^{E^{\text{ex}}}$ было одноэлементным, необходимо и достаточно, чтобы E было множеством полной ρ -меры.

Теоремы 6 и 7 следуют из теорем 2 и 5. Следующее утверждение является одной из их аналитических форм:

Пусть a_{nm} — λ -полуопределенная M -последовательность, $(\rho(\lambda), s_\lambda(m))$ — ее параметры, E — конечная система «криволинейных» полос, задаваемых функциями $\alpha_j(\lambda)$, $\beta_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, m$; $D_{\text{ex}, \lambda}$ — система операторов, отвечающих $\bigcup_{j=1}^m (\alpha_j(\lambda), \beta_j(\lambda))$, а $\{P_N(z; \lambda)\}$ — системы ортогональных многочленов для последовательностей $P_{E, \lambda}(s_\lambda(m))$, выражаемая формулами (5). Через $E_j(\lambda)$, $j = 1, 2, \dots, m$ обозначим множество расходимости в какой-либо не вещественной точке рядов (6) для последовательностей $P_{E, \lambda}(s_\lambda(m))$. Для того, чтобы множество $\Sigma_{E \in E}$ было одноэлементным, необходимо и достаточно, чтобы множество $\bigcup_{j=1}^m E_j(\lambda)$ имело полную ρ -меру.

Замечание. Как следует из теоремы 2 из [3], множество $\Sigma_{E^{\text{in}}}$ либо пусто, либо одноэлементно.

3. Аналитическое описание множества $\Sigma_{E^{\text{ex}}}$.

Теорема 8. Пусть a_{nm} — λ -полуопределенная M -последовательность, $\rho(d\lambda)$ и $s_\lambda(m)$ — ее параметры из (18), причем ρ — п. в. — проблема моментов

$$s_\lambda(m) = \int_{\text{Ext } \bigcup (\alpha_j(\lambda), \beta_j(\lambda))} \mu^m \eta_\lambda(d\mu)$$

неопределенная. Пусть $W(z; \lambda)$ — матрица-функция Неванлинны для последовательности $s_\lambda(m)$. Равенствами (20), (21) устанавливается одно-однозначное соответствие между совокупностью $\Sigma_{E^{\text{ex}}}$ и совокупностью функций $\Phi(z; \lambda)$, выделяемой следующими свойствами: при $j = 1, 2, \dots, m$ и ρ -п. в. λ 1°. $\Phi(z; \lambda) \in N$; 2° каждая из функций

$$\frac{z - \beta_j(\lambda)}{z - \alpha_j(\lambda)} \begin{bmatrix} W_{21}(\alpha_j(\lambda); \lambda) & W_{22}(\alpha_j(\lambda); \lambda) \\ W_{21}(\beta_j(\lambda); \lambda) & W_{22}(\beta_j(\lambda); \lambda) \end{bmatrix} \odot \Phi(z; \lambda) \in N. \quad (22)$$

Доказательство. Согласно теореме 3 из [2] равенствами (20), (21) и (22) в случае, когда правая часть (22) есть $W(z; \lambda \cdot \Phi(z; \lambda))$, где $\Phi(z; \lambda)$ — ρ -измеримое по λ семейство N -функций, восстанавливается любая $\sigma \in \Sigma_a$. Если теперь $\sigma(d\lambda; d\mu) \in \Sigma_{E^{\text{ex}}}$, то меры $\eta_\lambda(d\mu)$ из (20) для данной σ таковы, что $\text{supp } \eta_\lambda(d\mu) \subseteq E^{\text{ex}}$. Согласно теореме 4 $\Phi(z; \lambda)$ в (21) таковы, что при $j = 1, 2, \dots, m$ ρ -п. в. выполняются 1° и 2°.

Так как приведенное выше рассуждение полностью обратимо, то доказательство завершено.

Замечание. Существование $\varphi(z; \lambda)$, удовлетворяющих условиям 2°, следует из теоремы 4 и 6.

В случае одной «криволинейной» полосы теорема 8 может быть усилена.

Теорема 9. Пусть $E_{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)}$ — «криволинейная» полоса, α_m — λ полуопределенная последовательность, $\rho(d\lambda)$, $s_\lambda(m)$ — ее параметры. Пусть выполняются условия теоремы 7 и р-п. в. проблема моментов

$$s_\lambda(m) = \int_{Ext(\alpha(\lambda), \beta(\lambda))} \mu^m \eta_\lambda(d\mu) \quad (23)$$

неопределенная. Равенствами

$$\sigma(\Delta' \times \Delta'') = \int_{\Delta'} \int_{\Delta''} \eta_\lambda(d\mu) \rho(d\lambda), \quad (24)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_\lambda(d\mu)}{\mu - z} = W(z; \lambda) \cdot \begin{bmatrix} -W_{22}(\beta(\lambda); \lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda); \lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda); \lambda) & -W_{21}(\alpha(\lambda); \lambda) \end{bmatrix} \odot \tau(z; \lambda) \quad (25)$$

устанавливается одно-однозначное соответствие $\Sigma_{Ext E_{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)}} \leftrightarrow \{\tau(z; \lambda)\}$, где семейство $\tau(z; \lambda)$ допускает мультипликативное представление

$$\tau(z; \lambda) = C_\lambda \exp \int_{Ext(\alpha(\lambda), \beta(\lambda))} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) \alpha(t; \lambda) dt \quad (26)$$

с ρ -измеримыми функциями $\alpha(t; \lambda)$ и C_λ , и р-п. в. $C_\lambda > 0$, $0 \leq \alpha(t; \lambda) \leq 1$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 8 и перепишем равенство (22) в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\eta_\lambda(d\mu)}{\mu - z} &= \left(W(z; \lambda) \cdot \begin{bmatrix} -W_{22}(\beta(\lambda); \lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda); \lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda); \lambda) & -W_{21}(\alpha(\lambda); \lambda) \end{bmatrix} \odot \right. \\ &\quad \left. \odot \left(\begin{bmatrix} W_{21}(\alpha(\lambda); \lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda); \lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda); \lambda) & W_{22}(\beta(\lambda); \lambda) \end{bmatrix} \odot \varphi(z; \lambda) \right) \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь учтено, что перемножению матриц из коэффициентов дробно-линейных преобразований отвечает последовательная их композиция. Переходя теперь к функции

$$\tau(z; \lambda) := \begin{bmatrix} W_{21}(\alpha(\lambda); \lambda) & W_{22}(\alpha(\lambda); \lambda) \\ W_{21}(\beta(\lambda); \lambda) & W_{22}(\beta(\lambda); \lambda) \end{bmatrix} \odot \varphi(z; \lambda), \quad (28)$$

заключаем из (22), что $\tau(z; \lambda)$ принадлежит классу функций $S_1(\alpha(\lambda), \beta(\lambda))$ (см. [7], с. 528) и, следовательно, допускает мультипликативное представление (26). Из ρ -измеримости семейств функций $\varphi(z; \lambda)$ и $W_{jk}(z; \lambda)$ следует ρ -измеримость функций C_λ и $\alpha(t; \lambda)$. Обращение рассуждений завершает доказательство.

4. Критерии локализации для областей специального вида. В рассматриваемых ниже случаях для подкласса λ -полуопределенных

последовательностей критерии непустоты множеств $\Sigma_{ExtE\alpha(\lambda), \beta(\lambda)}$ ($\Sigma_{IntE\alpha(\lambda), \beta(\lambda)}$) могут быть выражены в терминах самой последовательности a_{nm} , а не ее параметров (ρ, s_λ) .

Пусть $\{s_n\}_{n=0}^\infty$ — определенная моментная последовательность

$$s_n = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \rho(d\lambda), \quad \rho(d\lambda) \geq 0, \quad (29)$$

$s_n^{(1)}$ — последовательность вида

$$s_n^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n f(\lambda) \rho(d\lambda), \quad (30)$$

$f(\lambda) \in L_\rho^2$. Последовательность s_n будем называть p -вполне определенной, если из того, что последовательность $s_n^{(1)}$ положительная, следует, что $f(\lambda) \geq 0$. Как показано в [9], класс p -вполне определенных моментных последовательностей уже класса определенных. Там же приведены некоторые критерии p -определенности.

Пусть $E_{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)}$ — «полиномиальная» полоса, т. е.

$$\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^M \alpha_k \lambda^k, \quad \beta(\lambda) = \sum_{k=0}^M \beta_k \lambda^k, \quad \alpha(\lambda) \beta(\lambda) = \sum_{k=0}^{2M} \gamma_k \lambda^k. \quad (31)$$

Пусть $a_{nm}, (n, m) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+$ — вещественная положительно-определенная последовательность, т. е. ядро

$$K_a(n, m; l, k) := a_{n+k, m+l} \quad (32)$$

положительно определенное.

Теорема 10. Пусть a_{nm} — вещественная n -о. последовательность, для которой последовательность a_{n0} — p -вполне определенная. Для того чтобы a_{nm} была M -последовательностью такой, что $\Sigma_{ExtE\alpha(\lambda), \beta(\lambda)} \neq \emptyset$ ($\Sigma_{IntE\alpha(\lambda), \beta(\lambda)} \neq \emptyset$) необходимо и достаточно, чтобы

1) выполнялись неравенства

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^N a_{km} \gamma_{kN} \right|^2 \leq a_{0, 2m}, \quad (33)$$

2) последовательность

$$\hat{a}_{nm} = a_{n, m+2} - \sum_{k=0}^M (\alpha_k + \beta_k) a_{n+k, m+1} + \sum_{s=0}^{2M} \gamma_s a_{n+s, m}, \quad (34)$$

$$(\hat{a}_{nm} := -\hat{a}_{nm}) \quad (35)$$

положительно-определенная.

Доказательство. Покажем, что a_{nm} — M -последовательность. Согласно [10] для a_{nm} справедливо представление

$$a_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n s_\lambda(m) \rho(d\lambda), \quad (36)$$

$s_\lambda(m)$ задаются правой частью равенства (19), $s_\lambda(m) \in L^2_\rho$, ρ — мера, представляющая последовательность a_{nm} . Если $P(\lambda)$ и $Q(\lambda) = \sum \xi_j \mu^j$ — многочлены, то

$$0 \leq F[|P|^2 |Q|^2] = \int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2 \left(\sum_{j,k} s_\lambda(j+k) \xi_j \bar{\xi}_k \right) \rho(d\lambda),$$

откуда и из ρ -полной определенности последовательности a_{nm} следует, что при любом финитном наборе $\{\xi_j\}$ $\sum_{j,k} s_\lambda(j+k) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0$, т. е. ρ — почти всюду

$$s_\lambda(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^m \eta_\lambda(d\mu), \quad \eta_\lambda(d\mu) \geq 0. \quad (37)$$

В [10] показано, что выбрать семейство мер $\eta_\lambda(d\mu)$, чтобы при любом борелевском множестве E на оси функция $\eta_\lambda(E)$ была ρ -измеримой. Из возможности такого выбора следует, что a_{nm} — M -последовательность и представляющая ее в виде (1) мера задается равенством

$$\sigma(\Delta' \times \Delta'') = \int_{\Delta'} \int_{\Delta''} \{\eta_\lambda(d\mu)\} \rho(d\lambda). \quad (38)$$

Доказательство существования представляющей меры (38) последовательности a_{nm} с заданной локализацией одинаково для обеих локализаций. Приведем его для $\sum_{Ext} E\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$. Как показано в [3], критерием непустоты множества $\sum_{Ext} E\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$ является положительная определенность ρ -п. в. последовательностей

$$s_\lambda(m+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_\lambda(m+1) + \alpha(\lambda) \beta(\lambda) s_\lambda(m). \quad (39)$$

Введем выражения (31) для $\alpha(\lambda), \beta(\lambda)$ в (34). Умножив после этого полученное выражение на λ^k и интегрируя по $\rho(d\lambda)$, имеем в силу (32), что последовательность (34) положительно определенная.

Переходя к достаточной части, заметим, что для a_{nm} справедливо представление (1) с распределением $\hat{\sigma}(d\lambda_j, d\mu) = (\mu - \alpha(\lambda))(\mu - \beta(\lambda)) \times \eta_\lambda(d\mu) \rho(d\lambda)$, где $\eta_\lambda(d\mu)$ из (38), и, таким образом,

$$a_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} D_{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)} s_\lambda(m) \rho(d\lambda), \quad (40)$$

$$D_{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)} s_\lambda(m) := s_\lambda(m+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_\lambda(m+1) + \alpha(\lambda) \beta(\lambda) s_\lambda(m)$$

Если $P(\lambda)$ и $Q(\lambda) = \sum \xi_j \mu^j$ — многочлены, то ввиду положительной определенности $\hat{a}_{nm}$

$$0 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda) Q(\mu)|^2 \hat{\sigma}(d\lambda; d\mu) = \\ \int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2 \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\mu)|^2 (\mu - \alpha(\lambda))(\mu - \beta(\lambda)) \eta_\lambda(d\mu) \right\} \rho(d\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2 \left\{ \sum_{j, k} [s_{\lambda}(j+k+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_{\lambda}(j+k+1) + \alpha(\lambda) \beta(\lambda) s_{\lambda}(j+k)] \xi_j \bar{\xi}_k \right\} \rho(d\lambda). \quad (41)$$

Так как любой неотрицательный многочлен $A(\lambda)$ представим в виде $[P_1(\lambda)]^2 + [P_2(\lambda)]^2$, то последнее неравенство справедливо, если вместо $|P(\lambda)|^2$ стоит произвольный неотрицательный многочлен. А так как $\rho(d\lambda)$ — мера p -определенной моментной последовательности, то неравенство (41) справедливо также, если вместо $|P(\lambda)|^2$ подставить в него произвольную неотрицательную непрерывную функцию из L^2_{ρ} . Отсюда следует, что p -п. в. последовательность $D_{\alpha(\lambda), \beta(\lambda)} s_{\lambda}(m)$ положительно определенная. Остается применить теорему 1 из [3].

Теорема 10 может быть обобщена в двух направлениях: 1) $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ задаются целыми функциями с ростом, обеспечивающим «прохождение» предыдущих рассуждений; 2) $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ задаются ортогональными разложениями по системе многочленов $P_N(\lambda)$, т. е. $\alpha(\lambda)$, $\beta(\lambda)$, $\alpha(\lambda)\beta(\lambda) \in L^2_{\rho}$,

$$\alpha(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k P_k(\lambda), \quad \beta(\lambda) = \sum_{L=0}^{\infty} \beta_L P_L(\lambda), \quad \alpha(\lambda)\beta(\lambda) = \sum_{s=0}^{\infty} \gamma_s P_s(\lambda). \quad (42)$$

Мы остановимся кратко на втором обобщении, так как этот случай включает области с негладкой границей. Отправным пунктом, как и в предыдущем случае, является теорема 1 из [3]. Запишем условие локализации $s_{\lambda}(m+2) - (\alpha(\lambda) + \beta(\lambda)) s_{\lambda}(m+1) + \alpha(\lambda)\beta(\lambda) s_{\lambda}(m) \gg 0$. Вводя сюда выражения (42), умножая на λ^n и интегрируя по $\rho(d\lambda)$, получаем, что последовательность

$$\tilde{a}_{nm} = a_{n, m+2} - \sum_{L=0}^{\infty} (\alpha_L + \beta_L) \sum_{k=0}^L \gamma_k a_{n+k, m+1}$$

положительно определенная. Обратно, из положительной определенности $\tilde{a}_{nm}$ следует, как и в теореме 10, существование представляющей меры с искомой локализацией.

Критерий локализации для системы «криволинейных» полюсов может быть получен, если в качестве отправного положения принять теорему 6 и далее следовать конструкции теоремы 10.

Как показывает приведенное выше рассуждение, совокупность условий: a_{nm} — положительно-определенная, a_{n0} — p -вполне определенная и выполнимость неравенств (33) достаточна для того, чтобы a_{nm} была M -последовательностью. По нашему мнению, это аналог для двумерной проблемы моментов известной теоремы М. С. Лившица о продолжении эрмитово-положительной функции с полосы на плоскость. Вместе с тем, видна и специфика рассматриваемого случая. Сочетание построений работ [3, 10] с аналитическими критериями из [9] p -вполне определенности одномерной моментной последовательности позволяет выделить ряд случаев, когда можно утверждать разрешимость двумерной проблемы моментов.

Список литературы: 1. Фильштинский В. А. Степенная проблема моментов на всей оси при заданном конечном числе пустых интервалов в спектре // Зап. мех.-мат. фак-та Харьк. гос. ун-та и Харьк. мат. об-ва. Х., 1964, 30, сер. 4. С. 186—200. 2. Овчаренко И. Е. Интегральные представления полуопределенных степенных моментных последовательностей // Докл. АН УССР, сер. А. 1983, № 3. С. 17—20. 3. Овчаренко И. Е. Моментные последовательности с представляющими мерами, свободными от масс в некоторых областях // Докл. АН СССР. 1983. 273, № 1. С. 41—45. 4. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов. М., 1961. 310 с. 5. Fuglede B. Multidimensional moment problem // Expositions Math. 1983. 1, N 1. 1—17. 6. Branges Louis de. Hilbert spaces of entire functions // Prentice Hall. 1968. P. 326. 7. Деркач В. А., Маламуд М. М. О функции Вейля и эрмитовых операторах с лакунами // Докл. АН СССР. 1987. 293, № 1. С. 1041—1045. 8. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М., 1973. 551 с. 9. Kowalski M. A. Representations of inner products in the space of Polynomials // Acta Math. Hung. 1985. 46 (1—2). 101—109. 10. Овчаренко И. Е. О двумерных степенных моментных последовательностях // Укр. мат. журн. 1984. 36, № 1. С. 51—56.

Поступила в редколлегию 16.05.88

УДК 517.53

А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН

ИТЕРАЦИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ПУАНКАРЕ

Рассмотрим рациональную функцию R степени $d \geq 2$. Предположим, что функция R имеет отталкивающую неподвижную точку ζ , т. е. $R(\zeta) = \zeta$, $|R'(\zeta)| > 1$. Согласно теореме Пуанкаре [1, гл. VII] существует единственная мероморфная в $\mathbb{C}$ функция f , удовлетворяющая уравнению

$$f(\lambda z) = R[f(z)], \quad \lambda = R'(\zeta), \quad (1)$$

и начальным условиям $f(0) = \zeta$, $f'(0) = 1$. Уравнение (1) называется уравнением Пуанкаре, а его решение f — функцией Пуанкаре. Уравнение Пуанкаре удобно записать в виде коммутативной диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\lambda} & \mathbb{C} \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{R} & \mathbb{C} \end{array} \quad (2)$$

Пусть R^n — n -я итерация функции R . В классических работах Жюлиа, Фату и Латтэ отмечалась тесная связь между распределением значений функции f и распределением корней уравнения $R^n(z) = a$. Мы продолжим изучение этой связи, привлекая неванлинновскую теорию распределения значений мероморфных функций [2, 3]. В частности, будет дано новое доказательство единственности инвариантной уравновешенной меры функции R и асимптотически равномерного распределения корней уравнения $R^n(z) = a$ относительно этой меры [4, 5].

Определение уравновешенной меры и точная формулировка результата содержится в разделе 5.

Все сведения об итерациях рациональных функций, используемые в статье, содержатся в [6, гл. VIII].

1. *Исключительные значения.* Множество $E(R)$ исключительных значений рациональной функции R состоит по определению из таких $a \in \mathbb{C}$, что уравнения $R^n(z) = a$, $n \in \mathbb{N}$ имеют в совокупности конечное число корней. Иначе говоря, точки $a \in E(R)$ имеют лишь конечное число предшествующих. Как известно, $\text{card } E(R) \leq 2$.

Рациональные функции R и S называются сопряженными, если $R \circ \varphi = \varphi \circ S$ для некоторой дробно-линейной функции φ . Если $\text{card } E(R) = 2$, то функция R сопряжена с $z \mapsto z^{\pm d}$. Если $\text{card } E(R) = 1$, то R сопряжена с многочленом степени d .

Обозначим через $E_P(f) = \{a \in \mathbb{C} : f(z) \neq a, z \in \mathbb{C}\}$ множество пикаровских исключительных значений функции f . Если f — функция Пуанкаре для R , то $E_P(f) = E(R)$. В частности, f целая тогда и только тогда, когда R — многочлен.

Нам понадобится одна элементарная лемма.

Лемма 1. Если уравнение $R^3(z) = a$ имеет корень порядка d^3 , то $a \in E(R)$.

Приведем для полноты доказательство этой леммы.

Пусть уравнение $R^3(z) = a$ имеет корень порядка d^3 . Тогда у него имеется только один корень. В этом случае уравнение $R(z) = a$ имеет единственный корень a_{-1} порядка d и уравнение $R(z) = a_{-1}$ имеет единственный корень a_{-2} порядка d . Поскольку уравнение $R(z) = a_{-2}$ имеет также единственный корень d , мы приходим к выводу, что среди точек a, a_{-1}, a_{-2} хотя бы две равны (так как суммарное число критических точек функции R с учетом кратности равно $2d - 2$). Отсюда следует, что $a \in E(R)$.

2. *Характеристики Неванлинны* [2, 3]. Для произвольной мероморфной в $\mathbb{C}$ функции f положим

$$N(r, a, f) = \sum_{|b_j| < r} \log \frac{r}{|b_j|} + k \log r,$$

где суммирование распространяется на все ненулевые корни b_j уравнения $f(z) = a$ с учетом кратности, а k — порядок значения a в точке $z = 0$ (если $f(0) \neq a$, то $k = 0$). Далее,

$$m(r, f) = m(r, \infty, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta,$$

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right), \quad a \in \mathbb{C},$$

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, \infty, f).$$

Величина $T(r, f)$ называется неванлинновской характеристикой функции f . Порядком функции f называется число

$$\rho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \log T(r, f) / \log r.$$

1-я основная теорема Неванлинны утверждает, что
 $m(r, a, f) + N(r, a, f) = T(r, f) - \log |f(0) - a| + \varepsilon(a, r)$,
 где $|\varepsilon(a, r)| \leq \log^+ |a| + \log 2$.
 Если $f(0) = a$, $f'(0) \neq 0$, то $\log |f(0) - a|$ следует заменить на $\log |f'(0)|$.

Согласно II-й основной теореме Неванлинны, для любых попарно различных значений $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ выполняется

$$\sum_{j=1}^n m(r, a_j, f) \leq 2T(r, f) + Q(r, f; a_1, \dots, a_n).$$

Здесь Q — остаточный член, малый по сравнению с $T(r, f)$. Для функций конечного порядка справедливо $Q(r, f) = O(\log r)$, $r \rightarrow \infty$.

3. *Валироновские исключительные значения функции Пуанкаре.*
 Значение $a \in \mathbb{C}$ называется исключительным в смысле Валирона для функции f , если

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)} > 0.$$

Множество таких исключительных значений обозначается через $E_V(f)$. Очевидно, что $E_P(f) \subset E_V(f)$. Множество $E_V(f)$ всегда имеет нулевую логарифмическую емкость, но может иметь мощность континуума [2, 3].

Известно, что для рациональной функции R степени d и для любой мероморфной функции f справедливо $T(r, R \circ f) = dT(r, f) + O(1)$, $r \rightarrow \infty$ (см. например [3, гл. 1]). Отсюда и из (1) получаем для функции Пуанкаре

$$T(|\lambda| r, f) = (d + o(1))T(r, f), \quad r \rightarrow \infty, \quad (3)$$

в частности, f имеет конечный порядок

$$\rho = \log d / \log |\lambda| \quad (4)$$

и нормальный тип. Это результат Валирона [1, гл. VII].

Теорема 1. Пусть f и R связаны уравнением Пуанкаре. Тогда $E_V(f) = E(R)$.

Доказательство. Заметим сначала, что если S — рациональная функция и $b_1, \dots, b_q$ — все корни уравнения $S(z) = a$, причем корень b_j имеет порядок k_j , то

$$m(r, a, S \circ f) \leq \sum_{j=1}^q k_j m(r, b_j, f) + O(1), \quad r \rightarrow \infty.$$

В самом деле, достаточно доказать это соотношение при $a = \infty$, $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{C}$. Тогда

$$|S(w)| \leq K \left(\sum_{j=1}^q |w - b_j|^{-k_j} + 1 \right),$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} m(r, \infty, S \circ f) &\leq \sum_{j=1}^q m(r, \infty, (f - b_j)^{-k_j}) + O(1) = \\ &= \sum_{j=1}^q k_j m(r, b_j, f) + O(1). \end{aligned}$$

Применим теперь лемму 1. Если $a \notin E(R)$, то порядок всех корней уравнения $R^{3n}(z) = a$ не превосходит $(d^3 - 1)^n$. Из (1) следует, что $f(\lambda^{3n}z) = R^{3n} \circ f(z)$, $n \in \mathbb{N}$.

Поэтому

$$m(r, a, f) \leq \sum_{b: R^{3n}(b)=a} (d^3 - 1)^n m\left(\frac{r}{|\lambda|^{3n}}, b, f\right),$$

где сумма берется по всем различным корням уравнения $R^{3n}(z) = a$. Отсюда по II-й основной теореме с учетом (3) заключаем

$$\begin{aligned} m(r, a, f) &\leq (2 + o(1))(d^3 - 1)^n T\left(\frac{r}{|\lambda|^{3n}}, f\right) = \\ &= (2 + o(1))\left(\frac{d^3 - 1}{d^3}\right)^n T(r, f), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Выбирая число n произвольно большим, получаем $m(r, a, f) = o(T(r, f))$, $r \rightarrow \infty$.

Мы доказали, что $E_V(f) \subset E_P(f)$. Противоположное включение очевидно. Теорема 1 доказана.

Отметим, что схожим методом Н. Янагихара [7] ранее показал, что у функции f нет неванлинновских дефектных значений, отличных от $E(R)$, т. е.

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} m(r, a, f)/T(r, f) = 0$$

для всех $a \in \mathbb{C} \setminus E(R)$.

4. *Равнораспределение прообразов мер.* Пусть f — произвольная мероморфная функция, μ — мера в $\mathbb{C}$. Поднимем меру μ с помощью функции f , полагая для произвольного ограниченного борелевского множества $X \subset \mathbb{C}$

$$(f^*\mu)(X) = \int_{\mathbb{C}} n(a, X) d\mu_a, \quad (5)$$

где $n(a, X)$ — количество корней уравнения $f(z) = a$, принадлежащих X (с учетом кратности). Локально конечную меру $f^*\mu$ будем называть прообразом меры μ под действием f . Очевидно, что оператор f^* линеен. Например, если $\mu = \delta_a$ — единичная атомарная мера, сосредоточенная в точке $a \in \mathbb{C}$, то $f^*\delta_a(X) = n(a, X)$.

Далее в этом разделе изучаются мероморфные функции конечного порядка ρ и нормального типа, т. е.

$$T(r, f) = O(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Пусть W — сопряженное пространство, к пространству непрерывных финитных функций в $\mathbb{C}$ (т. е. W — пространство локально конечных зарядов в $\mathbb{C}$), наделенное топологией слабой сходимости. Обозначим через L^1_{loc} пространство локально суммируемых функций в $\mathbb{C}$ с топологией сходимости в среднем на каждом компакте. Субгармонические функции содержатся в L^1_{loc} , и мы рассмотрим плотное подпространство $\delta SH \subset L^1_{\text{loc}}$, состоящее из разностей субгармонических функций. Оператор Лапласа продолжается до линейного оператора $\Delta: \delta SH \rightarrow W$, обладающего следующим свойством непрерывности: если

$u_t \rightarrow 0$, $u_t \in \delta SH$, $t \rightarrow \infty$, и вариации зарядов Δu_t ограничены на компактах равномерно по t , то $\Delta u_t \rightarrow 0$.

Следуя В. С. Азарину [8], для любого $t \in \mathbb{C}$ определим линейные операторы $L_t: \delta SH \rightarrow \delta SH$, $T_t: W \rightarrow W$ формулами

$$L_t u(z) = |t|^{-\rho} u(tz), \quad (T_t v)(X) = |t|^{-\rho} v(tX).$$

Тогда $T_t \Delta = \Delta L_t$ для любого $t \in \mathbb{C}$.

Меры $\mu_1, \mu_2 \in W$ назовем ρ -равнораспределенными, если заряд $\nu = \mu_1 - \mu_2$ удовлетворяет условию $T_t \nu \rightarrow 0$, $t \rightarrow \infty$.

Замечание. Если f — мероморфная функция конечного порядка ρ и нормального типа, то для любой вероятностной меры μ в $\overline{\mathbb{C}}$ справедливо $f^* \mu(D(0, r)) = O(r^\rho)$, $r \rightarrow \infty$ (7), где $D(a, t) = \{z: |z - a| < t\}$. Докажем (7). Будем считать, что интегралы

$$\int_{\overline{\mathbb{C}}} \log |f(0) - a| d\mu_a, \quad \int_{\overline{\mathbb{C}}} \log^+ |a| d\mu_a$$

конечны, в противном случае сделаем преобразование

$$f(z) \mapsto \frac{1}{f(z + \zeta) - w}$$

с подходящими $\zeta, w \in \mathbb{C}$. Теперь, используя (5), (6) и 1-ю основную теорему Неванлинны, получаем

$$\begin{aligned} f^* \mu(D(0, r)) &= \int_{\overline{\mathbb{C}}} f^* \delta_a(D(0, r)) d\mu_a \leq \\ &\leq \int_{\overline{\mathbb{C}}} N(er, a, f) d\mu_a \leq T(er, f) + O(1) = O(r^\rho), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Из (6) и (7) следует, что семейство функций $\{L_t \log |f| \}_{|t| > 1} \subset \delta SH$ и семейство мер $\{T_t f^* \mu\}_{|t| > 1} \subset W$ предкомпактны соответственно в δSH и W .

Теорема 2. Пусть f — мероморфная функция порядка ρ и нормального типа, μ_j — вероятностные меры в $\overline{\mathbb{C}}$ такие, что $\mu_j(E_V(f)) = 0$, $j = 1, 2$. Тогда меры $f^* \mu_1$ и $f^* \mu_2$ ρ -равнораспределены.

Эта теорема является ослабленным вариантом результата одного из авторов, анонсированного в [9], в котором вместо $\mu_j(E_V(f)) = 0$, $j = 1, 2$, требуется лишь, чтобы $\mu_j(\{a\}) = 0$, $j = 1, 2$, для всякой точки $a \in E_V(f)$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется

Лемма 2. Для любой мероморфной функции f существуют постоянные r_0 и C такие, что $m(r, a, f) \leq T(r, f) + C$, $a \in \overline{\mathbb{C}}$, $r \geq r_0$.

Доказательство. Ограничимся для простоты случаем, когда $f'(0) \neq 0$. (Далее теорема 2 и лемма 2 используются только в этом случае). Выберем настолько малые числа $r_0 > 0$ и $\delta > 0$, чтобы функция f была однолистной в $D(0, r_0)$ и чтобы выполнялось $D(f(0), \delta) \subset fD(0, r_0)$.

Пусть $G(z, \zeta, V)$ — функция Грина области V с полюсом в точке ζ , продолженная нулем в $\mathbb{C} \setminus V$. Тогда, если $f(0) \neq a$, то $N(r_0, a, f) = G(f^{-1}a, 0, D(0, r_0)) = G(a, f(0), fD(0, r_0))$, здесь $f^{-1}a$ — a -точка функции f , ближайшая к началу координат. Из монотонности $N(r)$ и принципа максимума получаем при $r \geq r_0$

$$N(r, a, f) \geq N(r_0, a, f) \geq G(a, f(0), D(f(0), \delta)) = \\ = \log^+ \frac{\delta}{|f(0) - a|} \geq \log^+ \frac{1}{|f(0) - a|} + \log \delta.$$

Теперь из 1-й основной теоремы Неванлинны следует, что

$$m(r, a, f) \leq T(r, f) - N(r, a, f) + \log \frac{1}{|f(0) - a|} + \varepsilon(a, r) \leq \\ \leq T(r, f) - \log^+ \frac{1}{|f(0) - a|} + \log \frac{1}{|f(0) - a|} + \log \frac{1}{\delta} + \log^+ |a| + \\ + \log 2 \leq T(r, f) + C_f, \quad a \neq f(0).$$

Если же $a = f(0)$, то нужное неравенство сразу вытекает из 1-й основной теоремы. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Существует точка $a \in \bar{\mathbb{C}}$, в которой логарифмические потенциалы обеих мер μ_f конечны и $a \notin E_V(f)$. Достаточно доказать, что каждая мера $f^*\mu_f$ ρ -равнораспределена с $f^*\delta_a$. Предполагая, что $a = \infty$ (этого можно добиться, заменив f на $\frac{1}{f-a}$), приходим к следующей ситуации.

Доказать, что меры $f^*\mu$ и $f^*\delta_a$ ρ -равнораспределены при условии, что

$$\int_{\bar{\mathbb{C}}} \log^+ |a| d\mu_a < \infty, \quad (8)$$

$$\infty \notin E_V(f), \quad (9)$$

$$\mu(E_V(f)) = 0. \quad (10)$$

Следуя методу Фростмана [2, гл. X], рассмотрим логарифмический потенциал

$$u(w) = \int_{\bar{\mathbb{C}}} \log |w - a| d\mu_a$$

(в силу (8) интеграл сходится для почти всех w). Тогда $U = u \circ f \in \delta SH$, $\Delta U = 2\pi(f^*\mu - f^*\delta_\infty)$ и в силу непрерывности лапласиана достаточно доказать, что

$$L_t U(z) = |t|^{-\rho} U(tz) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Зафиксируем произвольное число $r_1 < \infty$. Имеем при $0 < r \leq r_1, t \rightarrow \infty$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |L_t U(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi |t|^\rho} \int_0^{2\pi} \int_{\bar{\mathbb{C}}} |\log |tre^{i\theta} - a|| d\mu_a d\theta$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi|t|^\rho} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \left\{ \log^+ |f(tre^{i\theta})| - a + \log^+ \frac{1}{|f(tre^{i\theta}) - a|} \right\} d\mu_a d\theta \leq \\ &\leq \frac{1}{|t|^\rho} \int_{\mathbb{C}} \{m(|t|r, \infty, f) + \log 2 + \log^+ |a| + m(|t|r, a, f)\} d\mu_a \leq \\ &\leq Cr^\rho \int_{\mathbb{C}} \frac{m(s, \infty, f) + \log 2 + \log^+ |a| + m(s, a, f)}{T(s, f)} d\mu_a, \end{aligned}$$

где $s = |t|r$. Подынтегральное выражение в силу (8) и леммы 2 имеет μ -суммируемую мажоранту. По теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла при $s \rightarrow \infty$, а в силу (9) и (10) этот предел нулевой. Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} |L_t U(re^{i\theta})| d\theta \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty,$$

равномерно относительно r , $0 < r \leq r_1$. Отсюда следует (11). Теорема доказана.

5. *Уравновешенная мера и равномерность корней уравнения $R^n z = a$.* Пусть M — множество всех вероятностных мер в $\mathbb{C}$ со свойством $\mu(E(R)) = 0$. Определим оператор $Q: M \rightarrow M$ следующим образом:

$$Q\mu = \frac{1}{d} R^* \mu. \quad (12)$$

Мера $\mu \in M$ называется уравновешенной (balanced), если $Q\mu = \mu$. Грубо говоря, это означает, что мера $\mu(E)$ для каждого борелевского множества $E \subset \mathbb{C}$ поровну распределяется между прообразами множества E под действием функции R .

Теорема 3. Для любой рациональной функции R существует единственная уравновешенная мера μ_R , причем для любой меры $\mu \in M$ выполняется $Q^n \mu \rightarrow \mu_R$, $n \rightarrow \infty$ (13).

Если R — многочлен, то мера μ_R совпадает с равновесной (в смысле теории потенциала) мерой множества Жюлиа $J(R)$. В этом случае теорему 3 доказал Бролин [10]. В общем случае теорему 3 доказал М. Ю. Любич [4] и независимо Фриере, Лопес и Мане [5]. Доказательство в [4] основано на исследовании средствами функционального анализа оператора $A: C(\bar{\mathbb{C}}) \rightarrow C(\bar{\mathbb{C}})$, для которого $Q = A^*$.

Далее нам понадобится следующая простая

Лемма 3. Пусть R — рациональная функция, $\mu \in M$. Тогда для каждой окрестности U множества $E(R)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что $(Q^n \mu)(U) < \varepsilon$ при $n \geq N$.

Доказательство этой леммы немедленно вытекает из описания множества $E(R)$, приведенного в разделе 1.

Доказательство теоремы 3. Существование меры μ_R устанавливается при помощи обычной конструкции Н. Н. Боголюбо-

ва — Н. М. Крылова. Пусть M — множество вероятностных мер ν на $\mathbb{C}$ таких, что $\nu(E(R)) = 0$. Рассмотрим последовательность чезаровских средних

$$\nu^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} Q^s \delta_a, \quad a \in E(R).$$

Ясно, что $\nu^{(N)} \in M$. Пусть ν — какая-либо предельная мера для последовательности $\nu^{(N)}$. Тогда ν — вероятностная мера и $Q\nu = \nu$. Из леммы 3 следует, что $\nu \in M$.

Предположим сперва, что R имеет отталкивающую неподвижную точку ξ и рассмотрим уравнение Пуанкаре (1). Обозначим через T оператор T_λ , определенный в п. 4, где $\lambda = R'(\xi)$.

В силу соотношения (4) $d = |\lambda|^p$, поэтому для любого заряда $\nu \in W$ и любого борелевского ограниченного множества $X \subset \mathbb{C}$ справедливо $T\nu(X) = \frac{1}{d}\nu(\lambda X)$. Из определения операторов Q , T , f^* и диаграммы (2) следует, что $f^*Q = Tf^*$. Очевидно, что оператор $f^*: M \rightarrow W$ непрерывен и инъективен.

Для любой меры $\mu \in M$ в силу теоремы 1 и 2

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(f^*\mu_R - f^*\mu) = f^*\mu_R - \lim_{n \rightarrow \infty} T^n f^*\mu,$$

отсюда сразу следует единственность инвариантной меры μ_R и (13).

Избавимся от предположения о том, что R имеет отталкивающую неподвижную точку. Выберем $k \in \mathbb{N}$ так, что R^k имеет отталкивающие неподвижные точки (это можно сделать, так как число всех неотталкивающих периодических точек функции R конечно).

Мера μ_R , построенная методом Крылова — Боголюбова, очевидно, является уравновешенной и для R^k , и, по доказанному, μ_R — единственная уравновешенная мера для R .

Для любой меры $\mu \in M$ $Q^{kn}\mu \rightarrow \mu_R$, $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $q \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ $Q^{kn+q}\mu = Q^{kn}(Q^q\mu) \rightarrow \mu_R$, $n \rightarrow \infty$, поэтому выполнено (13).

Теорема 3 доказана.

Список литературы: 1. Валирон Ж. Аналитические функции. М., 1957. 120 с. 2. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции. М., 1941. 139 с. 3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., 1970. 150 с. 4. Ljubich M. Yu. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere // Ergod. Theory and Dynam. Syst. 1983. 3. P. 351—385. 5. An invariant measure for rational maps / A. Friere, A. Lopez, R. Mane // Bol. Soc. Bras. Mat. 1983. 11. P. 10—39. 6. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. М., 1936. 90 с. 7. Yanagihara N. Exceptional values for meromorphic solutions of some difference equations // J. Math. Soc. Jap. 1982 34. No 3. P. 489—499. 8. Азарин В. С. Об асимптотическом поведении субгармонических функций конечного порядка // Мат. сб. 1979. 108, № 2. С. 217—238. 9. Содин М. Л. О распределении значений мероморфных функций конечного порядка по аргументам // Сиб. мат. журн. 1990. Вып. 2. С. 10—20. 10. Brolin H. Invariant sets under iteration of rational functions // Ark. Math. 1965. 6. P. 103—144.

Поступила в редколлегию 20.07.88

Эта статья — вторая часть работы, первая часть которой содержится в [1]¹. Принятая в ней нумерация продолжает нумерацию в [1]; двойная ссылка [1 [n]] означает [n] в списке литературы в [1]. В первых двух пунктах § 3 доказаны теоремы пикаровского и монтелевского типа для голоморфных сечений семейств кривых. Теорема 3.1, доказательство которой опирается на «теорему о доминировании» (теорему 2.1) из первой части, служит модификацией теоремы Нишино [1 [8]]. В теоремах 3.2 и 3.3 результаты Ногучи [1 [7]] распространены на некомпактные семейства кривых. В следующей работе² дано применение этих теорем к доказательству некомпактной версии теоремы Манина о кривых над функциональными полями. Здесь, в пункте 3.3, с их помощью получены близкие к необходимым достаточные условия мероморфности решений функциональных уравнений. Это дает, в частности, обобщение одной теоремы И. В. Островского [2]. Кроме того, в пункте 3.3 указано положительное решение проблемы, поставленной в работе А. Э. Еременко [3].

В § 4 даны «коллективные» оценки роста голоморфных отображений произвольных комплексных пространств в квазипроjektивные гиперболические кривые, обобщающие классические оценки Шоттки — Ландау (1906) [7, 8] роста голоморфных в круге функций, выпускающих два значения (теорема 4.1 и следствия 4.1 — 4.4).

Автору приятно выразить свою искреннюю признательность Н. М. Бланк, Е. А. Горину, А. Э. Еременко, В. Я. Лину, И. В. Островскому, А. М. Улановскому и другим коллегам, общение с которыми и ценные указания по отдельным вопросам, затронутым во второй части, были весьма полезны.

§ 3. Гиперболичность и голоморфные сечения.

3.1. Теорема пикаровского типа для голоморфных сечений.

Определение 3.1. Пусть $f: X \rightarrow S$ — семейство кривых (см. пункт¹ 2.1). Обобщенным голоморфным сечением семейства будем называть такое голоморфное отображение проколотого круга $\sigma: \Delta^* \rightarrow X$, что отображение $\rho = f \circ \sigma: \Delta^* \rightarrow S$ непостоянно и допускает голоморфное продолжение $\bar{\rho}: \Delta \rightarrow S$.

Теорема 3.1. Пусть $f: X \rightarrow S$ — семейство кривых общего типа², допускающее компактификацию³ $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$. Тогда каждое обобщенное голоморфное сечение $\sigma: \Delta^* \rightarrow X$ имеет голоморфное продолжение $\bar{\sigma}: \Delta \rightarrow \bar{X}$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение в случае, когда поверхность X нормальна. Пусть ω — достаточно малый диск

¹ При ссылках на первую часть работы номер [1] опускается.

² Зайденберг М. Г. Функциональный аналог гипотезы Морделла: некомпактная версия // Изв. АН. Сер. мат. 1989, 53, № в. С. 731—752.

³ См. определения 2.5.

в S с центром в точке $s_0 = \bar{\rho}(0)$. По теореме 2.1, существует семейство $g: Y \rightarrow R$, мероморфно доминирующее f , и такая его компактификация $\bar{g}: \bar{Y} \rightarrow \bar{R}$, что поверхность Y g -относительно гиперболически вложена¹ в $\bar{Y}$ и отображение доминирования $\Phi: Y \rightarrow X$ продолжается до мероморфного отображения $\bar{\Phi}$, замыкающего коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \bar{Y} & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & \bar{X} \\ \bar{g} \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ \bar{R} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \bar{S} \end{array} \quad (6)$$

(ср. с диаграммой (5)).

Пусть r_0 — один из $\bar{\varphi}$ -прообразов точки s_0 в R и Ω — такая односвязная окрестность точки r_0 в R , что $\bar{\varphi}(\Omega) = \omega$ и $\bar{\varphi}|_{\Omega}: \Omega \rightarrow \omega$ — циклическое накрытие порядка k с ветвлением в точке r_0 . Положим $\omega^* = \omega \setminus \{s_0\}$, $\Omega^* = \Omega \setminus \{r_0\}$, $X_{\omega^*} = f^{-1}(\omega^*)$, $Y_{\Omega^*} = g^{-1}(\Omega^*)$ и $\Phi_{\Omega^*} = \Phi|_{Y_{\Omega^*}}$. Тогда $\Phi_{\Omega^*}: Y_{\Omega^*} \rightarrow X_{\omega^*}$ — неразветвленное голоморфное циклическое накрытие порядка k .

Так как утверждение теоремы локальное, то можно считать, что $\rho(\Delta^*) \subset \omega^*$. Пусть $\sigma_k(z) = \sigma(z^k)$ и $\rho_k(z) = \rho(z^k) = f^{\partial} \sigma_k(z)$ ($z \in \Delta^*$). Тогда существуют голоморфные отображения $\bar{\rho}_k$ и $\bar{\sigma}_k$, замыкающие коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\Phi_{\Omega^*}} & & \\ Y_{\Omega^*} & \xleftarrow{\sigma_k} & \Delta^* & \xrightarrow{\sigma_k} & X_{\omega^*} \\ g \downarrow & \nwarrow \rho_k & & \nearrow \rho_k & \downarrow f \\ \Omega^* & & \xrightarrow{\bar{\varphi}|_{\Omega^*}} & & \omega^* \end{array}$$

В силу g -относительной гиперболической вложенности Y в $\bar{Y}$ можно считать, что область Y_{Ω^*} гиперболически вложена в $\bar{Y}$. По теореме Квак—Кобаяси—Кирнана [1[6]] существует голоморфное продолжение $\bar{\sigma}_k: \Delta \rightarrow \bar{Y}$ отображения $\bar{\sigma}_k$.

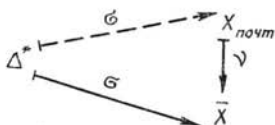
Положим $\bar{\sigma}_k = \bar{\Phi} \circ \bar{\sigma}_k$ (см. (6)). Множество точек неопределенности мероморфного отображения $\bar{\sigma}_k: \Delta \rightarrow \bar{X}$ имеет коразмерность 2, поэтому $\bar{\sigma}_k$ голоморфно и служит продолжением отображения σ_k . Пусть $\delta > 0$ настолько мало, что образ $\sigma(\Delta_\delta^*)$ содержится в координатной окрестности точки $x_0 = \bar{\sigma}_k(0)$ и вместе с ней — в ограниченной области в C^N . По теореме Римана о стирании особенностей σ продолжается до голоморфного отображения $\bar{\sigma}: \Delta \rightarrow \bar{X}$. Это завершает доказательство в случае, когда поверхность X нормальна.

¹ См. определение 2.6.

В общем случае рассмотрим нормализацию $v: \bar{X}_{\text{норм}} \rightarrow \bar{X}$ и нормальное семейство кривых $\tilde{f}: \bar{X}_{\text{норм}} \rightarrow \bar{S}$, где $\tilde{f} = \bar{f} \circ v$. Пусть $N(\bar{X})$ — «локус ненормальности» поверхности $\bar{X}$. Известно¹, что $N(\bar{X})$ — собственное замкнутое аналитическое множество.

В случае, когда $\sigma(\Delta^*) \subset N(\bar{X})$, обозначим через N_1 неприводимую компоненту множества $N(\bar{X})$, содержащую $\sigma(\Delta^*)$. Пусть, как и раньше, $s_0 = \bar{\rho}(0) \in S$ и $\bar{\Gamma}_{s_0}(\tilde{f}) = \tilde{f}^{-1}(s_0)$. Согласно определению 3.1 $\rho \neq \text{const}$; отсюда, как легко видеть, следует, что $N_1 \cap \bar{\Gamma}_{s_0}(\tilde{f})$ — конечное множество. Для фиксированной его окрестности $U \subset \bar{X}$ найдется такое $\delta > 0$, что $\sigma(\Delta_\delta^*) \subset U$. Остается воспользоваться теоремой Римана о стирании особенностей.

Пусть, далее, $\sigma(\Delta^*) \not\subset N(\bar{X})$. Тогда существует голоморфное отображение $\bar{\sigma}$, замыкающее коммутативный треугольник²:



Так как поверхность $\bar{X}_{\text{норм}}$ нормальна, то в силу доказанного выше отображение σ допускает голоморфное продолжение $\bar{\sigma}: \Delta \rightarrow \bar{X}_{\text{норм}}$. Ясно, что $\bar{\sigma} = v \circ \bar{\sigma}$ — искомое голоморфное продолжение отображения σ . Теорема доказана.

Замечания. 1. Верен (в тем же доказательстве) локальный вариант этой теоремы (см. замечание 1 к теореме 2.1). 2. Теорема 3.1 служит модификацией теоремы Нишино (см. [1 [8]], гл. 1, п. 2, теорема 1 и гл. II, п. 2, с. 548). В ней речь идет о продолжении обычных голоморфных сечений; доказательство, существенно отличное от приведенного здесь доказательства теоремы 3.1, дается отдельно для семейств кривых рода ≥ 2 , рода 1 и рода 0. В работе Т. Кицука³ формулируется без доказательства и используется обобщение теоремы Нишино для многозначных голоморфных сечений.

Следствие. В условиях теоремы 3.1 каждое голоморфное сечение $\sigma: S_0 \rightarrow X$ семейства f , заданное на открытом по Зарискому подмножестве $S_0 \subset \bar{S}$, продолжается до голоморфного сечения $\bar{\sigma}_1: \bar{S} \rightarrow \bar{X}$ семейства $\bar{f}$.

Определение 3.2. Пусть X — открытое по Зарискому подмножество компактной комплексной поверхности $\bar{X}$, R — открытое по Зарискому подмножество компактной кривой $\bar{R}$. Будем говорить, что голоморфное отображение $\varphi: R \rightarrow X$ аналитически

¹ См. Fisher G. Complex analytic geometry // Lect. Notes Math. 1976. 538, гл. II. 201 p.

² См. loc. cit., предложение 2.28.

³ Kizuka T. Analytic automorphisms and algebraic automorphisms of $\mathbb{C}^2$ // Tôhoku Math. J. 1979. 31, 1. P. 553—565.

вырождено, если в $\bar{X}$ существует замкнутая кривая B , содержащая образ $\varphi(R)$.

Предложение 3.1. Пусть $f: X \rightarrow S$ — семейство кривых общего типа с гиперболической базой S , допускающее компактификацию $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$. Тогда любое голоморфное отображение $\varphi: R \rightarrow X$, где R — гладкая алгебраическая кривая, аналитически вырождено.

Доказательство. Поскольку кривая $\bar{S}$ гиперболическа и, следовательно, гиперболически вложена в $\bar{S}$, то, согласно большой теореме Пикара, отображение $\rho = \bar{f} \circ \varphi: R \rightarrow \bar{S}$ допускает голоморфное продолжение $\bar{\rho}: \bar{R} \rightarrow \bar{S}$. Если $\bar{\rho} \equiv \text{const} = s_0 \in S$, то $\varphi(R) \subset \subset \bar{\Gamma}_{s_0}(\bar{f})$, так что отображение φ аналитически вырождено. Допустим, что $\rho \neq \text{const}$. Тогда в окрестности любой точки $r_0 \in \bar{R} \setminus R$ отображение φ определяет обобщенное голоморфное сечение семейства $\bar{f}$. По теореме 3.1 φ допускает голоморфное продолжение $\bar{\varphi}: \bar{R} \rightarrow \bar{X}$. В силу теоремы Реммерта образ $B = \bar{\varphi}(\bar{R})$ — компактная кривая в $\bar{X}$. Предложение доказано.

3.2. Теоремы монтелиевского типа для голоморфных сечений. Пусть X, Y — комплексные пространства. Напомним, что семейство $\mathcal{F} \subset \subset \text{Hol}(X, Y)$ называется нормальным (по Монтелю), если каждая последовательность $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ содержит либо сходящуюся, либо компактно расходящуюся подпоследовательность (последнее означает, что для любых компактов $P \subset X, Q \subset Y$ и для всех членов f_{n_k} подпоследовательности с достаточно большими номерами имеем $f_{n_k}(P) \cap Q = \emptyset$).

Далее через $H_\Omega(f)$ будем обозначать множество всех голоморфных сечений семейства кривых $f: X \rightarrow S$ над открытым подмножеством $\Omega \subset S$. Снабдим пространство $H_\Omega(f)$ компактно открытой топологией.

Теорема 3.2. Пусть $f: X \rightarrow S$ — нормальное семейство кривых общего типа и $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ — такая его компактификация, что горизонтальная кривая¹ $A_h \subset \bar{X} \setminus X$ является локально главной. Через S_0 обозначим множество всех тех точек $s_0 \in S$, что слой $\bar{\Gamma}_{s_0}(\bar{f})$ семейства $\bar{f}$ гиперболическ и его замыкание в $\bar{X}$ совпадает со слоем $\bar{\Gamma}_{s_0}(\bar{f})$ семейства $\bar{f}$. Тогда семейство сечений $H_{s_0}(f)$ нормально по Монтелю.

Доказательство. Пусть $\{\omega\}$ — некоторое счетное покрытие области S_0 относительно компактными в S_0 дисками. Нетрудно убедиться в том, что для любой области вида $X_\omega = f^{-1}(\omega) \subset \bar{X}$ выполнены условия предложения 1.2, в силу которого X_ω гиперболически вложена в $\bar{X}$. По теореме Кирнана ([16], теорема 1) для голоморфных отображений произвольного комплексного пространства Z в Y справедлив аналог теоремы Монтеля; в частности, семейство $H_\omega(f)$ нормально. Отсюда легко следует утверждение теоремы.

Заметим, что в силу леммы 2.1 множество S_0 в теореме 3.2 открыто по Зарискому в $\bar{S}$. Согласно следствию из теоремы 3.1, определено

¹ См. определение 2.1.

естественное вложение $H_{S_0}(f) \hookrightarrow H_{\bar{S}}(\bar{f})$. Образ $H_{S_0}(f)$ при этом вложении будем обозначать через $HE_{S_0}(f)$.

Теорема 3.3. Пусть в условиях теоремы 3.2 поверхность X f — относительно гиперболически вложена в $\bar{X}$. Тогда семейство продолжений $HE_{S_0}(f)$ нормально и, более того, относительно компактно в пространстве $H_{\bar{S}}(\bar{f})$.

Доказательство. В силу леммы 2.3 из [17] из сходимости последовательности $\{\sigma_n\} \subset H_{S_0}(f)$ к сечению $\sigma_0 \in H_{S_0}(f)$ следует, что последовательность голоморфных продолжений $\{\bar{\sigma}_n\} \subset HE_{S_0}(f)$ сходится к продолжению $\bar{\sigma}_0 \in HE_{S_0}(f)$ в топологии пространства $H_{\bar{S}}(\bar{f})$. Остается проверить, что для любой компактно расходящейся последовательности $\{\sigma_n\} \subset H_{S_0}(f)$ существует подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\} \subset HE_{S_0}(f)$, сходящаяся в $H_{\bar{S}}(\bar{f})$.

Пусть $\bar{S} \setminus S_0 = \{s_1, \dots, s_m\}$ и $\{Q_l\}$ — такая возрастающая последовательность компактов в S_0 , что $\bar{S} \setminus Q_l = \bigcup_{i=1}^m \omega_i^{(l)}$ — объединение дисков с центрами в точках $s_1, \dots, s_m$ соответственно и радиусами $1/l$ в некоторой фиксированной на $\bar{S}$ римановой метрике. Фиксируем риманову метрику на $\bar{X}$; пусть V_l — окрестность горизонтальной кривой A_h радиуса $1/l$ в этой метрике. Положим $U_l = V_l \cup W_l$ и $K_l = \bar{X} \setminus U_l$, где $W_l = \bigcup_{i=1}^m \bar{f}^{-1}(\omega_i^{(l)})$.

Если последовательность $\{\sigma_n\} \subset H_{S_0}(f)$ является компактно расходящейся, то для любого $l = 1, 2, \dots$ найдется такой номер $n(l)$, что при всех $n > n(l)$ имеем $\sigma_n(Q_l) \cap K_l = \emptyset$, т. е. $\sigma_n(Q_l) \subset V_l$. Это дает возможность выделить подпоследовательность $\{\sigma_{n_k}\} \subset \{\sigma_n\}$, сходящуюся в топологии пространства $\text{Hol}(S_0, \bar{X})$ к сечению $\sigma_0 \in H_{S_0}(\bar{f})$. Ясно, что $\sigma_0(S_0) \subset A_h$. Пусть B_h — неприводимая компонента кривой A_h , содержащая образ $\sigma_0(S_0)$. Разветвленное накрытие $\bar{f}|B_h: B_h \rightarrow \bar{S}$ допускает над S_0 сечение σ_0 ; значит, оно однолистно и неразветвлено. Обратное отображение $\bar{\sigma}_0 = (\bar{f}|B_h)^{-1} \in \text{Hol}(\bar{S}, \bar{X})$ служит голоморфным продолжением сечения σ_0 . Дословное повторение рассуждения, доказывающего лемму 2.3 в [17], показывает, что последовательность $\{\sigma_{n_k}\}$ равномерно на $\bar{S}$ сходится к $\bar{\sigma}_0$. Теорема доказана.

Следующий пример показывает, что свойство нормальности семейства сечений $HE_{S_0}(f)$ неустойчиво относительно бимероморфных перестроек. В частности, в теореме 3.3 нельзя, вообще говоря, отказаться от условия относительной гиперболической вложенности.

Пример 3.1. Положим $\bar{X} = \bar{\Gamma} \times \mathbb{C}P^1$, где $\bar{\Gamma}$ — некоторая фиксированная гладкая компактная кривая рода ≥ 2 . Пусть $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$, где $\bar{S} = \mathbb{C}P^1$, и $\pi: \bar{X} \rightarrow \bar{\Gamma}$ — проекции прямого произведения на сомножители. В силу гиперболическости кривой $\bar{\Gamma}$ все голоморфные сечения

семейства $\bar{f}$ постоянны, т. е. для каждого $\sigma \in H_{\bar{S}}(\bar{f})$ найдется такое $\gamma \in \bar{\Gamma}$, что $\sigma(s) \equiv \sigma_{\gamma}(s) \equiv \gamma$ при всех $s \in \bar{S}$. В частности, пространство $H_{\bar{S}}(\bar{f})$ естественно гомеоморфно кривой $\bar{\Gamma}$ и, следовательно, компактно.

Фиксируем произвольную точку $x_0 = (\gamma_0, s_0) \in \bar{X}$. Пусть $\rho: \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$ — σ -процесс в точке x_0 и $E = \rho^{-1}(x_0)$ — вклеенная при этом исключительная кривая. Пусть $\bar{g} = \bar{f} \circ \rho: \bar{Y} \rightarrow S$ — индуцированное семейство. Любое сечение $\bar{\sigma} \in H_{\bar{S}}(\bar{g})$ имеет проекцию $\sigma_{\gamma} = \rho \circ \bar{\sigma} \in H_{\bar{S}}(\bar{f})$. Собственный прообраз $\bar{\sigma}_{\gamma_0}$ сечения σ_{γ_0} проходит через точку $\bar{\sigma}_{\gamma_0}(s_0) \in E$; очевидно, что это — единственное сечение в $H_{\bar{S}}(\bar{g})$, пересекающее кривую E . Значит, $\bar{\sigma}_{\gamma_0}$ — изолированная точка пространства $H_{\bar{S}}(\bar{g})$. Пусть $\gamma_n \rightarrow \gamma_0$ при $n \rightarrow \infty$, причем $\gamma_n \neq \gamma_0$ при $n \neq 0$. Тогда последовательность сечений $\{\bar{\sigma}_{\gamma_n}\} \subset H_{\bar{S}}(\bar{g})$ не содержит сходящихся или компактно расходящихся подпоследовательностей.

Таким образом, в этом примере семейство $H_{\bar{S}}(\bar{g})$ не является нормальным по Монтелю. Оно квазинормально и имеет единственную иррегулярную точку s_0 , — согласно терминологии Монтеля¹ это означает, что семейство $H_{S_0}(\bar{g})$, где $S_0 = \bar{S} \setminus \{s_0\}$, нормально и в то же время семейство $H_{\bar{S}}(\bar{g})$ не является нормальным ни в какой окрестности точки s_0 .

3.3. Полиномиальные тождества и мероморфность. И. В. Островским в качестве следствия теоремы единственности для мер ограниченной вариации на вещественной прямой [2] (теорема 3) (в частном случае дискретных мер с носителем на $\mathbb{Z}$) получен такой замечательный факт.

Теорема И. В. Островского. Пусть f и g — две голоморфные в круге с выколотым центром Δ^* функции, для которых $z = 0$ — существенно особая точка. Если функции f^3 и g^3 имеют одинаковые главные части, то $f^3 = g^3$. То же верно для любых показателей $n \geq 3$ (но не $n = 2$: $(f, g) = (\cos z^{-1}, i \sin z^{-1})$).

Легко видеть, что это утверждение не распространяется на функции, голоморфные в кольце $\varepsilon < |z| < 1$ (где $\varepsilon > 0$); достаточно взять $(f, g) = ([(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)]^{1/3}, [(z - a_4)(z - a_5)(z - a_6)]^{1/3})$, где a_i ($1 \leq i \leq 6$) — попарно различные точки в круге Δ_{ε} и для кубических корней выбраны однозначные в кольце ветви.

Теорема 3.1 позволяет получить следующее обобщение этого факта.

Теорема 3.4. Пусть семейство кривых $p: C^2 \rightarrow C$, определяемое полиномом $p \in C[x, y]$, имеет общий тип². Пусть $\Gamma_{c_1}, \dots, \Gamma_{c_k}$ —

¹ См. Монтель П. Нормальные семейства аналитических функций. М.: Л., 1936. 240 с., §§ 34—35.

² В этом случае скажем, что p — полином общего типа. Следует отметить, что любой полином $p \in C[x, y]$ не общего типа полиномиальной заменой координат в C^2 приводится к виду $p(x, y) = \varphi(x^k(x'y + p(x))^n)$, где $(k, n) = 1$, $\varphi, p \in C[\mathbb{Z}]$ (А. Гутвиц [1961], Х. Сайто (1972)).

набор всех не гиперболических слоев этого семейства. Пусть f и g — голоморфные в Δ^* функции, хотя бы одна из которых имеет существенную особенность в нуле. Если функция $p(f, g)$ мероморфно продолжима в точку $z = 0$, то $p(f, g) \equiv \text{const} = c_0 \in \{c_1, \dots, c_k\}$.

Замечание. Полагая в условиях теоремы $p(x, y) = x^n - y^n$, где $n \geq 3$, получим теорему И. В. Островского.

Доказательство. Разрешение точек неопределенности рациональной функции p на $\mathbb{CP}^2$ дает гладкую компактификацию $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ семейства p . Допустим, вопреки утверждению, что мероморфная в круге Δ функция $\rho(z) = p(f(z), g(z))$ не постоянна. Тогда $\sigma = (f, g): \Delta^* \rightarrow \mathbb{C}^2$ — обобщенное сечение семейства $\bar{p}|(\bar{X} \setminus A_h)$ (см. определение 3.1). По теореме 3.1 оно имеет голоморфное продолжение $\bar{\sigma}: \Delta \rightarrow \bar{X}$. Следовательно, координатные функции f и g отображения σ мероморфно продолжимы в точку $z=0$ (действительно, координаты x и y в $\mathbb{C}^2$ мероморфно продолжаются на $\bar{X}$), что противоречит условию. Таким образом, $p(f, g) \equiv \text{const} = c_0 \in \mathbb{C}$.

Если слой $\Gamma_{c_0}(p)$ гиперболический, то он гиперболически вложен в свое замыкание $\overline{\Gamma_{c_0}(p)} \subset \bar{X}$ (этот хорошо известный факт следует, например, из теоремы 1.1 (е)). Согласно большой теореме Пикара, отображение $\sigma: \Delta^* \rightarrow \overline{\Gamma_{c_0}(p)}$ голоморфно продолжается в точку $z=0$, что вновь приводит к противоречию с условием. Значит, $c_0 \in \{c_1, \dots, c_k\}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $p \in \mathbb{C}[x, y]$ — такой полином, что все слои семейства $p: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ гиперболически (например, $p(x, y) = x^3 + y^3 + \varepsilon x$, где $\varepsilon \neq 0$). Если для пары голоморфных в Δ^* функций f и g функция $p(f, g)$ имеет в точке $z=0$ полюс или устранимую особенность, то каждая из функций f и g имеет в точке $z=0$ полюс или устранимую особенность.

Замечание. Пусть полином $p(x, y)$ квазиоднороден, т. е. $p(\lambda^k x, \lambda^l y) = \lambda^n p(x, y)$ при некоторых $k, l, n \in \mathbb{N}$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Тогда $\Gamma_0(p)$ — единственный вырожденный слой семейства p . Это семейство имеет общий тип тогда и только тогда, когда эйлерова характеристика $\chi(\Gamma_1(p))$ отрицательна; будем считать это условие выполненным. Для такого полинома p в условиях теоремы 3.4 функция $\rho = p(f, g)$ мероморфно продолжима в точку $z=0$ в том и только в том случае, когда $\rho(z) \equiv 0$ (точный аналог теоремы И. В. Островского). Как заметил В. Я. Лин, это следствие из теоремы 3.4 имеет короткое независимое доказательство; приведем его здесь с любезного согласия В. Я. Лина.

Допустим, что $\rho \not\equiv 0$. Так как ситуация локальна, то замена $z \rightarrow az$ позволяет предполагать, что функция $\rho(z)$ не обращается в нуль в Δ^* . Существует такая функция $\rho_1 \in \text{Hol}(\Delta^*, \mathbb{C}^*)$, что $\rho^n(z) = \rho(z)^n$. Рассмотрим отображение $\sigma: \Delta^* \rightarrow \mathbb{C}^2$, $\sigma(z) = (f(z^n)/\rho_1^k(z), g(z^n)/\rho_1^l(z))$. Имеем $\rho \circ \sigma \equiv 1$, так что $\sigma(\Delta^*) \in \Gamma_1(p)$. Поскольку кривая $\Gamma_1(p)$ гиперболическа (и гиперболически вложена в свое проективное пополнение), то в силу большой теоремы Пикара отображение σ мероморфно продолжается в точку $z=0$. Значит, функции f и g мероморфно

продолжимы в точку $z = 0$ вопреки условию. Таким образом, $p(z) \equiv 0$.

Следствие 2. Пусть $p \in \mathbb{C}[x, y]$ — полином общего типа, f и g — пара целых функций. Если $p(f, g)$ — полином, то либо f и g — полиномы, либо $p(f, g) \equiv \text{const} = c_0$ и слой $\Gamma_{c_0}(p)$ не гиперболичен. В частности, если все слои полинома p гиперболичны, то имеет место первый случай.

Замечание. В работе С. Токунага¹ имеется близкое утверждение, полученное с помощью теоремы Нишино в форме Кицука.

Следствие 3. Полином p общего типа не имеет трансцендентных сечений, т. е. из соотношения $p(f(z), g(z)) \equiv z$, где f и g — целые функции, следует, что f и g — полиномы.

Приведем более общее утверждение, положительно решающее проблему, сформулированную в [3] (§ 2, с. 64).

Теорема 3.5. Пусть $p \in \mathbb{C}[x, y, z]$ — такой полином, что при «общих» $z \in \mathbb{C}$ кривые $\Gamma_z = \{p(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{C}_{x, y}^2$ неприводимы. Пусть f и g — пара мероморфных в $\mathbb{C}$ функций, удовлетворяющих тождеству $p(f(z), g(z), z) \equiv 0$.

(а) Если общая кривая Γ_z имеет род ≥ 2 , то функции f и g рациональны.

(б) Если общая кривая Γ_z гиперболична и функции f и g имеют конечное число полюсов, то эти функции рациональны.

Доказательство. Уравнение $p = 0$ определяет аффинную поверхность $X \subset \mathbb{C}^3$. Положим $F = z|X$. Проективное замыкание $\hat{X}$ и разрешение точек неопределенности функции F на $\hat{X}$ приводят к компактификации $\bar{F}: \bar{X} \rightarrow \mathbb{C}P^1$ семейства F . При этом координатные функции x и y мероморфно продолжаются на $\hat{X}$. Положим $\sigma(z) = (f(z), g(z), z)$; пусть $\omega^* = \{|z| > R\}$ — «достаточно малая» проколота окрестность точки $z = \infty$ на сфере Римана $\mathbb{C}P^1$. Тогда $\sigma \in H_{\omega^*}(\bar{F})$ в случае (а) и $\sigma \in H_{\omega^*}(F)$ в случае (б). Поскольку оба семейства имеют общий тип, то в силу теоремы 3.1 сечение σ имеет голоморфное продолжение $\bar{\sigma} \in H_{\mathbb{C}P^1}(\bar{F})$. Следовательно, его координатные функции $f = x \circ \sigma$ и $g = y \circ \sigma$ мероморфно продолжаются в точку $z = \infty$, а значит, эти функции рациональны. Теорема доказана.

Замечание. Разумеется, в этой теореме условие неприводимости общей кривой Γ_z , принятое нами для упрощения формулировки, лишнее (см. абзац, следующий за определением 2.4).

3.4. О трансцендентных сечениях.

Определение 3.3. Пусть $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ — собственное семейство кривых (см. определение 2.2), A_h — горизонтальная кривая в $\bar{X}$, $X = \bar{X} \setminus A_h$ и $p = \bar{p}|X$. Пусть ω — диск в S с центром s_0 , $\omega^* = \omega \setminus \{s_0\}$ и $\sigma \in H_{\omega^*}(p)$. Будем говорить, что сечение σ имеет в точке s_0 полюс (устраняемую особенность), если существует продолжение $\bar{\sigma} \in H_{\omega}(\bar{p})$, где $\bar{\sigma}(0) \in A_h$ (соответственно $\bar{\sigma} \in H_{\omega}(p)$). В противном случае (когда сечение σ непродолжимо в точку s_0) скажем, что σ имеет существенную особенность в точке s_0 .

¹ Tokunaga S. A condition for holomorphic map of $\mathbb{C}^2$ into $\mathbb{C}^2$ to be algebraic// J. Math. Soc. Japan. 1982. 34, 2. P. 289—292.

Определение 3.4. Пусть семейство $\bar{p}$ в определении 3.3 компактно; пусть S_0 — открытое подмножество в S . Будем называть сечение $\sigma \in H_{S_0}(\bar{p})$ мероморфным в S_0 сечением семейства $\bar{p}$, если $\sigma(S_0) \not\subset A_h$. Пусть S_0 открыто по Зарискому. Скажем, что σ трансцендентно, если оно мероморфно в S_0 и имеет существенную особенность хотя бы в одной точке $s_0 \in \bar{S} \setminus S_0$.

Для семейств, рассматриваемых в пункте 3.3, $\bar{S} = \mathbb{C}P^1$, $S_0 = \mathbb{C}$, поверхность X аффинна и $\bar{X}$ бирационально эквивалентна ее проективному пополнению. В этой ситуации определение 3.4 согласуется с общепринятой терминологией, распространенной на набор координатных функций сечения σ .

Во всех утверждениях в пунктах 3.1 и 3.3, где речь шла о мероморфной продолжимости, рассматривались семейства общего типа. Покажем, что, как правило, условие общности типа необходимо.

Предложение 3.2. Пусть $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ — компактное семейство рациональных кривых и $p = \bar{p}|(\bar{X} \setminus A_h)$, где A_h — горизонтальная кривая в X . Допустим, что семейство p — не общего типа, или, что то же, что кратность разветвленного накрытия $\bar{p}|A_h: A_h \rightarrow S$ не превосходит 2. Пусть s_0 — произвольная точка в $\bar{S}$ и $S_0 = \bar{S} \setminus \{s_0\}$. Тогда

(а) над проколотой окрестностью точки s_0 существует обобщенное голоморфное сечение σ_0 семейства p , не продолжимое мероморфно в точку s_0 ;

(б) существует мероморфное в S_0 трансцендентное сечение σ_1 семейства p ;

(в) в случае, когда накрытие $\bar{p}|A_h$ однолистно, или когда оно двулистно и кривая A_h приводима, можно считать, что сечение σ_1 имеет конечное число полюсов в S_0 .

Доказательство. В теории линейчатых поверхностей (см. [4], гл. IV)¹ устанавливается, что семейство $\bar{p}$ рациональных кривых бимероморфно эквивалентно тривиальному семейству $\bar{\pi}: \mathbb{C}P^1 \times \bar{S} \rightarrow \bar{S}$ (следствие существования разрешения особенностей $\bar{X}$ поверхности $\bar{X}$, наличия на $\bar{X}$ алгебраической структуры и теоремы Нетера ([4], гл. I, § 3)²). Для любого $\Omega \subset \bar{S}$ это дает биекцию $H_2(\bar{p}) \rightarrow H_2(\bar{\pi})$, сохраняющую существенно особые точки сечений. Поэтому можно считать, что $\bar{p} = \bar{\pi}$, — действительно, утверждения (а), (б) и (в) инвариантны относительно бимероморфной эквивалентности семейств.

(а) Утверждение этого пункта локально, так что можно считать семейство $\bar{\pi}$ заданным над кругом Δ ($s_0 = 0$); кроме того, можно считать, что накрытие $\bar{\pi}|A_h: A_h \rightarrow \Delta$ либо неразветвлено, либо $0 \in \Delta$ — единственная его точка ветвления. В первом случае биголоморфный автоморфизм семейства $\bar{\pi}$ превращает A_h в пару кривых $C_0 = \{0\} \times \Delta$ и $C_\infty =$

¹ См. также Barth W., Peters C., Van de Ven A. Compact complex surfaces. Berlin e. a., 1984. 304 p., гл. V, § 4.

² Имеется альтернативный путь: см. loc. cit.

$=\{\infty\} \times \Delta$ или в одну из них. Сечение $\sigma_0(z) = (e^{1/2}, z)$ в этом случае является искомым. Эта же конструкция σ_0 годится в случае, когда кривая A_h приводима (над Δ); действительно, бимероморфная перестройка, нормализующая кривую A_h , возвращает к уже рассмотренной ситуации.

Обратимся, далее, к случаю, когда кривая A_h неприводима и проекция $\bar{\pi}|A_h$ двулистка с точкой ветвления $(0, 0) \in \mathbb{C}P^1 \times \Delta$. Можно считать также, что $A_h \cap C_\infty = \emptyset$, так что $A_h \subset C \times \Delta$. Естественно определена кривая B_h — поточечная полусумма ветвей кривой A_h . Она служит графиком голоморфной в Δ функции и потому является гладкой. Подвергнув семейство $C \times \Delta \rightarrow \Delta$ автоморфизму, можно считать, что $B_h = C_0$. При этом кривая A_h преобразуется в график двузначной функции $\sqrt{f(z)}$, где $f(z)$ голоморфна в Δ , не обращается в нуль в Δ^* и $f(0) = 0$. Положим $\sigma_0(u) = (e^u + \sqrt{f(u^2)}, u^2)$ ($u \in \Delta$; для квадратного корня выбрана однозначная ветвь). Ясно, что $\sigma_0: \Delta \rightarrow C \times \Delta$ — искомое обобщенное голоморфное сечение семейства p , не продолжимое мероморфно в точку $s_0 = 0$.

(б) Пусть ψ — голоморфная функция на S_0 , имеющая существенную особенность в точке s_0 . Тогда $\sigma_1(s) = (\psi(s), s)$ — искомое трансцендентное сечение семейства $\bar{p} = \pi$.

(в) В этом случае бимероморфная перестройка семейства $\bar{p} = \pi$ позволяет преобразовать кривую A_h в кривую $C_0 \cup C_\infty$ или в C_∞ . Искомым сечением служит $\sigma_1(s) = (e^{\psi(s)}, s)$. Это завершает доказательство.

Предложение 3.3. Пусть $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ — компактное семейство эллиптических кривых, обладающее голоморфным сечением $\sigma_0 \in H_{\bar{S}}(\bar{p})$. Пусть s_0 — произвольная точка в $\bar{S}$ и $S_0 = \bar{S} \setminus \{s_0\}$. Тогда существует сечение $\sigma_1 \in H_{S_0}(\bar{p})$, для которого s_0 — существенно особая точка.

Доказательство. Напомним кратко конструкцию якобиева расслоения (см. [4], гл. VII, § 5; [5])¹. Разрешив особенности, будем считать, что $\bar{X}$ — гладкая поверхность. Пусть F — объединение всех неприводимых компонент вырожденных слоев семейства $\bar{p}$, не пересекающих σ_0 . Положим $X^* = X \setminus F$ и $p^* = \bar{p}|X^*$. На каждом слое семейства p^* можно ввести структуру абелева многообразия, считая сечение σ_0 нулевым. Расслоение p^* с этой групповой структурой называют якобиевым расслоением семейства $\bar{p}$.

Пусть $C_0 = \sigma_0(\bar{S})$ и голоморфное линейное расслоение $\xi: E \rightarrow \bar{S}$ является ограничением на C_0 вертикального подрасслоения касательного расслоения TX^* . Имеется естественный послыйный гомоморфизм $\exp: E \rightarrow X^*$, переводящий нулевое сечение $Z \subset E$ в C_0 . Отображение $\exp$ голоморфно; следовательно, $\Lambda = \exp^{-1}(C_0)$ — замкнутое аналитическое подмножество в E . Для каждой точки $s \in \bar{S}$ такой, что слой $\bar{\Gamma}_s(\bar{p})$ не вырожден, $\Lambda_s = \Lambda \cap E_s$ — подрешетка в E_s и $\exp|E_s: E_s \rightarrow \bar{\Gamma}_s(\bar{p})$ — факторизация по этой решетке.

¹ См. также Кодaira К. О компактных аналитических поверхностях // Математика. Сб. пер. 1962. 6: 6. С. 3—18; п. 4.

Если $\bar{\sigma}$ — голоморфное сечение расслоения ξ над множеством $\Omega \subset \bar{S}$, то $\sigma = \exp \bar{\sigma} \in H_2(\bar{p})$. Сужение расслоения ξ на некомпактную кривую S_0 голоморфно тривиально¹. Голоморфные сечения тривиального расслоения $C \times S_0 \rightarrow S_0$ естественно отождествляются с голоморфными функциями на S_0 . Пусть $\varphi(s)$ — ненулевая голоморфная функция на S_0 с бесконечным множеством нулей и $\bar{\sigma}$ — соответствующее ей сечение пучка $\xi|S_0$. Так как $\bar{\sigma}_1$ пересекает нулевое сечение Z в бесконечном множестве точек, то сечение $\sigma_1 = \exp \sigma \in H_{S_0}(\bar{p})$ бесконечно часто пересекает кривую C_0 . Следовательно, σ_1 — искомое трансцендентное сечение семейства $\bar{p}$, ибо в случае, если s_0 — устранимая особенность сечения σ_1 , мы имели бы в $\bar{X}$ две компактные кривые C_0 и $C_1 = = \sigma_1(S_0)$ с бесконечным числом точек пересечения и не совпадающие, что невозможно. Предложение доказано.

Замечания. 1. Приведенная конструкция может быть эффективизирована следующим образом. Известно (см. [4], гл. VII, § 6), что в условиях предложения 3.3 семейство $\bar{p}$ бимероморфно эквивалентно семейству $\bar{p}_1: \bar{X}_1 \rightarrow \bar{S}$, где поверхность $\bar{X}_1 \subset \mathbb{C}P^2 \times \bar{S}$ задается в аффинных координатах уравнением

$$y^2 = 4x^3 + g_2(s)x + g_3(s), \quad (7)$$

где g_2, g_3 — мероморфные функции на $\bar{S}$ и $\bar{p}_1(x, y, s) = s$ (сечение σ_0 состоит из точек на бесконечно удаленной прямой). Легко видеть, что линейное расслоение ξ_1 , соответствующее семейству $\bar{p}_1$, тривиально (это следует из того, что каждый слой $\bar{\Gamma}_s(\bar{p}_1)$ в точке пересечения с C_0 касается бесконечно удаленной прямой в $\mathbb{C}P^2$) и отображение $\exp: C \times \bar{S} \rightarrow \bar{X}_1$ имеет вид $\exp(u, s) = (\rho(u, s), \rho'_u(u, s))$, где $\rho(u, s)$ для общей точки $s \in \bar{S}$ — функция Вейерштрасса кривой $\bar{\Gamma}_s(\bar{p}_1)$. (Напомним², что коэффициенты $c_n(s)$ ($n = 2, 3, \dots$) разложения $\rho(u, s) = 1/u^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n(s) u^{2n-2}$ являются многочленами от $g_2(s)$ и $g_3(s)$). Пусть $\varphi(s)$ — голоморфная в S_0 функция с бесконечным числом нулей и $\sigma_1(s) = = (\rho(\varphi(s), s), \rho'_u(\varphi(s), s))$. Тогда $\sigma_1 = (x, y)$ — мероморфное в S_0 решение уравнения (7) с бесконечным числом полюсов, т. е. трансцендентное сечение семейства $\bar{p}_1$, голоморфное в S_0 .

2. В частности, эта конструкция дает положительный ответ на вопрос В. Я. Лина (см. [6], гл. 2, пример 1 в пункте 5.2) о существовании мероморфных в C^* сечений аффинного семейства, определяемого дискриминантным полиномом: $27y^2 + 4x^3 + z = 0$. (В [6] указано, что это семейство не имеет сечений, голоморфных в C^* ; наша конструкция дает сечения, мероморфные в C).

3. Каждое собственное семейство $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow \Delta$ эллиптических кривых имеет голоморфное в некоторой проколотой окрестности Δ_ε^* ($0 < \varepsilon < 1$)

¹ См., например, Форстер О. Римановы поверхности. М., 1980. 246 с.; предложение 30.3.

² См. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968. 648 с., ч. 2, гл. I, § 7.

точки $z = 0$ сечение σ_1 , не продолжимое голоморфно в эту точку. В случае, когда $\bar{p}$ обладает локальным сечением $\sigma_0 \in H_{\Delta_g}(\bar{p})$, сечение σ_1 строится так же, как в предложении 3.3. В противном случае, как следует из классификации Кодaira вырожденных слоев минимального семейства эллиптических кривых (см. [5]), можно считать, что $\bar{\Gamma}_0(\bar{p})$ — кратный слой. Логарифмическое преобразование Кодaira¹ заменяет слой $\bar{\Gamma}_0(\bar{p})$ не кратным, так что в полученном семействе имеется локальное голоморфное сечение $\bar{\sigma}_1$. Его прообраз $\sigma_1 \in H_{\Delta_g}^*(\bar{p})$ — искомое сечение; действительно, оно не может быть голоморфно продолженным в точку $z = 0$, так как ни одно голоморфное сечение не пересекает кратный слой $\bar{\Gamma}_0(\bar{p})$.

4. Предложения 3.2 и 3.3 показывают, что условия теоремы 3.5 существенны. Действительно, тождество в этой теореме имеет мероморфные в $\mathbb{C}$ решения с бесконечным числом полюсов в случае, когда либо общие кривые Γ_z рациональны, либо являются эллиптическими кривыми и их компактифицированное семейство имеет глобальное голоморфное сечение.

5. Вопрос о существовании мероморфных в $\mathbb{C}$ трансцендентных сечений семейств кривых рода 0 и 1, связанный с аналогичным вопросом для семейств кривых рода ≥ 2 [3], возник в переписке автора и А. Э. Еременко. А. Э. Еременко первым указал на существование таких сечений в случае рода 0 (его рассуждения основаны на лемме Тсена из теории алгебраических функций); он же обратил внимание на то обстоятельство, что функция Вейерштрасса и ее производная дают трансцендентное сечение постоянного семейства эллиптических кривых в нормальной форме (7) (где g_2 и g_3 постоянны).

6. Как уже отмечалось, теорема 3.4 обобщает лишь следствие из теоремы 3 в [2]; кажется правдоподобным, что и сама теорема 3 допускает аналогичное обобщение. Приведем его формулировку.

Гипотеза. Пусть $p \in \mathbb{C}[x, y]$ — полином общего типа и μ_1, μ_2 — такие комплекснозначные борелевские меры ограниченной вариации на $\mathbb{R}$, что их преобразования Фурье голоморфны в $\mathbb{C}_+$, а их носители не содержатся ни в какой полупрямой $R_+(a) := \{t \geq a\} \subset \mathbb{R}$. Если носитель меры $\nu = p(\mu_1, \mu_2)$ (сверточный полином) заключен в $R_+(a)$ при некотором $a \in \mathbb{R}$, то $\nu = c_0 \delta$, где δ — δ -мера и c_0 таково, что кривая $\Gamma_{c_0}(p) = \{p(x, y) = c_0\} \subset \mathbb{C}^2$ не гиперболична.

§ 4. Функции гиперболического типа и коллективные оценки Шоттки — Ландау. Э. Ландау принадлежит уточнение теоремы Шоттки, в силу которого функции, голоморфные в единичном круге и не принимающие там значений 0 и 1, имеют коллективно экспоненциальный тип, т. е. удовлетворяют неравенствам

$$|f(z)| \leq c \exp \frac{\sigma}{1-|z|},$$

где положительные константы c и σ зависят лишь от величины $|f(0)|$

¹ См. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М., 1982. 862 с.; с. 602—607.

(см. [7], ч. 2, гл. III, § 2 и примечание (60), с. 443; [8], § 66). «Индивидуальные» оценки такого типа в [9] (теорема 2) были распространены на линейно независимые наборы голоморфных в круге функций без нулей, чья сумма ограничена (ср. также с теоремой 2 в [2], относящейся к функциям, голоморфным в полуплоскости). В этом параграфе будут установлены коллективные оценки Шоттки — Ландау для голоморфных отображений круга (верхней полуплоскости) в гиперболические кривые¹. Введем следующее понятие.

Определение 4.1. Пусть Γ — неприводимая квазипроективная алгебраическая кривая и φ — регулярная функция на Γ . Будем говорить, что голоморфная функция f на комплексном пространстве X имеет гиперболический тип (Γ, φ) , если кривая Γ гиперболическа, а функция f допускает представление $f = \varphi \circ F$, где $F \in \text{Hol}(X, \Gamma)$.

Примером могут служить функции, выпускающие два значения 0 и 1. Каждая такая функция f имеет гиперболический тип (Γ_0, x) , где Γ_0 — кривая в $\mathbb{C}_{x,y}^2$ с уравнением $x(x-1)y=1$; действительно, кривая Γ_0 изоморфна $\mathbb{C}^{**} := \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ и потому гиперболическа, а функция f представима в виде $f = x \circ F$, где $F := (f, [f(f-1)]^{-1})$, $F \in \text{Hol}(X, \Gamma_0)$.

Более общо, если $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ — неприводимая гиперболическая аффинная алгебраическая кривая, то координатные функции любого голоморфного отображения $F: X \rightarrow \Gamma$ имеют гиперболический тип. (Так, если $f^2 + g^3 = 1$, то функция f имеет тип (Γ, x) , а функция g — тип (Γ, y) , где $\Gamma = \{x^2 + y^3 = 1\}$ — гиперболическая кривая в $\mathbb{C}_{x,y}^2$). В частности, это относится и к координатным функциям универсального накрывающего отображения $F: \Delta \rightarrow \Gamma$ (например, к модулярной функции при $\Gamma = \Gamma_0$).

Пусть X — связное комплексное пространство и Q — произвольное замкнутое подмножество в X . Как и прежде, через k_X будем обозначать псевдометрику Кобаяси на X . Через $F(X, Q, M, \Gamma, \varphi)$, где $M > 0$, обозначим совокупность всех голоморфных функций f на X , которые имеют гиперболический тип (Γ, φ) и для которых $|f(x)| \leq M$ при всех $x \in Q$.

Теорема 4.1. Для каждого фиксированного $\varepsilon_0 > 0$ найдется такой показатель $\sigma = \sigma(\Gamma, \varphi, M, \varepsilon_0)$, что для любой функции $f \in F(X, Q, M, \Gamma, \varphi)$ верна оценка

$$|f(x)| \leq (1 + \varepsilon_0) M \exp(\sigma \exp k_X(x, Q)). \quad (8)$$

В качестве следствий ниже будут получены коллективные оценки роста функций гиперболического типа в круге и в полуплоскости.

В доказательстве теоремы нам понадобятся следующие сведения². Пусть $\Gamma_{\text{норм}} = \bar{\Gamma} \setminus \{p_1, \dots, p_m\}$ — нормализация кривой Γ , где $\bar{\Gamma}$ — компактная риманова поверхность и $p_1, \dots, p_m$ — «проколы». Каждому

¹ См. также Зайденберг М. Г. О некоторых применениях гиперболического анализа // Комплексный анализ и мат. физика. Красноярск, 1988. С. 29—38.

² См., например, Кра И. Автоморфные формы и клейновы группы. М., 1975. 296 с.; гл. II, § 2.

проколу отвечает класс сопряженности параболических элементов фуксовой группы G , действующей в верхней полуплоскости C_+ и униформирующей $\Gamma_{\text{норм}}$. Для фиксированного прокола p_j можно выбрать такую сопряженную с G фуксову группу G_j в C_+ , для которой $z = \infty$ — параболическая вершина, отвечающая проколу p_j , причем подгруппа стабильности точки $z = \infty$ в G_j порождена сдвигом $T(z) = z + 1$, и действие группы G в полуплоскости $C_+(1)$ (где $C_+(\rho) := \{Im z > \rho\}$) совпадает с действием этой подгруппы. Образ $\tilde{\omega}_j(\rho) := \pi_j(C_+(\rho)) \subset \Gamma_{\text{норм}}$, где $\rho \geq 1$, при факторизации $\pi_j: C_+ \rightarrow C_+/G_j = \Gamma_{\text{норм}}$ — это проколотый диск в $\Gamma_{\text{норм}}$ с центром в точке p_j .

Отображение нормализации $v: \Gamma_{\text{норм}} \rightarrow \Gamma$ является локальной изометрией в гиперболических метриках, совпадающих с метриками Кобаяси этих кривых. Положим $\omega_j(\rho) := v(\tilde{\omega}_j(\rho))$. Легко видеть, что если ρ достаточно велико (так что область $\omega_j(\rho)$ достаточно удалена от особых точек кривой Γ), то $v|_{\tilde{\omega}_j(\rho)}: \tilde{\omega}_j(\rho) \rightarrow \omega_j(\rho) \subset \Gamma$ — изометрия. Решающую роль в доказательстве теоремы 4.1 играет то обстоятельство, что в пределах проколотовой окрестности $\omega_j(\rho_1)$ точки p_j , где $\rho_1 > \rho$, гиперболическая метрика кривой Γ допускает двусторонние оценки (с аддитивной константой) метрикой в проколотовом круге $\omega_j(\rho)$.

Лемма 4.1. *Фиксируем $j \in \{1, \dots, m\}$ и такое $\rho \geq 1$, что $v|_{\tilde{\omega}_j(\rho)}: \tilde{\omega}_j(\rho) \rightarrow \omega_j(\rho)$ — изометрия. Тогда для любого $\rho_1 > \rho$ и всех $p, q \in \omega_j(\rho_1)$ имеют место неравенства*

$$k_\Gamma(p, q) \leq k_{\omega_j(\rho)}(p, q) \leq k_\Gamma(p, q) + \mu, \quad (9)$$

где

$$\mu = \mu(\rho, \rho_1) = \ln \left[\left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\rho_1 - \rho)^2}}{2(\rho_1 - \rho)^2} \right) \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho} \right].$$

Доказательство. Левое неравенство является следствием включения $\omega_j(\rho) \subset \Gamma$ и нерастяжимости метрики Кобаяси. Докажем правое. Фиксируем точки $p, q \in \omega_j(\rho_1)$ и их прообразы $\tilde{p}, \tilde{q} \in \tilde{\omega}_j(\rho_1)$. В $C_+(\rho_1)$ найдутся прообразы $u \in \pi_j^{-1}(\tilde{p})$, $v \in \pi_j^{-1}(\tilde{q})$, принадлежащие одной и той же фундаментальной области, т. е. $|Re u - Re v| < 1$, для которых $k_{\omega_j(\rho)}(p, q) = k_{\tilde{\omega}_j(\rho)}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \inf \{k_{C_+(\rho)}(\tilde{u}, \tilde{v})\} = k_{C_+(\rho)}(u, v)$ (здесь нижняя грань берется по всем точкам орбит $\{\tilde{u} = T^k u, \tilde{v} = T^l v\}_{k, l \in \mathbb{Z}}$). Отсюда

$$k_{\omega_j(\rho)}(p, q) = k_{C_+(\rho)}(u, v). \quad (10)$$

Пусть, для определенности, $Im u \geq Im v$, и пусть $\hat{v} := Re u + i Im v$ — ближайшая к u точка орицикла $L_v := \{Im z = Im v\}$. Тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} k_{C_+(\rho)}(u, v) &\leq k_{C_+(\rho)}(u, \hat{v}) + k_{C_+(\rho)}(\hat{v}, v) \leq \\ &\leq k_{C_+(\rho)}(u, \hat{v}) + \ln \left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\rho_1 - \rho)^2}}{2(\rho_1 - \rho)^2} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует неравенство

$$k_{\omega_j(\rho)}(p, q) \leq k_{C_+(\rho)}(u, \hat{v}) + \ln \left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4(\rho_1 - \rho)^2}}{2(\rho_1 - \rho)^2} \right). \quad (12)$$

Поскольку отображение $v|\tilde{\omega}_j(\rho)$ в метриках $k_{\Gamma_{\text{норм}}}$ и k_{Γ} является изометрией, то

$$k_{\Gamma}(p, q) = k_{\Gamma_{\text{норм}}}(\tilde{p}, \tilde{q}) = \inf_{\tilde{v} \in G_j(v)} \{k_{C_+}(u, \tilde{v})\} = k_{C_+}(u, v_0), \quad (13)$$

где v_0 — ближайшая к u точка орбиты $G_j(v)$. Если $v_0 \in C_+(\rho)$, то $v_0 = T^k v$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$ и потому $v_0 \in L_v$. В этом случае верно неравенство

$$k_{\Gamma}(p, q) = k_{C_+}(u, v_0) \geq k_{C_+}(u, \tilde{v}). \quad (14)$$

Если $v_0 \in C_+(\rho)$, то кратчайший геодезический сегмент в C_+ , соединяющий точки u и v_0 , пересекает орицикл L_v ; следовательно, неравенство (14) верно и в этом случае.

Оценим правую часть в (12):

$$\begin{aligned} k_{C_+(\rho)}(u, \tilde{v}) &= \int_{\text{Im } v}^{\text{Im } u} \frac{dy}{y - \rho} = \int_{\text{Im } v}^{\text{Im } u} \frac{dy}{y} + \int_{\text{Im } v}^{\text{Im } u} \frac{\rho dy}{y(y - \rho)} \leq \\ &\leq k_{C_+}(u, \tilde{v}) + \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{\rho dy}{y(y - \rho)} = k_{C_+}(u, \tilde{v}) + \ln \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}. \end{aligned} \quad (15)$$

Окончательно из (12), (14) и (15) получим правое неравенство в (9). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Пусть функция $\varphi \circ v$ на $\Gamma_{\text{норм}}$ имеет полюс в каждом из проколов $p_1, \dots, p_k$ и устранимую особенность в каждом из проколов $p_{k+1}, \dots, p_m$. Пусть $r := (1 + \varepsilon_0)M$ и $\Omega_r := \{|\xi| > r\} \subset \mathbb{C}$. Выберем такое $\rho = \rho(\Gamma, \varphi, M, \varepsilon_0) > 1$, что (i) окрестности $\omega_j(\rho)$, где $j = \overline{1, k}$, попарно не пересекаются;

$$(ii) \varphi(\omega_j(\rho)) \subset \Omega_r \quad (j = \overline{1, k}) \text{ и } (iii) v|\tilde{\omega}_j(\rho): \tilde{\omega}_j(\rho) \rightarrow \omega_j(\rho)$$

является изометрией в гиперболических метриках на $\Gamma_{\text{норм}}$ и Γ ($j = \overline{1, k}$).

Положим $\rho_1 := \rho + \varepsilon_0$. Фиксируем такое $R = R(\Gamma, \varphi, M, \varepsilon_0)$, что

$$(iv) \varphi^{-1}(\overline{\Omega_R}) \subset [\bigcup_{j=1}^k \omega_j(\rho)].$$

Фиксируем произвольную функцию $f = \varphi \circ F \in F(X, Q, M, \Gamma, \varphi)$, где $F \in \text{Hol}(X, \Gamma)$. Пусть $x_0 \in X$ — такая точка, что $|f(x_0)| > R$, $f(x_0) = \varphi(F(x_0)) \in \Omega_R$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем в Q такую точку x_1 , что $k_X(x_0, x_1) \leq k_X(x_0, Q) + \varepsilon/2$. Так как k_X — внутренняя псевдометрика, то существует « $\varepsilon/2$ -геодезический сегмент» между точками x_0 и x_1 , т. е. такой кусочно гладкий путь $\gamma: [0; 1] \rightarrow X$, что $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$ и $l_X(\gamma) \leq k_X(x_0, x_1) + \varepsilon/2$ (здесь l_X — длина в псевдометрике k_X). Положим $x_t := \gamma(t)$. Поскольку $|f(x_1)| \leq M < R < |f(x_0)|$, то найдется такое $\tau \in (0; 1)$, что $|f(x_t)| = R$ и $|f(x_t)| \geq R$ при всех $t \in (0; \tau)$. Из условий (i) и (iv) следует, что точки $p_0 := F(x_0) \in \Gamma$ и $q_0 := F(x_t) \in \Gamma$ принадлежат одной и той же окрестности $\omega_l(\rho_1)$, где $1 \leq j \leq k$. Голо-

морфное отображение $\varphi|_{\omega_f(p)}: \omega_f(p) \rightarrow \Omega_r$ (см. (ii)) является нерастягивающим по отношению к гиперболическим метрикам, поэтому

$$k_{\Omega_r}(|f(x_0)|, R) \leq k_{\Omega_r}(f(x_0), f(x_r)) \leq k_{\omega_f(p)}(p_0, q_0). \quad (16)$$

В силу леммы 4.1 из (16) и (9) следует неравенство

$$k_{\Omega_r}(|f(x_0)|, R) \leq k_{\Gamma}(p_0, q_0) + \mu, \quad (17)$$

где $\mu = \ln \left[\left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0} \right) \left(1 + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varepsilon_0^2}}{2\varepsilon_0^2} \right) \right]$ зависит лишь от Γ, φ, M и ε_0 .

Так как в псевдометриках Кобаяси k_X и k_{Γ} голоморфное отображение $F: X \rightarrow \Gamma$ является нерастягивающим, то $k_{\Gamma}(p_0, q_0) \leq k_X(x_0, x_{\tau})$. В свою очередь,

$$\begin{aligned} k_X(x_0, x_{\tau}) &\leq l_X(\gamma([0; \tau])) \leq l_X(\gamma([0; 1])) = \\ &= l_X(\gamma) \leq k_X(x_0, x_1) + \varepsilon/2 \leq k_X(x_0, Q) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Окончательно $k_{\Gamma}(p_0, q_0) \leq k_X(x_0, Q) + \varepsilon$ (18).

Из (17) и (18) получим неравенство

$$k_{\Omega_r}(|f(x_0)|, R) \leq k_X(x_0, Q) + \varepsilon + \mu, \quad (19)$$

а так как здесь $\varepsilon > 0$ произвольно, то (19) верно и при $\varepsilon = 0$. Пользуясь явной формулой для метрики Пуанкаре в проколотом круге Ω_r , из (19) при $\varepsilon = 0$ получим

$$\ln \ln \frac{|f(x_0)|}{r} - \ln \ln \frac{R}{r} \leq k_X(x_0, Q) + \mu,$$

откуда следует неравенство (8) с показателем $\sigma = \sigma_1 = e^{\mu \ln R}$, зависящим лишь от Γ, φ, M и ε_0 . Эта оценка получена в предположении, что $|f(x_0)| > R$. Положим в (8) $\sigma = \max \{\sigma_1, \sigma_2\}$, где σ_2 определяется условием $(1 + \varepsilon_0)M \exp \sigma_2 = R$. Тогда неравенство (8) справедливо уже при всех $x \in X$. Показатель σ здесь зависит лишь от Γ, φ, M и ε_0 и не зависит от выбора $f \in \mathcal{F}(X, Q, M, \Gamma, \varphi)$. Это доказывает теорему.

В простейшем случае, когда $X = B^h$ — единичный шар в C^h и множество Q состоит из единственной точки $0 \in B^h$, из теоремы 4.1 получим такое

Следствие 4.1. Голоморфные в шаре B^h функции гиперболического типа (Γ, φ) имеют коллективно экспоненциальный тип, т. е. для любой такой функции f и для любого $\varepsilon_0 > 0$ верно неравенство

$$|f(z)| \leq 2(|f(0)| + \varepsilon_0) \exp \sigma \frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|},$$

где $z \in B^h$, а показатель σ зависит лишь от типа (Γ, φ) и величины $|f(0) + \varepsilon_0|$.

В частности, для голоморфных в круге функций, выпускающих значения 0 и 1 (т. е. имеющих тип (Γ_0, x)), получим неравенство Шоттки — Ландау.

Пусть H — плоскость Лобачевского с естественной комплексной структурой.

Следствие 4.2. Если голоморфная в H функция f гиперболического типа ограничена на некотором орицикле O (соответственно, на некоторой геодезической γ), то она ограничена в любой полосе Π , заключенной между двумя орициклами, касающимися абсолюта в той же точке, что и орицикл O (соответственно, заключенной между двумя эквидистантами к γ , т.е. гиперциклами, выходящими на абсолют в той же паре точек, что и γ).

Оценки в этом следствии имеют коллективный характер. Далее мы конкретизируем эти оценки, выбирая верхнюю полуплоскость в качестве модели плоскости Лобачевского и рассматривая в ней специальные орициклы $L_a: = \{Imz = a\}$, где $a > 0$, и геодезические $\Lambda_b: = \{Rez = b, Imz > 0\}$.

Следствие 4.3. Фиксируем произвольное $\varepsilon_0 > 0$.

а) Если голоморфная в C_+ функция f имеет гиперболический тип, то на любой вертикальной полупрямой $\Lambda_b (b \in R)$ она имеет порядок ≤ 1 , а на любой горизонтальной прямой $L_a (a > 0)$ — порядок ≤ 2 . Точнее, при всех $b, x \in R, a, y \in R_+$ верны неравенства

$$|f(b + iy)| \leq 2(|f(b + i)| + \varepsilon_0) \exp \sigma_1 y^{\text{sign}(y-1)},$$

и

$$|f(x + ia)| \leq 2(|f(ia)| + \varepsilon_0) \exp \sigma_2 (x^2 + a^2),$$

где $\sigma_1 (\sigma_2)$ зависит лишь от типа (Γ, φ) функции f и от величины $|f(b + i)| + \varepsilon_0$ (соответственно, $|f(ia)| + \varepsilon_0$).

б) Если к тому же функция f ограничена на мнимой полуоси Λ_0 , то она ограничена в любом «угле Штольца» $\Pi_\alpha: = \{ \alpha < \arg z < \pi - \alpha \}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и имеется коллективная оценка $|f(z)| \leq 2 M_1 \exp \hat{\sigma}_1 \cdot \left| \text{ctg} \left(\frac{1}{2} \arg z \right) \right|$, где $z \in C_+$, $M_1: = \sup_{z \in \Lambda_0} |f(z)|$,

а показатель $\hat{\sigma}_1$ зависит лишь от типа (Γ, φ) функции f и от M_1 .

в) Если в условиях пункта (а) функция f ограничена на некоторой горизонтальной прямой L_a , где $a > 0$, то она ограничена в любой полосе $\Pi(a_0, a_1): = \{a_0 < Imz < a_1\}$, где $0 < a_0 < a_1$, и имеется коллективная оценка:

$$|f(z)| \leq 2 M_2 \exp \hat{\sigma}_2 \left(\frac{Im z}{a} \right)^{\text{sing}(Im z - a)},$$

где $z \in C_+$, $M_2: = \sup_{z \in L_a} |f(z)|$, а показатель $\hat{\sigma}_2$ зависит только от типа (Γ, φ) функции f и от M_2 .

Доказательства следствий 4.1—4.3 основаны на теореме 4.1 и несложных оценках гиперболических расстояний в H .

Из пункта (в) следствия 4.3 вытекает такое утверждение о коллективно экспоненциальном росте.

Следствие 4.4. Если голоморфная в C_+ функция f имеет гиперболический тип (Γ, φ) , а ее модуль ограничен в полосе $\Pi(a): =$

$= \{0 < \operatorname{Im} z < a\}$ константой $M > 0$, то f — функция экспоненциального типа σ , где σ зависит лишь от Γ , φ и M .

Интересно было бы выяснить, обязана ли иметь экспоненциальный тип всякая функция гиперболического типа в C_+ , которая непрерывна в $\overline{C}_+$ и ограничена на вещественной оси.

Список литературы: 1. Зайденберг М. Г. Критерии гиперболичности и семейства кривых // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1989. Вып. 52. С. 40—54. 2. Ostrovskii L. V. Generalization of the Titchmarsh convolution theorem and complex-valued measures uniquely determined by their restrictions to a half-line // Lect. Notes Math. 1985. 1155. P. 256—283. 3. Еременко А. Э. Мероморфные решения алгебраических дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1982. 37, 4. С. 53—82. 4. Алгебраические поверхности // Тр. МИАН. 1965. 75. 215 с. 5. Kodaira K. On compact analytic surfaces // Ann. Math. 1963. 77, 3. P. 563—626. 6. Зайденберг М. Г., Лин В. Я. Теоремы конечности для голоморфных отображений // Совр. проблемы мат. Фундамент. направления. М., 1986. 9. С. 127—196. 7. Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. М., 1961. 455 с. 8. Хейман У. Мероморфные функции. М., 1966. 287 с. 9. Островский И. В. Об одном классе функций ограниченной вариации на прямой, определяемых своими значениями на полупрямой // Зап. семинаров ЛОМИ. 1979. 92. С. 220—229.

Поступила в редколлегию 10.07.87

УДК 517.53/57

Г. М. ЛЕВИН

БАЗИСЫ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДЕННЫЕ ИТЕРАЦИЯМИ ПОЛИНОМОВ

Краткое содержание. Эта работа возникла из попытки найти линейный алгоритм для вычисления моментов равновесного распределения на множестве Мандельброта [1] и множестве Жюлиа [1] квадратичного отображения, отличный от известного [2]). На этом пути появились системы функций, которые, как представляется, имеют самостоятельный интерес.

Пусть $T: C \rightarrow C$ — произвольный нелинейный полином, T_l — его l -я итерация, $l \geq 0$. Как известно, область притяжения D_∞ бесконечно удаленной неподвижной точки полинома T связна. По теореме Рунге [3], любая аналитическая на $F = C \setminus D_\infty$ функция равномерно на F приближается полиномами. В § 1 мы строим естественный полиномиальный базис $(E_n)_{n \geq 0}$ в пространстве функций, локально аналитических на компакте F . Заодно получаем и двойственный базис $(E_n^*)_{n \geq 0}$ относительно билинейного функционала $B(f, g) = \int fg d\mu$, где μ — равновесная мера на F .

Система (E_n^*) состоит из рациональных дробей и является базисом в пространстве функций, аналитических на $D_\infty \cup \{\infty\}$. Они обладают следующими свойствами:

$$E_n(T(z)) = E_{pn}(z), \quad E_n^*(T(z)) = E_{pn}^*(z), \quad (1)$$

где $p = \deg T$, $n = 0, 1, \dots$;

$$\int E_n(z) E_m^*(z) d\mu(z) = \delta_{nm}, \quad n \geq 0, \quad m \geq 0, \quad (2)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера; μ — равновесная мера на множестве Жюлиа $J(T)$ (или на F , что одно и то же);

$$\frac{1}{p^l} \sum_{n=0}^{p^l-1} E_n(z) E_n^*(\lambda) = \frac{T_l(z) - T_l(\lambda)}{(z - \lambda) T_l'(\lambda)}. \quad (3a)$$

В частности,

$$\sum_{n=0}^{p^l-1} E_n(z) E_n^*(z) = p^l, \quad l = 0, 1, \dots; \\ \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z) E_n^*(\lambda) = \frac{1}{\sigma(\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda - z}, \quad (3b)$$

где $z \in F$; $\lambda \in D_{\infty}$; $\sigma(\lambda) = \varphi'(\lambda)/\varphi(\lambda)$; $\varphi(\lambda)$ — функция Бетхера для D_{∞} [1].

В § 2 приведены условия сходимости частных сумм ряда $\sum a_n E_n^*$ к функции, заданной на множестве Жюлиа.

Обещанный алгоритм для вычисления моментов меры μ описан в § 3.

§ 1. Двойственные системы функций. 1. Итак, пусть $T(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p$, $p \geq 2$ (1). Возьмем все корни $(x_k)_{k=1}^p$ уравнения $T(z) = a$ и образуем средние степенные суммы:

$$s_i = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p x_k^i.$$

Легко показать, что s_i , $i = 1, \dots, p-1$, не зависит от a . Определим системы функций $(E_n)_{n \geq 0}$ и $(E_n^*)_{n \geq 0}$. Для начала положим

$$E_0(z) = E_0^*(z) = 1, \quad E_k(z) = z^k - s_k, \\ E_k^*(z) = \frac{z^{p-k-1} + a_1 z^{p-k-2} + \dots + a_{p-k-1}}{N(z)},$$

где $k = 1, \dots, p-1$, и введено обозначение $N(z) = T'(z)/p$. Продолжим эти конечные наборы до бесконечных. Пусть $n \in N$ и $n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon(k) p^k$ — его p -ичное разложение, $\varepsilon(k) \in \{0, 1, \dots, p-1\}$.

По определению,

$$E_n(z) = \prod_{k=0}^{\infty} E_{\varepsilon(k)}(T_k(z)), \quad E_n^*(z) = \prod_{k=0}^{\infty} E_{\varepsilon(k)}^*(T_k(z)),$$

где $T_k(z)$ — k -я итерация $T(z)$; $T_0(z) \equiv z$. Очевидно, E_n — полином, E_n^* — рациональная функция, $\deg E_n = \deg E_n^* = n$; $E_n^*(z) = O(z^{-n})$,

$z \rightarrow \infty$. По построению, $E_n(T) = E_{pn}$, $E_n^*(T) = E_{pn}^*$, $n = 0, 1, \dots$.
В частности, $E_{p^k}(z) = E_1(T_k(z))$, $E_{p^k}^*(z) = E_1^*(T_k(z))$.

Пример. $T(z) = z^p - t$. Тогда (и только тогда)

$$E_n^*(z) = \frac{1}{E_n(z)} \cdot n \in N.$$

Если $t = 0$, то $E_n(z) = z^n$, $E_n^*(z) = z^{-n}$.

2. Лемма 1. Для $n, m = 0, \dots, p-1$ и любого $a \in \mathbb{C}$

$$\frac{1}{p} \sum_{T(z)=a} E_n(z) E_m^*(z) = \delta_{nm}. \quad (2)$$

Доказательство. Сначала заметим, что выражение слева равно

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_n(z) E_m^*(z) \frac{T'(z)}{T(z) - a} dz,$$

где Γ — контур, окружающий все корни уравнения $T(z) = a$, так как $E_n(z) E_m^*(z) = O(z^{n-m})$, $z \rightarrow \infty$, то отсюда сразу следует (2) при $n < m$. Пусть теперь $n > m$. При $m = 0$ (2) верно по определению E_n , $n = 0, \dots, p-1$. При $m > 1$

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{p E_n(z) (T(z) - a - (a_p - (a + a_{p-1}z + \dots + a_{p-m}z^m)) T'(z) dz}{z^{m+1} T'(z) (T(z) - a)} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (z^{n-m-1} + O(z^{-m-1})) (1 + O(z^{m-p})) dz = 0. \quad \text{Ч. т. д.} \end{aligned}$$

Теперь из определения и леммы 1 получим

Следствие 1. Для любых $n, m \geq 0$

$$\int E_n(z) E_m^*(z) d\mu(z) = \delta_{nm}.$$

Замечание 1. Если $T'(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in J$ (т. е. $E_m^*(z_0) = \infty$), то интеграл понимается как предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{p^k} \sum_{T^k(z)=a} E_n(z) E_m^*(z)$$

для любого $a \in D_{\infty}$. Введенные полиномы $E_0, E_1, \dots, E_{p-1}$ хороши тем, что для них выполняется тождество

$$\frac{T(z) - T(\lambda)}{z - \lambda} = N(\lambda) \sum_{k=0}^{p-1} E_k(z) E_k^*(\lambda), \quad (3)$$

которое доказывается подстановкой выражений для E_k, E_k^* . Заменяем в (3) z на $T_l(z)$, λ на $T_l(\lambda)$ и перемножим все равенства, получим

$$\frac{T_n(z) - T_n(\lambda)}{(z - \lambda) \prod_{k=0}^{n-1} N(T_k(\lambda))} = \sum_{k=0}^{p^n-1} E_k(z) E_k^*(\lambda). \quad (4)$$

Заметим, что

$$\prod_{k=0}^{n-1} N(T_k(\lambda)) = \frac{T_n'(\lambda)}{p^n}.$$

Введем ядра

$$R_n(z, \lambda) = \frac{p^n}{T_n(\lambda)} \cdot \frac{T_n(z) - T_n(\lambda)}{z - \lambda}.$$

Из следствия 1 и (4) получим

С л е д с т в и е 2.

$$\int R_n(z, \lambda) d\mu(z) = \int R_n(z, \lambda) d\mu(\lambda) = 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

§ 2. Разложение голоморфных функций в ряды. 1. Мы хотим перейти в (4) к пределу при $n \rightarrow \infty$. Следующие факты стандартные и следуют, например, из теоремы Бетхера [1].

Если $\lambda \in D_\infty$, то существуют пределы

$$G(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |T_n(\lambda)|}{p^n}, \quad (5)$$

$$\sigma(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n(\lambda)}{p^n T_n(\lambda)}, \quad (6)$$

$G(\lambda)$ — функция Грина для D_∞ с полюсом в ∞ ; $G(\lambda) > 0$ ($\lambda \in D_\infty$), $G(\lambda) \sim \ln |\lambda|$ ($\lambda \rightarrow \infty$). Доопределим $G|_F \equiv 0$, где $F = C \setminus D_\infty$. $\sigma(\lambda)$ — логарифмическая производная функции Бетхера $\varphi(\lambda)$, которая задается в бесконечности равенством

$$\varphi(\lambda) = \lim_{l \rightarrow \infty} (T_l(\lambda))^{p^{-l}}.$$

Множество нулей $\sigma(\lambda)$ (обозначим его через C_*) совпадает с множеством критических точек $G(\lambda)$ и есть

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(C),$$

где C — множество тех критических точек $T(z)$, которые лежат в D_∞ .

2. Из (5) следует, что для каждого $k = 1, \dots, p-1; \lambda \in D_\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |E_k(T_n(\lambda))|}{kp^n} = G(\lambda),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |E_k^*(T_n(\lambda))|}{kp^n} = -G(\lambda).$$

Отсюда, по теореме Чезаро,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |E_n(\lambda)|}{n} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |E_n^*(\lambda)|}{n} = G(\lambda), \quad (7)$$

если $\lambda \in D_\infty \setminus C_*$, $(T_k(\lambda))^i \neq s_i \forall k \geq 0, i = 1, \dots, p-1$. Из (4) теперь получается такое разложение ядра Коши:

Лемма 2. Пусть $\lambda \in D_\infty \setminus C_*$ и z таково, что $G(z) < G(\lambda)$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda - z} = \sigma(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} E_n(z) E_n^*(\lambda). \quad (8)$$

3. Пусть $r > 1$, $\Gamma_r = \{z : G(z) = \ln r\}$, $D_r = \{z : G(z) < \ln r\}$.

Заметим, что $F \subset D_r$ для каждого $r > 1$.

Введем два функциональных пространства X и Y .

Скажем, что $f \in X$, если для нее найдется $r > 1$ такое, что f голоморфна в D_r ; $g \in Y$, если g голоморфна в $(D_\infty \setminus C_*) \cup \{\infty\}$ и имеет полюс не выше первого порядка в каждой точке из множества C_* . Другими словами, X — это пространство ростков функций, голоморфных на компакте F , Y — пространство функций g , таких, что функция $g\sigma$ голоморфна в D_∞ и равна нулю на бесконечности. Используя теорему Коши и лемму 2, получим

Теорема 1. Пусть $f \in X$, $g \in Y$. Тогда найдутся и единственны две последовательности $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ такие, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |b_n|^{1/n} < 1, \quad (9)$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n E_n(z), \quad (10)$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n E_n^*(z) \quad (11)$$

в областях задания функций f и g .

И обратно, любые две последовательности (9) определяют функции f и g , описанные выше.

4. Следствие 3. Пусть $f \in X$. Функция f разлагается в некоторой окрестности компакта F в ряд по итерациям $T_l(z)$:

$$f(z) = \beta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l T_l(z)$$

тогда и только тогда, когда

$$\int f(z) E_k^*(z) d\mu(z) = 0 \quad (12)$$

для всех $k \geq 1$, исключая, быть может, $k = p^l, l \geq 0$. При этом $\alpha_l = \int f(z) E_1^*(T_l(z)) d\mu(z), l \geq 0$.

Доказательство. Пусть $f \in X$. Тогда по теореме 1

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{p^l} E_{p^l}(z) + A_0$$

если и только если выполняется (12). Но $E_{p^l} = T_l - s_1$, поэтому

$$\sum_{l=0}^{\infty} a_{p^l} E_{p^l}(z) = \beta_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l T_l(z),$$

где

$$\beta_0 = -s_1 \sum_{l=0}^{\infty} a_{p^l} + A_0, \quad \alpha_l = a_{p^l}. \quad \text{Ч.т.д.}$$

§ 3. Дополнение. 1. Зафиксируем функцию $g \in L_1(J, \mu)$. Ей можно поставить в соответствие ряд

$$g \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n E_n^*(z), \quad (13)$$

где $b_n = \int g(z) E_n(z) d\mu(z)$ (14).

Ряд (13) определен (формально) для всех $z \in J$, которые не есть прообразы критических точек T (z).

Введем обозначения

$$S_N(g) = \sum_{n=0}^{N-1} b_n E_n^*(z), \quad N \in \mathbb{N},$$

для частичных сумм ряда (13).

Лемма 3. Пусть z_0 лежит на множестве Жюлиа и для некоторой последовательности $n_k \rightarrow \infty$ $T_{n_k}'(z_0)/p^{n_k} \rightarrow \infty$. Если функция $g(z)$ удовлетворяет в z_0 условию Дини

$$\int \left| \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \right| d\mu(z) = c < \infty,$$

то

$$S_{p^{n_k}}(g)(z_0) \rightarrow g(z_0), \quad k \rightarrow \infty; \quad |S_{p^{n_k}}(g)(z_0) - g(z_0)| \ll M \cdot \frac{p^{n_k}}{|T_{n_k}'(z_0)|},$$

где $M = 2c \cdot \sup \{|z| : z \in J\}$.

Доказательство. Для каждого $l \geq 0$ основное тождество дает

$$S_{p^l}(g)(z_0) = \frac{p^l}{T_l'(z_0)} \int g(z) \frac{T_l(z_0) - T_l(z)}{z_0 - z} d\mu(z).$$

Поэтому для z_0 и (n_k) из условия

$$|S_{p^{n_k}}(g)(z_0) - g(z_0)| \ll M_1 \cdot \left| \frac{p^{n_k}}{T_{n_k}'(z_0)} \right|,$$

где $M_1 = M$.

2. Чтобы применить доказанное утверждение, введем два подмножества множества Жюлиа:

$$A = \left\{ \lambda \in J \mid \exists \gamma > 0 : \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \ln \frac{|T_l(\lambda)|}{\rho^l} = \gamma \right\},$$

$$B = \left\{ \lambda \in J \mid \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \ln \frac{|T_l(\lambda)|}{\rho^l} = +\infty \right\}.$$

Очевидно, $A \subset B$.

Мы воспользуемся следующими фактами.

Пусть множество Жюлиа связно. Тогда имеют место следующие факты:
(ф. 1) [5]. Существует предел

$$\sigma^2 = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int \ln^2 \frac{|T_l(z)|}{\rho^l} d\mu(z).$$

Если $\sigma \neq 0$, то для последовательности $\ln \frac{|T'_k(T_k)|}{\rho}$ выполняется центральная предельная теорема:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \mu \left\{ z : \frac{1}{\sigma \sqrt{l}} \ln \frac{|T_l(z)|}{\rho^l} < c \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^c e^{-u^2/2} du$$

и закон повторного логарифма

$$\overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{|T_l(z)|}{\rho^l}}{\sqrt{l \ln \ln l}} = \sqrt{2\sigma^2} \quad \mu - \text{п.в.}$$

(ф. 2) [6] Предельная дисперсия $\sigma = 0$ лишь в следующих двух случаях, которые назовем вырожденными:

(1) J — окружность и $T(z) = z^p$;

(2) J — отрезок и $T(z) = 2 \cos(p \cdot \arccos \frac{z}{2})$ — полином Чебышева (с точностью до линейной замены).

(ф. 3) [4] Если J не есть окружность, то у него найдется сильно отталкивающая периодическая точка, т.е. такая точка a некоторого периода n , что $|T'_m(a)| > \rho^n$.

Теперь мы готовы доказать, что справедлива следующая

Лемма 4.

(1) Пусть J несвязно. Тогда $\mu(A) = \mu(B) = 1$.

(2) Пусть J связно и не вырождено. Тогда $A \neq \emptyset$ и либо конечно, либо плотно на J , $\mu(A) = 0$, $\mu(B) = 1$.

Доказательство. Заметим, что J связно в точности тогда, когда

$$\int \ln \frac{|T'(z)|}{\rho} d\mu(z) = 0.$$

(1) Если J несвязно, то по эргодической теореме

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \ln \frac{|T_l'(z)|}{p^l} = \int \ln \frac{|T'(z)|}{p} d\mu(z) > 0. \quad \mu - \text{почти всюду.}$$

Откуда $\mu(A) = 1$.

(2) В этом случае в силу (ф. 3) $A \neq \emptyset$. Множество A обладает таким свойством (инвариантность с точностью до критических точек): если $x \in A$, $T(y) = x$ и $T'(y) \neq 0$, то $y \in A$.

Отсюда, во-первых, следует, что A конечно или плотно на J , и, во-вторых, из центральной предельной теоремы (в которой положим $c = 0$): $\mu(A) = 0$.

Равенство $\mu(B) = 1$ вытекает из закона повторного логарифма.

Замечание 2. Если J есть окружность, то $\|T'\|_J = p$, поэтому $A = B = \emptyset$.

Замечание 3. Если T есть полином Чебышева, то после замены $z = 2 \cos \varphi$

$$\frac{T_l(z)}{p^l} = \frac{\sin(pl\varphi)}{\sin \varphi}.$$

Откуда $A = B = \{-1; 1\}$.

Замечание 4. По-видимому, A плотно на J , если J не вырождено.

3. Предположим, что функция $g(z)$ удовлетворяет условию Дини в каждой точке множества J .

Теорема 2.

(1) Пусть J несвязно. Тогда $S_{p^l}(g)(z) \rightarrow g(z)$, $l \rightarrow \infty$, экспоненциально в каждой точке $z \in A$ (т. е. μ — почти всюду на J).

(2) Пусть J связно и не вырождено. Тогда $S_{p^l}(g)(z) \rightarrow g(z)$, $l \rightarrow \infty$, экспоненциально в каждой точке $z \in A$;

$$\forall z \in B \exists n_k \rightarrow \infty : S_{p^{n_k}}(g)(z) \rightarrow g(z).$$

Замечание 5. Если J окружность, то, вообще говоря,

$$S_{p^{n_k}}(g)(z) \not\rightarrow g(z)$$

ни для какой последовательности $n_k \rightarrow \infty$. Если J — отрезок $[-1, 1]$, то $S_{p^{n_k}}(g)(z) \rightarrow g(z)$ лишь при $z = \pm 1$, причем можно взять $n_k = k$, так как в этом случае $A = B = \{-1; 1\}$.

§ 4. Линейный алгоритм вычисления моментов равновесной меры. Искомый алгоритм вычисления моментов $c_n = \int z^n d\mu(z)$, $n \in N$, приобретает следующий вид:

(а) находим коэффициенты $(a_{i,n})_{i=0}^{n+1}$ разложений

$$zE_n(z) = \sum_{i=0}^{n+1} a_{i,n} E_i(z), \quad n = 0, 1, \dots;$$

(в) по рекуррентным формулам $\beta_{0,0} = 1$,

$$\beta_{k,n+1} = \sum_{j=0}^n a_{k,j} \beta_{j,n}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1,$$

вычисляем коэффициенты $(\beta_{j,n})_{j=0}^n$ разложений

$$z^n = \sum_{k=0}^n \beta_{k,n} E_k(z);$$

(с) полагаем

$$c_n = \beta_{0,n}.$$

Этот алгоритм становится конструктивным, как только мы нашли матрицу $Z = (a_{i,n})$. Для квадратичного отображения $z \rightarrow z^2 - t$ ее можно найти. А именно,

$$zE_n(z) = E_{n+1} + t \sum_{k=1}^{\text{ord}(n+1)} E_{n+1-2k}(z),$$

где $\text{ord}(m)$ есть двоичный порядок числа $m \in \mathbb{N}$, т. е. такое максимальное неотрицательное целое l , что 2^l делит m .

Замечание 6. Аналогично строится полиномиальный базис в пространстве функций, голоморфных на множестве Мандельброта, и матрица умножения на t в этом базисе.

Список литературы: 1. Любич М. Ю. Динамика рациональных преобразований: топологическая картина // Успехи мат. наук. 1986. 41, вып. 4. С. 35—95. 2. Barnsley M. F., Harrington A. N. Moments of balanced measures on Julia sets // Т. А. М. S. 281, 1. P. 271—280. 3. Гамелин Т. Равномерные алгебры. М., 1973. 120 с. 4. Еременко А. Э., Левин Г. М. О периодических точках полиномов // Укр. мат. журн. 1989. 41. С. 10—39. 5. Przytycki F., Urbanski M., Zdunik A. Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps. 1986 Annals of Math. 130 (1989), 1—40. 6. Zdunik A. Hausdorff dimension of maximal measures for rational maps. 1987 (Preprint).

Поступила в редколлегию 05.11.87

УДК 517.521.8

Н. В. ТРЕТЬЯК

ОДНО СВОЙСТВО МАТРИЦЫ БОРЕЛЯ

В настоящей заметке доказывается, что для произвольной последовательности (ρ_k) неотрицательных чисел условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-x} \frac{x^k}{k!} \rho_k = 0 \text{ и } \sum_{k \in J_x} \rho_k = o(\sqrt{x}) \quad (x \rightarrow \infty),$$

где $J_x = [x - \sqrt{x}; x + \sqrt{x}]$, эквивалентны. Это утверждение позволяет конкретизировать для метода суммирования Бореля некоторые общие

результаты Н. А. Давыдова [2, 3] о частичных пределах первого рода и суммируемости последовательности к крайней точке ее ядра.

Пусть $x > 0$ и $u_k = u_k(x) = e^{-x} \frac{x^k}{k!}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Известно [1, с. 251], что

1) наибольшим из u_k является u_M , где $M = [x]$, при целом x имеется два наибольших члена u_M и u_{M-1} ;

2) $u_{k-1} \leq u_k$ для $k \leq M$ и $u_k > u_{k+1}$ для $k > M$;

3) если $k = M + h$ и $0 < \delta < 1$, то

$$\sum_{|h| > \delta x} u_k(x) = O(e^{-\gamma x}), \quad (1)$$

где $\gamma = \frac{1}{3}\delta^2$;

4) если $k = M + h$, $\frac{1}{2} < \xi < \frac{2}{3}$ и $|h| < x^\xi$, то

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi M}} e^{-\frac{h^2}{2M}} \left(1 + O\left(\frac{|h|+1}{x}\right) + O\left(\frac{|h|^3}{x^2}\right) \right). \quad (2)$$

Из формулы (2), очевидно, вытекают асимптотические равенства:

$$u_M(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} (x \rightarrow \infty), \quad (3)$$

$$u_{[x \pm \sqrt{x}]}(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi ex}} (x \rightarrow \infty). \quad (4)$$

Пусть $h > -x$. Рассмотрим отношение $\frac{u_k(x)}{u_k(x+h)} = e^h \left(\frac{x}{x+h} \right)^k = \omega(x, k, h)$. Если $x > 0$, $-x < h < 0$, $m \in N$, то $\omega(x, k, h) < \omega(x, k+m, h)$ и

$$u_k(x) = u_k(x+h) \omega(x, k, h) < u_k(x+h) \omega(x, k+m, h), \quad (5)$$

Если же $x > 0$, $h > 0$, $m \in N$, $m < k$, то $\omega(x, k, h) < \omega(x, k-m, h)$ и

$$u_k(x) = u_k(x+h) \omega(x, k, h) < u_k(x+h) \omega(x, k-m, h). \quad (6)$$

Вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть $t > 0$. Если $0 \leq h < t$, то

$$e^h \left(\frac{t}{t+h} \right)^{t+h} \leq e^{-\frac{h^2}{2t} + \frac{h^3}{2t^2}}. \quad (7)$$

Если $-t < h \leq 0$, то

$$e^h \left(\frac{t}{t+h} \right)^{t+h} \leq e^{-\frac{h^2}{2t}}. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $0 \leq h < t$. Тогда в силу неравенства

$$(t+h) \left(-\frac{h}{t} + \frac{h^2}{2t^2} - \frac{h^3}{3t^3} + \dots \right) \leq -h - \frac{h^2}{2t} + \frac{h^3}{2t^2}$$

получим

$$e^h \left(\frac{t}{t+h} \right)^{t+h} = e^{h - (t+h) \ln \left(1 + \frac{h}{t} \right)} \leq e^{-\frac{h^2}{2t} + \frac{h^3}{2t^2}}.$$

Пусть $-t < h \leq 0$. В силу неравенства

$$(t+h) \left(-\frac{h}{t} + \frac{h^2}{2t^2} - \frac{h^3}{3t^3} + \dots \right) \leq (t+h) \left(-\frac{h}{t} + \frac{h^2}{2t^2} - \frac{h^3}{3t^3} \right) \times \\ \times \left(1 - \frac{h}{t} + \frac{h^2}{t^2} - \dots \right) = (t+h) \left(-\frac{h}{t} + \frac{h^2}{2t^2} - \frac{h^3}{3t^2(t+h)} \right) = \\ = -h - \frac{h^2}{2t} + \frac{h^3}{6t^2} \leq -h - \frac{h^2}{2t}$$

получаем

$$e^h \left(\frac{t}{t+h} \right)^{t+h} = e^h e^{-(t+h) \ln \left(1 + \frac{h}{t} \right)} \leq e^{-\frac{h^2}{2t}}.$$

Лемма 2. Пусть $0 < \delta < 1$. Для последовательности (ρ_k) неотрицательных чисел условия

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \rho_k = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{(1-\delta)x < k < (1+\delta)x} u_k(x) \rho_k = 0$$

эквивалентны.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{(1-\delta)x < k < (1+\delta)x} u_k(x) \rho_k = 0$ и $\varepsilon > 0$ — произвольно. Возьмем столь большое x^* , чтобы $e^{-\frac{1}{2} x^* \delta^2 (1-\delta) + \delta} < \frac{1}{2}$ и для всех $x > x^*$ выполнялось неравенство $\sum_{(1-\delta)x < k < (1+\delta)x} u_k(x) \rho_k < \frac{\varepsilon}{5}$

По выбранному x^* найдем $x^{**} > x^*$ такое, что для всех $x > x^{**}$ будет.

$\sum_{k < x^*} u_k(x) \rho_k < \frac{\varepsilon}{5}$. Пусть $x > x^{**}$. Бесконечный промежуток $[x^*; +\infty[$ покроем полусегментами $T_i = [x_i; x_{i-1}[$ ($i = 1, 2, \dots, m; x^* \in T_m$), $T'_j = [x'_{j-1}; x_j[$ ($j = 1, 2, \dots$), где $x_i = (1-\delta)^i x$, $x'_j = (1+\delta)^j x$. Учтя (5) и (6), получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \rho_k \leq \sum_{k < x^*} u_k(x) \rho_k + \sum_{i=1}^m \sum_{k \in T_i} u_k(x_{i-1}) \omega(x, k, x_{i-1} - x) \rho_k + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k \in T'_j} u_k(x'_{j-1}) \omega(x, k, x'_{j-1} - x) \rho_k \leq \sum_{k < x^*} u_k(x) \rho_k + \\ + \sum_{i=1}^m (\omega_i \sum_{k \in T_i} u_k(x_{i-1}) \rho_k) + \sum_{j=1}^{\infty} (\omega'_j \sum_{k \in T'_j} u_k(x'_{j-1}) \rho_k) \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{5} \left(1 + \sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^{\infty} \omega'_j \right), \text{ где } \omega_i = \omega(x, [x_{i-1}], x_{i-1} - x), \\ \omega'_j = \omega(x, [x'_{j-1}], x'_{j-1} - x).$$

Используя (7) и (8), оценим сверху $\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m-1$) и $\frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j}$ ($j = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} &\leq \frac{\omega(x, [x_i], x_i - x)}{\omega(x, [x_i], x_{i-1} - x)} \leq e^{x_i - x_{i-1}} \left(\frac{x_{i-1}}{x_i}\right)^{x_i} \leq \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}(1-\delta)^{i-1}x\delta^2} \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2 x^*} < \frac{1}{2}; \\ \frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j} &\leq \frac{\omega(x, [x'_j], x'_j - x)}{\omega(x, [x'_j], x'_{j-1} - x)} \leq e^{x'_j - x'_{j-1}} \left(\frac{x'_{j-1}}{x'_j}\right)^{x'_j} \frac{x'_j}{x'_{j-1}} \leq \\ &\leq e^{\frac{1}{2}(1+\delta)^{j+1}\delta^2(1-\delta)x} (1+\delta) \leq e^{-\frac{1}{2}\delta^2(1-\delta)x^*} e^\delta < \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Учитывая полученные оценки, находим, что

$$\frac{\varepsilon}{5} \left(1 + \sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^{\infty} \omega'_j \right) < \frac{\varepsilon}{5} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{1-k} \right) = \varepsilon.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Последовательность (ρ_k) неотрицательных чисел суммируется методом Бореля к нулю тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k \in J_x} u_k(x) \rho_k = 0.$$

Доказательство. Учитывая лемму 2, достаточно установить импликацию $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{k \in J_x} u_k(x) \rho_k = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{(1-\delta)x < k < (1+\delta)x} u_k(x) \rho_k = 0$, где $0 < \delta < 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно. Выберем x^* столь большим, чтобы для всех $x > x^*$ выполнялись условия $\sum_{k \in J_x} u_k(x) \rho_k < \varepsilon$ и $\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1-\delta}{12}$. По выбранному x^* найдем $x^{**} = (1-\delta)^{-1}x^*$. Пусть $x > x^{**}$. Покроем сегмент $[(1-\delta)x, (1+\delta)x]$ промежутками $T_i = [x - ih; x - (i-1)h]$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $T'_j = [x + (j-1)h; x + jh]$ ($j = 1, 2, \dots, m-1$), $T'_m = [x + (m-1)h; x + mh]$, где $h = \sqrt{(1-\delta)x}$ и $(1-\delta)x \in T_m$, $(1+\delta)x \in T'_m$.

Учитывая (5) и (6), получим

$$\begin{aligned}\sum_{(1-\delta)x < k < (1+\delta)x} u_k(x) \rho_k &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{k \in T_i} u_k(x - (i-1)h) \omega(x, k, -(i-1)h) \rho_k + \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{k \in T'_j} u_k(x + (j-1)h) \omega(x, k, (j-1)h) \rho_k \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m (\omega_i \sum_{k \in T_i} u_k(x - (i-1)h) \rho_k) + \sum_{j=1}^m (\omega'_j \sum_{k \in T'_j} u_k(x + (j-1)h) \rho_k) \leq \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^m \omega'_j \right), \text{ где } \omega_i = \omega(x, [x - (i-1)h], -(i-1)h), \\ &\omega'_j = \omega(x, [x + (j-1)h], (j-1)h) \quad (i, j = 1, 2, \dots, m).\end{aligned}$$

Используя (7) и (8), оценим сверху $\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}$ и $\frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j}$:

$$\begin{aligned}\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i} &\leq \frac{\omega(x, [x - ih], -ih)}{\omega(x, [x - ih], -(i-1)h)} = e^{-h \left(\frac{x - (i-1)h}{x - ih} \right)^{[x - ih]}} \ll \\ &\leq e^{-\frac{h^2}{2(x - (i-1)h)}} \leq e^{-\frac{1}{2}(1-\delta)}; \\ \frac{\omega'_{j+1}}{\omega'_j} &\leq \frac{\omega(x, [x + ih], ih)}{\omega(x, [x + ih], (j-1)h)} = e^{h \left(\frac{x + (j-1)h}{x + ih} \right)^{[x + ih]}} \ll \\ &\leq e^{-\frac{h^2}{2(x + (j-1)h)} + \frac{h^3}{2(x + (j-1)h)^2} \left(1 + \frac{h}{x} \right)} \leq \\ &\leq e^{-\frac{1-\delta}{4} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{e\sqrt{x}}} = e^{-\frac{1-\delta}{4} + \frac{3}{2\sqrt{x}}} \leq e^{-\frac{1-\delta}{8}}.\end{aligned}$$

Используя полученные оценки, находим, что

$$\varepsilon \left(\sum_{i=1}^m \omega_i + \sum_{j=1}^m \omega'_j \right) \leq \varepsilon \left(\left(1 - e^{-\frac{1-\delta}{2}} \right)^{-1} + \left(1 - e^{-\frac{1-\delta}{8}} \right)^{-1} \right).$$

Лемма 3 доказана.

Теорема 1. Для того чтобы последовательность (ρ_k) неотрицательных чисел суммировалась методом Бореля к нулю, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k \in J_x} \rho_k = 0.$$

В справедливости теоремы 1 убеждаемся, принимая во внимание лемму 3 и асимптотические равенства

$$\begin{aligned}\min_{k \in I_x} u_k(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad (x \rightarrow \infty), \\ \max_{k \in I_x} u_k(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \quad (x \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

Следствие. Для возрастающей последовательности (k_i) натуральных чисел $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{k_i}(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sigma_x = 0$, где σ_x — количество членов последовательности (k_i) , попадающих в сегмент I_x .

Утверждение 1. Если возрастающая последовательность (k_i) натуральных чисел удовлетворяет условию $i = o(\sqrt{k_i})$ ($i \rightarrow \infty$), то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{k_i}(x) = 0.$$

Доказательство. Обозначим через $k_{i(x)}$ последний член последовательности (k_i) , попавший в сегмент I_x . По условию $\frac{i(x)}{\sqrt{k_{i(x)}}} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$). Так как $\sigma_x \leq i(x)$ и $x - \sqrt{x} \leq k_{i(x)} \leq x + \sqrt{x}$, то $\frac{\sigma_x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$).

Пусть B — матрица Бореля. В качестве следствий утверждения 1 и теоремы 1 сформулируем ряд утверждений, касающихся B -частичных пределов первого рода и суммируемости последовательности к крайней точке ее ядра матрицей Бореля. Эти утверждения конкретизируют некоторые общие результаты, полученные Н. А. Давыдовым в работах [2, 3] для произвольных положительных T -матриц.

Утверждение 2. Если в некоторую δ -окрестность конечного частичного предела α последовательности (s_k) попадают лишь члены $s_{k_i^{(\delta)}}$ ($i = 1, 2, \dots$), причем $i = o(\sqrt{k_i^{(\delta)}})$ ($i \rightarrow \infty$), то α — B -частичный предел первого рода.

Теорема 2. Для того чтобы конечный частичный предел α последовательности (s_k) был B -частичным пределом первого рода, необходимо и достаточно, чтобы существовала δ -окрестность точки α такая, что множество всех членов (s_k) , попавших в эту окрестность (пусть это будут члены $s_{k_i^{(\delta)}}$, $i = 1, 2, \dots$), таково,

что $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma_x}{\sqrt{x}} = 0$, где σ_x — количество членов последовательности $(k_i^{(\delta)})$, содержащихся в сегменте I_x .

Теорема 4. Если в некоторую R -окрестность бесконечно удаленной точки комплексной плоскости попадают лишь члены

$s_{k_i^{(R)}}$ ($i = 1, 2, \dots$), причем $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k_i^{(R)} \in I_x} |s_{k_i^{(R)}}| = 0$, то бесконечно

удаленная точка является B -частичным пределом первого рода последовательности (S_k) .

Теорема 5. Для того чтобы матрица Бореля суммировала расходящуюся последовательность (s_k) к крайней точке ξ ее ядра, необходимо и достаточно, чтобы в любую δ -окрестность точки ξ попадали члены $s_{k_i^{(\delta)}}$ ($i = 1, 2, \dots$), причем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma_x}{2\sqrt{x}} = 1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} u_{m_i^{(\delta)}}(x) s_{m_i^{(\delta)}} = 0,$$

где σ_x — количество членов последовательности $(k_i^{(\delta)})$, принадлежащих сегменту I_x , $\{m_i^{(\delta)}\} = \{0, 1, 2, \dots\} \setminus \{k_i^{(\delta)}\}$.

Список литературы: 1. Харди Г. Расходящиеся ряды. М., 1951. 504 с. 2. Давыдов Н. А. О ядре в смысле Кноппа регулярного преобразования // Изв. вузов. Математика. 1983. № 2 (249). С. 30—40. 3. Давыдов Н. А. Критерии суммируемости расходящейся последовательности к крайней точке ее ядра регулярной положительной матрицей // Укр. мат. журн. 1984. 36, № 3. С. 292—297.

Поступила в редколлегию 01.07.86

**ГАММА-ПРОИЗВОДЯЩИЕ МАТРИЦЫ, J -ВНУТРЕННИЕ
МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ
ЗАДАЧИ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ. 3***

§ 3. Доказательство теорем 1—6. Другие свойства гамма-производящих матриц. 1°. Предложение 1. Для того чтобы м.-ф. χ из $B_{m \times n}$ отвечала по формуле (1.6) некоторой м.-ф. A из $M(n, m)$ (из $M^\circ(n, m)$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\ln \det (I - \chi^* \chi) \in L^1 \text{ (и } \chi(0) = 0). \quad (3.1)$$

При выполнении этого условия A восстанавливается по χ с точностью до постоянного унитарного (и j -унитарного) левого блочно-диагонального множителя вида $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$, где u и v — унитарные матрицы порядков n и m , а A из $M^\circ(n, m)$ восстанавливается по χ ($\chi(0) = 0$) однозначно.

Доказательство. Из равенств (1.5) и (1.6) вытекает, что для внешних м.-ф. p_+^{-1} и $(p_-^*)^{-1}$ должны иметь

$$\begin{aligned} p_+^{-1}(\xi) (p_-^*)^{-1}(\xi) &= I - \chi^*(\xi) \chi(\xi), \\ p_+^{-1}(\xi) [p_+^{-1}(\xi)]^* &= I - \chi(\xi) \chi^*(\xi). \end{aligned} \quad (3.2)$$

По теореме Засухина — Крейна для существования таких м.-ф. необходимо и достаточно выполнение условия (3.1). При выполнении этого условия p_+^{-1} и $(p_-^*)^{-1}$ определяются по χ с точностью до постоянных унитарных множителей u^* и v ($(p_+^{-1} \rightarrow p_+^{-1} u^*, (p_+^*)^{-1} \rightarrow v (p_+^*)^{-1}$), а при нормировке $(p_+^{-1})(0) > 0$ и $(p_+^*)^{-1}(0) > 0$ — однозначно. М.-ф. $q_\pm$ выражаются через $p_\pm$ и χ по формулам $q_-(\xi) = -p_-(\xi) \chi^*(\xi)$, $q_+(\xi) = -p_+(\xi) \chi(\xi)$ (3.3).

Замечание. М.-ф. χ из $B_{m \times n}$, удовлетворяющая условию (3.1) с $\chi(0) = 0$, рассматривается в статье [1] как характеристическая функция изометрического оператора со специфическим свойством. Там же по существу по χ восстанавливается A из $M(n, m)$ и сформулирован критерий (отличный от рассмотренного в настоящей работе) того, когда для полученного A имеем $F_A(B_{n \times m}) = F_\Gamma$, где F_Γ — множество решений задачи (1.2) с $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$, $f_0 = f_A(0)$. 2°. Предложение 2. Для A из $M(n, m)$ при любой постоянной j -унитарной матрице U имеем $AU \in M(n, m)$, и среди этих U существует единственная U_0 такая, что $AU_0 \in M^\circ(n, m)$.

Доказательство. Пусть $\tilde{A} = AU$, где $A, U \in M(n, m)$, $U = \text{const}$, $U = [u_{jk}]_{11}^2$. Для блоков $p_\pm$ м.-ф. $\tilde{A}$ будем иметь $\tilde{p}_\pm^* = u_{11}^* \times$

* Первая и вторая часть работы опубликованы в вып. 51 и 52 этого сборника.

$\times (I - E\chi) p_+^*, \bar{p}_+ = p_+ (I - \chi E) u_{22}$ (3.4), где $E = u_{12} u_{22}^{-1}$, $E^* E < I$, а $\chi = -p_+^{-1} q_+ \in B_{m \times n}$. Известно, что если $h \in B_n$ и $\|h(\xi)\| < 1$ п.в., то $I_n + h$ — внешняя м.-ф. Произведение внешних м.-ф. из D_+ является внешней м.-ф. из D_+ . Поэтому $\bar{p}_+$ и $\bar{p}_+^*$ — внешние м.-ф. из D_+ . Из того, что $\bar{A}(\xi)$ принимает j -унитарные значения п.в., следует, что $\|\bar{p}_+^{-1}\|_\infty \leq 1$ и $\|(\bar{p}_+^*)^{-1}\|_\infty \leq 1$. Известно, что если $h \in D_+$ и $h(\xi) \in L_{m \times n}^p$, то $h \in H_{m \times n}^p$. Получим, что $\bar{p}_+^{-1}$ и $(\bar{p}_+^*)^{-1}$ — внешние функции из B_m и B_n .

Для $\tilde{\chi} = -\bar{p}_+^{-1} \bar{q}_+$ имеем

$$\tilde{\chi} = (u_{22} - \chi u_{12})^{-1} (u_{21} - \chi u_{11}). \quad (3.5)$$

Учитывая, что $\chi \in B_{m \times n}$, а $U = [u_{jk}]$ — j -унитарная матрица, получаем, что $\tilde{\chi} \in B_{m \times n}$. Следовательно, $\bar{A} \in M(n, m)$. Желая теперь, чтобы $\bar{A} \in M^0(n, m)$, получим для $U_0 = U = [u_{jk}]_1^2$ условия

$$u_{12} = \chi^*(0) u_{22}, \quad u_{21} = \chi(0) u_{11}, \\ u_{11} = (I - \chi^*(0) \chi(0))^{-1/2} u, \quad u_{22} = (I - \chi(0) \chi^*(0))^{-1/2} v,$$

где u и v — унитарные матрицы такие, что

$$p_+(0) (I - \chi(0) \chi^*(0))^{1/2} v > 0 \\ u_* (I - \chi^*(0) \chi(0))^{1/2} (p_-^*) (0) > 0. \quad (3.6)$$

Замечание. Таким же образом для $A \in M(n, m)$ строится единственная j -унитарная матрица U_{z_0} такая, что для $\bar{A} = AU_{z_0}$ будем иметь $\bar{p}_+(z_0) > 0$, $(\bar{p}_+^*)(z_0) > 0$, $\bar{q}_+(z_0) = 0$. При этом

$$\bar{p}_+(z_0) \bar{p}_+^*(z_0) = p_+(z_0) p_+^*(z_0) - q_+(z_0) q_+^*(z_0) \\ [(\bar{p}_+^*)(z_0)]^* (\bar{p}_+^*)(z_0) = [p_-^*(z_0)]^* (p_-^*)(z_0) - [q_-^*(z_0)]^* (q_-^*)(z_0).$$

3°. Для A из $M(n, m)$ рассмотрим

$$\varphi_E = (q_+ E + p_+)^{-1}, \quad \psi_E = (E q_-^* + p_-^*)^{-1}, \quad E \in B_{n \times m}. \quad (3.7)$$

Лемма 1. ([2]). φ_E и ψ_E — внешние м.-ф. из $H_{n \times n}^2$ и $H_{m \times m}^2$.

Доказательство. М.-ф. φ_E и ψ_E — внешние из D_+ , так как $\varphi_E = (I - \chi E)^{-1} p_+^{-1}$, $\psi_E = (p_-^*)^{-1} (I - E \chi)^{-1}$, p_+ и p_-^* , $I - \chi E$ и $I - E \chi$ — внешние м.-ф.

Так как $\varphi_E \in D_+$, $\psi_E \in D_+$, то для того, чтобы убедиться, что $\varphi_E \in H_{n \times n}^2$, $\psi_E \in H_{m \times m}^2$, достаточно показать, что $\varphi_E \varphi_E^* \in L_{n \times n}^1$, $\psi_E^* \psi_E \in L_{m \times m}^1$. Рассмотрим $\Phi_E = (I + \chi E) (I - \chi E)^{-1}$, $\Psi_E = (I + E \chi) (I - E \chi)^{-1}$. М.-ф. Φ_E и Ψ_E принадлежат классу S м.-ф. Φ , голоморфных в D с $\operatorname{Re} \Phi(z) \geq 0$ в D . Поэтому $\operatorname{Re} \Phi_E(\xi) \in L_{n \times n}^1$, $\operatorname{Re} \Psi_E(\xi) \in L_{m \times m}^1$. Но $\varphi_E(\xi) \varphi_E^*(\xi) \leq \operatorname{Re} \Phi_E(\xi)$, $\psi_E^*(\xi) \psi_E(\xi) \leq \operatorname{Re} \Psi_E(\xi)$. Поэтому $\varphi_E \varphi_E^* \in L_{n \times n}^1$, $\psi_E^* \psi_E \in L_{m \times m}^1$.

Предложение 3. Пусть $A \in M(n, m)$. Тогда $\forall f, f_0 \in F_A(B_{n \times m})$: $f - f_0 \in H_{n \times m}^\infty$, т. е. $F_A(B_{n \times m}) \subset F_\Gamma$, где F_Γ — множество решений задачи (1.2) с $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$, $f_0 \in F_A(B_{n \times m})$.

Доказательство. Пусть $A \in M(n, m)$, $f_E = f_A(E)$, $E \in B_{n \times m}$. Пользуясь тем, что $A(\xi)$ принимает j -унитарные значения, получаем

$$I - f_E^* f_E = \Phi_E^* (I - E^* E) \Phi_E, \quad E \in B_{n \times m}; \quad (3.8)$$

$$f_E = (E q_+^* + p_-^*)^{-1} (E p_+^* + q_+^*), \quad E \in B_{n \times m}. \quad (3.9)$$

Из (3.8) видно, что $\|f_E\|_\infty \leq 1$. Записывая f_{E_1} в виде (1.7), а f_{E_2} — в виде (3.9) и пользуясь снова тем, что $A(\xi)$ принимает j -унитарные значения, получаем $f_{E_1} - f_{E_2} = \psi_{E_1}(E_1 - E_2)\Phi_{E_2}$, $\forall E_1, E_2 \in B_{n \times m}$ (3.10), где Φ_E и ψ_E определены по формулам (3.7). Из этого выражения и леммы 1 вытекает, что $f_{E_1} - f_{E_2} \in H_{n \times m}^1 (\subset D_+)$, $(E_1, E_2 \in B_{n \times m})$. Так как при этом $f_{E_1} - f_{E_2} \in L_{n \times m}^\infty$, то $f_{E_1} - f_{E_2} \in H_{n \times m}^\infty$.

4°. **Лемма 2.** Если $A \in M(n, m)$, то $\det A(\xi) \equiv c$, где $c = \text{const}$, $|c| = 1$; если $A \in M^0(n, m)$, то $\det A(\xi) \equiv 1$.

Доказательство. Для $A \in M(n, m)$ имеем $\det A(\xi) = \det p_+(\xi) / \det p_-^*(\xi)$. Поэтому $\det A(\xi)$ — внешняя функция. Так как при этом $|\det A(\xi)| = 1$, что следует из (1.5), то $\det A(\xi) \equiv c$, где $c = \text{const}$, $|c| = 1$. Если же $A \in M^0(n, m)$, то $\det A(\xi) = \det A(0) = \det p_+(0) / \det(p_-^*)(0) > 0$, и потому $c = 1$.

Лемма 3. Для того чтобы $W = [w_{jk}]_1^2 \in U(n, m)$, необходимо и достаточно, чтобы W имела j -унитарные граничные значения п.в. и чтобы

$$\begin{aligned} (\omega_{11}^*)^{-1} &\in B_n, \quad \omega_{22}^{-1} \omega_{21} \in B_{m \times n}, \\ \omega_{12} \omega_{22}^{-1} &\in B_{n \times m}, \quad \omega_{22}^{-1} \in B_n. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Доказательство. Рассмотрим известное преобразование Потапова — Гинзбурга, отображающее биективно класс B_j на множество м.-ф. $\tilde{s} = [s_{jk}]_1^2$ класса B_{n+m} с $\det s_{22}(z) \neq 0$:

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \omega_{11} - \omega_{12} \omega_{22}^{-1} \omega_{21} & \omega_{12} \omega_{22}^{-1} \\ -\omega_{22}^{-1} \omega_{21} & \omega_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

При этом преобразовании j -унитарным матрицам W отвечают унитарные матрицы $\tilde{s}$ и для таких W дополнительно к (3.12) имеем $s_{11} = (\omega_{11} - \omega_{12} \omega_{22}^{-1} \omega_{21}) = (\omega_{11}^*)^{-1}$ (3.13). Поэтому если $W = [w_{jk}]_1^2 \in U(n, m)$, то выполняются условия (3.11). Пусть теперь выполняются условия (3.11) и $W = [w_{jk}]_1^2$ имеет j -унитарные граничные значения. Рассмотрим м.-ф. $\tilde{s} = [s_{jk}]_1^2$, определенную по формуле (3.12). Для нее будем иметь и (3.13), и $\tilde{s} \in H_{(n+m) \times (n+m)}^\infty$ в силу условия (3.11). Учитывая, что $\tilde{s}(\xi)$ имеет унитарные граничные значения, получаем, что $\|\tilde{s}\|_\infty = 1$. Следовательно, $\tilde{s} \in B_{n+m}$ и потому $W \in B_j$. Получили, что $W \in U(n, m)$.

5°. **Предложение 4.** $(A \in M_s(n, m)) \Leftrightarrow (A \in U(n, m))$ и A — внешняя функция (из D_+).

Доказательство. Для $W = [w_{jk}]_1^2 = A \in M_s(n, m)$ имеем $(\omega_{11}^*)^{-1} = (p_-^*)^{-1} \in B_n$, $\omega_{22}^{-1} \omega_{21} = p_+^{-1} q_+ = -\chi \in B_{m \times n}$, $\omega_{12} \omega_{22}^{-1} = q_- p_+^{-1} = F_A(0) \in$

$\in B_{n \times m}$, $\omega_{22}^{-1} = p_+^{-1} \in B_m$. Для W выполняются условия леммы 3, и потому $W \in U(n, m)$. Кроме того, $\omega_{22} = p_+ \in D_+$, $\omega_{12} = F_A(0)\omega_{22} \in D_+$, $\omega_{21} = -\omega_{22}\chi \in D_+$, $\omega_{11} = (\omega_{11}^*)^{-1} + \omega_{12}\omega_{22}^{-1}\omega_{21} \in D_+$, так что $W^{\pm 1} \in D_+$. Учитывая при этом лемму 2, получаем, что $W^{\pm 1} \in D_+$, а это возможно лишь, если W — внешняя м.-ф. (из D_+). Пусть теперь $W \in U(n, m)$ и $W = [\omega_{jk}]_1^2$ — внешняя м.-ф. из B_m . Тогда $W \in M_s(n, m)$. Действительно, по лемме 3, для W выполняются условия (3.11). Так как $\omega_{22} \in D_+$ и $\omega_{22}^{-1} \in B_m$, то $\omega_{22}^{-1} (= p_+^{-1})$ — внешняя м.-ф. из B_m . Имеем также согласно (3.11): $\chi \stackrel{\text{def}}{=} -\omega_{22}^{-1}\omega_{21} \in B_{n \times m}$. Осталось показать, что $(\omega_{11}^*)^{-1}$ — внешняя функция. Так как W — внешняя м.-ф., то $\det W(z)$ — внешняя функция; из того, что $W \in U(n, m)$, следует: $|\det W(z)| = 1$ п.в. Поэтому $\det W(z) \equiv c = \text{const}$, $|c| = 1$. Но для $W = [\omega_{jk}]$ из $U(n, m)$ имеем $\det W(z) = \det \omega_{22}(z) / \det \omega_{11}^*(1/\bar{z})$. Получаем, что $\det \omega_{11}^*(1/\bar{z}) = \bar{c} \det \omega_{22}(z)$ — внешняя функция.

Из того, что $(\omega_{11}^*)^{-1} \in B_n$ и $\det \omega_{11}^*$ — внешняя функция, следует, что $(\omega_{11}^*)^{-1}$ — внешняя м.-ф.

Замечание. Если $A \in M_s(n, m)$, то $F_A(B_{n \times m}) \subset B_{n \times m}$, ибо $M_s(n, m) \subset C(U, n, m) (\subset B_J)$.

6°. Для $A_1, A_2 \in M(n, m)$ будем писать $A_1 \sim A_2$, если при $f_1 \in F_{A_1}(B_{n \times m})$ и $f_2 \in F_{A_2}(B_{n \times m})$ имеем $f_1 - f_2 \in H_{n \times m}^\infty$.

Лемма 4. Пусть $A, \tilde{A} \in M(n, m)$. Тогда $(A \sim \tilde{A}) \Leftrightarrow A^{-1}\tilde{A} D_+$.

Доказательство. Пусть $A, \tilde{A} \in M(n, m)$; $p_\pm, q_\pm$ и $\tilde{p}_\pm, \tilde{q}_\pm$ — их соответствующие блоки (1.4). Пусть $f_E = F_A(E)$, $\tilde{f}_{\tilde{E}} = F_{\tilde{A}}(\tilde{E})$ ($E, \tilde{E} \in B_{n \times m}$). Запишем $\tilde{f}_{\tilde{E}}$ в виде (3.9). Получим

$$\tilde{f}_E - \tilde{f}_{\tilde{E}} = \psi_E(-Eu_{21}\tilde{E} - Eu_{22} + u_{11}\tilde{E} + u_{12}\tilde{\varphi}_{\tilde{E}}),$$

где $[u_{jk}]_1^2 = u^{-1}\tilde{u} (= jA^*j\tilde{A})$, $\psi_E = (Eq_-^* + p_-^*)^{-1}$, $\tilde{\varphi}_{\tilde{E}} = (\tilde{q}_*\tilde{E} + \tilde{p}_*)^{-1}$.

Утверждение леммы вытекает из записанного выражения для $\tilde{f}_E - \tilde{f}_{\tilde{E}}$ и леммы 1.

7°. Доказательство теоремы 3. Пусть $A_1, A_2 \in M(n, m)$ и пусть $A_1 \prec A_2$, т. е. $U \stackrel{\text{def}}{=} A_2^{-1}A_1 \in M_s(n, m)$. Тогда $F_U(B_{n \times m}) \subset B_{n \times m}$ и потому $F_{A_1}(B_{n \times m}) = F_{A_2 U}(B_{n \times m}) \subset F_{A_2}(B_{n \times m})$. Пусть теперь $F_{\tilde{A}}(B_{n \times m}) \subset F_A(B_{n \times m})$ ($\tilde{A}, A \in M(n, m)$). Положим $U = [u_{jk}]_1^2 = U^{-1}\tilde{U}$. Имеем $F_U(B_{n \times m}) \subset B_{n \times m}$. Поэтому $E \stackrel{\text{def}}{=} u_{12}u_{22}^{-1} (= F_U(0)) \in B_{n \times m}$. Для блоков м.-ф. $A, \tilde{A}$ и U имеют место соотношения (3.4), из которых следует, что u_{11}^* и u_{22} — внешние м.-ф. из D_+ . Пользуясь леммой 4, получаем, что $U \in D_+$, в частности, $u_{21} \in D_+$. Так как u_{22} — внешняя м.-ф., а $u_{21} \in D_+$, то $u_{22}^{-1}u_{21} \in D_+$. Поскольку $U(\zeta)$ принимает j -унитарные значения п.в., то $\|(u_{11}^*)^{-1}\|_\infty \leq 1$, $\|u_{22}^{-1}\|_\infty \leq 1$, $\|u_{22}^{-1}u_{21}\|_\infty \leq 1$. Следовательно, $(u_{11}^*)^{-1} \in B_n$, $u_{22}^{-1} \in B_m$, $u_{22}^{-1}u_{21} \in B_{m \times n}$. Получили, что $U \in M(n, m)$. Так как $F_U(0) \in B_{n \times m}$, то $U \in M_s(n, m)$. Доказано утверждение а) теоремы.

Пусть теперь $\tilde{A} \simeq A$, т. е. $\tilde{A} = AU$; $\tilde{A}, A \in M(n, m)$, $U = \text{const}$. Тогда $F_{\tilde{A}}(B_{n \times m}) = F_{AU}(B_{n \times m}) = F_A(B_{n \times m})$, так как $F_U(B_{n \times m}) = B_{n \times m}$. Обратно, пусть $F_{\tilde{A}}(B_{n \times m}) = F_A(B_{n \times m})$, $U = A^{-1}\tilde{A}$; $A, \tilde{A} \in M(n, m)$. Согласно утверждению а) теоремы будем иметь $U^{\pm 1} \in M_s(n, m)$. Следовательно, $U(z)$ — мероморфная в D м.-ф., принимающая там j -унитарные значения. Это возможно лишь при $U(z) = \text{const}$. Если к тому же $A, \tilde{A} \in M^0(n, m)$, то согласно предложению 2 будем иметь $\tilde{A} = A$.

8°. Доказательство теоремы 4. а) Пусть $A \in M(n, m)$, $z_0 \in D$ и A нормирована так, что $p_+(z_0) > 0$, $p_-^*(z_0) > 0$, $q_+(z_0) = 0$. Рассмотрим $f_E = F_A(E)$, $f_0 = F_A(0)$. В силу соотношения (3.10) имеем $h_E \stackrel{\text{def}}{=} f_E - f_0 = \psi_E E \varphi_0$, $\psi_E = (p_-^*)^{-1}(I - E\chi)^{-1}$, $\varphi_0 = p_+^{-1}$. Поэтому $h_E(z_0) = (p_-^*)^{-1}(z_0) E(z_0) p_+^{-1}(z_0)$, откуда видно, что $K(A; z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \{h_E(z_0): E \in B_{n \times m}\}$ — матричный шар с левым и правым полурадиусами $R_\Lambda(A; z_0) = (p_-^*)^{-1}(z_0)$ и $R_\Pi(A; z_0) = p_+^{-1}(z_0)$. Пусть теперь $A \in M(n, m)$ не нормирована указанным образом. Тогда согласно замечанию к предложению 2 существует постоянная j -унитарная матрица U такая, что $\tilde{A} = AU$ уже нормирована так, что $\tilde{p}_+(z_0) > 0$, $(\tilde{p}_-^*)(z_0) > 0$, $\tilde{q}_+(z_0) = 0$. Согласно уже доказанному, $R_\Lambda(\tilde{A}; z_0) = (\tilde{p}_-^*)(z_0)$, $R_\Pi(\tilde{A}; z_0) = \tilde{p}_+^{-1}(z_0)$. Так как $F_{\tilde{A}}(B_{n \times m}) = F_A(B_{n \times m})$, то $R_\Lambda(\tilde{A}, z_0) = R_\Lambda(A; z_0)$, $R_\Pi(\tilde{A}; z_0) = R_\Pi(A; z_0)$. Получаем, что $R_\Pi^{-2}(A; z_0) = \tilde{p}_+(z_0) \tilde{p}_+^*(z_0)$, $R_\Lambda^{-2}(A; z_0) = [\tilde{p}_-^*(z_0)]^* \tilde{p}_-^*(z_0)$. Равенства (1.9) и (1.10) получаются, если учесть, что

$$\begin{aligned} \tilde{p}_+(z_0) &= p_+(z_0) [I - \chi(z_0) \chi^*(z_0)]^{1/2} v, \\ (\tilde{p}_-^*)(z_0) &= u^* [I - \chi^*(z_0) \chi(z_0)]^{1/2} (p_-^*)(z_0), \end{aligned}$$

где u и v — унитарные матрицы.

б). Пусть $A, \tilde{A} \in M(n, m)$ и $\tilde{A} \prec A$, то есть $U = [u_{jk}]_1^2 \stackrel{\text{def}}{=} A^{-1}\tilde{A} \in M_s(n, m)$. Можно считать, что $\tilde{A}$ и A нормированы так, что $\tilde{p}_+(z_0) > 0$, $(\tilde{p}_-^*)(z_0) > 0$, $\tilde{q}_+(z_0) = 0$, $p_+(z_0) > 0$, $(p_-^*)(z_0) > 0$, $q_+(z_0) = 0$. Тогда, пользуясь уже доказанным, получаем

$$\begin{aligned} R_\Lambda^{-2}(\tilde{A}; z_0) &= [(\tilde{p}_-^*)(z_0)]^* (p_-^*(z_0)) = [(p_-^*)(z_0)]^* u_{11}(z_0) u_{11}^*(z_0) (p_-^*(z_0)) > \\ &> [(p_-^*)(z_0)]^* (p_-^*)(z_0) = R_\Lambda^{-2}(A; z_0); \\ R_\Pi^{-2}(\tilde{A}; z_0) &= \tilde{p}_+(z_0) \tilde{p}_+^*(z_0) = p_+(z_0) u_{22}(z_0) u_{22}^*(z_0) p_+^*(z_0) > \\ &> p_+(z_0) p_+^*(z_0) = R_\Pi^{-2}(A; z_0). \end{aligned}$$

в). Пусть $A, \tilde{A} \in M(n, m)$, $\tilde{A} \prec A$ и $\det R_\Lambda(\tilde{A}, z_0) = \det(R_\Lambda(A, z_0))$. Можно считать, что $\tilde{A}$ и A нормированы рассмотренным выше образом. Тогда

$$\begin{aligned} \det R_\Lambda^{-2}(\tilde{A}, z_0) &= |\det p_+(z_0)|^2 |\det u_{22}(z_0)|^2 = \\ &= \det R_\Lambda^{-2}(A; z_0) \cdot |\det u_{22}(z_0)|^2. \end{aligned}$$

Получаем, что $|\det u_{22}(z_0)|^2 = 1$. Но $u_{22}^{-1} \in B_m$. Это возможно лишь, когда $u_{22} = \text{const}$, u_{22} — унитарная матрица. Так как $U = [u_{jk}]_1^2 \times$

$\times (=U^{-1}\tilde{U}) \in M_s(n, m)$, то $|\det(u_{11}^*)(z_0)| = |\det u_{22}(z_0)|$. Следовательно, для $(u_{11}^*)^{-1} (\in B_n)$ имеем $|\det(u_{11}^*)^{-1}(z_0)| = 1$, а это возможно лишь когда $(u_{11}^*)^{-1} = \text{const}$, $(u_{11}^*)^{-1}$ — унитарная матрица. Но тогда и $u_{11} = \text{const}$, u_{11} — унитарная матрица. Пользуясь при этом тем, что $U(\xi)$ принимает j -унитарные значения, получаем, что $u_{12} = 0$, $u_{21} = 0$. Следовательно, $U = \text{const}$, т. е. $\tilde{A} = A$.

9°. Доказательство теоремы 1. Утверждение а) теоремы уже доказано в предложении 3. Так как $F_A(B_{n \times m}) \subset F_\Gamma$ при $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$ ($k \geq 1$), $f_0 = F_A(0)$, то $K(A; 0) \subset K_\Gamma$. Так как у шара $K(A; 0)$ левый и правый полурадиусы невырождены, то такими являются левый и правый полурадиусы шара K_Γ , то есть задача (1.2) является вполне неопределенной. Осталось доказать утверждение в) теоремы.

По теореме А для рассматриваемой вполне неопределенной задачи (1.2) существует $A_0 \in M(n, m)$ такая, что $F_\Gamma = F_{A_0}(B_{n \times m})$. Можно считать, что $A_0 \in M^0(n, m)$. Если $F_A(B_{n \times m}) \neq F_\Gamma$, то по теореме 3 имеем $A = A_0 U$, где $U \in M_s(n, m)$, $U \neq \text{const}$. Следовательно, $A \notin M_r(n, m)$. Пусть теперь $A \in M_r(n, m)$. Тогда $A = A_1 U$, где $A_1 \in M_r(n, m)$, $U \in M_s(n, m)$, $U \neq \text{const}$. Получаем, что $F_A(B_{n \times m}) \subset F_{A_1}(B_{n \times m}) \subset F_\Gamma$, причем $F_A(B_{n \times m}) \neq F_{A_1}(B_{n \times m})$. Следовательно, $F_A(B_{n \times m}) \neq F_\Gamma$.

10°. Доказательство теоремы 5. Пусть $A \in M(n, m)$, $f_0 \in F_A(0)$, $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$, $k \geq 1$. По теореме А существует $A_0 \in M(n, m)$ такая, что $F_\Gamma = F_{A_0}(B_{n \times m})$. Имеем $F_A(B_{n \times m}) \subset F_{A_0}(B_{n \times m}) = F_\Gamma$. По теореме 4 получаем $R_\Lambda^{-2}(\Gamma) = R_\Lambda^{-2}(A_0; 0) \leq R_\Lambda^{-2}(A; 0)$, $R_\Pi^{-2}(\Gamma) = R_\Pi^{-2}(A_0; 0) \leq R_\Pi^{-2}(A; 0)$ и $(F_\Gamma =) F_{A_0}(B_{n \times m}) = F_A(B_{n \times m}) \leftrightarrow (d(\Gamma) =) \det R_\Pi(A_0; 0) = \det R_\Pi(A; 0) (=d(A))$. Остается заметить, что по теореме 1 имеем $A_0 \in M_r(n, m)$.

11°. Доказательство теоремы 2. а) Пусть $A = A_1 A_2$; $A_1, A_2 \in M_s(n, m)$. Тогда по предложению 4 A_1 и A_2 — внешние м.-ф., и они из $U(n, m)$. Получаем, что A — внешняя м.-ф., $A \in U(n, m)$. Пользуясь снова предложением 4, получаем, что $A \in M_s(n, m)$.

Утверждение б) теоремы доказывается так же, как предложение 2. Осталось доказать предложение в) теоремы.

Пусть $A \in M(n, m)$, $f_0 = F_A(0)$, $\gamma_k = \gamma_k(f_0)$, ($k \geq 1$). Согласно уже доказанному для задачи (1.2) существует $A_r \in M_r(n, m)$ такая, что $F_\Gamma = F_{A_r}(n, m)$. Так как $F_A(B_{n \times m}) \subset F_{A_r}(B_{n \times m}) (=F_\Gamma)$, то $A = A_r \cdot A_s$, где $A_s \in M_s(n, m)$. Пусть наряду с полученным представлением $A = A_r A_s$ имеем также $A = A'_r A'_s$, где $A'_r \in M_r(n, m)$, $A'_s \in M_s(n, m)$. Тогда

$$F_A(B_{n \times m}) \subset F_{A'_r}(B_{n \times m}) (=F_\Gamma) = F_{A_r}(n, m).$$

По теореме 3 получаем, что $A'_r \simeq A_r$. Если же $A_r, A'_r \in M_r^0(n, m)$, то $A'_r = A_r$. При этом будем иметь и $A'_s = A_s$.

12°. Доказательство теоремы 6. Будем предполагать, что $n \geq m$. Случай $n < m$ сводится к случаю $n > m$ путем перехода от м.-ф. $f_{E_0}(\xi)$ к м.-ф. $f_{E_0}^*(\xi)$. Пусть $A \in M(n, m)$, E_0 — матрица порядка $n \times m$, $E_0^* E_0 = I_m$, $f_{E_0} = F_A(E_0)$. Рассмотрим задачу (1.2) с $\gamma_k =$

$= \gamma_k(f_{E_0})$ ($k \geq 1$). По теореме 1 имеем $F_\Gamma = F_A(B_n \times m)$ тогда и только тогда, когда $A \in M_r(n, m)$. Если выполнено это условие, то рассматриваемые решения f_{E_0} задачи (1.2) называются каноническими (сведения о них см. в [3] при $n = m = 1$ и в [4] при произвольных n и m). Они обладают следующим характеристическим свойством. Пусть f — произвольное решение рассматриваемой задачи (1.2) такое, что $f^*(\xi)f(\xi) = I_m$ п.в. Рассмотрим изометрический оператор V умножения на ξ в пространстве $H = \xi \bar{H}_n^2 \vee f \bar{H}_m^2$ с областью определения $D_V = \xi^2 \bar{H}_n^2 \vee f \bar{H}_m^2$ и областью значений $\Delta_V = \xi \bar{H}_n^2 \vee \xi f \bar{H}_m^2$. Очевидно, что оператор U умножения на ξ в L_n^2 является минимальным унитарным расширением оператора V . Условие полной неопределенности задачи (1.2) можно записать в виде $\dim(H \ominus D_V) = n$, $\dim(H \ominus \Delta_V) = m$, а это означает, что V имеет индекс дефекта (n, m) . Условие того, что f — каноническое решение этой задачи, записывается в виде $U^*H \subset H$. Рассмотрим отдельно случаи $m = n$ и $m < n$.

Пусть $m = n$. Тогда условие $U^*H \subset H$ означает, что U — расширение V без выхода из H , т. е., что $H = L_n^2$. Для унитарнозначной м.-ф. $f = \bar{f}_{E_0}$ условие $H = L_n^2$ означает, что задача (1.12) имеет лишь нулевое решение. Пусть теперь выполнено последнее условие при $E_0 = \pm I_n$. Имеем $A = \tilde{A}U$, где $\tilde{A} \in M_r(n, m)$, $U \in M_s(n, m)$, причем $F_\Gamma = F_{\tilde{A}}(B_n)$. Покажем, что $U = \text{const}$, т. е. что $A \in M_r(n, m)$. Так как $\bar{f}_{E_0}$ при $E_0 = \pm I_n$ — канонические решения задачи (1.2), то для них имеем $\bar{f}_{\pm I} = F_{\tilde{A}}(E_{\pm 1})$, где $E_{\pm 1} = \text{const}$, $E_{\pm 1} = I_n$. Получаем, что $F_U(\pm I) = E_{\pm 1} = \text{const}$. Пользуясь при этом тем, что для блоков u_{jk} м.-ф. U по лемме 1 имеем $(u_{11}^* + u_{12}^*)^{-1} \in H_{n \times n}^2$, $(u_{21} + u_{22})^{-1} \in H_{n \times n}^2$, и равенствами $(u_{21} \pm u_{22})^{-1} = (u_{11} \pm u_{12})^{-1} E_{\pm 1}$, заключаем, что $u_{21} \pm u_{22} = \text{const}$, $u_{11} \pm u_{12} = \text{const}$, а значит, $U = \text{const}$.

Покажем теперь, что для $\bar{f}_{E_0}$ условие существования лишь нулевого решения задачи (1.12) равносильно тому, что $\text{ind } f_{E_0} = 0$. Пусть выполнено это условие. Тогда $\bar{f}_{E_0}$ — каноническое решение задачи (1.2), т. е. $H = L_n^2$. Тогда для $N \stackrel{\text{def}}{=} H \ominus \Delta_V$ имеем $N \{h: h \in H_n^2, \bar{f}_{E_0}^* h \in \bar{H}_n^2\}$. Рассматриваемая задача по теореме 1 является вполне неопределенной, и потому $\dim N = n$. Для $f = \bar{f}_{E_0}$ уже имеем представление (1.11) с $\bar{\varphi}_- = \psi_{E_0}^*$, $\bar{\varphi}_+ = E_0 \varphi_{E_0}$, где φ_{E_0} и ψ_{E_0} определены по формуле (3.7) при $E = E_0$. Так как $f_{E_0}^* \bar{\varphi}_-^* = \varphi_+^*$, то $\bar{\varphi}_-^* C^n \subset N$. Поскольку при этом $\det \bar{\varphi}_-^*(\xi) \neq 0$ п.в. и $\dim N = n$, то $\bar{\varphi}_-^* C^n = N$. Пусть имеем произвольное представление $f = \bar{f}_{E_0}$ в виде (1.11). Тогда $\bar{f}_{E_0}^* \bar{\varphi}_-^* = \varphi_+^*$ и потому $\bar{\varphi}_-^* C^n \subset N$. Получаем, что $\bar{\varphi}_-^* C^n \subset \bar{\varphi}_-^* C^n$, откуда следует, что $\bar{\varphi}_- = X \bar{\varphi}_+$, где $X = \text{const}$ ($\det X \neq 0$). Учитывая при этом, что $(\bar{f}_{E_0} =) \bar{\varphi}_-^{-1} \bar{\varphi}_+ = \bar{\varphi}_-^{-1} \bar{\varphi}_+$, получаем, что и $\bar{\varphi}_+ = X \bar{\varphi}_+$. Пусть теперь имеем $\text{ind } \bar{f}_{E_0} = 0$. Покажем, что тогда задача (1.12) имеет лишь нулевое решение. Пусть это не так. Тогда $\bar{f}_{E_0}$ не является каноническим ре-

шением этой задачи, и потому $f_{E_0} = F_{\tilde{A}}(E)$, где $\tilde{A} \in M_r(n, m)$, $E \neq \text{const}$, $E^*(\xi)E(\xi) = I_n$. Определим м.-ф. $\tilde{\varphi}_E$ и $\tilde{\psi}_E$ по блокам $\tilde{p}_{\pm}$ и $\tilde{q}_{\pm}$ м.-ф. $\tilde{A}$ согласно формулам (3.7). Получим для $f = f_{E_0}$ два существенно различных представления (1.11), в одном из них $\varphi_+ = \tilde{\varphi}_E$, а в другом $\varphi_+ = E\tilde{\varphi}_E$: $f_{E_0} = (\tilde{\psi}_E^*)^{-1}(E\tilde{\varphi}_E) = [(\tilde{\psi}_E E)^*]^{-1}\tilde{\varphi}_E$.

Пусть теперь $m < n$. Пусть $A \in M_r(n, m)$, $f_{E_0} = f_A(E_0)$, $E_0 = \text{const}$, $E_0^*E_0 = I_m$. Тогда f_{E_0} — каноническое решение соответствующей задачи (1.2), т. е. $U^*H \subset H$. Рассмотрим $H^{\perp} = L_n^2 \ominus H$. Имеем $\xi H^{\perp} \subset H^{\perp} \subset H_n^2$ и $\dim(H^{\perp} \ominus \xi H^{\perp}) (= \dim(H \ominus U^*H)) = n - m$. По теореме Берлинга — Лакса для инвариантного в H_n^2 подпространства $H^{\perp}$ относительно оператора умножения на ξ существует внутренняя м.-ф. в $(\in B_{n \times (n-m)})$ такая, что $H^{\perp} = bH_{n-m}^2$. Так как $f_{E_0}H_m^2 \subset H$, то $f_{E_0}H_m^2 \perp bH_{n-m}^2$, а это возможно лишь, когда $b^*f_{E_0} = 0$. Пусть теперь h_+ , h_- — решение задачи (1.12), т. е. $h_+ \perp H$. Тогда $h_+ \in bH_{n-m}^2$ и потому $f_{E_0}^*h_+ \in f_{E_0}^*bH_{n-m}^2 = \{0\}$, т. е. $h_- = 0$.

Обратно, пусть для любого решения задачи (1.12) имеем $h_- = 0$. Тогда получаем, что $H^{\perp} = \{h_+ : h_+ \in H_n^2, f_{E_0}^*h_+ = 0\}$, откуда видно, что $\xi H^{\perp} \subset H^{\perp}$ и, следовательно, $U^*H \subset H$. Получаем, что при всех рассматриваемых E_0 м.-ф. f_{E_0} — канонические решения задачи (1.2).

Пусть $A = \tilde{A}U$, где $\tilde{A} \in M_r(n, m)$, $U = [u_{jk}]_1^2 \in M_s(n, m)$. Покажем, что $U = \text{const}$, т. е. $A \in M_r(n, m)$. Так как все f_{E_0} — канонические решения задачи (1.2), то получаем, что $f_{E_0} = f_{\tilde{A}}(E)$, где $E = \text{const}$, $E^*E = I_m$. Поэтому $E = F_A(E_0) = \text{const}$. Из равенства $(E_0u_{12} + u_{11})^{-1}E = E_0(u_{21}E_0 + u_{22})^{-1}$ с учетом леммы 1 получаем, что $u_{21}E_0 + u_{22} = \text{const}$ при любом рассматриваемом E_0 . Отсюда вытекает, что u_{21} и u_{22} — постоянные матрицы, а значит, и $u_{22}^{-1}u_{21} = \text{const}$. Пользуясь теперь предложением 1, получаем, что $U = \text{const}$.

Замечание. Если b — внутренняя м.-ф., рассмотренная при доказательстве теоремы в случае $n > m$, то $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} (f_{E_0}, b)$ — унитарнозначная м.-ф. такая, что

$$\begin{aligned} \{h : h \in H_n^2, f^*h \in \xi \overline{H_n^2}\} &= 0, \\ \dim \{h : h \in H_n^2, \tilde{f}^*h \in \overline{H_n^2}\} &= n. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из этих условий вытекает, что $\text{ind } \tilde{f} = 0$. Обратно, если $b (\in B_{n \times (n-m)})$ — внутренняя м.-ф. такая, что $b^*f_{E_0} = 0$, т. е. $\tilde{f} \stackrel{\text{def}}{=} (f_{E_0}, b)$ — унитарнозначная м.-ф., и выполняются условия (1.14), то для f_{E_0} задача (1.12) разрешима лишь при $h_- = 0$.

Список литературы: 1. Adamjan V. M., Arov D. Z., Krein M. G. Some function theoretic problems connected with the theory of spectral measures of isometric operator // Lect. Notes in Mathem. 1984. 1043. Linear and Complex Analysis Problem Book. P. 160—163. 2. Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г. Беско-

нечные ганкелевы матрицы и связанные с ними проблемы продолжения // Изв. АН АрмССР, сер. мат. 1971. VI, № 2—3. С. 87—112. 3. Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г. Бесконечные ганкелевы матрицы и обобщенные задачи Каратеодори—Фейера и И. Шура // Функцион. анализ и его прил. 1968. 2, вып. 4. С. 1—17. 4. Адамян В. М. Невырожденные унитарные сцепления унитарных операторов // Функцион. анализ и его прил. 1973. 7, вып. 4. С. 1—16.

Поступила в редколлегию 06.01.86

УДК 517.98

Л. И. РОМАНОВ

О СЮРЪЕКТИВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

Пусть $B(C^n, C^k, C^m)$ — пространство билинейных отображений из $C^n \times C^k$ в C^m . Множество сюръективных (содержащих в образе открытое всюду плотное множество) отображений $f \in B(C^n, C^k, C^m)$ обозначим через $S(C^n, C^k, C^m)$ ($P(C^n, C^k, C^m)$). Множество $P(C^n, C^k, C^m)$ является дополнением к замкнутому алгебраическому множеству. Это вытекает из следующего утверждения.

Утверждение 1. Для того чтобы отображение f принадлежало $P(C^n, C^k, C^m)$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись $x \in C^n$, $y \in C^k$, для которых образ линейного отображения $(v, u) \rightarrow f(x, u) + f(v, y)$ совпадает с C^m .

Если $m > n + k - 1$, то $S(C^n, C^k, C^m) = P(C^n, C^k, C^m) = \emptyset$. Для $m \leq n + k - 1$ множество $S(C^n, C^k, C^m)$ не является пустым. Из теоремы о проекции конструктивного множества (см. [1], с. 60) вытекает

Теорема 1. $S(C^n, C^k, C^m)$ — конструктивное множество.

Доказательство. Пусть $f: C^n \times C^k \rightarrow C^m$ — произвольное билинейное отображение. В конкретных базисах пространств C^n, C^k, C^m отображение f задается трехмерной матрицей $A = (a_{ij}^l)$ следующим образом:

$$z_l = \sum_{i,j} a_{ij}^l x_i y_j,$$

где $l = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, k$. Введем в рассмотрение множество M_1 : $M_1 = \{(A, x, y, z) : f(x, y) = z\}$.

Множество M_1 является конструктивным множеством. Рассмотрим проекцию M_1 на (A, z) , обозначим ее M_2 : $M_2 = \{(A, z) : \exists x, y f(x, y) = z\}$.

Возьмем дополнение к M_2 , т. е. $M_3 = \overline{M_2}$: $M_3 = \{(A, z) : \forall x, y f(x, y) \neq z\}$.

Возьмем проекцию множества M_3 на A , обозначим ее M_4 : $M_4 = \{A : \exists z \forall x, y f(x, y) \neq z\}$.

Дополнением к множеству M_4 будет множество M_5 : $M_5 = \{A : \forall z \exists x, y f(x, y) = z\}$. Ясно, что $M_5 = S(C^n, C^k, C^m)$. Каждый раз, когда берем проекцию, пользуемся указанной выше теоремой из алгеб-

раической геометрии. Из сказанного следует, что $S(C^n, C^k, C^m)$ является конструктивным множеством.

Теорема 2. 1) Множество $S(C^2, C^k, C^m)$ является дополнением к замкнутому алгебраическому множеству; 2) множество $S(E_1, E_2, C^3)$ открыто в $B(E_1, E_2, C^3)$, где E_1, E_2 — банаховы пространства; 3) множество $S(l_2, C^2, l_2)$ не открыто в $B(l_2, C^2, l_2)$; 4) множество $S(C^3, C^3, C^4)$ не открыто в $B(C^3, C^3, C^4)$.

Утверждения 2) и 3) теоремы доказаны в [2], а 1) вытекает из результатов работы [2]. Для доказательства 4) рассмотрим билинейное отображение $T \in S(C^3, C^3, C^4)$, построенное в [3] в ответ на один вопрос Рудина (см. [4], с. 63). В [3] установлено, что T сюръективно, но не открыто в нуле. Покажем, что T не является внутренней точкой $S(C^3, C^3, C^4)$. Напомним, что $T(x, y) = (x_1y_1; x_1y_2; x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_2; x_3y_2 + x_2y_1)$.

Для любого $\alpha \in C$ положим

$$A_\alpha(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2\alpha(x_3 - x_2) & \alpha(x_3 - x_2) & 0 \\ \alpha(x_2 - x_3) & x_1 & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 + \alpha(x_3 - x_2) \\ x_2 & x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

и $T_\alpha(x, y) = A_\alpha(x)y$.

Отметим, что определитель, образованный первыми тремя строками матрицы $A_\alpha(x)$, равен $[x_1 + \alpha(x_3 - x_2)]^3$. Покажем, что вектор $(0, 0, 0, 1)$ не принадлежит образу T_α при любом $\alpha \neq 0$. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} (x_1 + 2\alpha x_3 - 2\alpha x_2)y_1 + (\alpha x_3 - \alpha x_2)y_2 = 0; \\ \alpha(x_2 - x_1)y_1 + x_1y_2 = 0; \\ x_3y_1 + x_2y_2 + (x_1 + \alpha x_3 - \alpha x_2)y_3 = 0; \\ x_2y_1 + x_3y_2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Из четвертого уравнения системы (1) следует, что $y = (y_1, y_2, y_3) \neq 0$, значит, для разрешимости системы необходимо, чтобы определитель, образованный первыми тремя строками, был равен нулю, т. е. $[x_1 + \alpha(x_3 - x_2)]^3 = 0$. Отсюда получаем, что $x_1 = \alpha(x_3 - x_2)$. Тогда исходная система (1) становится такой:

$$\begin{cases} \alpha(x_3 - x_2)y_1 + \alpha(x_3 - x_2)y_2 = 0; \\ \alpha(x_2 - x_3)y_1 + \alpha(x_2 - x_3)y_2 = 0; \\ x_3y_1 + x_2y_2 = 0; \\ x_2y_1 + x_3y_2 = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $x_3 \neq x_2$. Из первых трех уравнений системы (2) имеем

$$\begin{cases} \alpha y_1 + \alpha y_2 = 0; \\ x_3y_1 + x_2y_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $y_1 = y_2 = 0$, что противоречит с четвертым уравнением системы (2).

Пусть теперь $x_3 = x_2$. В этом случае несовместны третье и четвертое уравнения системы (2).

Таким образом, вектор $(0, 0, 0, 1)$ не принадлежит образу T_α при любом $\alpha \neq 0$. Так как $T_0 = T$, то T не является внутренней точкой множества $S(C^3, C^3, C^4)$.

Возьмем произвольные натуральные числа p, q, r такие, что $r \leq p + q - 1$. Пусть $f \in S(C^p, C^q, C^r)$. Положим $\tilde{T}_\alpha(\tilde{x}, \tilde{y}) = (T_\alpha(x, y), f(u, v))$, где $\tilde{x} = (x, u)$, $y = (y, v)$, $u \in C^p$, $v \in C^q$. Имеем $T_\alpha \in B(C^n, C^k, C^m)$, причем $m < n + k - 2$. Из сказанного в доказательстве теоремы 2 следует, что отображение $\tilde{T}_\alpha$ сюръективно только при $\alpha = 0$.

Неизвестно, будет ли открытым множество $S(C^n, C^k, C^m)$ при $\min(n, k) > 2$, $m \in \{n + k - 2, n + k - 1\}$ и $m > 3$?

Уравнение $f(x_1, x_2) = y$ с билинейным оператором $f: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ можно трактовать как линейное уравнение с ограничением

$$\begin{cases} Ax = y, \\ x \in U, \end{cases} \quad (3)$$

где $A: E_1 \times E_2 \rightarrow F$ и U совпадает с образом $E_1 \times E_2$ при естественном вложении в $E_1 \otimes E_2 = E$. Очевидна следующая

Лемма 1. Задача (3) везде разрешима (при любых y) тогда и только тогда, когда $\text{Ker } A + U = E$ и $AE = F$.

Определение 1. Подпространство $L \subset E$ назовем правильным относительно множества $U \subset E$, если $L + U = E$. Множество U назовем устойчивым, если совокупность правильных подпространств L открыта относительно метрики раствора в множестве подпространств.

Отметим, что замкнутое выпуклое множество может быть неустойчивым даже в конечномерном пространстве. Например, множество $M = \{(x, y) : y \geq x^2\}$ неустойчиво в R^2 . Однако множество с уравнением $y = x^2$ является устойчивым, если его рассматривать в C^2 . Пример билинейного отображения T , использованного в теореме 2, показывает, что не любое замкнутое алгебраическое множество устойчиво и в комплексном случае.

Из теоремы 2 и леммы 1 вытекает

Следствие 1. Для матриц с комплексными коэффициентами верно следующее: 1) в множестве матриц размера $n \times 2$ совокупность матриц ранга 1 является устойчивым множеством; 2) в множестве матриц размера $n \times t$ правильные подпространства относительно матриц ранга 1 такие, что $\text{codim } L \leq 3$, образуют открытое множество; 3) множество матриц размера 3×3 и ранга 1 не является устойчивым множеством.

Отметим, что любой замкнутый выпуклый конус является устойчивым множеством [5].

Хорошо известно, что линейный оператор A и его комплексификация A_c сюръективны (или не сюръективны) одновременно. Ниже будет показано, что подобное утверждение для билинейных отображений становится неверным. При этом любое из отображений f, f_c может быть сюръективным, а другое нет.

Рассмотрим отображение, которое в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} x_1 y_1 = z_1, \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 = z_2, \\ x_2 y_2 = z_3. \end{cases} \quad (4)$$

Ясно, что в комплексном случае при любой правой части (4) возможно представление: $z_1 + z_2 t + z_3 t^2 = (x_1 + x_2 t)(y_1 + y_2 t)$. Отсюда следует, что f_c , определяемое равенством (4), сюръективно. Если же (4) рассматривать как $f: R^2 \times R^2 \rightarrow R^3$, то f не сюръективно. В его образ не входит, например, точка $z = (1, 1, 1)$.

Рассмотрим теперь билинейное отображение, которое задается системой уравнений

$$\begin{aligned} x_1 u &= a_1, \\ x_2 u &= a_2, \\ x_2 v_1 + x_1 v_2 &= b_1, \\ -x_1 v_1 + x_2 v_2 &= b_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Если $a_1 = a_2 = 0$, то положим $u = 0$. Можно выбрать числа x_1, x_2 такие, что $x_1^2 + x_2^2 \neq 0$. Отсюда следует, что в этом случае система (5) разрешима и в вещественном, и в комплексном случае.

Пусть теперь либо $a_1 \neq 0$, либо $a_2 \neq 0$. Тогда $u \neq 0$, $x_1 = a_1/u$, $x_2 = a_2/u$. Подставляя значения x_1, x_2 в третье и четвертое уравнения системы (5), получаем

$$\begin{aligned} a_2 u_1 + a_2 v_2 &= b_1 \cdot u, \\ -a_1 v_1 + a_2 v_2 &= b_2 \cdot u. \end{aligned}$$

Определитель системы уравнений (6) равен $a_1^2 + a_2^2$. В случае $f: R^2 \times R^3 \rightarrow R^4$ этот определитель отличен от нуля. Из сказанного следует, что f сюръективно. Однако отображение $f_c: C^2 \times C^3 \rightarrow C^4$ не сюръективно. В его образ не входит, например, вектор $(1, i, 1, 1)$, где i — мнимая единица.

Список литературы: 1. Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М., 1979. 259 с. 2. Романов Л. И., Шнейберг И. Я. О топологических свойствах билинейных отображений // Сиб. мат. журн. Новосибирск, 1982. 10 с. Деп. в ВИНТИ 19.02.82, № 1063—82. 3. Horowitz S. An elementary counterexample to the open mapping principle for bilinear maps // Proc. Amer. Math. Soc. 1975. 53, N 2. P. 293—294. 4. Рудин У. Теория функций в поликруге. М., 1974. 114 с. 5. Романов Л. И. О нормальности системы конусов и положительных решениях линейных уравнений // Нелинейн. колеб. и теория управл. Ижевск, 1982. Вып. 4. С. 86—91.

Поступила в редколлегию 03.11.87

Пусть X — банахово пространство, а X^* — его сопряженное. Система (x_γ, f_γ) , $\gamma \in \Gamma$, $x_\gamma \in X$, $f_\gamma \in X^*$, Γ — некоторое множество, называется биортогональной, если $f_\gamma(x_\beta) = 0$ при $\gamma \neq \beta$ и $= 1$ при $\gamma = \beta$, и фундаментальной, если замкнутая линейная оболочка $\{x_\gamma; \gamma \in \Gamma\} = X$. Фундаментальная биортогональная система, в которой для любого $x \in X$, $x \neq 0$ найдется такой индекс $\gamma \in \Gamma$, что $f_\gamma(x) \neq 0$ называется базисом Маркушевича (сокращенно М-базисом). Говорят, что линейное подпространство $Y \subset X$ является операторным образом, если существуют банахово пространство Z и линейный ограниченный оператор $T: Z \rightarrow X$ с $TZ = Y$. Через $l_1(\Gamma)$ будем обозначать пространство абсолютно суммируемых последовательностей $x(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$. Пространство $l_1(\Gamma_0)$, $\Gamma_0 \subset \Gamma$, будем отождествлять с подпространством $l_1(\Gamma)$. Все пространства считаются действительными.

Теорема 1. Пусть существует линейный непрерывный инъективный оператор $T: l_1(\Gamma) \rightarrow X$ с плотным образом. Тогда X имеет два пересекающихся лишь по нулю плотных операторных образа.

Доказательство. Пусть $\Gamma_i: i \in J$ — разбиение Γ на счетные подмножества: $\Gamma = \bigcup_{i \in J} \Gamma_i$. В каждом пространстве $l_1(\Gamma_i)$ существуют плотные операторные образы Y_i, Z_i , $Y_i \cap Z_i = 0$ [1]. Обозначим через Y подпространство, состоящее из абсолютно сходящихся рядов $\sum_{i \in J} y_i$, $y_i \in Y_i$, а через Z — подпространство, состоящее из абсолютно сходящихся рядов $\sum_{i \in J} z_i$, $z_i \in Z_i$. Тогда TU и TZ будут необходимыми операторными образами.

Следствие 1. Банахово пространство X с фундаментальной биортогональной системой $(x_\gamma, f_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ имеет два пересекающихся лишь по нулю плотных операторных образа.

Доказательство. Конечно, можно считать $\|x_\gamma\| = 1$. Пусть e_γ — единичные орты пространства $l_1(\Gamma)$. Положим $Te_\gamma = x_\gamma$. Отображение T расширяется до линейного ограниченного оператора из $l_1(\Gamma)$ в X . Легко видеть, что он инъективен.

Следствие 2. В пространстве $l_\infty(\Gamma)$ существуют два пересекающихся по нулю плотных операторных образа.

Действительно, $l_\infty(\Gamma)$ имеет фундаментальную биортогональную систему [2].

Теорема 1 и следствия связаны с вопросом из [3] о том, существуют ли в любом банаховом пространстве, в частности в l_∞ , два плотных пересекающихся по нулю операторных образа. Этот вопрос связан с изучением безопорных выпуклых множеств. Напомним определения. Подмножество A нормированного пространства называется безопорным, если никакой ненулевой линейный непрерывный функционал не достигает своих верхней и нижней граней на A . Нормированное пространство называется безопорным, если оно содержит замкнутое

ограниченное выпуклое безопорное множество. Говорят, что банахово пространство слабо компактно порождено, если оно является замкнутой линейной оболочкой своего слабокомпактного подмножества. Символом $c_0(\Gamma)$ будем обозначать пространство таких последовательностей $x(\gamma)$, что для любого $\varepsilon > 0$ существует лишь конечное число координат по модулю, превышающих ε , с супремум-нормой.

Лемма 1. В пространстве $l_1(\Gamma)$ существует плотный операторный образ, пересекающийся с линейной оболочкой $\text{lin}(e_\gamma: \gamma \in \Gamma)$ единичных ортов $l_1(\Gamma)$ по нулю.

Доказательство. Пусть $\Gamma_i: i \in J$ — разбиение Γ на счетные подмножества. В каждом $l_1(\Gamma_i)$ существует плотный операторный образ U_i , $U_i \cap \text{lin}(e_\gamma: \gamma \in \Gamma_i) = 0$; это следует из результатов работы [1]. Тогда подпространство U , состоящее из абсолютно сходящихся рядов $\sum_{i \in J} u_i$, $u_i \in U_i$, будет искомым.

Теорема 2. Во всяком слабокомпактно порожденном пространстве X существует плотный безопорный операторный образ.

Доказательство. Пусть Y — рефлексивное пространство и R — плотный инъективный оператор из Y в X [4, с. 127]. Пусть $(y_\gamma, g_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ — M -базис в Y , $\|y_\gamma\| = 1$ [5, с. 693] и e_γ — стандартные орты пространства $l_1(\Gamma)$. Положим $S(e_\gamma) = y_\gamma$. Отображение S расширяется до линейного непрерывного инъективного оператора из $l_1(\Gamma)$ в Y . Согласно лемме 1 выберем плотный операторный образ $U \subset l_1(\Gamma)$, $U \cap \text{lin}_{\gamma \in \Gamma} e_\gamma = 0$. Тогда оператор $T = RS$ слабокомпактен, инъективен и, поскольку S — сопряженный оператор, $A = T(B_U)$ (B_U — l_1 -шар подпространства U), является замкнутым подмножеством нормированного пространства $Z = (TU, \|\cdot\|_X)$. Отметим, что оператор S^* переводит Y^* в подпространство $c_0(\Gamma) \subset l_\infty(\Gamma) = l_1(\Gamma)^*$. Поэтому, если a — опорная точка множества A с опорным функционалом f , то $T^{-1}a$ является опорной точкой шара B_U с опорным функционалом $T^*f \in c_0(\Gamma)$. Легко убедиться, что если b — опорная точка шара пространства $l_1(\Gamma)$ и соответствующий опорный функционал $g \in c_0(\Gamma)$, то b обязана иметь конечное число отличных от нуля координат, т. е. не принадлежать U . Таким образом, множество A не имеет опорных точек.

Замечание. Для сепарабельных банаховых пространств эта теорема доказана в работе [3]; там же было высказано предположение о ее справедливости для слабокомпактно порожденных пространств.

Вопрос. В любое ли банахово пространство X можно плотно и инъективно вложить некоторое $l_1(\Gamma)$? В частности, в $X = m_0(\Delta)$ — пространство ограниченных функций на множестве Δ , принимающих ненулевые значения не более чем в счетном числе точек.

Список литературы: 1. Shevchik V. V. On subspaces of a Banach space that coincide with the ranges of continuous linear operators // Revue Roum. math. pures et appl. 1986. 31, N 1. P. 65—71. 2. Davis W. J., Johnson W. B. On the existence of fundamental and total bounded biorthogonal systems in Banach spaces // Studia Math. 1973. 45, N 2. P. 173—179. 3. Borwein J. M., Tingley D. W. On supportless convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. 94, N 3. P. 471—476. 4. Дистель Дж. Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. К., 1980. 145 с. 5. Singer I. Bases in Banach spaces. II. Berlin, 1981. 880 p.

Поступила в редколлегию 21.09.87

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НЕЙМАНА В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

Целью статьи является исследование корректной разрешимости в классах гладких функций, имеющих различный характер роста или убывания (при $||x|| \rightarrow \infty$), задачи Неймана в слое $\Pi_T = R^m \times [0, T]$ для уравнения 2-го порядка (по t):

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0, \quad (1)$$

$(x, t) \in \Pi_T$, $P(s)$, $Q(s)$ — произвольные комплекснозначные полиномы; граничные условия Неймана имеют вид

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = u_T(x), \quad x \in R^m. \quad (2)$$

Пусть $\gamma \in R$; обозначим $C_\gamma^k = \{\varphi \in C^k(R^m) : \|\varphi\|_{\gamma, k} = \sup_{R^m} \max_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi| \times (1 + \|x\|)^{-\gamma} < \infty\}$.

Определение 1. Задача (1) — (2) называется корректно разрешимой из пространства $C_\gamma^{k_1}$ в пространство $C_\gamma^{k_2}$, если для любых функций $u_0(x) \in C_\gamma^{k_1}$, $u_T(x) \in C_\gamma^{k_1}$ задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее при каждом $t \in [0, T]$ пространству $C_\gamma^{k_2}$ и удовлетворяющее оценке

$$\sup_{[0, T]} \|u(x, t)\|_{\gamma, k_2} \leq C \{\|u_0(x)\|_{\gamma, k_1} + \|u_T(x)\|_{\gamma, k_1}\}. \quad (3)$$

Обозначим $C_\gamma = \bigcup_{k \geq 0} C_\gamma^k$ индуктивный предел пространств C_γ^k .

Определение 2. Задача (1) — (2) называется корректной в пространстве C_γ , если для любого $k \geq 0$ существует $l \geq 0$ такое, что задача (1) — (2) корректно разрешима из пространства C_γ^l в пространство C_γ^k .

Отметим, что в случае задачи Коши для уравнения (1) определение 2 при $\gamma = 0$ превращается в определение корректности задачи Коши, данное И. Г. Петровским в 1938 г. [1]. Необходимым и достаточным условием корректности задачи Коши, как показано в [1], является условие А. Задача Дирихле в слое Π_T для уравнения (1) была исследована в [2], где также были найдены необходимые и достаточные условия ее корректной разрешимости. В [3] найдены достаточные условия корректной разрешимости в C_γ двухточечной локальной краевой задачи в слое Π_T для системы уравнений вида

$$\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial t} = \mathcal{H}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{u}(x, t), \quad (4)$$

$$\bar{u}(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\} : \Pi_T \rightarrow C^n,$$

$\mathcal{H}(s)$ — произвольная полиномиальная $n \times n$ -матрица, граничные условия имеют вид

$$u_i(x, 0) = u_{0i}(x), \quad i = i_1, \dots, i_s, \quad u_j(x, T) = u_{Tj}(x), \\ j = j_1, \dots, j_l, \quad s + l = n. \quad (5)$$

Задачу (1) — (2) легко привести к виду (4) — (5). Используя специальный вид задачи (4) — (5), возникающий при таком сведении, и результаты работы [4], мы сможем найти необходимые и достаточные условия корректной разрешимости задачи (1) — (2) в пространствах C_γ , а также исследовать вопрос о корректной разрешимости этой задачи в некоторых других пространствах.

§ 1. Разрешающие функции задачи Неймана. Наряду с задачей (1) — (2) рассмотрим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят от параметра $s = (s_1, \dots, s_m)$:

$$\frac{d^2 v(s, t)}{dt^2} + P(is) \frac{dv(s, t)}{dt} + Q(is) v(s, t) = 0, \quad (6)$$

$$v_i'(s, 0) = v_{-1}(s), \quad v_i'(s, T) = v_1(s). \quad (7)$$

Для того чтобы записать решение задачи (6) — (7), введем следующие обозначения:

$$\lambda_{-1}(s) = -\frac{1}{2} [P(is) + D(is)], \quad \lambda_1(s) = \frac{1}{2} [P(is) - D(is)],$$

здесь $D^2(is) \equiv P^2(is) - 4Q(is)$ (в качестве $D(is)$ выбираем ту ветвь $\sqrt{D^2(is)}$, на которой $\operatorname{Re} D(is) \geq 0$),

$$\varphi_j(s, \alpha, t) = -\frac{P(is)}{2} (1 - e^{-\alpha t}) - \frac{\alpha}{2} j (1 + e^{-\alpha t}),$$

$$F_j(s, t) = \frac{\varphi_j(s, D(is), t)}{1 - e^{-TD(is)}}, \quad h_{-1}(t) = t, \quad h_1(t) = T - t,$$

$$R_j(s, t) = \begin{cases} e^{h_j(t)\lambda_j(s)} Q^{-1}(is) F_j(s, h_{-j}(t)) & \text{при } D(is) \neq 0, \\ e^{\frac{j h_j(t) P(is)}{2}} Q^{-1}(is) \left[-\frac{j}{T} - \frac{P(is) h_{-j}(t)}{2T} \right] & \text{при } D(is) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Формулы (8) и (8') имеют смысл при всех s , для которых $Q(is) \neq 0$, $D^2(is) \neq -4k^2 \pi^2 T^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Тогда нетрудно видеть, что решение $v(s, t)$ задачи (6) — (7) записывается в виде

$$v(s, t) = R_{-1}(s, t) v_{-1}(s) + R_1(s, t) v_1(s). \quad (9)$$

В дальнейшем нам понадобятся оценки производных функций $R_j(s, t)$, $j = \pm 1$, при $\sigma \in \mathbb{R}^m$. Для их получения предварительно оцениваем эти функции в некоторой области пространства $\mathbb{C}^m$, примыкающей к пространству $\mathbb{R}^m$.

Обозначим

$$D^q R(s, t) = \max_{j=\pm 1} |D^q R_j(s, t)|$$

$$\left(D^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial s_1^{q_1} \dots \partial s_m^{q_m}}, D^0 R(s, t) \equiv R(s, t) \right),$$

$$\Omega_{L,\lambda} = \{s = \sigma + i\tau : \|\tau\| \leq L(1 + \|\sigma\|)^\lambda\}, L > 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Лемма. Пусть многочлены $Q(is)$ и $D^2(is)$ таковы, что

$$Q(i\sigma) \neq 0, \sigma \in \mathbb{R}^m, \quad (10)$$

$$D^2(is) \neq -4k^2 \pi^2 T^{-2}, k \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathbb{R}^m. \quad (11)$$

Тогда существует область $\Omega_{L,\lambda}$ такая, что при $s \in \Omega_{L,\lambda}$ и $t \in [0, T]$ справедлива оценка

$$R(s, t) \leq C_1 \exp \{c(t) \Lambda(s)\} (1 + \|s\|)^{C_2}, \quad (12)$$

где $C_1 > 0, C_2 \in \mathbb{R}, 0 \leq c(t) \leq T$,

$$\Lambda(s) \equiv \frac{1}{2} [\operatorname{Re} P(is) - \operatorname{Re} D(is)]. \quad (13)$$

Доказательство леммы опирается на следующие факты:

Утверждение 1. Пусть $Q(i\sigma) \neq 0, \sigma \in \mathbb{R}^m$. Тогда в некоторой области Ω_{L_1,λ_1}

$$|Q(is)| \geq A_1 (1 + \|s\|)^{\alpha_1}, \quad (14)$$

где $A_1 > 0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Обоснование этого утверждения проводится с использованием теоремы Хермандера [5], техники использования теоремы Зайденберга — Тарского [6] и асимптотического представления алгебраических функций (см., например, [7]).

Обозначим $\varphi(s, \alpha, t)$ функцию, определенную при $s \in \mathbb{C}^m, \operatorname{Re} \alpha \geq 0, t \in [0, T]$ и удовлетворяющую условию

$|\varphi(s, \alpha, t)| \leq M(1 + \|s\|)^{\mu_1} (1 + |\alpha|)^{\mu_2}, M > 0, M_j > 0, j = 1, 2$, и пусть

$$f(s, \alpha, t) = \frac{\varphi(s, \alpha, t)}{1 - e^{-T\alpha}} \quad (T\alpha \neq 2\pi i, k \in \mathbb{Z}).$$

Пусть, кроме того, функция $\varphi(s, \alpha, t)$ такова, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} f(s, \alpha, t) = \Psi(s, t), |\Psi(s, t)| \leq M_1 (1 + \|s\|)^{\mu_3}, M_1 > 0, \mu_3 > 0.$$

Тогда функцию $f(s, \alpha, t)$ можно доопределить при $\alpha = 0$, полагая $f(s, 0, t) = \Psi(s, t)$.

Утверждение 2. Пусть $D^2(i\sigma) \neq -4k^2 \pi^2 T^{-2}, k \in \mathbb{N}, \sigma \in \mathbb{R}^m$. Тогда в некоторой области Ω_{L_2,λ_2} справедлива оценка

$$|F(s, t)| \leq A_2 (1 + \|s\|)^{\alpha_2}, \quad (15)$$

где $F(s, t) = f(s, D(is), t), A_2 > 0, \alpha_2 \geq 0$.

Обоснование этого утверждения аналогично доказательству леммы 6 в [2]. Функции $F_j(s, t), j = \pm 1$ (см. (8)) удовлетворяют оценке (15) (в качестве $\varphi(s, \alpha, t)$ выбираем $\varphi_j(s, \alpha, t), j = \pm 1$). Учитывая (8), (8') и (13), в силу утверждений 1 и 2 получаем оценку (12). Лемма доказана.

§ 2. Корректность в классе ограниченных функций. Теорема 1. Для того чтобы задача (1) — (2) была корректно разрешимой в классе C_0 ограниченных функций, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия (10) и (11) и

$$\sup_{R^n} \Delta(\sigma) < \infty. \quad (16)$$

Доказательство.

Необходимость. Если $Q(i\sigma_0) = 0$, то $u(x, t) = e^{i(\sigma_0, x)}$ является решением задачи (1) — (2) при $u_0(x) \equiv u_T(x) \equiv 0$, т. е. нарушается единственность решения задачи (1) — (2) в C_0 . Если $D^2(i\sigma_0) = -4k^2\pi^2 T^{-2}$ при некотором $k \in N$, то, обозначив $\lambda_{1,2}$ — корни уравнения $\lambda^2 + P(i\sigma_0)\lambda + Q(i\sigma_0) = 0$, найдем функцию $v(t) \equiv C_1 e^{\lambda_{1,2}t} + C_2 e^{\lambda_{2,1}t} \neq 0$, удовлетворяющую условиям $v'(0) = v'(T) = 0$. Тогда $u(x, t) \equiv v(t) \exp\{i(\sigma_0, x)\} \neq 0$ снова является решением однородной задачи вида (1) — (2) и $u(x, t) \in C_0$.

Пусть теперь условия (10) и (11) выполнены. Тогда задача (1) — (2) в пространстве C_0 не может иметь двух разных решений. Это вытекает из теоремы 8 единственности решения задачи (4) — (5) [4], требующей, чтобы определитель $\Delta(\sigma)$ этой задачи удовлетворял условию $\Delta(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in R^n$. При этом $\Delta(\sigma)$ можно определить следующим образом: запишем условия (5) в виде

$$A\bar{u}(x, 0) + B\bar{u}(x, T) = \bar{u}_0(x) \quad (5'),$$

где A и B — скалярные $n \times n$ матрицы, $\bar{u}_0(x)$ — вектор-функция, координатами которой являются функции, стоящие в (5) справа; тогда $\Delta(\sigma) = \det(A + B \exp\{TH(-i\sigma)\})$. Приводя задачу (1) — (2) к виду (4) — (5), получим

$$\Delta(\sigma) = \begin{cases} e^{-T\lambda_1(-\sigma)} Q(-i\sigma) \frac{1 - e^{-TD(-i\sigma)}}{D(-i\sigma)} & \text{при } D(-i\sigma) \neq 0, \\ TQ(-i\sigma) e^{-\frac{TP(-i\sigma)}{2}} & \text{при } D(-i\sigma) = 0, \Delta(\sigma) \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Если при этом нарушено условие (16) теоремы, то, обозначив $\mu(r) = \max_{\|\sigma\|=r} \Delta(\sigma)$ и учитывая, что $\mu(r)$ — алгебраическая функция (см. лемму 5 в [2]), получим $\mu(r) = ar^\alpha(1 + o(1))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Наше предположение о том, что нарушено условие (16), означает, что $\alpha > 0$. Выберем r_n из условия $\mu(r_n) = n$; ясно, что для достаточно больших

$$a_1 n^{\frac{1}{\alpha}} \leq r_n \leq a_2 n^{\frac{1}{\alpha}}, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \quad (18)$$

Пусть $\|\sigma_n\| = r_n$, $\Lambda(\sigma_n) = n$. Выберем подпоследовательность $n_k \rightarrow \infty$ так, чтобы либо при всех k

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re} P(i\sigma_{n_k}) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} D(i\sigma_{n_k}) = n_k,$$

либо

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Re} P(i\sigma_{n_k}) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} D(i\sigma_{n_k}) = n_k.$$

Тогда, например, во втором случае, в силу (8)

$$\left| \frac{\partial R_{-1}(\sigma_{n_k}, t)}{\partial t} \right| = e^{tn_k} \left| \frac{1 - e^{-(T-t)D(i\sigma_{n_k})}}{1 - e^{-TD(i\sigma_{n_k})}} \right|. \quad (19)$$

При достаточно малых значениях τ

$$D^2(i\sigma) \neq -4k^2\pi^2\tau^{-2}, \quad k \in N, \quad \sigma \in R^m, \quad (20)$$

что вытекает из условия (11), поскольку при его выполнении множество вещественных значений многочлена $D^2(i\sigma)$ ограничено снизу. Теперь можно применить установленное при доказательстве леммы утверждение 2 к функции

$$\Phi(s, t) = \left[\frac{1 - e^{-\tau D(i s)}}{1 - e^{-TD(i s)}} \right]^{-1}, \quad \tau = T - t;$$

$$|\Phi(s, t)| \leq C_1(1 + \|\sigma\|)^{C_2}, \quad C_1 > 0, \quad C_2 \geq 0.$$

Из (18) и (19) теперь следует, что

$$\left| \frac{\partial R_{-1}(\sigma_{n_k}, t)}{\partial t} \right| \geq C_3 e^{n_k t} n_k^{-C_4}, \quad C_3 > 0, \quad C_4 > 0.$$

Выберем $u_{0k}(x) \equiv \varepsilon_{n_k} \exp\{i(\sigma_{n_k}, x)\}$,

$$\varepsilon_{n_k} = n_k^{-\left(\varepsilon + \frac{1}{\alpha}\right)}; \quad u_{Tk}(x) \equiv 0. \quad \text{Тогда } |D^q u_{0k}(x)| \leq$$

$$\leq \varepsilon_{n_k} \|\sigma_{n_k}\|^{|q|} \leq \frac{C_5}{n_k^{\varepsilon}} \rightarrow 0,$$

если $|q| \leq l$, $|D^2 u_{Tk}(x)| \equiv 0$. Но, как легко проверить,

$$\frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial R_{-1}(\sigma_{n_k}, t)}{\partial t} u_{0k}(x),$$

и поэтому при $\tau = T - t$ достаточно малом

$$\left| \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial t} \right| \geq C_3 e^{n_k t} n_k^{-C_4 - \varepsilon - \frac{1}{\alpha}} \rightarrow \infty.$$

Значит, задача (1) — (2) не является корректной в C_0 .

Достаточность. Запишем задачу (1) — (2) в форме (4) — (5), полагая $\bar{u}(x, t) = (u(x, t), u'_i(x, t))$, и применим теорему 1 из [3], дающую достаточное условие корректной разрешимости задачи (4) — (5), в частности, в пространстве C_0 . Условия вышеуказанной теоремы в нашей ситуации равносильны следующим: 1) $\Delta(\sigma) \neq 0$; 2) $D^q \tilde{R}(\sigma, t) \leq A_q(t)(1 + \|\sigma\|)^{\alpha_q}$, $A_q(t) > 0$, $\alpha_q > 0$, $\sigma \in R^m$. Здесь $\tilde{R}(\sigma, t) = \max_{1 \leq i, j \leq 2} |R_{ij}(\sigma, t)|$; $R_{11}(\sigma, t) = R_{-1}(\sigma, t)$; $R_{12}(\sigma, t) = R_1(\sigma, t)$; $R_{21}(\sigma, t) = \frac{\partial R_{-1}(\sigma, t)}{\partial t}$; $R_{22}(\sigma, t) = \frac{\partial R_1(\sigma, t)}{\partial t}$.

Первое из этих условий совпадает с условиями (10) и (11). Справедливость второго устанавливается с помощью формулы Коши для про-

изводных функций $R_{ij}(\sigma, t)$, если предварительно оценить сами функции $R_{ij}(\sigma, t)$ в области вида $\Omega_{L,\lambda}$. Последнее осуществляется на основании утверждения 2 леммы.

§ 3. Корректная разрешимость в других пространствах. Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при любом $\gamma \in \mathbf{R}$ задача (1) — (2) корректно разрешима в пространстве C_γ .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 и основано на использовании теоремы 1 из [3]; в качестве фигурирующей там функции $g(x)$ следует выбрать $g(x) = (1 + \|x\|)^\gamma$.

Корректная разрешимость в пространствах C_γ означает, вообще говоря, потерю гладкости решения относительно краевых функций $u_0(x)$ и $u_T(x)$, причем (конечный) порядок этой потери зависит от степенного порядка роста функции $R(\sigma, t)$. Однако возможна ситуация, когда решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2) при $0 < t < T$ имеет большую гладкость, чем функции $u_0(x)$ и $u_T(x)$. В связи с этим дадим следующее

Определение 3. Задача (1) — (2) называется сильно корректной в пространстве C_γ , если для любых функций $u_0(x)$ и $u_T(x)$ из C_γ задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$, которое при каждом $t \in]0, T[$ принадлежит пространству $C_\gamma^\infty = \bigcap_k C_\gamma^k$ (проективный предел пространств C_γ^k) и при любом $k \geq 0$ имеет место оценка

$$\sup_{[0, T]} \|u(x, t)\|_{\gamma, k} \leq C_k (\|u_0(x)\|_{\gamma, 0} + \|u_T(x)\|_{\gamma, 0}). \quad (20)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (10) и (11) и

$$\Lambda(\sigma) \leq -A_1 \|\sigma\|^h + A_2, \quad A_1 > 0, \quad h > 0. \quad (21)$$

Тогда при любом $\gamma \in \mathbf{R}$ задача (1) — (2) сильно корректна в пространстве C_γ .

Доказательство. Поскольку при выполнении (21) заведомо справедливо (16), то в силу теоремы 2 задача (1) — (2) корректна в C_γ , а потому имеет в C_γ не более одного решения. Обозначим $G_j(x, t)$ — обратные преобразования Фурье функций $R_j(s, t)$, для которых в силу леммы и условия (21) верна оценка

$$\begin{aligned} R(\sigma, t) &\leq C_1 \exp \{c(t) [-A_1 \|\sigma\|^h + A_2]\} (1 + \|\sigma\|)^{c_2}, \\ C_1 > 0, \quad A_1 > 0, \quad h > 0, \quad 0 < c(t) < T, \quad \sigma \in \mathbf{R}^m. \end{aligned} \quad (22)$$

Мы установим оценки функций $G_j(x, t)$, $j = \pm 1$, и их производных, показывающие, что корректны свертки $G_j(x, t) \times \varphi(x)$, где $\varphi(x) \in C_\gamma$. Тогда, как видно из (9), функция

$$u(x, t) = G_{-1}(x, t) \times u_0(x) + G_1(x, t) \times u_T(x) \quad (23)$$

дает решение задачи (1) — (2).

Из оценок (12) и (22) в силу теоремы 1 § 7 гл. IV из [8] делаем заключение о справедливости оценки вида (22) в некоторой области $\Omega_{L,\lambda}$. Тогда, пользуясь формулой Коши, в которой выбирается в ка-

честве контура интегрирования полукруг с центром в точке $\sigma \in R^m$, лежащий в $\Omega_{L,\lambda}$, приходим к оценкам

$$D^q R(\sigma, t) \leq C(t) B^q(t) q^{q\beta} e^{-A(t)\|\sigma\|^h} \quad (24)$$

при некотором $\beta > 0$, $A(t) > 0$. Следовательно, функции $R_{-1}(\sigma, t)$ и $R_1(\sigma, t)$ являются элементами основного пространства $S_{\frac{1}{h}, A}^{\beta, B}$, $A = A(t)$, $B = B(t)$ [8]. Поэтому их обратные преобразования Фурье $G_{-1}(x, t)$ и $G_1(x, t)$ — бесконечно дифференцируемые функции, принадлежащие пространству $S_{\frac{1}{h}, B}^{\frac{1}{h}, A}$ и тем самым удовлетворяющие оценке

$$D^q G(x, t) \leq C_q \exp \{-B_1(t) \|x\|^{\frac{1}{\beta}}\}, \quad (25)$$

где $D^q G(x, t)$ имеет смысл, аналогичный $D^q R(\sigma, t)$, $B_1(t) > 0$ зависит от $B(t)$. Возвращаясь к формуле (23), убеждаемся, используя (25), что $u(x, t) \in C_\gamma^\infty$ и имеет место оценка (20). Теорема доказана.

Пусть $\alpha > 0$, $A > 0$; обозначим

$$M_{\alpha, A}^k = \{\Phi \in C^k(R^m) : \|\Phi\|_{\alpha, A, k} = \sup_{R^m} \max_{|q| \leq k} |D^q \Phi| \exp \{-A \|x\|^\alpha\} < \infty\},$$

$M_\alpha^k = \bigcup_{A>0} M_{\alpha, A}^k$ — индуктивный предел $M_{\alpha, A}^k$.

Определение 4. Задача (1) — (2) называется корректно разрешимой из пространства $M_\alpha^{k_1}$ в пространство $M_\alpha^{k_2}$, если для любых функций $u_0(x) \in M_\alpha^{k_1}$ и $u_T(x) \in M_\alpha^{k_1}$ задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$, принадлежащее при каждом $t \in]0, T[$ пространству $M_\alpha^{k_2}$, причем, если последовательности $u_{0k}(x)$ и $u_{Tk}(x)$ стремятся к нулю в топологии $M_\alpha^{k_1}$, то соответствующее решение $u_k(x, t)$ стремится к нулю в топологии $M_\alpha^{k_2}$.

Обозначим $M_\alpha \bigcup_{k>0} M_\alpha^k$.

Определение 5. Задача (1) — (2) называется сильно корректной в пространстве M_α , если для любых $u_0(x)$ и $u_T(x)$ из M_α задача (1) — (2) имеет единственное решение $u(x, t)$ которое при каждом $t \in]0, T[$ принадлежит пространству $M_\alpha^\infty = \bigcap_{k>0} M_\alpha^k$, причем, если последовательности $u_{0k}(x)$ и $u_{Tk}(x)$ стремятся к нулю в топологии M_α^0 , то соответствующее решение $u_k(x, t)$ при любом $m \geq 0$ стремится к нулю в топологии M_α^m .

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при малом $\alpha > 0$ задача (1) — (2) сильно корректна в пространстве M_α .

Аналогично доказательству теоремы 3 устанавливается утверждение теоремы 4.

§ 4. Некоторые замечания и примеры. Рассмотрим сначала уравнение (1) вида

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0 \quad (P(s) \equiv 0). \quad (26)$$

В данном случае $D^2(s) \equiv -4Q(s)$. Применяя теоремы 1 и 2, видим, что необходимым и достаточным условием корректной разрешимости задачи (26) — (2) в пространстве C_γ является требование

$$Q(i\sigma) \neq k^2\pi^2 T^{-2}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^m.$$

Так, это требование выполняется для уравнения $\Delta u + cu = 0$ при $c < 0$ и не выполняется, например, для волнового уравнения, уравнения Лапласа, уравнения $\Delta u + cu = 0$ при $c > 0$. Отметим, что для уравнения $\Delta u + cu = 0$, $c < 0$, выполнены условия теорем 3 и 4. Примером уравнения, для которого имеет место корректная разрешимость задачи Неймана в C_γ , но условие сильной корректности (21) не выполнено, служит уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + u(x, t) = 0.$$

Для следующих двух уравнений:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(x, t) = 0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t \partial x^2} + 3 \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + u(x, t) = 0 \quad (28)$$

выполнены условия (10) и (11), и тем самым решение задачи Неймана для этих уравнений единственно в классе ограниченных функций. Однако в случае уравнения (27) имеем $\Lambda(\sigma) = -1$ и поэтому выполнено условие корректности в C_γ (16) (но не сильной корректности (21)!); для уравнения (28) функция $\Lambda(\sigma) = 2\sigma^2 - \sqrt{\sigma^4 - 1}$, и потому задача Неймана для этого уравнения не является корректной в классе C_0 ограниченных функций.

Список литературы: 1. Петровский И. Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. Моск. гос. ун-та (А). 1938. 1, № 7. С. 1—72. 2. Борок В. М. О корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое для линейных уравнений с постоянными коэффициентами // Изв. АН СССР. 1971. 35, № 4. С. 922—939. 3. Борок В. М. Корректно разрешимые краевые задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. 1971. 35, № 1. С. 185—201. 4. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений // Мат. сб. 1969. 79 (121), 2. С. 293—304. 5. Хермандер Л. О делении обобщенных функций на полиномы // Математика 1959. 3 : 5. С. 117—131. 6. Горин Е. А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций от нескольких переменных // Успехи мат. наук. 1961. 16, вып. 1. С. 91—118. 7. Чеботарев Н. Г. Теория алгебраических функций. М.; Л., 1948. 396 с. 8. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. М., 1958. 307 с.

Поступила в редколлегию 21.10.87

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Для изучения устойчивости относительно малых возмущений линейной независимости последовательностей элементов банахова пространства X в [1] было введено множество $\Gamma(X)$ допустимых возмущений. Там же было доказано, что если X содержит подпространство, изоморфное $X \oplus X$, то $\Gamma(X)$ является линейным пространством относительно естественных операций. Цель настоящей работы — построение пространства X , для которого $\Gamma(X)$ нелинейно.

Все банаховы пространства считаются бесконечномерными, если не оговорено противное. Обозначения: S_X , B_X — единичная сфера, единичный шар пространства X ; $X \sim Y$ — пространства X и Y изоморфны; $d(X, Y)$ — дистанция Банаха—Мазура между X и Y ($d(X, Y) = \inf \{ \|A\| \cdot \|A^{-1}\| : A : X \rightarrow Y \text{ — изоморфизм} \}$).

Напомним определения, предложенные в [1] (см. также [1, предложение 1]). Ограниченная последовательность $(x_i)_1^\infty$ элементов банахова пространства X соответствует последовательности $(\gamma_i)_1^\infty \subset C$, если любая возмущенная последовательность $(y_i)_1^\infty \subset X$ с условием $\|y_i - x_i\| \leq |\gamma_i|$ является линейно независимой. $\Gamma(X)$ есть множество последовательностей $(\gamma_i)_1^\infty \subset C$ (допустимых возмущений), каждой из которых соответствует некоторая ограниченная последовательность $(x_i)_1^\infty \subset X$. Определим на $\Gamma(X)$ функционал ρ_X : $\rho_X((\gamma_i)_1^\infty) = \inf \{ h : \exists (x_i)_1^\infty \subset hB_X, (x_i)_1^\infty \text{ соответствует } (\gamma_i)_1^\infty \}$.

Лемма 1. Пусть Y — подпространство банахова пространства X . Тогда $\Gamma(X/Y) \subset \Gamma(X)$ и $\rho_X((\gamma_i)_1^\infty) \leq \rho_{X/Y}((\gamma_i)_1^\infty)$ для любой последовательности $(\gamma_i)_1^\infty \in \Gamma(X/Y)$.

Доказательство. Пусть $(z_i)_1^\infty \subset S_{X/Y}$, $\varepsilon > 0$, $(\gamma_i)_1^\infty \in \Gamma(X/Y)$, $n \in \mathbb{N}$ произвольны. Положим $\varepsilon_i = \varepsilon |\gamma_i|$. $(z_i)_1^n$ можно представить в виде $z_i = x_i + y_i + u_i$, где $(y_i)_1^n \subset Y$, $(x_i + y_i)_1^n \subset S_X$, $\|u_i\| \leq \varepsilon_i$. Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{(a_i)_1^n \subset C} \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| |\gamma_i|}{\left\| \sum_{i=1}^n a_i (x_i + y_i) \right\|} &= \sup_{(a_i)_1^n \subset C} \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| |\gamma_i|}{\left\| \sum_{i=1}^n a_i (z_i - u_i) \right\|} \leq \\ &\leq \sup_{(a_i)_1^n \subset C} \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| |\gamma_i|}{\left\| \sum_{i=1}^n a_i z_i \right\| - \sum_{i=1}^n |a_i| \varepsilon_i} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{|a_i| < 1} \frac{\sum_1^n |a_i| |\gamma_i|}{\left\| \sum_1^n a_i z_i \right\| - \varepsilon \sum_1^n |a_i| |\gamma_i|} = \\
&= \sup_{|a_i| < 1} \frac{1}{\frac{\left\| \sum_1^n a_i z_i \right\|}{\sum_1^n |a_i| |\gamma_i|} - \varepsilon},
\end{aligned}$$

и утверждение следует из произвольности ε и [1, лемма].

Следующая теорема является усилением основного результата [1].

Теорема 1. Пусть Y — подпространство банахова пространства X и X/Y содержит подпространство, изоморфное декартову квадрату $X: X/Y \supset X_1 \oplus X_2$, $X_1 \sim X_2 \sim X$. Тогда $\Gamma(X)$ является линейным пространством относительно естественных покоординатных операций, а ρ_X — квазинормой на $\Gamma(X)$.

Доказательство. Достаточно, пользуясь леммой 1, повторить рассуждения в [1].

Для банахова пространства X определим функцию $\varphi_X(n) = \inf \{d(X_1, l_1^n) : X_1 \subset X, \dim X_1 = n\}$.

Лемма 2. Пусть X — банахово пространство. Тогда

$$\rho_X(\underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_n) = \varphi_X(n).$$

Доказательство. Если $(e_i)_1^n$ — естественный базис в l_1^n , то

$$\begin{aligned}
&\inf \{d(X_1, l_1^n) : X_1 \subset X, \dim X_1 = n\} = \\
&= \inf \{\|T\| : T : [x_i]_1^n \rightarrow l_1^n, (x_i)_1^n \subset S_X, Tx_i = e_i\} = \\
&= \inf_{(x_i)_1^n \subset S_X} \left\{ \sup_{(a_i) \subset C} \frac{\|T(\sum_1^n a_i x_i)\|}{\|\sum_1^n a_i x_i\|} : T : [x_i]_1^n \rightarrow l_1^n, Tx_i = e_i \right\} = \\
&= \inf_{(x_i)_1^n \subset S_X} \sup_{(a_i) \subset C} \frac{\sum_1^n |a_i|}{\|\sum_1^n a_i x_i\|}.
\end{aligned}$$

Сопоставляя это с [1, лемма], получим требуемое равенство.

Лемма 3. Пусть Y — подпространство банахова пространства X и X/Y содержит подпространство, изоморфное $X \oplus X$. Тогда φ_X и $\varphi_{X/Y}$ эквивалентны, т. е. существует такое C , что

$$C^{-1} \varphi_X(n) \leq \varphi_{X/Y}(n) \leq C \varphi_X(n).$$

Доказательство. Пусть $X_1 \subset X/Y$ и $d(X_1, X \oplus X) = d$. Тогда, пользуясь леммами 1 и 2, а также [1, предложение 2, следствие 1], будем иметь

$$\varphi_X(n) \leq \varphi_{X/Y}(n) \leq \varphi_{X_1}(n) \leq d\varphi_{X \oplus X}(n) \leq d\varphi_X(n).$$

Лемма 4. Пусть Y — подпространство банахова пространства X и X/Y содержит подпространство, изоморфное $X \oplus X$: $X/Y \supset \supset X_1 \oplus X_2$, $X_1 \sim X_2 \sim X$. Тогда существует такое K , что $\varphi_X(2n)/\varphi_X(n) \leq K$.

Доказательство. Лемма 3 говорит нам, что достаточно доказать неравенство $\varphi_{X/Y}(2n) \leq K\varphi_X(n)$. Пусть $P_i: X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$ — проекторы, числа $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ произвольны. Найдутся конечномерные подпространства $Y_i \subset X_i$, $i = 1, 2$, для которых $d(Y_i, l_i^n) \leq d(X, X_i)(\varphi_X(n) + \varepsilon)$. Пусть $T_i: Y_i \rightarrow l_i^n$, $i = 1, 2$ — такие изоморфизмы, что $\|T_i\| = d(Y_i, l_i^n)$, $\|T_i^{-1}\| = 1$. Рассмотрим изоморфизм $T: Y_1 \oplus Y_2 \rightarrow l_1^{2n} = l_1^n \oplus l_1^n$, заданный по правилу $T(y_1, y_2) = (T_1 y_1, T_2 y_2) \in l_1^n \oplus l_1^n$. Для $\|(y_1, y_2)\| = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|T(y_1, y_2)\| &\leq \|T_1\| \|y_1\| + \|T_2\| \|y_2\| = \\ &= \|T_1\| \|P_1(y_1, y_2)\| + \|T_2\| \|P_2(y_1, y_2)\| \leq \\ &\leq \|T_1\| \|P_1\| + \|T_2\| \|P_2\| = \\ &= \|P_1\| d(Y_1, l_1^n) + \|P_2\| d(Y_2, l_1^n). \end{aligned}$$

Пусть теперь $\|T(y_1, y_2)\| = 1$. Тогда

$$\|(y_1, y_2)\| \leq \|y_1\| + \|y_2\| \leq \|T_1 y_1\| + \|T_2 y_2\| = 1,$$

т. е. $\|T^{-1}\| \leq 1$. Итак,

$$\begin{aligned} \varphi_{X/Y}(2n) &\leq \varphi_{X_1 \oplus X_2}(2n) \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq \\ &\leq (\|P_1\| d(X, X_1) + \|P_2\| d(X, X_2))(\varphi_X(n) + \varepsilon) \end{aligned}$$

и утверждение следует из произвольности ε .

Лемма 5. Пусть X_1, X_2 — банаховы пространства, $\dim X_i = n_i$, $i = 1, 2$, и $X_1 \oplus X_2$ — ортогональная сумма (т. е. $\|P_i\| = 1$, где $P_i: X_1 \oplus X_2 \rightarrow X_i$ — проекторы). Тогда $d(X_1 \oplus X_2, l_1^{n_1+n_2}) \leq d(X_1, l_1^{n_1}) + d(X_2, l_1^{n_2})$.

Доказательство. Достаточно повторить рассуждения при доказательстве предыдущей леммы.

Под пространством $(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i})_2$ мы будем понимать пространство последовательностей $(a_j)_{j=1}^{\infty} \subset C$ с нормой

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\| = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=n_i+1}^{n_{i+1}} |a_j|^{p_i} \right)^{1/p_i} \right)^{1/2},$$

где $n_0 = 0$.

Известен следующий результат Д. Льюиса [2]: если $X \subset L_p(0, 1)$, $1 < p < \infty$, $\dim X = n$, то $d(X, l_2^n) \leq n^{1/2-1/p}$.

Лемма 6. Пусть $X = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i})_2$, $2 > p_{i+1} > p_i$, и $X_1 \subset X$, $\dim X_1 = m$. Тогда $d(X_1, l_2^m) \leq m^{1/p_1-1/2}$.

Доказательство. Пусть $P_i: X \rightarrow l_{p_i}^{n_i}$ — естественные проекторы. $l_{p_i}^{n_i} \subset L_{p_i}$ (0, 1), поэтому, согласно теореме Д. Льюиса, $d(P_i X_1, l_2^{\dim P_i X_1}) \leq m^{1/p_i-1/2}$. Пусть $T_i: P_i X_1 \rightarrow l_2^{\dim P_i X_1}$ — такие изоморфизмы, что $\|T_i\| = d(P_i X_1, l_2^{\dim P_i X_1}) \leq m^{1/p_i-1/2}$ и $\|T_i^{-1}\| = 1$. Рассмотрим оператор $T: X_1 \rightarrow l_2^m$, определенный следующим образом: $Tx = (T_1 P_1 x, T_2 P_2 x, \dots) \in (\sum_{i=1}^{\infty} T_i P_i X)_2$. Для $x \in S_X$ имеем

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= (\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i P_i x\|^2)^{1/2} \leq (\sup_i \|T_i\|) (\sum_{i=1}^{\infty} \|P_i x\|^2)^{1/2} \leq \\ &\leq m^{1/p_1-1/2} \cdot \|x\| = m^{1/p_1-1/2}. \end{aligned}$$

Если $\|Tx\| = 1$, то

$$\begin{aligned} \|x\| &= (\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i^{-1} T_i P_i x\|^2)^{1/2} \leq \\ &\leq (\sup_i \|T_i^{-1}\|) (\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i P_i x\|^2)^{1/2} = \|Tx\| = 1, \end{aligned}$$

т. е. $\|T^{-1}\| \leq 1$, и, следовательно, $d(X_1, l_2^m) \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq m^{1/p_1-1/2}$.

Нам в дальнейшем понадобится следующий результат, принадлежащий А. Гротендику [3] (см. также [4, с. 356]): пусть $T: l_1 \rightarrow l_2$ — линейный ограниченный оператор; тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любых $(x_i)_1^n \subset l_1$

$$\sum_{i=1}^n \|Tx_i\| \leq K_G \|T\| \sup_{f \in B_{l_\infty}} (\sum_{i=1}^n |f(x_i)|),$$

где K_G — универсальная постоянная ($K_G \approx \pi/2$).

Лемма 7. Пусть $A: l_2^n \rightarrow l_1^n$, $B: l_1^n \rightarrow l_2^n$ — такие линейные операторы, что $BA = I_{l_2^n}$. Тогда $\|A\| \cdot \|B\| \geq K_G^{-1} n^{1/2}$.

Доказательство. Очевидно, можно считать $\|A\| = 1$. Пусть $(e_i)_1^\infty$ — естественный базис в l_2^n ; тогда для любых $(\theta_i)_1^n$, $|\theta_i| = 1$, $\|\sum_{i=1}^n \theta_i A e_i\| \leq \|\sum_{i=1}^n \theta_i e_i\| = n^{1/2}$. Согласно неравенству А. Гротендика,

$$n = \sum_{i=1}^n \|B(A(\theta_i e_i))\| \leq K_G \|B\| \sup_{f \in B_{l_\infty}} (\sum_{i=1}^n |f(A(\theta_i e_i))|). \quad (1)$$

Так как

$$\begin{aligned} \max_{|\theta_i|=1} \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left(\sum_1^n |f(A(\theta_i e_i))| \right) &= \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left(\sum_1^n |f(Ae_i)| \right) = \\ &= \max_{|\theta_i|=1} \sup_{f \in B_{l_\infty}} \left(f \left(\sum_1^n \theta_i Ae_i \right) \right) = \max_{|\theta_i|=1} \left\| \sum_1^n \theta_i Ae_i \right\| \leq n^{1/2}, \end{aligned}$$

то, подставляя это в (1), получим $n \leq K_G \|B\| n^{1/2}$, или $\|B\| \geq K_G^{-1} n^{1/2}$.

Следствие 1. Пусть $A: l_2^{\delta n} \rightarrow l_1^{2n}$, $B: l_1^{2n} \rightarrow l_2^{\delta n}$, $1 \leq \delta \leq 2$ — такие линейные операторы, что $BA = I_{l_2^{\delta n}}$. Тогда $\|A\| \|B\| \geq K_G^{-1} n^{1/2}$.

Доказательство. Пусть $P: l_2^{\delta n} \rightarrow l_2^n$ — проектор с $\|P\| = 1$. Положим $A_1 = A|_{Pl_2^{\delta n}}: l_2^n \rightarrow l_1^{2n}$, $B_1 = PB: l_1^{2n} \rightarrow l_2^n$. Тогда $B_1 A_1 = I_{l_2^n}$ и мы попадаем в условия леммы 7. Поэтому $\|A\| \|B\| \geq \|A_1\| \|B_1\| \geq K_G^{-1} n^{1/2}$.

Теперь мы готовы построить пример пространства, для которого $\Gamma(X)$ не является линейным пространством. Вначале обратимся к пространству, для которого ρ_x не есть квазинорма. Выберем по индукции числа $p_i \rightarrow 2$, $n_i \rightarrow \infty$, $1 < p_{i-1} < p_i < 2$, так, чтобы удовлетворялись следующие условия:

$$1) (2\Delta_{i-1})^{1/p_i - 1/2} \leq 3, \text{ где } \Delta_i = \sum_{j=1}^i n_j;$$

$$2) n_i^{1-1/p_i} \geq \Delta_{i-1};$$

$$3) \Delta_i^{1/p_i - 1/2} \rightarrow \infty \text{ при } i \rightarrow \infty$$

(вначале выбираем p_i , затем n_i). Рассмотрим пространство $X =$

$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \oplus l_{p_i}^{n_i} \right)_2. \text{ Пользуясь теоремой Гурария—Кадеца—Мацаева [5]}$$

($d(l_p^n, l_1^n) \leq n^{1-1/p}$) и Ф. Джона [6] (если $\dim X = \dim Y = n$, то $d(X, Y) \leq n$), леммой 5 и условием 2), получим

$$\begin{aligned} \varphi_X(\Delta_i) &\leq d\left(\left(\sum_{j=1}^i \oplus l_{p_j}^{n_j}\right)_2, l_1^{\Delta_i}\right) = \\ &= d\left(\left(\left(\sum_{j=1}^{i-1} \oplus l_{p_j}^{n_j}\right)_2 \oplus l_{p_i}^{n_i}\right)_2, l_1^{\Delta_{i-1} + n_i}\right) \leq \\ &\leq \Delta_{i-1} + n_i^{1-1/p_i} \leq 2n_i^{1-1/p_i} \leq 2\Delta_i^{1-1/p_i}. \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть $X_1 \subset X$, $\dim X_1 = 2\Delta_i$ — произвольное подпространство, $Q: X \rightarrow$

$\rightarrow \left(\sum_{j=i+1}^{\infty} \oplus l_{p_j}^{n_j} \right)_2$ — естественный проектор; очевидно, $\|Q\| = 1$. Положим $X'_1 = QX_1$. Тогда $\dim X'_1 = \delta \Delta_i$, $1 \leq \delta \leq 2$. Обозначим $Y = X_1 \cap X'_1$; ясно, что $\dim Y = \delta_1 \Delta_i$, $1 \leq \delta_1 \leq \delta$. По лемме 6 и условию 1),

$$d(Y, l_2^{\delta_1 \Delta_i}) \leq d(X'_1, l_2^{\delta \Delta_i}) \leq (2\Delta_i)^{1/p_{i+1} - 1/2} \leq 3.$$

Пусть $A_1: X_1' \rightarrow l_2^{\delta_1 \Delta_i}$ — такой изоморфизм, что $\|A_1\| \|A_1^{-1}\| \leq 3$ и $p_1': l_2^{\delta_1 \Delta_i} \rightarrow A_1 Y$ — проектор с $\|P_1'\| = 1$. Тогда $P_1 = A_1^{-1} P_1' A_1: X_1' \rightarrow Y$ — проектор и $\|P_1\| \leq 3$. Далее, $P = P_1 Q: X_1 \rightarrow Y$ — тоже проектор с $\|P\| \leq 3$. Пусть $T: X_1 \rightarrow l_1^{2\Delta_i}$ — произвольный изоморфизм с условиями $\|T\| = 1$, $\|T^{-1}\| = d(X_1, l_1^{2\Delta_i})$. Рассмотрим диаграмму

$$l_2^{\delta_1 \Delta_i} \xrightarrow{V} Y \xrightarrow{T|_Y} l_1^{2\Delta_i} \xrightarrow{PT^{-1}} Y \xrightarrow{V^{-1}} l_2^{\delta_1 \Delta_i},$$

где $V: l_2^{\delta_1 \Delta_i} \rightarrow Y$ — изоморфизм с $\|V\| = 1$, $\|V^{-1}\| = d(Y, l_2^{\delta_1 \Delta_i}) \leq 3$. Положим $A = T|_Y V: l_2^{\delta_1 \Delta_i} \rightarrow l_1^{2\Delta_i}$, $B = V^{-1} P T^{-1}: l_1^{2\Delta_i} \rightarrow l_2^{\delta_1 \Delta_i}$. Имеем $\|A\| \leq \|T|_Y\| \|V\| \leq 1$, $BA = I_{l_2^{\delta_1 \Delta_i}}$. Согласно следствию 1, $\|A\| \times \|B\| \geq K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}$, и $\|B\| \geq K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}$, $\|V^{-1}\| \|P\| \|T^{-1}\| \geq K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}$,

$$\|T^{-1}\| \geq \frac{K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}}{\|V^{-1}\| \|P\|} \geq \frac{K_G^{-1}}{9} \Delta_i^{1/2}.$$

Вспомнив, что $\|T^{-1}\| = d(X_1, l_1^{2\Delta_i})$, будем иметь

$$d(X_1, l_1^{2\Delta_i}) \geq \frac{K_G^{-1}}{9} \Delta_i^{1/2}, \quad (3)$$

а так как $X_1 \subset X$ было произвольным, то, учитывая (2),

$$\frac{\varphi_X(2\Delta_i)}{\varphi_X(\Delta_i)} \geq \frac{K_G^{-1} \Delta_i^{1/2}}{9 \cdot 2 \Delta_i^{1-1/p_i}} = \frac{K_G^{-1}}{18} \Delta_i^{1/p_i - 1/2} \rightarrow \infty$$

при $i \rightarrow \infty$. Пользуясь леммой 2, получим

$$\begin{aligned} \varphi_X(2\Delta_i) &= \rho_X(\underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{2\Delta_i}) = \\ &= \rho_X(\underbrace{(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots)}_{2\Delta_i}) + \\ &\quad + \rho_X(\underbrace{(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)}_{2\Delta_i}); \\ &= \rho_X(\underbrace{(1, 0, 1, 0, \dots, 1, 0, 0, 0, \dots)}_{2\Delta_i}) + \\ &\quad + \rho_X(\underbrace{(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)}_{2\Delta_i}) = \\ &= 2\rho_X(\underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{\Delta_i}) = 2\varphi_X(\Delta_i). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& \rho_X((\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, \dots)) \times \\
& \times (\rho_X((\underbrace{1, 0, 1, 0, \dots, 1}_{2\Delta_i}, 0, 0, 0, \dots)) + \\
& + \rho_X((\underbrace{0, 1, 0, 1, \dots, 0}_{2\Delta_i}, 1, 0, 0, \dots)))^{-1} = \\
& = \varphi_X(2\Delta_i) / (2\varphi_X(\Delta_i)) \rightarrow \infty, \quad i \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

и ρ_X не является квазинормой на $\Gamma(X)$. Нами попутно доказано также, что никакое факторпространство пространства X не содержит подпространство, изоморфное $X \oplus X$.

Теперь приведем пример пространства X , для которого $\Gamma(X)$ нелинейно. Напомним, что базис $(x_i)_i^\infty$ банахова пространства X называется l -безусловным, если для любых $(a_i)_i^\infty \subset \mathbb{C}$ имеем $\|\sum a_i x_i\| = \|\sum |a_i| x_i\|$. Если X — банахово пространство с l -безусловным базисом $(x_i)_i^\infty$, то X^* можно отождествить с множеством последовательностей $(b_i)_i^\infty \subset \mathbb{C}$ с нормой $\|(b_i)_i^\infty\| = \sup \{ \sum |a_i| |b_i| : \|\sum a_i x_i\| = 1 \}$.

Лемма 8. Пусть X — банахово пространство с l -безусловным базисом $(x_i)_i^\infty \subset S_X$. Тогда $X^* \subset \Gamma(X)$ и $\|(\gamma_i)_i^\infty\|_{X^*} \geq \rho_X((\gamma_i)_i^\infty)$ для всех $(\gamma_i)_i^\infty \in X^*$.

Доказательство. Если $(\gamma_i)_i^\infty \in X^*$, то

$$\|(\gamma_i)_i^\infty\|_{X^*} = \sup_{(a_i) \subset \mathbb{C}} \frac{\sum |a_i| \|\gamma_i\|}{\|\sum a_i x_i\|} \geq \rho_X((\gamma_i)_i^\infty).$$

Рассмотрим пространство $X = ((\sum_{i=1}^\infty \oplus l_{p_i}^{n_i})_2 \oplus l_2)_2$, пусть при этом $p_i \rightarrow 2$, $n_i \rightarrow \infty$ удовлетворяют приведенным выше условиям 1), 2), а также следующему (более сильному, чем 3)):

$$\frac{1}{2^{i/2}} n_i^{1/2-1/q_i} \rightarrow \infty \quad \text{при } i \rightarrow \infty; \quad 1/p_i + 1/q_i = 1.$$

Покажем, что $\Gamma(X)$ нелинейно. Обозначим $Y = (\sum_{i=1}^\infty \oplus l_{p_i}^{n_i})_2$. Положим

$$\gamma_l = \frac{1}{2^{l/2} n_l^{1/q_l}} \quad \text{при } \Delta_{l-1} < j \leq \Delta_l, \quad \Delta_0 = 0.$$

Легко проверяется, что $(\gamma_i)_i^\infty \in (\sum_{i=1}^\infty \oplus l_{q_i}^{n_i})_2 = Y^*$ и $\|(\gamma_i)_i^\infty\|_{Y^*} = 1$. По лемме 8, $(\gamma_i)_i^\infty \in \Gamma(Y)$, а согласно [1, следствие 1], $(\gamma_i)_i^\infty \in \Gamma(X)$ и $\rho_X((\gamma_i)_i^\infty) \leq 1$ (поскольку естественный базис в X , состоящий из единичных векторов, является l -безусловным). Образует 4 последовательности чисел:

$$\gamma_l(j) = \begin{cases} \gamma_k, & \text{если } j = 4k + l, \quad k \geq 0, \quad 1 \leq l \leq 4, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

т. е. так, чтобы последовательность $(\gamma'_i)_i^\infty = (\sum_{l=1}^4 \gamma_l(j))_{j=1}^\infty$ была растянутой вчетверо последовательностью $(\gamma_l(j))_{j=1}^\infty$. Все $(\gamma_l(j))_{j=1}^\infty$, $1 \leq l \leq 4$, содержатся в $\Gamma(X)$: им соответствуют $(\alpha x_i)_{i=1}^\infty$ при любом $\alpha > 1$, где

$$x_j = \begin{cases} k\text{-й единичный вектор пространства } Y \subset X, \\ \text{если } j = 4k + l, k \geq 0 \text{ (т. е. если } \gamma \neq 0) \\ j\text{-й единичный вектор пространства } l_2 \subset X \\ \text{в противном случае} \end{cases}$$

(для доказательства достаточно воспользоваться [1, лемма] и тем фактом, что $\|(\gamma_l)_l^\infty\|_{Y^*} = 1$). По построению,

$$\gamma'_j = \sum_{l=1}^4 \gamma_l(j) = \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \text{ при } 4\Delta_{i-1} < j \leq 4\Delta_i.$$

Для X , как и выше, доказывается утверждение, аналогичное лемме 6, а также неравенство (3) для любого $X_1 \subset X$, $\dim X_1 = 2\Delta_i$. Получаем, что

$$\begin{aligned} \rho_X((\gamma'_j)_j^\infty) &\geq \rho_X((\gamma'_j)_{j=4\Delta_{i-1}+1}^{4\Delta_i}) = \\ &= \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \rho_X(\underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{4n_i}) \geq \\ &\geq \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \rho_X(\underbrace{(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)}_{2\Delta_i}) = \\ &= \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \Phi_X(2\Delta_i) \geq \frac{1}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} \frac{K_G^{-1}}{9} \Delta_i^{1/2} \geq \\ &\geq \frac{K_G^{-1}}{9} \frac{n_i^{1/2}}{2^{i/2} n_i^{1/q_i}} = \frac{K_G^{-1}}{9} \frac{1}{2^{i/2}} n_i^{1/2-1/q_i} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

при $i \rightarrow \infty$, а это означает, что $(\gamma'_j)_j^\infty = \sum_{l=1}^4 (\gamma_l(j))_{j=1}^\infty \notin \Gamma(X)$, хотя каждое из слагаемых содержится в $\Gamma(X)$. Иными словами, $\Gamma(X)$ нелинейно. Итак, нами доказана

Теорема 2. *Существует банахово пространство X , для которого $\Gamma(X)$ не является линейным пространством относительно покомпонентных операций.*

Приведенным выше методом можно получить усиление результата Т. Фигеля [7].

Лемма 4'. *Пусть Y — подпространство банахова пространства X и $(X/Y)^n$ содержит подпространство X_1 , изоморфное X^{n+1} . Тогда существует такое C , что $\Phi_{X^n}(k(n+1)) \leq C\Phi_X(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что X^n и X^{n+1} — ортогональные суммы. Пусть $d(X_1, X^{n+1}) = d$.

Тогда, пользуясь леммами 1, 2 и 5, а также [1, предложение 2, следствие 1], получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \varphi_{X^n}(k(n+1)) &\leq \varphi_{X^n/Y^n}(k(n+1)) = \varphi_{(X/Y)^n}(k(n+1)) \leq \\ &\leq \varphi_{X_1}(k(n+1)) \leq d\varphi_{X^{n+1}}(k(n+1)) \leq d(n+1)\varphi_X(k). \end{aligned}$$

Лемма 4' утверждает, что для того, чтобы никакое факторпространство $(X/Y)^n$ не содержало X^{n+1} , достаточно условие 1) в приведенном выше примере заменить на 1'): для любого $n \in N$ найдется такое $n_0 \in N$, что для всех $i \geq n_0$ $((n+1)\Delta_i)^{1/p_{i+1}-1/2} \leq 3$, и все выкладки сохраняют силу, если лемму 7 заменить на следующее утверждение: пусть $A: l_2^n \rightarrow l_1^{kn}$, $B: l_1^{kn} \rightarrow l_2^n$ — такие линейные операторы, что $BA = I_{l_2^n}$; тогда $\|A\| \|B\| \geq K_G^{-1} n^{1/2}$. Т. е. имеет место

Теорема 3. *Существует рефлексивное банахово пространство X , обладающее тем свойством, что для любого $Y \subset X$ и любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $(X/Y)^n$ не содержит подпространство, изоморфное X^{n+1} .*

Основной результат [7] следует отсюда при $Y = 0$.

Список литературы: 1. Каибханов К. Э. О возмущении ω -линейно независимых систем в банаховом пространстве, содержащем свой квадрат // Теория функций, функций. анализ и их прил. 1987. Вып. 47. С. 89—94. 2. Lewis D. R. Finite dimensional subspaces of L_p // Studia Math. 1978. 63, № 2. P. 207—212. 3. Grothendieck A. Resume de la theorie metrique des produits tensoriels topologiques // Bol. Soc. Mat. Sao Paulo. 1956. 8, № 1. P. 1—79. 4. Пич А. Оперативные идеалы. М., 1982. 536 с. 5. Гурарий В. И., Кадец М. И., Мацаев В. И. О расстояниях между конечномерными аналогами пространств L_p // Мат. сб. 1966. 70, № 4. С. 481—489. 6. John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // Courant Anniversary Volume. New York, 1948. P. 187—204. 7. Figiel T. An example of infinite dimensional reflexive Banach space non-isomorphic to its Cartesian square // Studia Math. 1972. 42, № 3. P. 295—306.

Поступила в редколлегию 02.11.87

УДК 517.535.4

А. Ф. ГРИШИН

ФУНКЦИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ И ОДНА ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА

В статье без подробных объяснений используется общепринятая терминология теории целых и субгармонических функций [1, 2]. Пусть $f(z)$ — целая функция, а $n(r)$ — считающая функция ее нулей $\{z_n\}$, $n = 1, 2, \dots$. Известно, что из неравенства

$$\ln M(r) < Cr^p \quad (1)$$

следует неравенство

$$n(r) < Cr^p. \quad (2)$$

Буквой C мы обозначим различные величины, не зависящие от r . При целом ρ справедливо и обратное утверждение. При целом ρ неравенство (1) эквивалентно [2] совокупности соотношений, состоящих из неравенства (2) и условия равновесия Линделефа — $\sum_{|z_n| \leq r} z_n^{-\rho} \leq C$. Аналогичные утверждения справедливы и для субгармонических функций, при этом роль корней целой функции играет риссовская мера субгармонической функции. Подобные утверждения имеют место и для функций субгармонических в полуплоскости. Прежде чем переходить к этим утверждениям, введем некоторые определения и обозначения.

Пусть $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$, $V(r) = r^{\rho(r)}$.

Пусть $u(z)$ — функция субгармоническая в полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Функцию $\rho(r)$ мы будем называть формальным уточненным порядком функции $u(z)$, если справедливо неравенство $u(z) < CV(|z|)$. Функцию $\rho(r)$ мы будем называть полужормальным уточненным порядком функции $u(z)$, если:

1) $\rho(r)$ — формальный порядок;

2) выполняется условие Б. Я. Левина, т. е. существуют числа $\delta > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, N такие, что в каждой области $D(\delta, \alpha, R) = \{z : (1 - \alpha)R < |z| < (1 + \alpha)R, \delta < \arg z < \pi - \delta\}$ существует точка z_1 такая, что $u(z_1) > -NV(|z_1|)$.

Известно (см., например, [4]), что если $\rho > 1$, то всякий формальный порядок является полужормальным.

Пусть $\rho(r)$ — формальный порядок $u(z)$, $u(t) = \lim_{y \rightarrow +0} u(t + iy)$, ν — неванлинновская мера функции u , $d\nu(\xi) = \sin \arg \xi d\mu(\xi)$, где μ — риссовская мера; σ — сингулярная граничная мера; $\sigma([a, b]) = \lim_{y \rightarrow +0} \int_a^b [u(t + iy) - u(t)] dt$. Указанный предел существует для почти всех a и b . Пусть $d\sigma_1(t) = \frac{1}{2\pi|t|} d\sigma(t)$, β — мера в полуплоскости $Z_+ = \{z : \text{Im } z \geq 0\}$, причем если $E \subset Z_+$, $E_2 = E \cap \{z : \text{Im } z = 0\}$, $E_1 = E \setminus E_2$, то $\beta(E) = \nu(E_1) + \sigma_1(E_2)$. $\beta(r) = \beta(C^+(0, r))$,

$$C^+(0, r) = \{z : |z| \leq r, \text{Im } z \geq 0\}, \quad \beta_1(r) = \int_0^r \frac{d\beta(t)}{t},$$

$$\beta_2(r) = \int_0^r t \beta_1(t) dt, \quad a(t) = u(t) + u(-t),$$

$$\alpha_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^r \frac{a(t)}{t^2} dt, \quad \alpha_2(r) = \int_0^r t \alpha_1(t) dt,$$

$$\delta(t) = c_1 + 2\beta_1(t) - 2\alpha_1(t), \quad \delta_2(r) = \int_0^r t \delta(t) dt.$$

Известно, что субгармоническая функция $u(z)$, имеющая в полуплоскости $\text{Im} z > 0$ формальный порядок $\rho(r)$, определяется риссовой мерой, сингулярной граничной мерой и граничными значениями $u(t)$ с точностью до слагаемого $\text{Im} Q(z)$, где $Q(z)$ — полином с вещественными коэффициентами c_k . Величина C_1 , участвующая в определении $\delta(t)$, — это коэффициент при z в $Q(z)$. Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, если не оговорено противное, что $u(z)$ — функция субгармоническая в полуплоскости $\text{Im} z > 0$, гармоническая в некоторой окрестности нуля, $u(0) = 0$, $u'_x(0) = 0$, $z = x + iy$.

Указанные ограничения мы будем называть условием A . Условия на функцию $u(z)$ в нуле обеспечивают сходимость в нуле написанных выше интегралов, а условие $u(z) < CV(|z|)$ обеспечивает локальную интегрируемость функции $u(t)$. Мы доказываем

Теорема 1. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию A , $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho = 1$. Для того чтобы функция $\rho(r)$ была формальным порядком функции $u(z)$, необходимо

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t^2} dt \leq C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2} dt, \quad (3)$$

$$\int_0^r \frac{\beta(t)}{t^2} dt \leq C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2} dt, \quad (4)$$

$$\delta_2(r) \leq CrV(r) \quad (5)$$

и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число r_ε , такое, что при $|z| \geq r_\varepsilon$ выполнялось неравенство

$$u(z) \leq \varepsilon |z|^2, \quad (6)$$

$$u(t) \leq CV(t), \quad (7)$$

$$\int_1^\infty \frac{|u(\pm t)|}{t^3} dt < \infty, \quad (8)$$

$$\int_1^\infty \frac{\beta(t)}{t^3} dt < \infty, \quad (9)$$

$$\delta_2(r) < CrV(r).$$

Всюду в дальнейшем неравенство $u(z) < \varepsilon |z|^2$ будет означать, что написанное выше неравенство справедливо при любом $\varepsilon > 0$, если $|z| \geq r_\varepsilon$, и это не будет явно оговариваться.

Теорема 2. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию A , $\rho(r)$ — уточненный порядок, $\rho = 1$. Для того чтобы функция $\rho(r)$ была полупормальным порядком функции $u(z)$, необходимо, чтобы

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t} dt < CV(r), \quad (10)$$

$$\beta(r) < CV(r), \quad (11)$$

$$r|\delta(r)| < CV(r), \quad (12)$$

и достаточно, чтобы

$$u(z) < \varepsilon |z|^2, \quad (6)$$

$$u(t) < CV(t), \quad (7)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{|u(\pm t)|}{t^3} dt < \infty, \quad (8)$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\beta(t)}{t^3} dt < \infty, \quad (9)$$

$$|\delta_3(r)| < CrV(r). \quad (13)$$

Замечание. Мы будем пользоваться некоторыми фактами из теории субгармонических функций. Доказательство большей их части можно найти в [4]. Часть утверждений из теорем 1 и 2 также доказаны в [4]. Для удобства читателя мы приведем перечень используемых утверждений. В формулируемых ниже предложениях явно не оговаривается, что функция $u(z)$ удовлетворяет условию A . Однако это условие предполагается выполненным

Предложение 1. Если $\rho(r)$ — формальный порядок функции $u(z)$, то

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t^2} dt < C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2} dt,$$

$$\int_0^r \frac{d\beta(t)}{t} < C \int_0^r \frac{V(t)}{1+t^2} dt.$$

Это результат из § 4 [4].

Предложение 2. Если $\rho(r)$ — полуформальный порядок функции $u(z)$, то

$$\int_0^r \frac{|u(\pm t)|}{t} dt < CV(r), \quad \beta(r) < CV(r),$$

а если ρ — целое число и

$$\delta(r) = C_\rho + \frac{2}{\rho} \iint_{C^+(0, r)} \frac{\sin \rho \varphi}{\sin \varphi} \frac{1}{|\xi|^\rho} d\beta(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u(t)}{t^{1+\rho}} dt,$$

то $r^\rho |\delta(r)| < CV(r)$.

Дополнительно предполагается, что интегралы в нуле сходятся. Это теоремы 18 и 19 из [4].

Предложение 3. Пусть $\rho(r)$ — формальный порядок функции $u(z)$, $q = [\rho]$,

$$d_q(z, \xi) = \operatorname{Re} \left[\ln \frac{z-\xi}{z-\bar{\xi}} + z \left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{\bar{\xi}} \right) + \dots + \frac{1}{q} z^q \left(\frac{1}{\xi^q} - \frac{1}{\bar{\xi}^q} \right) \right],$$

$$K_q(z, t) = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} - \dots - \frac{z^q}{t^{q+1}} \right].$$

Тогда

$$u(z) = \iint_{Z_+} \frac{1}{\sin \varphi} d_q(z, \zeta) d\beta(\zeta) + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_q(z, t) u(t) dt + \operatorname{Im} P_q(z),$$

где $\varphi = \arg \zeta$; ядро $\frac{1}{\sin \varphi} d_q(z, \zeta)$ определяется на вещественной оси по непрерывности; $P_q(z) = \sum_{k=1}^q c_k z^k$ — полином с вещественными коэффициентами.

Это результат из § 4 [4]. Впервые такое представление, насколько известно автору, получено в работе Ито [5].

Предложение 4. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует r_ε такое, что при $|z| \geq r_\varepsilon$ выполняются неравенства из предложения 2 с заменой C на ε , то справедливы неравенства $u(z) < \varepsilon CV(|z|)$, $|z| \geq r_\varepsilon$, $u(z) > -\varepsilon CV(|z|)$ вне множества кругов нулевой линейной плотности.

Первая оценка стандартным способом получается из предложения 3. Вторая — следствие теоремы 11 из [4].

Предложение 5. (Формула Карлемана). Имеет место равенство

$$\int_0^R \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{R^2} \right) d\beta(t) = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi u(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^R \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{R^2} \right) a(t) dt - \frac{1}{2} c_1.$$

Для случая $u(z) = \ln |f(z)|$, где $f(z)$ голоморфная в Z_+ функция, доказательство приведено в [2] гл. 5. Доказательство этой формулы можно получить так. Напишем равенство, приведенное в § 4 [4]:

$$u(z) = - \iint_{C^+(0, R_1)} G(z, \zeta) d\mu(\zeta) + \frac{1}{2\pi} \int_{L_{R_1}} u(\zeta) \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} ds - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_{-R_1}^{R_1} \frac{\partial G(z, t)}{\partial n} d\sigma(t),$$

где $G(z, \zeta)$ — функция Грина полукруга $C^+(0, R_1)$; $R_1 > R$, L_{R_1} — граница $C^+(0, R_1)$; n — внутренняя нормаль на границе. Если в написанном равенстве взять $z = Re^{i\theta}$, а затем умножить его на $\sin \theta$ и проинтегрировать от нуля до π , то получим формулу Карлемана.

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Неравенства (3), (4) — это утверждение предложения I. Неравенство (5) следует

из формулы Карлемана, которую можно записать в виде

$$\frac{1}{R^2} \delta_2(R) = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi u(Re^{i\theta}) \sin \theta d\theta. \quad (14)$$

Достаточность. Из (6), (8), (9) и предложения 3 следует, что функцию $u(z)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right] u(t) dt + \\ &+ \iint_{Z_+} \left[\frac{1}{\sin \varphi} \ln \left| \frac{z-\zeta}{z-\bar{\zeta}} \right| + 2 \frac{y}{|\zeta|} \right] d\beta(\zeta) + \operatorname{Im} Q(z) = \\ &= u_1(z) + u_2(z) + \operatorname{Im} Q(z) = u_3(z) + \operatorname{Im} Q(z), \end{aligned}$$

где $Q(z)$ — полином с вещественными коэффициентами, $\deg Q \leq 2$. Из (8) интегрированием по частям получаем

$$|u_1(z)| < \varepsilon \frac{1}{\sin^3 \theta} r^2, \quad z = re^{i\theta}, \quad |u_4(z)| < \varepsilon r^2, \quad (15)$$

где $u_4(z)$ — часть интеграла, определяющего $u_1(z)$, распространенного на множество, где выполняется неравенство $|t-r| \geq \alpha r$, $\alpha \in (0, 1)$, $u_1(z) = u_4(z) + u_5(z)$. Для оценки $u_5(z)$ заметим, что при $\alpha \leq 0,25$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ ядро $\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2}$ положительно. Тогда, используя (7), получим

$$\begin{aligned} u_5(z) &\leq C \frac{y}{\pi} \int_{|t-r| < \alpha r} \left[\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right] V(t) dt \leq \\ &\leq CV(r) \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|t-z|^2} = CV(r). \end{aligned}$$

Откуда следует, что в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 9$ справедлива оценка $u_1(z) < \varepsilon r^2$. Кроме того, из неравенства (9) и предложения 4 следует, что выполняются неравенства $u_2(z) < \varepsilon r^2$, $u_2(z) > -\varepsilon r^2$ (16) вне множества кругов линейной плотности ноль. Тем самым для $u_3(z)$ справедлива оценка $u_3(z) < \varepsilon r^2$ (17).

Из оценок (15), (16), (6) следует, что $Q(z) = c_1 z + c_0$.

Далее

$$\begin{aligned} u_3(ir) + c_1 r &\leq \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} \frac{1}{\sin \varphi} \ln \frac{r^2 - 2rt \sin \varphi + t^2}{r^2 + 2rt \sin \varphi + t^2} + 2 \frac{r}{t} \right] d\beta(t) - \\ &- \frac{r^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{a(t)}{t^2(t^2 + r^2)} dt + c_1 r = \int_0^\infty \left[2 \frac{r}{t} - \frac{2rt}{r^2 + t^2} \right] d\beta(t) - \\ &- \frac{r^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{a(t)}{t^2(t^2 + r^2)} dt + c_1 r = 16r^3 \int_0^\infty \frac{t \delta_2(t)}{(t^2 + r^2)^3} dt. \end{aligned}$$

Теперь из (5) следует, что $u_3(ir) + c_1r < C V(r)$. Так как $u_3(\pm r) < C V(r)$, то из неравенства (17) по теореме Фрагмена — Линделёфа следует, что $u_3(z) + c_1y < C V(r)$ и, значит, $u(z) < C V(r)$.

Доказательство теоремы 2. Необходимость следует из предложения 2.

Достаточность. Из теоремы 1 следует, что $\rho(r)$ — формальный порядок функции $u(z)$. Из соотношений (13), (14) следует, что $\rho(r)$ — полуформальный порядок функции $u(z)$.

Теперь мы легко докажем следующую таубернову теорему.

Теорема 3. Пусть функция $\omega(s)$ такова, что выполняются неравенства $s \omega'(s) \leq C$ (18),

$$\int_1^{\infty} \frac{|\omega'(t)|}{t} dt < \infty, \quad (19)$$

$$\left| \int_0^{\infty} t \omega(t) dt \right| \leq C S^2. \quad (20)$$

Тогда

$$|\omega(S)| \leq C, \quad (21)$$

$$\int_0^S t |\omega'(t)| dt \leq C s. \quad (22)$$

Доказательство. Обозначим

$$u(z) = \frac{y}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{t^2} \right] \omega'(t) dt. \quad (23)$$

Из неравенств (18), (19), как показано при доказательстве теоремы 1, следует, что $u(z) \leq C r$. Тогда для $u(z)$ выполняются все условия второй части теоремы 2 с $\rho(r) = 1$ и, следовательно, $u(z)$ имеет полуформальный порядок единица. Тогда неравенства (10), (12) совпадают с неравенствами (21), (22).

В заключение остановимся на вопросе о принадлежности субгармонической функции классу A . Так называется класс субгармонических функций, для которых выполняется неравенство $\beta_1(t) \leq C$. Этот класс привлекал внимание многих математиков. Ему посвящена гл. 5 книги [2], где приведена и библиография. Более полную библиографию можно найти во втором американском издании этой книги, вышедшем в 1980 г. Для субгармонических во всей плоскости функций конечной степени σ (т. е. формального, а значит, и, полуформального порядка единица) найдено простое необходимое и достаточное условие принадлежности классу A : $\alpha_1(t) \leq C$ (24) [2, гл. 5, теорема 2]. Не так обстоит дело с функциями субгармоническими в полуплоскости и формального порядка единица. Из формулы Карлемана следует, что более слабое, чем (24), условие $\alpha_2(t) \leq C t^2$ является достаточным для того, чтобы субгармоническая функция формального порядка единица принадле-

жала классу A . Однако это условие не является необходимым, как показывает пример

$$u(z) = -2 \operatorname{Im} \frac{z^2}{z+1} \ln(-z), \quad -\pi \leq \arg(-z) \leq 0.$$

И, вообще, в терминах функции $u(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$ нельзя дать критерия принадлежности функции $u(z)$ формального порядка единица классу A , так как функции $u(z)$ и

$$u_1(z) = u(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \left| \frac{z-in}{z+in} \right| + 2 \frac{y}{n} \right]$$

совпадают на вещественной оси, имеют формальный порядок единица (функция $u_1(z)$ даже имеет вполне регулярный рост в верхней полуплоскости [3]), причем функция $u(z)$ принадлежит классу A , а функция $u_1(z)$ не принадлежит. Для функций полуформального порядка единица критерий принадлежности классу A такой же, как и для функций субгармонических во всей плоскости.

Теорема 4. Пусть функция $u(z)$ удовлетворяет условию A и имеет полуформальный порядок единица. Для того чтобы функция $u(z)$ принадлежала классу A , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из четырех эквивалентных условий:

$$\alpha_2(t) \leq Ct^2, \quad (25)$$

$$|\alpha_2(t)| \leq Ct^2, \quad \alpha_1(t) \leq C, \quad |\alpha_1(t)| \leq C. \quad (26)$$

Достаточность. Из каждого из написанных неравенств следует (25). Применяя формулу Карлемана, получаем, что $u(z)$ из класса A . Это доказательство приведено в [2].

Необходимость. Пусть $u \in A$. Тогда $0 \leq \beta_1(t) \leq C$. Из теоремы 2 следует $|\beta_1(t) - \alpha_1(t)| \leq C$. Отсюда следует справедливость (26).

Список литературы: 1. Привалов И. И. Граничные свойства однозначных аналитических функций. М., 1941. 206 с. 2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 3. Говоров Н. В. Об индикаторе функций целого порядка, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости // ДАН СССР. 1967, 172, № 4. С. 763—766. 4. Гришин А. Ф. О регулярности роста субгармонических функций. III // Теория функций, функций, анализ и их прил. 1968. Вып. 7. С. 59—84. 5. ITÖ JUN-ITI Subharmonic functions in half-plane // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. 3. P. 479—499.

Поступила в редколлегию 27.01.88

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Данная работа посвящена доказательству справедливости следующей гипотезы, высказанной Л. И. Ронкиным и В. Э. Кацнельсоном [1, 2].

Гипотеза 1. Если сумма длин замкнутых кривых, расположенных на границе n -мерного куба со стороной a , меньше $4a$, то существует гиперплоскость, проходящая через центр куба и не пересекающая ни одну из этих кривых.

Основными результатами работы являются теоремы 1 и 2. Из теоремы 2, в частности, вытекает справедливость гипотезы 1. Для того чтобы перейти к формулировкам теорем 1 и 2, нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

В работе мы будем использовать следующие обозначения: $\|\cdot\|, (\cdot, \cdot)$ — обычные норма и скалярное произведение в R^n ; $d(B)$ — диаметр ограниченного множества $B \subset R^n$; $[y_1, y_2]$ — отрезок, соединяющий точки $y_1, y_2 \in R^n$; $|\Gamma|$ — длина спрямляемой кривой Γ ; μ — мера Лебега в R^n ; Q^ε — замкнутая ε -окрестность множества $Q \subset R^n$.

Пусть K — фиксированный выпуклый компакт в R^n , содержащий нуль в качестве внутренней точки. Для любого $\Omega \subset R^n$ положим $A(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in K : \exists y \in \Omega (x, y) = 0\}$ (1).

Лемма 1. Пусть Ω — компакт в R^n . Тогда $A(\Omega)$ — компакт.

Доказательство. Достаточно показать, что $A(\Omega)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_m\} \subset A(\Omega)$ сходится к $x \in K$. Из определения (1) вытекает, что существует последовательность $\{y_m\} \subset \Omega$, такая, что $(x_m, y_m) = 0$, $m \in N$. Без ограничения общности можем считать, что последовательность $\{y_m\}$ сходится к $y \in \Omega$. Следовательно, $(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} (x_m, y_m) = 0$, т. е. $x \in A(\Omega)$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть Γ — непрерывная простая замкнутая кривая в R^n , не проходящая через нуль, и $\Gamma_x \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \Gamma : (x, y) = 0\}$, $x \in R^n$. Тогда для любого $\delta > 0$ множество $M_\delta(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A(\Gamma) : d(\Gamma_x) \geq \delta\}$ (2) замкнуто и $\lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(M_\delta(\Gamma)) = \mu(A(\Gamma))$ (3).

Доказательство. В силу леммы 1 $A(\Gamma)$ замкнуто. Пусть последовательность $\{x_m\} \subset M_\delta(\Gamma)$ сходится к $x \in A(\Gamma)$. Из определений вытекает, что существуют последовательности $\{y_m\}, \{y'_m\} \subset \Gamma$, такие, что $(y_m, x_m) = (y'_m, x_m) = 0$, $\|y_m - y'_m\| \geq \delta$, $m \in N$ (4). Без ограничения общности можем считать, что последовательности $\{y_m\}, \{y'_m\}$ сходятся к точкам $y, y' \in \Gamma$ соответственно. Тогда, переходя в соотношениях (4) к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем, что $(y, x) = (y', x) = 0$, $\|y - y'\| \geq \delta$, т. е. $x \in M_\delta(\Gamma)$. Замкнутость множества $M_\delta(\Gamma)$ доказана.

Из очевидного включения $M_{\delta_1}(\Gamma) \subset M_{\delta_2}(\Gamma)$, $\delta_2 \leq \delta_1$, вытекает, что

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \mu(M_\delta(\Gamma)) = \mu(A(\Gamma)) - \mu(\mathcal{R}),$$

где $\mathcal{R} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A(\Gamma) : d(\Gamma_x) = 0\}$. Таким образом, осталось показать, что $\mu(\mathcal{R}) = 0$ (5). Легко видеть, что множества Q^+ , Q^- , определяемые формулой $Q^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^n : \forall y \in \Gamma, \pm(x, y) > 0\}$, являются открытыми выпуклыми конусами. Покажем, что справедливо включение $\mathcal{R} \subset \partial Q^+ \cup \partial Q^-$ (6).

Действительно, пусть $x \in K$. Предположим, что функция $\Gamma \ni y \rightarrow (x, y)$ меняет свой знак. Тогда, поскольку Γ — простая замкнутая кривая, то Γ_x состоит не менее чем из двух точек. Таким образом, если $x \in \mathcal{R}$, то функция $\Gamma \ni y \rightarrow (x, y)$ не меняет своего знака и, следовательно, точка x принадлежит границе множества $Q^+ \cup Q^-$. Тем самым включение (6) доказано. Из (6), учитывая, что граница выпуклого конуса имеет меру нуль, получаем (5). Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $y_1, y_2 \in \partial K$, $\Delta = [y_1, y_2]$. Тогда для всех $\varepsilon > 0$ $\mu(A(\Delta^\varepsilon)) \leq \mu(A(\Delta)) + C \cdot \varepsilon$ (7), где C — положительная константа, зависящая только от K .

Доказательство. Нетрудно убедиться, что $A(\Delta) = \{x \in K : (x, y_1) \geq 0, (x, y_2) \leq 0\} \cup \{x \in K : (x, y_1) \leq 0, (x, y_2) \geq 0\}$ (8).

Пусть $\varepsilon > 0$, $\delta = \varepsilon d(K)$. Покажем, что справедливо включение $A(\Delta^\varepsilon) \setminus A(\Delta) \subset \{x \in K : |(x, y_1)| \leq \delta\} \cup \{x \in K : |(x, y_2)| \leq \delta\}$ (9).

Действительно, пусть $x \in A(\Delta^\varepsilon) \setminus A(\Delta)$. В силу определения (1) существуют $z \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in [0, 1]$, такие, что $\|z\| \leq \varepsilon$ и $(x, z + \theta y_1 + (1 - \theta)y_2) = 0$. Отсюда получаем неравенство $|(x, \theta y_1 + (1 - \theta)y_2)| \leq \varepsilon d(K) = \delta$. Поскольку $x \notin A(\Delta)$, то в силу (8) числа (x, y_1) и (x, y_2) не могут иметь разные знаки и поэтому

$$\min_{i=1,2} |(x, y_i)| \leq |(x, \theta y_1 + (1 - \theta)y_2)| \leq \delta.$$

Включение (9) доказано. Нетрудно убедиться, что мера множества $\{x \in K : |(x, y_i)| \leq \delta\}$ не превышает $(2d(K))^n \cdot \frac{\varepsilon}{\|y\|}$. Отсюда, принимая во внимание (9), получаем утверждение леммы. Лемма доказана.

Из леммы 3, в частности, вытекает, что если спрямляемая кривая Γ имеет общую точку с ∂K , то $\mu(A(\Gamma)) \leq C|\Gamma|$ (10), где C — положительная константа, зависящая только от K .

Действительно, пусть $y \in \Gamma \cap \partial K$. Положим в лемме 3 $y_1 = y_2 = y$, $\varepsilon = |\Gamma|$. Тогда $\mu(A(\Gamma)) \leq \mu(A(\{y\}^\varepsilon)) \leq \mu(A(\{y\}) + C \cdot \varepsilon$. Отсюда, учитывая, что $\mu(A(\{y\})) = 0$, получаем (10).

Положим

$$b(K, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left\{ \frac{\mu(A(\{y_1, y_2\}))}{\|y_1 - y_2\|} : y_1, y_2 \in \partial K, 0 < \|y_1 - y_2\| < \delta \right\}, \delta > 0.$$

$$b(K) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\delta \rightarrow +0} b(K, \delta).$$

В силу неравенства (10) величины $b(K, \delta)$ конечны.

Теорема 1. Пусть $\{\Gamma_i\}_{i=1}^p$ — конечный набор спрямляемых замкнутых кривых, расположенных на ∂K . Тогда

$$b(K) \sum_{i=1}^p |\Gamma_i| \geq 2\mu(A(\bigcup_{i=1}^p \Gamma_i)). \quad (11)$$

Доказательство. Поскольку $A(\bigcup_{i=1}^p \Gamma_i) \subset \bigcup_{i=1}^p A(\Gamma_i)$, то теорему достаточно доказать для случая $p=1$. Пусть $\Gamma_1 = \Gamma$. Без ограничения общности можем также считать, что Γ — простая замкнутая кривая. Параметризуем кривую Γ натуральным параметром: $[0, |\Gamma|] \ni s \mapsto \gamma(s) \in \Gamma$. С каждым разбиением $\mathcal{P}$ промежутка $[0, |\Gamma|]$, т. е. набором точек $\{s_k\}_{k=0}^m$, $m \geq 1$, где $0 = s_0 < \dots < s_m = |\Gamma|$, свяжем спрямляемые кривые $\Delta_k \stackrel{\text{def}}{=} [\gamma(s_{k-1}), \gamma(s_k)]$, $\tilde{\Delta}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma(s) : s \in [s_{k-1}, s_k]\}$, $k=1, \dots, m$, и величины $d(\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1 \leq k \leq m} |\tilde{\Delta}_k|$, $\varepsilon(\mathcal{P}) \stackrel{\text{def}}{=} (\sum_{k=1}^m (|\tilde{\Delta}_k| - |\Delta_k|))^{1/2}$.

Пусть $0 < \delta < \frac{1}{2} \min\{1, \text{dist}(0, \partial K)\}$. Зафиксируем разбиение $\mathcal{P} = \{s_k\}_{k=0}^m$, для которого $\varepsilon = \varepsilon(\mathcal{P}) < \delta$, $d(\mathcal{P}) < \delta$. Легко видеть, что в этом случае каждая точка множества $M_\delta(\Gamma)$ (см. (2)) покрывается, по крайней мере, двумя множествами семейства $\{A(\tilde{\Delta}_k)\}_{k=1}^m$ и, следовательно,

$$2\mu(M_\delta(\Gamma)) \leq \sum_{k=1}^m \mu(A(\tilde{\Delta}_k)). \quad (12)$$

Положим $\mathcal{J} \stackrel{\text{def}}{=} \{k : |\Delta_k| \leq (1 - \varepsilon) |\tilde{\Delta}_k|\}$. Поскольку

$$\varepsilon^2 = \sum_{k=1}^m (|\tilde{\Delta}_k| - |\Delta_k|) \geq \varepsilon \sum_{k \in I} |\tilde{\Delta}_k|, \text{ то } \sum_{k \in I} |\tilde{\Delta}_k| \leq \varepsilon.$$

Отсюда, учитывая (10), получаем неравенство

$$\sum_{k \in I} \mu(A(\tilde{\Delta}_k)) \leq C \sum_{k \in I} |\tilde{\Delta}_k| \leq C \cdot \varepsilon. \quad (13)$$

Из условия $|\Delta_k| > (1 - \varepsilon) |\tilde{\Delta}_k|$ вытекает, что $\tilde{\Delta}_k \subset \Delta_k^{\varepsilon_k}$, где $\varepsilon_k = 4|\Delta_k| \cdot \varepsilon^{1/2}$. Поэтому, принимая во внимание (7) и неравенство $\mu(A(\Delta_k)) \leq b(K, \delta) |\Delta_k|$, имеем, что при $k \notin \mathcal{J}$ $\mu(A(\tilde{\Delta}_k)) \leq \mu(A(\Delta_k^{\varepsilon_k})) \leq b(K, \delta) |\Delta_k| + C\varepsilon^{1/2} |\Delta_k|$ (14). Из неравенств (12), (13) и (14) вытекает, что $2\mu(M_\delta(\Gamma)) \leq b(K, \delta) |\Gamma| + C(\varepsilon^{1/2} |\Gamma| + \varepsilon)$ (15), где C — положительная константа, зависящая только от K . Переходя в (15) к пределу сначала при $\varepsilon \rightarrow 0$, а затем при $\delta \rightarrow 0$, получаем (см. (3)) неравенство $2\mu(A(\Gamma)) \leq b(K) |\Gamma|$. Теорема доказана.

В случае $K = T_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, \dots, n\}$, $n \geq 3$, теорема 1 допускает следующее уточнение.

Теорема 2. Пусть $\{\Gamma_i\}_{i=1}^p$ — конечный набор спрямляемых замкнутых кривых, расположенных на ∂T_n . Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^p |\Gamma_i| \geq 2^{-n+3} \mu(A(\bigcup_{i=1}^p \Gamma_i)).$$

Из теоремы 2 очевидным образом вытекает

С л е д с т в и е 1. Гипотеза 1 верна.

Доказательству теоремы 2 предположим две небольшие леммы.

Лемма 4. Пусть $\alpha \in R^n \setminus \{0\}$, $n \geq 2$, μ_n, ξ — мера Лебега на гиперплоскости $L_\xi = \{x \in R^n : (x, \alpha) = \xi\}$. Тогда функция $R \ni \xi \mapsto F(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{n, \xi}(T_n \cap L_\xi)$ (16) является четной и невозрастающей на $[0, \infty[$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим индукцию по размерности n . Очевидно, что при $n = 2$ утверждение леммы справедливо.

Пусть $n > 2$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha' = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. Без ограничения общности можем считать, что $\alpha_n \neq 0$, $\alpha' \neq 0$. Рассмотрим функцию $R \ni \eta \mapsto F_1(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_{n-1, \eta}(T_{n-1} \cap L'_\eta)$, где $\mu_{n-1, \eta}$ — мера Лебега на гиперплоскости $L'_\eta = \{x \in R^{n-1} : (x, \alpha') = \eta\}$. По индуктивному предположению функция F_1 четная и невозрастающая на $[0, \infty[$. Отсюда, принимая во внимание равенство

$$F(\xi) = \frac{\|\alpha\|}{|\alpha_n|} \int_{\xi - |\alpha_n|}^{\xi + |\alpha_n|} F_1(\eta) d\eta,$$

получаем, что функция F четна и $F'(\xi) \leq 0$ при $\xi \geq 0$.

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть $\alpha \in R^n$, $\|\alpha\| = 1$, $n \geq 2$. Тогда

$$\int_{T_n} |(x, \alpha)| dx \leq 2^{n-1}. \quad (17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция F определена формулой (16). В силу леммы 4 F можно представить в виде $F(\xi) = \int_{|\xi|}^{\infty} dv$, где v — неотрицательная борелевская мера на $[0, \infty[$ с компактным носителем. Согласно неравенству Буняковского, имеем

$$\left(\int_0^{\infty} t^2 dv(t) \right)^2 \leq \left(\int_0^{\infty} t dv(t) \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} t^3 dv(t) \right).$$

Отсюда, учитывая равенства

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \xi^j F(\xi) d\xi &= \int_0^{\infty} \xi^j \int_{\xi}^{\infty} dv(t) = \frac{1}{j+1} \int_0^{\infty} t^{j+1} dv(t), \quad j = 0, 1, 2., \\ \int_0^{\infty} F(\xi) d\xi &= \frac{1}{2} \int_{T_n} dx = 2^{n-1}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \xi F(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{T_n} |(x, \alpha)| dx,$$

$$\int_0^{\infty} \xi^2 F(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int_{T_n} (x, \alpha)^2 dx = \frac{1}{3} 2^{n-1},$$

получаем неравенство (17). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. В силу теоремы 1 достаточно доказать неравенство $b(T_n) \leq 2^{n-2}$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что для любой пары точек $y, z \in \partial T_n$, принадлежащих одной из граней $N_k^{\pm} = \{(x_1, \dots, x_n) \in T_n : x_k \pm 1\}$, $k = 1, \dots, n$, выполнено неравенство $\mu(A([y, z])) \leq 2^{n-2} \|y - z\|$ (18). Без ограничения общности можем считать, что $y, z \in N_n^+$ и $y \neq z$. Пусть $y = (y', 1)$, $z = (z', 1)$, $y', z' \in T_{n-1}$. Принимая во внимание формулу (8) и то, что $(x, y) = (x', y') + x_n$, $(x, z) = (x', z') + x_n$ ($x = (x', x_n)$), получаем включение $A([y, z]) \subset D_+ \cup D_-$, где $D_{\pm} = \{x = (x', x_n) : x' \in T_{n-1}, x_n \in \mathbb{R}, \mp(x', y') \leq \pm x_n \leq \mp(x', z')\}$. Очевидно, что $\mu(D_+ \cup D_-) = \mu(D_+) + \mu(D_-) \leq \int_{T_{n-1}} |(x', y' - z')| dx' = \frac{1}{2} \int_{T_n} |(x, y - z)| dx$.

Следовательно, справедливо неравенство

$$\mu(A([y, z])) \leq \frac{1}{2} \int_{T_n} |(x, y - z)| dx. \quad (19)$$

Пусть $\alpha = (y - z) / \|y - z\|$. Тогда, принимая во внимание (17), имеем

$$\int_{T_n} |(x, y - z)| dx = \|y - z\| \int_{T_n} |(x, \alpha)| dx \leq 2^{n-1} \|y - z\|.$$

Отсюда, учитывая (19), получаем неравенство (18). Теорема доказана.

Список литературы: 1. Кацнельсон В. Э., Ронкин Л. И. О минимальном объеме аналитического множества // Сиб. мат. журн. 1974. 15, № 3. 516—528. С. 2. *Некоторые нерешенные задачи многомерного комплексного анализа*. Красноярск, 1987. С. 79. (Препринт № 41 М. Ин-т физики СО АН СССР). С. 79.

Поступила в редколлегию 01.04.88

ОБ АБСТРАКТНОМ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ
УРАВНЕНИИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ. I

§ 1. Введение. Уравнение малых колебаний вязкоупругого наследственного континуума, подверженного воздействию периодической нагрузки, может быть записано в виде абстрактной задачи Коши:

$$\dot{x} + Fx = B(t)x + \int_0^t G(t-\tau)x(\tau)d\tau + f(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2)$$

В уравнении (1) $x = x(t)$ — дифференцируемая вектор-функция (в.ф.) со значениями в банаховом пространстве X , предположения относительно линейных операторов F , $B(t)$, $G(t)$ перечислены ниже.

Трудности исследования задачи (1), (2) связаны с тем, что пространство решений однородной задачи ($f(t) = 0$) не инвариантно относительно сдвига аргумента на период операторного коэффициента $B(t)$. По этой причине не применимы методы, связанные с оператором монодромии, эффективные в случае $G(t) \equiv 0$. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и сдвигами в аргументах К. Г. Валеевым [1—3] был предложен метод S -рядов. Он основан на применении преобразования Лапласа, решения разностного уравнения в образах и аналитическом продолжении его как мероморфной функции во всю комплексную плоскость. Метод S -рядов использовался в работах А. Сейтказиевой и А. И. Горшкова.

В данной работе к задаче (1), (2) применяется подход К. Г. Валеева. Доказываются некоторые новые соотношения для решения уравнения в образах и с их помощью получены асимптотические формулы, позволяющие вывести аналог формулы Флоке — Ляпунова для решений задачи (1), (2). Кроме того, задача нахождения показателей Флоке — Ляпунова сведена к спектральной задаче для некоторого оператора, действующего в пространстве 2π -периодических в.ф. со значениями в X . Подобное сведение использовалось В. А. Якубовичем в задачах о параметрическом резонансе систем с конечным числом степеней свободы и В. Н. Фоминым для систем с распределенными параметрами. Развита ими техника может быть использована в задачах динамической устойчивости вязкоупругих систем.

Ссылки в тексте на работы К. Г. Валеева, в которых рассматривались конечномерные системы дифференциальных уравнений, означают, что для уравнения (1) в бесконечномерном пространстве доказательства соответствующих утверждений переносятся без изменений.

Относительно операторов в уравнении (1) предполагается следующее.

I. Оператор — F , вообще говоря, неограниченный, имеющий плотную в X область определения $D(F)$, порождает аналитическую полу-группу операторов. Это равносильно [4, §13] тому, что для достаточно больших $\lambda (\lambda \in C)$, $|\arg \lambda| < \pi/2 + \kappa_0$, где $\kappa_0 > 0$, оператор $F + \lambda I$ обратим (I — единичный оператор в X), причем

$$\|(F + \lambda I)^{-1}\| = O(|\lambda|^{-1}). \quad (3)$$

II. Зафиксируем некоторое $\epsilon > 0$, при котором оператор $F_\epsilon \equiv F + \epsilon I$ обратим. Оператор $G(t)F_\epsilon^{-1}$ ограничен при каждом $t > 0$, сильно измерим как функция t ($t > 0$), кроме того,

$$\int_0^\infty e^{at} \|G(t) F_\epsilon^{-1}\| dt < \infty \quad (4)$$

при некотором a ($a \geq 0$). В полуплоскости $\Pi_a = \{\lambda | \operatorname{Re} \lambda > -a\}$ определим преобразование Лапласа

$$\hat{G}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t) dt$$

на векторах из $D(F)$. Требуется, чтобы оператор-функция (о.-ф.) $L(\lambda) \equiv \lambda I + F - \hat{G}(\lambda)$ была обратима для $\lambda \in \Pi_a$, за исключением не более чем счетного числа полюсов о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$, не имеющих предельных точек в Π_a . Вычеты о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$ в полюсах конечномерны, т. е. о.-ф. $L^{-1}(\lambda)$ предполагается конечномероморфной (к. м.) в Π_a .

III. О.-ф. $B(t)$ имеет вид $B(t) = B_{-l} \exp(-ilt) + \dots + B_l \exp(ilt)$, причем операторы $B_k F^{-1} \in \sigma_\infty$ (σ_∞ — идеал вполне непрерывных операторов в X), $|k| \leq l$.

IV. Оставляя в стороне исследование корректности задачи Коши (1), (2), требующее дополнительных ограничений, считаем, что задача (1), (2) имеет решение $x(t)$, причем в.-ф. $Fx(t)$ и $x(t)$ непрерывны при $t \geq 0$ и растут при $t \rightarrow \infty$ не быстрее экспоненты. В.-ф. $f(t)$ интегри-

руема $\|f_a\| \equiv \int_0^\infty e^{at} \|f(t)\| dt < \infty$.

При доказательстве теоремы 2 дополнительно предполагается

V. В.-ф. $f(t)$ удовлетворяет локально условию Гельдера; для каждого $\xi > -a$ конечны интегралы $\int |\lambda|^{-1} (\|\hat{G}(\lambda)(F + \lambda I)^{-1}\| + \|B_k(F + \lambda I)^{-1}\|) d\eta$. Интегрирование проводится по лучам $\{\lambda | \lambda = \xi + i\eta, R < |\eta| < \infty\}$, $R = R(\xi)$ — некоторое положительное число, $1 \leq |k| \leq l$.

В первой части работы доказываются вспомогательные предложения. Сформулируем основные результаты работы, анонсированные ранее [5, 6], доказательство которых содержится во второй части.

Теорема 2. *Существует последовательность чисел σ_k ($k = 1, 2, \dots$), $0 \leq \operatorname{Im} \sigma_k < 1$, $\operatorname{Re} \sigma_1 \geq \operatorname{Re} \sigma_2 \geq \dots > -a$, не имеющая предельных точек в Π_a , такая, что для любого $\epsilon > -a$ решение $x(t)$ задачи (1), (2) представим в виде*

$$x(t) = \sum e^{\sigma_k t} [A_{k0}(t) + tA_{k1}(t) + \dots + t^{m_k} A_{km_k}(t)] + x_\epsilon(t). \quad (5)$$

Суммирование проводится по k от 1 до $N = N(\varepsilon)$, где $\operatorname{Re} \sigma_N > \varepsilon$, $A_{kj}(t)$ — 2π -периодические целые в.-ф., причем

$$\|A_{kj}(t)\| \leq C(k, j) [\|x_0\| + \|f\|_a], \|x_\varepsilon(t)\| \leq C(\varepsilon) e^{\varepsilon t} [\|x_0\| + \|f\|_a], \quad (6)$$

$C(k, j)$, $C(\varepsilon)$ — некоторые положительные постоянные, $m_k < \delta_k$. Последовательность σ_k ($k = 1, 2, \dots$) и последовательность δ_k ($k = 1, 2, \dots$) натуральных чисел не зависят от x_0 и $f(t)$.

Пусть σ_k ($k = 1, 2, \dots$) — последовательность показателей Флоке — Ляпунова для задачи Коши (1), (2), $\sigma(L)$ — спектр о.-ф. $L(\lambda)$. Положим $\Sigma = \{\sigma_{nk} | \sigma_{nk} = \sigma_k + in, k = 1, 2, \dots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $\Sigma_0 = \{\sigma_{nk}^0 | \sigma_{nk}^0 = \sigma_k^0 + in, \sigma_k^0 \in \sigma(L), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k = 1, 2, \dots\}$. Пусть X — гильбертово пространство. Положим $L_2(X)$ — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом нормы 2π -периодических в.-ф. со значениями в X . Определим в $L_2(X)$ оператор

$$S(\sigma)g = \dot{g} + Fg + \sigma g - B(t)g - \int_{-\infty}^t e^{-\sigma(t-\tau)} G(t-\tau)g(\tau) d\tau \quad (7)$$

с областью определения $D(S) = \{g | g \in L_2(X), \dot{g}, Fg \in L_2(X), g(0) = g(2\pi)\}$, $\operatorname{Re} \sigma > -a$.

Теорема 3. Спектр оператора $S(\sigma)$ за вычетом точек Σ_0 совпадает с $\Sigma \setminus \Sigma_0$, причем кратность характеристических чисел σ_{nk} совпадает с δ_k ($k = 1, 2, \dots, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Для того чтобы сократить доказательство, рассматривается частный случай: $l = 1, B_0 = 0, a = c = 0$; т.е. о.-ф. $B(t)$ имеет вид $B(t) = B_1 \exp(-it) + B_{-1} \exp(it)$, оператор F обратим, вместо полуплоскости Π_a рассматривается полуплоскость $\Pi = \{\lambda | \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Во второй части работы показано, в каких дополнениях нуждается общий случай (см. также [7]). Через R ($R > 0$) обозначается достаточно большое число.

§ 2. Вспомогательные утверждения. Преобразуя уравнение (1) по Лапласу, получим равенство $\hat{x}(\lambda) = L^{-1}(\lambda) \{x_0 + \hat{f}(\lambda) + B_1 \hat{x}(\lambda + i) + B_{-1} \hat{x}(\lambda - i)\}$ (8) для $\operatorname{Re} \lambda > R$ (существование $h^{-1}(\lambda)$ для $\operatorname{Re} \lambda > R$ доказано в лемме 1). Вводя обозначения $l(\lambda) = FL^{-1}(\lambda)$, $\varphi(\lambda) = F\hat{x}(\lambda)$, $\omega(\lambda) = l(\lambda)(x_0 + \hat{f}(\lambda))$ (9), $k_{\pm 1}(\lambda) = l(\lambda)B_{\pm 1}F^{-1} (\in \Sigma_\infty)$ (10) и действуя на равенство (8) оператором F , перепишем его в виде $\varphi(\lambda) = \omega(\lambda) + k_1(\lambda)\varphi(\lambda + i) + k_{-1}(\lambda)\varphi(\lambda - i)$ (11).

Исследование свойств уравнения (11) занимает центральное место в работе.

Лемма 1. О.-ф. $l(\lambda)$, $k_{\pm 1}(\lambda)$ и в.-ф. $\omega(\lambda)$ голоморфны и ограничены вне прямоугольника $\pi(R) = \{\lambda | 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq R, |\operatorname{Im} \lambda| \leq R\}$, причем

$$k_{\pm 1}(\lambda) = o(1); \quad (12)$$

$$\lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Pi$$

$$F^{-1}k_{\pm 1}(\lambda) = O(|\lambda|^{-1}). \quad (13)$$

Доказательство. В силу леммы Римана—Лебега (доказательство которой, приведенное в [8], пригодно для рассматриваемого случая)

$$\hat{G}(\lambda) F^{-1} = o(1), \lambda \rightarrow \infty, \lambda \in \Pi. \quad (14)$$

В силу оценок (3), (14) о.-ф. $T(\lambda) \equiv \hat{G}(\lambda)(F + \lambda I)^{-1} = \hat{C}(\lambda) F^{-1}(I - \lambda(F + \lambda I)^{-1}) = o(1)$ (15), поэтому о.-ф. $L(\lambda) = (I - T(\lambda))(F + \lambda I)$ (16) обратима вне некоторого прямоугольника $\pi(R)$, причем для $\lambda \notin \pi(R)$ $\|l(\lambda)\| \leq \|F(F + \lambda I)^{-1}\| (1 - \|T(\lambda)\|)^{-1} \leq C(R)$ (17). Первое утверждение леммы доказано. Оценка (13) следует из (15), (16) и неравенства $\|F^{-1}k_{\pm 1}(\lambda)\| \leq \|(F + \lambda I)^{-1}\| (1 - \|T(\lambda)\|)^{-1} \|B_{\pm 1} F^{-1}\|$.

Используя один прием из статьи А. С. Маркуса [9], покажем, что для $T \in \sigma_{\infty}$ $l(\lambda) T = o(1)$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Pi$ (18). Применяя соотношение (16) и формулу $(I - T)^{-1} = I + (I - T)^{-1} T$, имеем

$$l(\lambda) F^{-1} = (F + \lambda I)^{-1} + l(\lambda) \hat{G}(\lambda) F^{-1} (F + \lambda I)^{-1}. \quad (19)$$

Формулы (3), (14), (17), (19) приводят к оценке $\|l(\lambda) F^{-1} z\| \leq C \times \times |\lambda|^{-1} \|z\|$, $\lambda \notin \pi(R)$ (20) с постоянной $C > 0$, не зависящей от λ , $z \in X$. Выбирая ε — сеть ($\varepsilon > 0$) $\{x_i\}$, $1 \leq i \leq N(\varepsilon)$, для компактного множества $Y = \{Tx | x \in X, \|x\| = 1\}$ $\forall y \in Y$ имеем $\|y - x_i\| < \varepsilon$ при некотором $i = i(y)$. Для фиксированного x , $\|x\| = 1$ выберем $i = i(x)$ так, чтобы $\|Tx - x_i\| < \varepsilon$. В силу плотности $D(F)$ в X выберем $y_i \in X$ так, чтобы $\|x_i - F^{-1}y_i\| < \varepsilon$. Учитывая неравенства (17), (20) и оценку $\|l(\lambda) Tx\| \leq \|l(\lambda)\| (\|Tx - x_i\| + \|x_i - F^{-1}y_i\|) + \|l(\lambda) \times \times F^{-1}y_i\|$ получим $\|l(\lambda) Tx\| < 3C(R)\varepsilon$ для достаточно больших λ , $\lambda \in \Pi$. Последнее неравенство доказывает соотношение (18). Полагая в нем $T = B_{\pm 1} F^{-1}$, получим (12). Лемма доказана.

В пространстве $C_R(X)$ — голоморфных при $\operatorname{Re} \lambda > R$, непрерывных и ограниченных при $\operatorname{Re} \lambda \geq R$ в.-ф. с $\sup$ -нормой оператор $(U\varphi)(\lambda) = = k_1(\lambda) \varphi(\lambda + i) + k_{-1}(\lambda) \varphi(\lambda - i)$ ($\varphi \in C_R(X)$) является сжатием, если R достаточно велико. Для $\forall \omega(\lambda) \in C_R(X)$ решение уравнения (11) может быть представлено абсолютно сходящимся рядом:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} (U^n \omega)(\lambda) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum_{q_j=\pm 1} k_{q_1}(\lambda) k_{q_2}(\lambda + iq_1) \\ &\dots k_{q_{\sigma}}(\lambda + iq_1 + \dots + iq_{\sigma-1}) \omega(\lambda + iq_1 + \dots + iq_{\sigma}). \end{aligned} \quad (21)$$

Следуя [1—3], сгруппируем слагаемые при $\omega(\lambda + ir)$ в сумме (21), перепишем ее в виде

$$\varphi(\lambda) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} S_r(\lambda) \omega(\lambda + ir), \quad (22)$$

где

$$S_r(\lambda) = \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sum'_{q_j=\pm 1} k_{q_1}(\lambda) k_{q_2}(\lambda + iq_1) \dots k_{q_{\sigma}}(\lambda + iq_1 + \dots + iq_{\sigma-1}). \quad (23)$$

Знак (') означает, что суммирование в (23) проводится по всем индексам, удовлетворяющим соотношению $q_1 + \dots + q_{\sigma} = r$. Формуле

можно дать геометрическую интерпретацию [1]. Каждому целому числу r сопоставим луч $\Lambda_r = \{(\xi, \eta) | \eta = \xi + r, \xi \geq 0\}$. Каждому произведению в сумме (23) соответствует ломаная, составленная из отрезков длины 1, параллельных координатным осям. Узлы ломаной находятся в точках (r_1, r_2) , где $r_{1,2}$ — неотрицательные целые числа. Начало ломаной находится в точке $(0, 0)$, а конец — на Λ_r . Из узла проводится единичный отрезок вверх или вправо; если отрезок вертикален, то $\hat{q}_j = 1$, если горизонтален, то $\hat{q}_j = -1$. К аргументу о.-ф. k_{q_j} добавляется iA , если начало отрезка лежит на Λ_i . Сумме $S_0(\lambda)$ отвечают ломаные, которые начинаются и заканчиваются на Λ_0 . Рассмотрим часть слагаемых, составляющих $S_0(\lambda)$:

$$\begin{aligned} W(\lambda) = & k_1(\lambda) k_{-1}(\lambda + i) + k_1(\lambda) k_1(\lambda + i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + i) + \\ & + k_1(\lambda) k_1(\lambda + i) k_1(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + 3i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + i) + \\ & + k_1(\lambda) k_1(\lambda + i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_1(\lambda + i) k_{-1}(\lambda + 2i) k_{-1}(\lambda + i) + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

В формуле (24) суммирование проводится по ломаным, все точки которых лежат выше луча Λ_0 , кроме начала $(0, 0)$ и конца (r, r) , $r = 1, 2, \dots$. Покажем, что ряд (24) сходится не только при $\operatorname{Re} \lambda \geq R$, но и при $\operatorname{Im} \lambda \geq R$. В силу (12) найдется $R > 0$ такое, что $\|k_{\pm 1}(\lambda)\| \leq \kappa < 1/\sqrt{2}$ при $\operatorname{Im} \lambda \geq R$. Количество различных ломаных, соединяющих точки $(0, 0)$ и (r, r) равно 2^{r-2} ($r \geq 2$), ряд (24) оценивается при $\operatorname{Im} \lambda \geq R$ следующим образом: $\|W(\lambda)\| \leq \kappa^2 + \kappa^4 + 2\kappa^6 + 4\kappa^8 + \dots = (\kappa^2 - \kappa^4)(1 - 2\kappa^2)^{-1}$ (25).

Неравенство (25) вместе с (12) показывает, что $W(\lambda) = o(1)$ при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Pi$ (26).

Продолжим о.-ф. $W(\lambda)$ в полуплоскость Π , как к. м. о.-ф. С этой целью представим $W(\lambda)$ в виде $W(\lambda) = k_1(\lambda)[I + \bar{W}(\lambda)]k_1(\lambda + i)$ (27), где сумма $\bar{W}(\lambda)$ составлена по ломаным, лежащим не ниже Λ_1 , начало и конец которых лежит на Λ_1 . Все такие ломаные разбиваются на классы тех, которые не имеют с Λ_1 общих точек (помимо начала и конца), имеющих одну общую точку, две общие точки и т. д. Ломаная, имеющая с Λ_1 k ($k \geq 1$) общих точек, составлена из k ломаных, каждая из которых не имеет с Λ_1 общих точек. Учитывая, что составной ломаной отвечает произведение мономов, отвечающих составляющим, имеем $W(\lambda) = W(\lambda + i) + W^2(\lambda + i) + W^3(\lambda + i) + \dots$. В силу оценки (26) этот ряд сходится при $\operatorname{Im} \lambda > R$ и при $\operatorname{Re} \lambda > R$. Суммируя ряд и подставляя в (27), получим формулу [3]: $W(\lambda) = k_1(\lambda)[I - W(\lambda + i)^{-1}k_{-1}(\lambda + i)]$ (28). При $\operatorname{Im} \lambda > R$ о.-ф. $W(\lambda) \in \sigma_\infty$ и голоморфна. Для $\operatorname{Im} \lambda < R$ формула (28) позволяет шаг за шагом продолжить $W(\lambda)$ в полуплоскость Π , как к.м. о.-ф. При этом используется частный случай одной теоремы И. Ц. Гохберга и Е. И. Сигала [10]: если к.м. о.-ф. $W(\lambda) \in \sigma_\infty$, то о.-ф. $[I - W(\lambda)]^{-1}$ также к.м. Ниже понадобится оценка $F^{-1}W(\lambda) = O(|\lambda|^{-1})$, $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Pi$ (29), вытекающая из (13), (26), (28). Обозначим $b(\lambda) = |\lambda|^{-1} \|B_1(F + \lambda I)^{-1}\| + \|B_{-1}(F + \lambda I)^{-1}\|$ (30). По предположению V функция $b(\lambda)$ интегрируема по лучам $\{\lambda | \lambda = \xi + i\eta, R < |\eta| < \infty\}$, где $R = R(\xi) > 0$. Под записью $T(\lambda) = O(b(\lambda))$ для о.-ф. $T(\lambda)$ понимается неравенство

$T(\lambda) \leq Cb(\lambda)$ для достаточно больших $|\operatorname{Im} \lambda|$ с постоянной C , не зависящей от $\operatorname{Im} \lambda$. Итерируя формулу (28), имеем

$$\begin{aligned} W(\lambda - i) &= k_1(\lambda - i)k_{-1}(\lambda) + k_1(\lambda - i)k_1(\lambda), \\ [I - W(\lambda + i)]^{-1}k_{-1}(\lambda + i)[I - W(\lambda)]^{-1}k_{-1}(\lambda). \end{aligned} \quad (31)$$

Используя оценки (3), (15) и формулу (16), для $|\lambda| > R$, $\lambda \in \Pi$ получим неравенство

$$\begin{aligned} \|F^{-1}k_1(\lambda - i)k_{\pm 1}(\lambda)\| &= \|(F + (\lambda - i)I - \hat{G}(\lambda - i))^{-1}B_1 \cdot \\ (F + \lambda I - \hat{G}(\lambda))^{-1}B_{\pm 1}F^{-1}\| &\leq \|(F + (\lambda - i))^{-1}\| \|B_1(F + \lambda I)^{-1}\| \\ (1 - \|T(\lambda - i)\|)^{-1}(1 - \|T(\lambda)\|)^{-1} \|B_{\pm 1}F^{-1}\| &\leq Cb(\lambda), \end{aligned} \quad (32)$$

которое вместе с формулой (31) приводит к оценке $F^{-1}W(\lambda) = O(b(\lambda))$, $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \infty$, $\lambda \in \Pi$ (33).

Проведенными рассуждениями доказана

Лемма 2. *О.-ф. $W(\lambda)$ (23) голоморфна и ограничена при больших $\operatorname{Im} \lambda$ или $\operatorname{Re} \lambda$, $W(\lambda) \in \sigma_\infty$, продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость Π , удовлетворяет соотношению (28) и оценкам (26), (29), (33) при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \infty$.*

Аналогично вводится о.-ф. $V(\lambda)$, составленная по ломаным, все точки которых лежат ниже Λ_0 , кроме начала $(0, 0)$ и конца (r, r) $r = 2, \dots$. Для $V(\lambda)$ справедлива

Лемма 2'. *О.-ф. $V(\lambda)$ голоморфна и ограничена при больших $\operatorname{Re} \lambda$ или $|\operatorname{Im} \lambda|$ ($\operatorname{Im} \lambda < 0$), продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость Π , удовлетворяет соотношению $V(\lambda) = k_{-1}(\lambda)[I - V(\lambda - i)]^{-1}k_1(\lambda - i)$ (34) и оценкам ($\operatorname{Im} \lambda \rightarrow -\infty$) $V(\lambda) = o(1)$, $F^{-1}V(\lambda) = O(|\lambda|^{-1})$, $F^{-1}V(\lambda) = O(b(\lambda))$ (35).*

Для о.-ф. $S_0(\lambda)$ при больших $\operatorname{Re} \lambda$ справедлива формула [1—3]: $S_0(\lambda) = [I - V(\lambda) - W(\lambda)]^{-1}$ (36).

Положим $Q(\lambda) = [I - W(\lambda)]^{-1}$, $P(\lambda) = [I - V(\lambda)]^{-1}$ (37).

Лемма 3. *О.-ф. $S_0(\lambda)$ продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость Π . Полюсы о.-ф. $S_0(\lambda)$ могут находиться лишь в точках $\lambda_{nk} = \lambda_k + i\eta$ ($k = 1, 2, \dots$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), где $0 \leq \operatorname{Im} \lambda_k < 1$, последовательность λ_k ($k = 1, 2, \dots$) не имеет предельных точек в Π . Кратность полюсов в точках λ_{nk} не превосходит γ_k , где γ_k ($k = 1, 2, \dots$) — некоторая последовательность натуральных чисел. Вне системы кружков с центрами в точках λ_{nk} и радиуса r (r достаточно мало) в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \geq \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \neq \operatorname{Re} \lambda_k$ ($k = 1, 2, \dots$) о.-ф. $S_0(\lambda)$ ограничена. Справедливы формулы*

$$S_0(\lambda) = Q(\lambda) + Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i)Q(\lambda), \quad (38)$$

$$S_0(\lambda) = P(\lambda) + P(\lambda)k_1(\lambda)S_0(\lambda + i)k_{-1}(\lambda + i)P(\lambda), \quad (39)$$

$$Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i) = S_0(\lambda)k_{-1}(\lambda)P(\lambda - i), \quad (40)$$

$$P(\lambda)k_1(\lambda)S_0(\lambda + i) = S_0(\lambda)k_1(\lambda)Q(\lambda + i). \quad (41)$$

Доказательство. В силу лемм 2, 2' и упомянутой теоремы из работы [10] $S_0(\lambda)$ продолжается как к. м. о.-ф. в полуплоскость Π . Для доказательства формулы (38) при больших $\operatorname{Re} \lambda$ покажем, что правая часть (38) определяет правый обратный оператор к $I - V(\lambda)$ —

— $W(\lambda)$:

$$I = (I - V(\lambda) - W(\lambda))Q(\lambda)[I + k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i)Q(\lambda)]. \quad (42)$$

Раскрывая скобки и сокращая на оператор $Q(\lambda)$, перепишем равенство (42) в виде $V(\lambda) = k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i) - V(\lambda)Q(\lambda)k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i)$ (43).

Подставляя в правую часть (43) правую часть формулы (34) и пользуясь соотношением (28), имеем

$$\begin{aligned} V(\lambda) &= k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i) - k_{-1}(\lambda)P(\lambda - i)k_1(\lambda - i)Q(\lambda). \\ k_{-1}(\lambda)S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i) &= k_{-1}(\lambda)[S_0(\lambda - i) - P(\lambda - i)W(\lambda - i)]. \\ S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i) &= k_{-1}(\lambda)[I - (I - V(\lambda - i))^{-1}W(\lambda - i)]S_0(\lambda - i) \\ k_1(\lambda - i) &= k_{-1}(\lambda)(I - V(\lambda - i))^{-1}[I - V(\lambda - i) - W(\lambda - i)] \times \\ &\quad \times S_0(\lambda - i)k_1(\lambda - i). \end{aligned} \quad (44)$$

В силу равенства (34) правая часть (44) совпадает с $V(\lambda)$. Точно также доказывается, что правая часть формулы (38) определяет левый обратный к $I - V(\lambda) - W(\lambda)$. Остальные формулы (39)–(41) выводятся аналогично.

Выберем R настолько большим, что о.-ф. $Q(\lambda)$, $k_1(\lambda - i)$, $k_{-1}(\lambda)$ голоморфны при $\text{Im } \lambda > R$ или $\text{Re } \lambda > R$, о.-ф. $S_0(\lambda)$ голоморфна при $\text{Re } \lambda > R$. Обозначим полюсы о.-ф. $S_0(\lambda)$ в прямоугольнике $\pi_+(R) = \{\lambda \mid R - 1 \leq \text{Im } \lambda \leq R, \varepsilon \leq \text{Re } \lambda \leq R\}$ через $\{\tilde{\lambda}_k\}$, кратность полюсов через $\{\gamma_k^+\}$ ($k = 1, \dots, N_+(\varepsilon)$). Положим $\tilde{\lambda}_k = \lambda_k^+ + in_k$, где $0 \leq \text{Im } \lambda_k^+ < 1$, n_k — некоторые натуральные числа. Для произведения

$$\Delta_1(\lambda) = \prod_{k=1}^{N_+} \text{sh}^{\gamma_k^+} \pi(\lambda - \lambda_k^+) \quad (45)$$

справедлива формула $\Delta_1(\lambda - i) = (-1)^{\gamma^+} \Delta_1(\lambda)$, где $\gamma^+ = \sum \gamma_k^+$. Умножая равенство (38) на $\Delta_1(\lambda)$ и полагая $S_+(\lambda) = S_0(\lambda) \Delta_1(\lambda)$, $Q_1(\lambda) = Q(\lambda) \Delta_1(\lambda)$, получим соотношение

$$S_+(\lambda) = Q_1(\lambda) + (-1)^{\gamma^+} Q(\lambda) k_{-1}(\lambda) S_+(\lambda - i) k_1(\lambda - i) Q(\lambda). \quad (46)$$

Так как правая часть формулы (46) голоморфна в прямоугольнике $\{\lambda \mid \varepsilon \leq \text{Re } \lambda \leq R, R \leq \text{Im } \lambda \leq R - 1\}$, то там же голоморфна и левая часть. Делая замены $\lambda \rightarrow \lambda + in$ ($n = 1, 2, \dots$) в формуле (46), получим голоморфность о.-ф. $S_+(\lambda)$ в полосе $\{\lambda \mid \varepsilon \leq \text{Re } \lambda \leq R, \text{Im } \lambda \geq R\}$. Обозначим

$$\begin{aligned} s_n &= \max \|S_+(\lambda + in)\|, \lambda \in \pi_+(R), n = 0, 1, \dots, \\ q &= \sup \|Q(\lambda)\|^2 \|k_{-1}(\lambda)\| \|k_1(\lambda - i)\|, q_0 = \sup \|Q_+(\lambda)\|. \end{aligned}$$

В силу (12), (26) справедливы неравенства $q < 1$, $q_0 < \infty$, если R достаточно велико. Пользуясь соотношением (46), получим неравенства $s_n \leq q_0 + qs_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$), из которых вытекает ограниченность о.-ф. $S_+(\lambda)$ при $\text{Im } \lambda > R$: $s_n \leq s_0 + q_0 + q_0q + q_0q^2 + \dots = s_0 + q_0(1 - q)^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Аналогично рассматривается случай $\text{Im } \lambda \leq -R + 1$, при этом используется формула (39). Построим произведения $\Delta_{-1}(\lambda)$ и $\Delta_0(\lambda)$ по полюсам о.-ф. $S_0(\lambda)$ в прямоугольнике

$\pi_-(R) = \{\lambda \mid -R \leq \operatorname{Im} \lambda \leq -R + 1, \varepsilon \leq \operatorname{Re} \lambda \leq R\}$ и $\pi_0(R) = \{\lambda \mid |\operatorname{Im} \lambda| \leq R, \varepsilon \leq \operatorname{Re} \lambda \leq R\}$ соответственно. Положим $\Delta(\lambda) = \Delta_{-1}(\lambda) \Delta_0(\lambda) \Delta_1(\lambda)$, $\tilde{S}(\lambda) = S_0(\lambda) \Delta(\lambda)$. О.-ф. $\tilde{S}(\lambda)$ голоморфна и ограничена в полуплоскости $\{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda \geq \varepsilon\}$. Нули функции $\Delta(\lambda)$ в этой полуплоскости имеют вид $\{\lambda_{nk}\}$, где $\lambda_{nk} = \lambda_k + in$, $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $0 \leq \operatorname{Im} \lambda_k < 1$, кратность корней не превосходит γ_k , где $\{\gamma_k\}$ — некоторые натуральные числа ($k = 1, \dots, N(\varepsilon)$). Вне малых дисков с центрами в λ_{nk} функция $\Delta(\lambda)$ ограничена снизу, а о.-ф. $S_0(\lambda) = \tilde{S}(\lambda) \Delta^{-1}(\lambda)$ ограничена сверху. Лемма доказана.

Каждая ломаная, соединяющая точку $(0, 0)$ и точку, лежащую на Λ_r , может быть составлена из ломаной, начало которой лежит в $(0, 0)$, а конец — на Λ_0 , и ломаной, начало которой лежит на Λ_0 , а конец — на Λ_r , причем вторая ломаная не имеет общих точек с Λ_0 . Эти соображения приводят к формулам [3]:

$$\begin{aligned} S_1(\lambda) &= S_0(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda), \quad S_2(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda + i), \\ S_3(\lambda) &= S_0(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda + i) \tilde{S}_1(\lambda + 2i), \dots, \end{aligned} \quad (47)$$

где $\tilde{S}_1(\lambda) = k_1(\lambda) Q(\lambda + i)$ (48), $S_{-1}(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda)$, $S_{-2}(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda - i)$, $S_{-3}(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda - i) \tilde{S}_{-1}(\lambda - 2i)$ (49), где $\tilde{S}_{-1}(\lambda) = k_{-1}(\lambda) P(\lambda - i)$ (50). В силу лемм 2, 2', 3 о.-ф. $S_r(\lambda)$ к. м. в Π ($r = 0, \pm 1, \dots$), о.-ф. $\tilde{S}_{\pm 1}(\lambda)$ голоморфны при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm \infty$ соответственно, на основании (12) (26) $\tilde{S}_{\pm 1}(\lambda) = o(1)$, $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm \infty$ (51). Положим $\psi_1(\lambda) = \omega(\lambda) + \tilde{S}_1(\lambda) \omega(\lambda + i) + \tilde{S}_1(\lambda) \times \times \tilde{S}_1(\lambda + i) \omega(\lambda + 2i) + \tilde{S}_1(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda + i) \tilde{S}_1(\lambda + 2i) \omega(\lambda + 3i) + \dots$ (52) $\psi_{-1}(\lambda) = \omega(\lambda) + \tilde{S}_{-1}(\lambda) \omega(\lambda - i) + \tilde{S}_{-1}(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda - i) \omega(\lambda - 2i) + \tilde{S}_{-1}(\lambda) \times \times \tilde{S}_{-1}(\lambda - i) \tilde{S}_{-1}(\lambda - 2i) \omega(\lambda - 3i) + \dots$ (53), $\varphi_{\pm 1}(\lambda) = S_0(\lambda) \psi_{\pm 1}(\lambda)$ (54). В силу свойств в.-ф. $\omega(\lambda)$ (лемма 1) и о.-ф. $\tilde{S}_{\pm 1}(\lambda)$ в.-ф. $\psi_{\pm 1}(\lambda)$ голоморфны и ограничены при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm \infty$ соответственно. Для любого $\lambda_0 \in \Pi$ найдется натуральное $k_0 = k_0(\lambda_0)$ такое, что в.-ф. $\psi_{\pm 1}(\lambda \pm ik_0)$ голоморфны при $\lambda = \lambda_0$. Представляя в.-ф. $\psi_{\pm}(\lambda)$ в виде $\psi_{\pm 1}(\lambda) = \omega(\lambda) + \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda) \omega(\lambda \pm i) + \dots + \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda) \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda \pm i) \dots \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda \pm \pm ik_0 \mp i) \psi_{\pm 1}(\lambda \pm ik_0)$ (55), продолжим их как мероморфные в.-ф. в полуплоскость Π .

Список литературы: 1. Валеев К. Г. О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. мат. и мех. 1960. 24, вып. 4. С. 585—602. 2. Валеев К. Г. Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. 3. № 6. С. 1113—1126. 3. Валеев К. Г. Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента // Тр. междунар. симп. по нелинейн. колебаниям. Качеств. методы теории нелинейн. колебаний. К., 1963. С. 100—119. 4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Заб-рейко, Е. И. Пустынник, Б. И. Соболевский. М., 1966. 499 с. 5. Милославский А. И. Некоторые математические задачи устойчивости вязкоупругих наследственных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и прил. функций.

$\pi_{-}(R) = \{\lambda \mid -R \leq \operatorname{Im} \lambda \leq -R + 1, \varepsilon \leq \operatorname{Re} \lambda \leq R\}$ и $\pi_{0}(R) = \{\lambda \mid |\operatorname{Im} \lambda| \leq R, \varepsilon \leq \operatorname{Re} \lambda \leq R\}$ соответственно. Положим $\Delta(\lambda) = \Delta_{-1}(\lambda) \Delta_0(\lambda) \Delta_1(\lambda)$, $\tilde{S}(\lambda) = S_0(\lambda) \Delta(\lambda)$. О.-ф. $\tilde{S}(\lambda)$ голоморфна и ограничена в полуплоскости $\{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda \geq \varepsilon\}$. Нули функции $\Delta(\lambda)$ в этой полуплоскости имеют вид $\{\lambda_{nk}\}$, где $\lambda_{nk} = \lambda_k + in$, $k = 1, \dots, N(\varepsilon)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $0 \leq \operatorname{Im} \lambda_k < 1$, кратность корней не превосходит γ_k , где $\{\gamma_k\}$ — некоторые натуральные числа ($k = 1, \dots, N(\varepsilon)$). Вне малых дисков с центрами в λ_{nk} функция $\Delta(\lambda)$ ограничена снизу, а о.-ф. $S_0(\lambda) = \tilde{S}(\lambda) \Delta^{-1}(\lambda)$ ограничена сверху. Лемма доказана.

Каждая ломаная, соединяющая точку $(0, 0)$ и точку, лежащую на Δ , может быть составлена из ломаной, начало которой лежит в $(0, 0)$, а конец — на Λ_0 , и ломаной, начало которой лежит на Λ_0 , а конец — на Δ , причем вторая ломаная не имеет общих точек с Λ_0 . Эти соображения приводят к формулам [3]:

$$\begin{aligned} S_1(\lambda) &= S_0(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda), \quad S_2(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda + i), \\ S_3(\lambda) &= S_0(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda + i) \tilde{S}_1(\lambda + 2i), \dots, \end{aligned} \quad (47)$$

где $\tilde{S}_1(\lambda) = k_1(\lambda) Q(\lambda + i)$ (48), $S_{-1}(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda)$, $S_{-2}(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda - i)$, $S_{-3}(\lambda) = S_0(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda - i) \tilde{S}_{-1}(\lambda - 2i)$ (49), где $\tilde{S}_{-1}(\lambda) = k_{-1}(\lambda) P(\lambda - i)$ (50). В силу лемм 2, 2', 3 о.-ф. $S_r(\lambda)$ к. м. в Π ($r = 0, \pm 1, \dots$), о.-ф. $\tilde{S}_{\pm 1}(\lambda)$ голоморфны при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm \infty$ соответственно, на основании (12) (26) $\tilde{S}_{\pm 1}(\lambda) = o(1)$, $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm \infty$ (51). Положим $\psi_1(\lambda) = \omega(\lambda) + \tilde{S}_1(\lambda) \omega(\lambda + i) + \tilde{S}_1(\lambda) \times \times \tilde{S}_1(\lambda + i) \omega(\lambda + 2i) + \tilde{S}_1(\lambda) \tilde{S}_1(\lambda + i) \tilde{S}_1(\lambda + 2i) \omega(\lambda + 3i) + \dots$ (52) $\psi_{-1}(\lambda) = \omega(\lambda) + \tilde{S}_{-1}(\lambda) \omega(\lambda - i) + \tilde{S}_{-1}(\lambda) \tilde{S}_{-1}(\lambda - i) \omega(\lambda - 2i) + \tilde{S}_{-1}(\lambda) \times \times \tilde{S}_{-1}(\lambda - i) \tilde{S}_{-1}(\lambda - 2i) \omega(\lambda - 3i) + \dots$ (53), $\varphi_{\pm 1}(\lambda) = S_0(\lambda) \psi_{\pm 1}(\lambda)$ (54). В силу свойств в.-ф. $\omega(\lambda)$ (лемма 1) и о.-ф. $\tilde{S}_{\pm 1}(\lambda)$ в.-ф. $\psi_{\pm 1}(\lambda)$ голоморфны и ограничены при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm \infty$ соответственно. Для любого $\lambda_0 \in \Pi$ найдется натуральное $k_0 = k_0(\lambda_0)$ такое, что в.-ф. $\psi_{\pm 1}(\lambda \pm ik_0)$ голоморфны при $\lambda = \lambda_0$. Представляя в.-ф. $\psi_{\pm 1}(\lambda)$ в виде $\psi_{\pm 1}(\lambda) = \omega(\lambda) + \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda) \omega(\lambda \pm i) + \dots + \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda) \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda \pm i) \dots \tilde{S}_{\pm 1}(\lambda \pm \pm ik_0 \mp i) \psi_{\pm 1}(\lambda \pm ik_0)$ (55), продолжим их как мероморфные в.-ф. в полуплоскость Π .

Список литературы: 1. *Валеев К. Г.* О решении и характеристических показателях решений некоторых систем линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами // Прикл. мат. и мех. 1960. 24, вып. 4. С. 585—602. 2. *Валеев К. Г.* Об одном методе решения систем линейных дифференциальных уравнений с синусоидальными коэффициентами // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. 3. № 6. С. 1113—1126. 3. *Валеев К. Г.* Линейные дифференциальные уравнения с синусоидальными коэффициентами и стационарными запаздываниями аргумента // Тр. междунар. симп. по нелинейн. колебаниям. Качеств. методы теории нелинейн. колебаний. К., 1963. С. 100—119. 4. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустынный, Б. И. Соболевский. М., 1966. 499 с. 5. *Милославский А. И.* Некоторые математические задачи устойчивости вязкоупругих наследственных систем // Тез. докл. Всесоюз. конф. по теории и прил. функций.

дифференц. уравнений, ч. 2. Душанбе, 1987. С. 20—21. 6. Милославский А. И. Асимптотика решений абстрактного интегродифференциального уравнения с периодическими коэффициентами // Функцион. анализ и его прил. 1988. Вып. 22. С. 10—45. 7. Милославский А. И. Аналог представления Флоке для решений абстрактного интегродифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. К., 1987. С. 1—52. Деп. в УкрНИИТИ 13.04.87, № 1227—Ук87. 8. Винер Н. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. М., 1963. 256 с. 9. Маркус А. С. Некоторые критерии полноты системы корневых векторов линейного оператора в банаховом пространстве // Мат. сб. 1966. 70, № 4. С. 526—560. 10. Гохберг И. Ц., Сигал Е. И. Операторное обобщение теоремы о логарифмическом вычете и теоремы Руше // Мат. сб. 1971. 84, № 4. С. 607—630.

Поступила в редколлегию 16.05.88

УДК 517.5

Ю. П. ГИНЗБУРГ, Л. М. ЗЕМСКОВ

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ ОГРАНИЧЕННОГО ВИДА

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Определенная на некотором числовом множестве функция, значениями которой являются линейные ограниченные операторы в H , именуется в дальнейшем оператор-функцией (о.-ф.).

Если о.-ф. $X(\zeta)$ голоморфна при $|\zeta| < 1$ и

$$\sup_{0 < \rho < 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ \|X(\rho e^{i\varphi})\| d\varphi < \infty,$$

то будем писать $X \in A$. Если $X^{\pm 1} \in A$, то пишем $X \in (A : A)$; если же $\|X(\zeta)\| \leq 1$ ($|\zeta| < 1$) и $X^{-1} \in A$, то $X \in (C : A)$ (известно, что из $\dim H < \infty$, $X \in A$, $\det X(\zeta) \neq 0$ при $|\zeta| < 1$ следует $X^{-1} \in A$).

В настоящей статье доказана представимость о.-ф. класса $(A : A)$ (о.-ф. ограниченного вида) мультипликативными интегралами В. П. Потапова [1] и исследована единственность таких представлений.

§ 1. Мультипликативные представления о.-ф. класса $(A : A)$.

1. Мы будем пользоваться следующими двумя предложениями.

Теорема 1.1. [2]. Для того чтобы $X \in A$, необходима и достаточна справедливость представления $X = y^{-1}Y$, в котором Y и y — голоморфные о.-ф. и скалярнозначная функция, $\|Y(\zeta)\| \leq 1$, $0 < |y(\zeta)| \leq 1$ при $|\zeta| < 1$.

Теорема 1.2 [1, 3]. Для принадлежности о.-ф. X классу $(C : A)$ необходима и достаточна справедливость представления

$$X(\zeta) = V \int_0^1 \exp \{k(\vartheta(t), \zeta) dE(t)\}, \quad (1.1)$$

в котором $k(\vartheta, \zeta) = (\zeta + e^{i\vartheta})(\zeta - e^{i\vartheta})^{-1}$, V — унитарный оператор, ϑ — каноническая на $[0, 1]$ скалярная функция (т. е. неубывающая,

$\vartheta([0, l) \subset [0, 2\pi[$, $\vartheta(t-0) = \vartheta(t)$, $\vartheta(0) = \vartheta(+0)$ при $\vartheta(l) < 2\pi$, $\vartheta(0) = 0$ при $\vartheta(l) = 2\pi$), E — эрмитово-неубывающая о.-ф., непрерывная и ограниченной вариации на $[0, l]^1$.

Теорема 1.2. обобщает следующее известное предложение: скалярная функция $x(\zeta)$ голоморфна и удовлетворяет неравенству $0 < |x(\zeta)| \leq 1$ при $|\zeta| < 1$ в том и только том случае, если

$$x(\zeta) = e^{i\alpha} \exp \left\{ \int_0^{2\pi} k(t, \zeta) dr(t) \right\}, \quad (1.2)$$

где $\text{Im} \alpha = 0$, r — неубывающая функция на $[0, 2\pi]$.

Ниже будет доказана

Лемма 1.1. Для X и x , имеющих соответственно представления (1.1) и (1.2), найдутся такие $a > 0$, каноническая на $[0, a]$ функция φ , эрмитово-неубывающая о.-ф. ограниченной вариации $\hat{E}$ и неубывающая скалярная функция $\hat{r}$, что

$$X(\zeta) = V \int_0^a \exp \{ k(\varphi(t), \zeta) d\hat{E}(t) \},$$

$$x(\zeta) = e^{i\alpha} \exp \left\{ \int_0^a k(\varphi(t), \zeta) d\hat{r}(t) \right\}.$$

Из этого утверждения и теорем 1.1 и 1.2 следует анонсированная в заметке [4]

Теорема 1.3. Для принадлежности о.-ф. X классу $(A: A)$ необходима и достаточна справедливость представления (1.1), в котором V — унитарный оператор, ϑ — каноническая на $[0, l]$ функция, E — эрмитовозначная непрерывная на $[0, l]$ о.-ф. ограниченной вариации.

Для того чтобы убедиться в справедливости леммы 1.1, воспользуемся несколькими вспомогательными утверждениями. Начнем со следующего легко доказываемого предложения.

Лемма 1.2. Пусть $f_j(t)$ ($a_j \leq t \leq b_j$, $j = 1, 2$) — неубывающие функции. Если совпадают их множества значений, а также совпадают множества значений, принимаемых ими на интервалах постоянства, то существует такая возрастающая функция r , что $r([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$ и $f_1(t) = f_2(r(t))$ ($a_1 \leq t \leq b_1$).

Лемма 1.3. Пусть f — скалярная ограниченная на $[0, l]$ функция, имеющая не более счетного множества точек разрыва, E — непрерывная о.-ф. ограниченной вариации на $[0, l]$, $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ ($s \leq \infty$) — некоторая система интервалов постоянства о.-ф. E . Тогда

$$\int_0^t \exp \{ f(\tau) dE(\tau) \} = \int_0^{\psi(t)} \exp \{ f(r(\tau)) dE(r(\tau)) \}, \quad (1.3)$$

¹ Вариация оператор-функции, ее непрерывность и т. п. здесь и ниже понимаются в смысле равномерной операторной метрики.

где $\psi(t) = \int_0^t \chi_G(\tau) d\tau$ (χ_G — индикатор множества $G := [0, l] \setminus \bigcup [\alpha_j, \beta_j]$),

r — функция, обратная для ψ на G .

Доказательство. Очевидно, мультипликативные интегралы (1.3) существуют. Построим последовательности разбиений отрезков $[0, l]$ и $[0, \psi(t)]$:

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = t, \quad \max_i (\tau_i - \tau_{i-1}) \rightarrow 0,$$

$$0 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = \psi(t), \quad \xi_j = \psi(\tau_j), \quad \max_j (\xi_j - \xi_{j-1}) \rightarrow 0.$$

Если $[\tau_{j-1}, \tau_j] \cap G = \emptyset$, то в качестве $\tilde{\tau}_j$ возьмем любую точку отрезка $[\tau_{j-1}, \tau_j]$; если $[\tau_{j-1}, \tau_j] \cap G \neq \emptyset$, то $\tilde{\tau}_j$ — любая точка этого пересечения. Положим $\tilde{\xi}_j = \psi(\tilde{\tau}_j)$. Справедливость утверждения леммы вытекает из равенства

$$\prod_{i=1}^n \exp \{f(\tilde{\tau}_i) (E(\tau_i) - E(\tau_{i-1}))\} = \prod_{j=1}^n \exp \{f(r(\tilde{\xi}_j)) [E(r(\tilde{\xi}_j)) - E(r(\xi_{j-1}))]\}.$$

Лемма 1.4. Пусть

ϑ — каноническая на $[0, l]$ функция, f непрерывна на $[0, 2\pi]$,
(I) о.-ф. E имеет ограниченную вариацию, эрмитовозначна и непрерывна на $[0, l]$.

Тогда существуют такие $\hat{l} \geq l$, непрерывная неубывающая на $[0, \hat{l}]$ функция $\hat{\vartheta}$ ($\hat{\vartheta}(0) = 0$, $\hat{\vartheta}(\hat{l}) = 2\pi$), о.-ф. $\hat{E}$, имеющая ограниченную вариацию, эрмитовозначная и непрерывная на $[0, \hat{l}]$, что

$$\int_0^l \exp \{f(\vartheta(t)) dE(t)\} = \int_0^{\hat{l}} \exp \{f(\hat{\vartheta}(t)) d\hat{E}(t)\}.$$

При этом $\hat{l}$ и $\hat{\vartheta}$ строятся по l и ϑ .

Доказательство. Будем считать, что $\vartheta(0) = 0$, и условимся писать $\vartheta(l+0) = 2\pi$. Пусть $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$, где ϑ_1 — непрерывная на $[0, l]$ функция ($\vartheta_1(0) = 0$), ϑ_2 — функция скачков, $\vartheta_2(l+0) = 2\pi - \vartheta_1(l)$. Пусть Q — множество значений функции $r(t) := t + \vartheta_2(t)$ на $[0, l]$. Присоединяя к Q множество $\{\rho \mid \rho = r(t+0), 0 \leq t \leq l\}$, получим компакт $\bar{Q} \subset [0, \hat{l}]$ ($\hat{l} = r(l+0)$).

Пусть ψ — функция, обратная на $[0, l]$ функции r ; $\bar{\psi}$ определена на $\bar{Q}$. Очевидно,

$$\psi(t) = \int_0^t \chi_Q(\tau) d\tau.$$

Распространим этой формулой ψ на $[0, \hat{l}]$. Положим $\hat{\vartheta}(\tau) = \vartheta(\psi(\tau))$ ($\tau \in Q$), $\hat{\vartheta}(\tau) = (\beta - \alpha)^{-1} [(\tau - \alpha) \vartheta(\psi(\alpha) + 0) + (\beta - \tau) \vartheta(\psi(\alpha))]$, если $\tau \in [\alpha, \beta]$, где $[\alpha, \beta]$ — интервал, смежный компакт $\bar{Q}$, $\hat{E}(\tau) = E(\varphi(\tau))$

($\tau \in [0, \hat{l}]$). Так как $\hat{\vartheta}(r(t)) = \vartheta(t)$, $\hat{E}(r(t)) = E(t)$ ($t \in [0, l]$), то, применяя лемму 1.3, завершим доказательство.

Лемма 1.5. Пусть функции ϑ_j, f_j, E_j ($j=1, 2$) удовлетворяют на $[0, l_j]$ условиям (I). Тогда существуют такие $\hat{l}$, непрерывная неубывающая на $[0, \hat{l}]$ функция $\hat{\vartheta}$ ($\hat{\vartheta}(0) = 0$, $\hat{\vartheta}(\hat{l}) = 2\pi$), эрмитовозначные непрерывные на $[0, l]$ о.-ф. $\hat{E}_j$ ($j=1, 2$) ограниченной вариации, что

$$\int_0^{l_j} \exp \{f_j(\vartheta_j(t)) dE_j(t)\} = \int_0^{\hat{l}} \exp \{f_j(\hat{\vartheta}(t)) d\hat{E}_j(t)\}.$$

При этом $\hat{l}$ и $\hat{\vartheta}$ строятся по $l_1, l_2, \vartheta_1, \vartheta_2$.

Доказательство. На основании леммы 1.4 можно считать, что функции ϑ_j непрерывны, $\vartheta_j(0) = 0$, $\vartheta_j(l_j) = 2\pi$. Пусть A_j — множество значений ϑ_j на интервалах постоянства, $(A_1 \cup A_2) \setminus A_j = \{\rho_1^{(j)}, \rho_2^{(j)}, \dots\}$. Если $\vartheta_j(\alpha_k^{(j)}) = \rho_k^{(j)}$, то рассмотрим функцию $r^{(j)}(t) = t + \sum_k 2^{-k} \chi_k^{(j)}(t)$, где $\chi_k^{(j)}$ — индикатор промежутка $[\alpha_k^{(j)}, l_j]$ на $[0, l_j]$.

Пусть $\psi^{(j)}$ — функция, обратная функции $r^{(j)}$ на $[0, l_j]$, $\hat{l}_j = r^{(j)}(l_j)$. Продолжим $\psi^{(j)}$ на $[0, \hat{l}_j]$ с сохранением монотонности (ср. доказательство леммы 1.4). Положим $\hat{\vartheta}_j(t) = \vartheta_j(\psi^{(j)}(t))$, $\hat{E}_j(t) = E_j(\psi^{(j)}(t))$; при этом $\hat{\vartheta}_j(r^{(j)}(t)) = \vartheta_j(t)$, $\hat{E}_j(r^{(j)}(t)) = E_j(t)$, $\hat{\vartheta}_j(0) = 0$, $\hat{\vartheta}_j(\hat{l}_j) = 2\pi$. Очевидно, $\hat{\vartheta}_j([0, l_j]) = [0, 2\pi]$, а множество значений, принимаемых функцией $\hat{\vartheta}_j$ на интервалах постоянства, есть $A_1 \cup A_2$. На основании леммы 1.2 существует такая возрастающая на $[0, \hat{l}_1]$ функция g , что $g([0, \hat{l}_1]) = [0, \hat{l}_2]$, $\hat{\vartheta}_1(t) = \hat{\vartheta}_2(g(t))$ ($0 \leq t \leq \hat{l}_1$). Так как на основании леммы 1.3

$$\int_0^{l_j} \exp \{f_j(\vartheta_j(t)) dE_j(t)\} = \int_0^{\hat{l}_j} \exp \{f_j(\hat{\vartheta}_j(t)) d\hat{E}_j(t)\} \quad (j=1, 2), \quad (1.4)$$

то

$$\int_0^{\hat{l}_2} \exp \{f_2(\vartheta_2(t)) dE_2(t)\} = \int_0^{\hat{l}_1} \exp \{f_2(\hat{\vartheta}_1(t)) d\hat{E}_2(g(t))\}.$$

Отсюда и из равенства (1.4) (при $j=1$) вытекает справедливость утверждения леммы.

Из леммы 1.5 непосредственно следует лемма 1.1, а, значит, теорема 1.3 доказана.

2. Пусть функция $f(t, \zeta)$ ($a \leq t \leq b$) для любого ζ ($|\zeta| \neq 1$) ограничена и имеет на $[a, b]$ не более счетного множества точек разрыва, $E(t)$ — непрерывная о.-ф., эрмитовозначная и ограниченной вариации на $[a, b]$.

Интервал $]\alpha, \beta[\subset [a, b]$ назовем нейтральным относительно f и E , если

$$\int_{\alpha}^{\beta} \exp \{f(t, \xi) dE(t)\} = I \quad (|\xi| \neq 1)$$

и если $]\alpha, \beta[$ не содержится ни в каком другом интервале, обладающем этим свойством.

Теорема 1.4. Пусть f и E удовлетворяют (II),

$$F(\xi) = \int_a^b \exp \{f(t, \xi) dE(t)\} \quad (|\xi| \neq 1),$$

$\{]\alpha_j, \beta_j[\}_{j=1, s}^{\infty} (s \leq \infty)$ — совокупность попарно непересекающихся интервалов, нейтральных относительно f и E , таких, что $G := [a, b] \setminus \bigcup_j]\alpha_j, \beta_j[$ не содержит других нейтральных интервалов,

$$\psi(t) = \int_a^t \chi_G(\tau) d\tau,$$

r — функция, обратная ψ на G . Тогда

$$F(\xi) = \int_0^{\psi(b)} \exp \{\hat{f}(t, \xi) d\hat{E}(t)\},$$

где $\hat{f}(t, \xi) = f(\tau(t), \xi)$; $\hat{E}$ — некоторая эрмитовозначная непрерывная, о.-ф. ограниченной вариации на $[0, \psi(b)]$, причем на $[0, \psi(b)]$ нет интервалов, нейтральных относительно $\hat{f}$ и $\hat{E}$.

Доказательство. Будем считать, что E удовлетворяет условию Липшица, перейдя в случае необходимости к новой переменной $\tau = t + \text{Var } E$. Для упрощения записей при $s < \infty$ положим $]\alpha_s, \beta_s[=]\alpha_{s+1}, \beta_{s+1}[= \dots$. Пусть $M_0(t) = E'(t)$ (слабая производная), $M_j(t) = M_{j-1}(t)$ при $t \in [a, b] \setminus]\alpha_j, \beta_j[$, $M_j(t) = 0$ при $t \in]\alpha_j, \beta_j[$ ($j = 1, 2, \dots$), $M_\infty(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} M_j(t)$.

Положим

$$E_j(t) = E(a) + \int_a^t M_j(\tau) d\tau \quad (j = 1, 2, \dots, \infty).$$

Ясно, что $E_\infty(t) = \lim_{j \rightarrow \infty} E_j(t)$. Непосредственно проверяется, что при $j < \infty$, $t_1, t_2 \in G$, $t_1 < t_2$

$$\int_{t_1}^{t_2} \exp \{f(t, \xi) dE(t)\} = \int_{t_1}^{t_2} \exp \{f(t, \xi) dE_j(t)\}. \quad (1.5)$$

Воспользовавшись мультипликативным аналогом второй теоремы Хелли, установим справедливость (1.5) и при $j = \infty$.

О.-ф. E_∞ постоянна на интервалах $]\alpha_j, \beta_j[$; поэтому на основании леммы 1.3 получим из (1.5) (при $j = \infty$)

$$\int_{t_1}^{t_2} \exp \{f(t, \zeta) dE(t)\} = \int_{\psi(t_1)}^{\psi(t_2)} \exp \{f(t, \zeta) d\hat{E}(t)\}, \quad (1.6)$$

где $\hat{f}(t, \zeta) = f(r(t), \zeta)$, $\hat{E}(t) = E_\infty(r(t))$.

Докажем, что на $[0, \psi(b)]$ не существует интервалов, нейтральных для $\hat{f}$ и $\hat{E}$. Предположим, что для некоторого $]p, q[\subset [0, \psi(b)]$

$$\int_p^q \exp \{\hat{f}(t, \zeta) d\hat{E}(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1).$$

Тогда из (1.6) получим

$$\int_{r(p)}^{r(q)} \exp \{f(t, \zeta) dE(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1),$$

а это невозможно в силу условия, наложенного на G , и того, что функция r не принимает значений из $]\alpha_j, \beta_j[$ ($j = 1, 2, \dots$). Теорема доказана.

§ 2. О единственности мультипликативных представлений оператор-функций класса $(A : A)$. 1. Пусть ϑ — каноническая на $[0, l]$ функция. Назовем $t_0 \in]0, l[$ точкой роста ϑ , если всякая окрестность $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ содержит такие $t_1 < t_0$ и $t_2 > t_0$, что $\vartheta(t_1) < \vartheta(t_0) < \vartheta(t_2)$. Естественно определяются точки роста слева (справа) функции ϑ . Для $t = 0$ ($t = l$) понятия точки роста и точки роста справа (слева) совпадают по определению.

Лемма 2.1. Пусть о.-ф. $X(\zeta) (|\zeta| \neq 1)$ имеет вид (1.1), где V — унитарный оператор, ϑ — каноническая на $[0, l]$ функция, (III) E — эрмитовозначная непрерывная о.-ф. ограниченной вариации на $[0, l]$, $E(0) = 0$.

Если t_0 — точка роста функции ϑ , $\vartheta(t_0) < 2\pi$, то

$$\tau_X(\varphi_0) := \lim_{0 < \rho \rightarrow 1} |1 - \rho| \ln^+ \|X(\rho e^{i\varphi_0})\| = 0, \quad \varphi_0 = \vartheta(t_0). \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть

$$X(t_0, \zeta) := \int_0^{t_0} \exp \{k(\vartheta(t), \zeta) dE(t)\}. \quad (2.2)$$

Если $t_0 > 0$, то $\vartheta(t_0 - \delta) < \vartheta(t_0)$ для любого $\delta \in]0, t_0[$ и

$$X(t_0, \zeta) = \left(\int_{t_0 - \delta}^{t_0} \exp \{k(\vartheta(t), \zeta) dE(t)\} \right) x(t_0 - \delta, \zeta).$$

Отсюда вблизи точки $e^{i\theta}(t_0)$

$$\|X(t_0, \rho e^{i\theta}(t_0))\| \leq \mu_\delta \exp \left\{ \left| \frac{1+\rho}{1-\rho} \right| \text{Var}_{[t_0-\delta, t_0]} E \right\},$$

где $\mu_\delta (>0)$ зависит, вообще говоря, от δ . Так как $\text{Var}_{[t_0-\delta, t_0]} E \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} |1-\rho| \ln^+ \|X(t_0, \rho e^{i\theta}(t_0))\| = 0. \quad (2.1')$$

Для $t_0 = 0$ справедливость этого равенства тривиальна. Аналогично, для

$$Y(t_0, \zeta) := \int_{t_0}^t \exp \{k(\theta(t), \zeta) dE(t)\} \quad (2.3)$$

установим, что

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} |1-\rho| \ln^+ \|Y(t_0, \rho e^{i\theta}(t_0))\| = 0. \quad (2.1'')$$

Воспользовавшись равенством $X(\zeta) = Y(t_0, \zeta) X(t_0, \zeta)$, завершим доказательство.

Замечание. В ходе проведенного доказательства установлено, что если t_0 — точка роста слева (справа) функции θ , то справедливо (2.1) (соответственно (2.1'')).

Следующее утверждение легко получается с помощью стандартной оценки мультипликативного интеграла.

Лемма 2.2. Пусть $e^{i\theta}(t_0) \neq 1$ и о.-ф. $X(t_0, \zeta)$ ($Y(t_0, \zeta)$) имеет представление (2.2) (представление (2.3)). Тогда существуют такие $B > 0$ и проколотая окрестность U точки $e^{i\theta}(t_0)$, что для $\zeta = \rho e^{i\varphi} \in U$, $\theta(t_0) \leq \varphi < 2\pi$ ($0 < \varphi \leq \theta(t_0)$) $\|X(t_0, \zeta)\| \leq \exp \{B |k \times (\theta(t_0), \zeta)|\}$ (2.4'), $(\|Y(t_0, \zeta)\| \leq \exp \{B |k(\theta(t_0), \zeta)|\})$ (2.4''). Если $e^{i\theta}(t_0) = 1$, то (2.4') справедливо в U .

Существенную роль в этом параграфе будет играть следующее утверждение типа Фрагмена—Линделёфа (ср. [5], гл. I, § 14).

Лемма 2.3. Пусть о.-ф. F голоморфна в некоторой проколотой окрестности U точки ζ_0 и 1) для постоянных $M > 0$, $N > 0$ и любого $\zeta \in U$

$$\begin{aligned} &\|F(\zeta)\| \leq M \exp \left\{ N \left| \frac{\zeta + \zeta_0}{\zeta - \zeta_0} \right| \right\}, \\ &2) \sup |F(\zeta)| < \infty \text{ при } |\zeta| = |\zeta_0|, \zeta \in U, \\ &3) \lim_{\rho \rightarrow |\zeta_0|} |\rho - |\zeta_0|| \ln^+ \|F(\rho \zeta_0)\| = 0. \end{aligned}$$

Тогда F голоморфна в ζ_0 .

В дальнейшем представление (1.1) будет рассматриваться в следующем предположении (см. теорему 1.4):

выполняются условия (III) и при этом на $[0, l]$ нет интервалов, (IV) нейтральных для $f(t, \zeta) := k(\theta(t), \zeta)$ и $E(t)$.

Теорема 2.1. Пусть X имеет удовлетворяющее (IV) представление (1.1). Тогда $t_0 \in [0, l]$ ($\vartheta(t_0) < 2\pi$) является точкой роста функции ϑ в том и только в том случае, если $\tau_X(\vartheta(t_0)) = 0$.

Доказательство. Если t_0 — точка роста функции ϑ , то согласно лемме 2.1 равенство (2.1) справедливо.

Предположим теперь, что справедливо (2.1), а $t_0 \in [\alpha, \beta]$, где $\vartheta([\alpha, \beta]) = \vartheta(t_0)$. о.-ф.

$$Z(\zeta) := \int_{\alpha}^{\beta} \exp \{k(\vartheta(t_0), \zeta) dE(t)\}$$

голоморфна во всей расширенной плоскости, за исключением, быть может, точки $\zeta_0 = e^{i\vartheta(t_0)}$. На основании леммы 2.2 существуют такие $B > 0$ и проколота окрестность U точки ζ_0 , что $\|Z(\zeta)\| \leq \exp \times \{M|k(\vartheta(t_0), \zeta)|\}$ для $\zeta \in U$. Очевидно, $\|Z(\zeta)\| = 1$ при $\zeta \neq \zeta_0$, $|\zeta| = 1$. Так как α — точка роста слева, β — точка роста справа для ϑ и $Z(\zeta) = Y^{-1}(\beta, \zeta) X(\zeta) X^{-1}(\alpha, \zeta)$, то вследствие (2.1) и замечания к лемме 2.1 $\tau_Z[\vartheta(t_0)] = 0$. На основании леммы 2.3 о.-ф. Z голоморфна в ζ_0 и, следовательно, является постоянной. Так как $Z(-\zeta_0) = I$, то $Z(\zeta) \equiv I$, что противоречит (IV). Теорема доказана.

Лемма 2.4. Пусть о.-ф. $X(t, \zeta) (0 \leq t \leq l)$ имеет представление (2.2), где ϑ и E удовлетворяют условию (IV). Если $X(\zeta) = X(l, \zeta)$ голоморфна на дуге $\exp \{i[a, b]\} (0 \leq a < b \leq 2\pi)$, то для любого $t_0 \in [0, l]$ о.-ф. $X(t_0, \zeta)$ голоморфна и унитарна на этой дуге.

Доказательство. Утверждение леммы нетривиально только при $a < \vartheta(t_0) < b$. В этом случае, очевидно, справедливо (2.1), откуда и из теоремы 2.1 следует, что t_0 — точка роста функции ϑ , а, значит, на основании той же теоремы,

$$\lim_{0 < \rho \rightarrow 1} |1 - \rho| \ln^+ \|X(t_0, \rho e^{i\vartheta(t_0)})\| = 0. \quad (2.5)$$

Очевидно, функция $X(t_0, \zeta) = Y^{-1}(t_0, \zeta) X(l, \zeta)$ (см. (2.3)) голоморфна и принимает унитарные значения на дугах $\exp \{i[\vartheta(t_0), b]\}$ и $\exp \times \{i[a, \vartheta(t_0)]\}$. Из леммы 2.2 следует, что вблизи точки $e^{i\vartheta(t_0)}$ при некотором $B > 0$ справедливо (2.4'). Воспользовавшись (2.5) и леммой 2.3, завершаем доказательство.

Теорема 2.2. Пусть о.-ф. X обладает представлением (1.1), удовлетворяющим условию (IV). Для голоморфности X на открытой дуге Δ единичной окружности необходимо и достаточно, чтобы $\exp \{iv([0, l])\} \cap \Delta = \emptyset$.

Доказательство необходимости проведем сначала для случая, когда $\Delta = \exp \{i[a, b]\} (0 \leq a < b \leq 2\pi)$. Допустим, что $a < \vartheta(t_0) < b$ для некоторой точки $t_0 \in [0, l]$. Поскольку ϑ непрерывна слева, существует такой промежуток $[\beta, t_0] \subset [0, l]$, что $\vartheta([\beta, t_0]) \subset]a, b[$. Рассмотрим о.-ф.

$$X(t, t_0; \zeta) := \int_{\beta}^{t_0} \exp \{k(\vartheta(\tau), \zeta) dE(\tau)\} \quad (\beta < t \leq t_0),$$

которая, очевидно, голоморфна вне дуги $\exp\{i[\vartheta(t), \vartheta(t_0)]\}$. С другой стороны, так как $X(t, t_0; \zeta) = X(t_0, \zeta) X^{-1}(t, \zeta)$, а $X(t_0, \zeta) X^{-1}(t, \zeta)$ на основании леммы 2.2 голоморфны на $\exp\{i]a, b[\}$, то $X(t, t_0; \zeta)$ голоморфна и на $\exp\{i[\vartheta(t), \vartheta(t_0)]\}$. Таким образом, $X(t, t_0; \zeta)$ не зависит от ζ . Так как почти всюду на $] \beta, t_0[$ $X^{-1}(t, t_0; \zeta) X_t(t, t_0; \zeta) = -k(\vartheta(t), \zeta) E'(t)$, то E постоянна на $] \beta, t_0[$ (как и при доказательстве теоремы 1.4, мы, не ограничивая общности, считаем, что E удовлетворяет условию Липшица). Таким образом, $] \beta, t_0[$ входит в нейтральный относительно f и E интервал, что противоречит (IV).

Пусть теперь $\Delta = (\exp\{i]b, 2\pi[\}) \cup \exp\{i]0, a[\}$ ($0 < a \leq b < 2\pi$). Тогда $(\exp\{i\vartheta([0, l])\}) \cap \exp\{i]0, a[\} = \emptyset$, $(\exp\{i\vartheta([0, l])\}) \cap \exp\{i]b, 2\pi[\} = \emptyset$. Если $\Delta \cap \exp\{i\vartheta([0, l])\} \neq \emptyset$, то отсюда и из каноничности функции ϑ следует существование такого $t_1 \neq 0$, что $\vartheta(t_1) = 0$. Таким образом, t_1 не является точкой роста функции ϑ . С другой стороны, так как X голоморфна при $\zeta = 1$, то $\tau_X[\vartheta(t_1)] = 0$, что противоречит теореме 2.1.

Достаточность утверждения теоремы очевидна.

При доказательстве теорем 2.3 и 2.5 будет использовано следующее предложение [6].

Лемма 2.5. Пусть о.-ф. X обладает двумя представлениями вида (1.1) с удовлетворяющими условиям (III) параметрами V_1, l, ϑ, E_1 и V_2, l, ϑ, E_2 соответственно. Тогда $V_1 = V_2$ и $E_1(t_0) = E_2(t_0)$, $X_1(t_0, \zeta) = X_2(t_0, \zeta)$ (см. (2.2)) для любой точки роста о функции ϑ .

Теорема 2.3. Пусть для $j = 1, 2$

$$X_j(t, \zeta) = \int_0^t \exp\{k(\vartheta_j(\tau), \zeta) dE_j(\tau)\} \quad (0 \leq t \leq l_j, |\zeta| \neq 1),$$

где ϑ_j и E_j удовлетворяют условиям (IV). Тогда, если $X_2(l_2, \zeta) = UX_1(l_1, \zeta)$ ($|\zeta| < 1$) (2.6), где U — унитарный оператор, то (а) существует возрастающая на $[0, l_1]$ функция r , такая, что $r([0, l_1]) = [0, l_2]$ и $\vartheta_1(t) = \vartheta_2(r(t))$ ($0 \leq t \leq l_1$); (б) для любой r точки хотя бы одностороннего роста функции ϑ_1 $E_1(t_0) = E_2(\tau(t_0))$, $X_1(t_0, \zeta) = X_2(r(t_0), \zeta)$ ($|\zeta| \neq 1$) и, следовательно, $U = I$.

Доказательство. Из теоремы 2.2 следует, что $\vartheta_1([0, l_1]) = \vartheta_2([0, l_2])$. Воспользовавшись теоремой 2.1, получим, что множества значений, принимаемых функциями ϑ_j ($j = 1, 2$) на интервалах постоянства совпадают. На основании леммы 1.2 отсюда вытекает справедливость утверждения (а). После этого (2.6) можно переписать в виде

$$\int_0^{l_1} \exp\{k(\vartheta_1(t), \zeta) dE_1(t)\} = U \int_0^{l_1} \exp\{k(\vartheta_1(t), \zeta) dE_2(\tau(t))\}.$$

Отсюда и из леммы 2.5 следует утверждение (б).

Из только что доказанной теоремы, теорем 1.3 и 1.4 непосредственно следует

Теорема 2.4. Каждая о.-ф. $X \{ (A : A) \}$ обладает представлением (1.1), удовлетворяющим условиям (IV). В таком представлении оператор V определяется однозначно, функция ϑ определяется с точностью до непрерывной возрастающей замены переменных; при выбранной функции ϑ для каждой ее точки роста t_0 оператор $E(t_0)$ определяется также однозначно.

2. Некоторую характеристику нейтральных интервалов дает следующее предложение.

Теорема 2.5. Пусть о.-ф. X обладает представлением (1.1) ($V = I$), удовлетворяющим условию (III), и пусть $\{]\alpha_j, \beta_j[\}_{j=\overline{1, s}}$ ($s \leq \infty$) — совокупность всех интервалов постоянства функции ϑ на $]\alpha, \beta[\subset [0, 1]$. Для того, чтобы

$$\int_{\alpha}^{\beta} \exp \{ k(\vartheta(t), \zeta) dE(t) \} = I \quad (|\zeta| \neq 1), \quad (2.7)$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E(t) = E(\alpha) \quad (t \in]\alpha, \beta[\setminus H_s, \quad H_n = \bigcup_{j=1}^n]\alpha_j, \beta_j[, \quad n = \overline{1, s}), \quad (2.8)$$

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \exp \{ \lambda dE(t) \} = I \quad (\lambda \in \mathbb{C}, \quad j = \overline{1, s}). \quad (2.9)$$

Доказательство. Как и выше, не ограничивая общности, будем считать, что о.-ф. E удовлетворяет условию Липшица.

Пусть справедливо (2.7). Введем в рассмотрение о.-ф. M и $\tilde{M}$. $M(t) = E'(t)$; $\tilde{M}(t) = M(t)$ при $t \in [0, 1] \setminus]\alpha, \beta[$, $\tilde{M}(t) = 0$ при $t \in]\alpha, \beta[$. Очевидно,

$$X(\zeta) = \int_0^1 \exp \{ k(\vartheta(t), \zeta) d\tilde{E}(t) \} \quad \left(\tilde{E}(t) = \int_0^t \tilde{M}(\tau) d\tau \right). \quad (2.10)$$

На основании (1.1), (2.10) и леммы 2.5 для любой точки $t \in [\alpha, \beta] \setminus H_s$

$$E(t) = \tilde{E}(t), \quad X(t, \zeta) = \tilde{X}(t, \zeta) := \int_0^t \exp \{ k(\vartheta(\tau), \zeta) d\tilde{E}(\tau) \}. \quad (2.11)$$

Так как $\tilde{E}(t) = E(\alpha)$ при $t \in]\alpha, \beta[$, то справедливо (2.8). Кроме того,

на основании (2.11) $X(\alpha_j, \zeta) = \tilde{X}(\alpha_j, \zeta) = X(\alpha, \zeta)$, $X(\beta_j, \zeta) = \tilde{X}(\beta_j, \zeta) = X(\alpha, \zeta)$, откуда

$$\int_{\alpha_j}^{\beta_j} \exp \{k(\vartheta(\alpha_j), \zeta) dE(t)\} = X(\beta_j, \zeta) X^{-1}(\alpha_j, \zeta) = I \quad (\zeta \neq e^{i\vartheta(\alpha_j)}),$$

что равносильно (2.9).

Пусть теперь выполнены условия (2.8), (2.9) и пусть $M_n(t) = M(t)$ при $t \in H_n$, $M_n(t) = 0$ при $t \in [\alpha, \beta] \setminus H_n$,

$$E_n(t) = E(\alpha) + \int_{\alpha}^t M_n(\tau) d\tau \quad (\alpha \leq t \leq \beta). \quad (2.12)$$

Так как на основании (2.8) $M(t) = 0$ почти всюду на $[\alpha, \beta] \setminus H_s$, то $\lim M_n(t) = M(t)$ почти всюду на $[\alpha, \beta]$ и, значит, $\lim E_n(t) = E(t)$ ($t \in [\alpha, \beta]$). Из (2.9) и (2.12) следует

$$\int_{\alpha}^{\beta} \exp \{k(\vartheta(t), \zeta) dE_n(t)\} = I \quad (|\zeta| \neq 1).$$

Воспользовавшись мультипликативным аналогом теоремы Хелли, получим (2.7), что и завершает доказательство.

Замечание. Введем обозначения: $E_0(t_1, t_2) = E(t_2) - E(t_1)$,

$$E_n(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} E_{n-1}(t_1, t) dE(t) \quad (n = 1, 2, \dots; t_1, t_2 \in [0, l]).$$

Воспользовавшись разложением мультипликативного интеграла в ряд, легко установить, что (2.9) равносильно следующей системе равенств: $E_n(\alpha_j, \beta_j) = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots; j = \overline{1, s}$).

3. Рассмотрим класс $(A : A)^0$, состоящий из таких о.-ф. $X \in (A : A)$ что $\tau_{X^{**}}(\varphi) = 0$ при всех $\varphi \in [0, 2\pi[$. Из теорем 1.3, 2.1 и 2.4 непосредственно вытекает справедливость следующего предложения.

Теорема 2.6. Для принадлежности о.-ф. X классу $(A : A)^0$ необходимо и достаточно наличие представления

$$X(\zeta) = V \int_0^{2\pi} \exp \{k(\varphi, \zeta) dS(\varphi)\}, \quad (2.13)$$

в котором V — унитарный оператор, S — эрмитовозначная непрерывная на $[0, 2\pi]$ о.-ф. ограниченной вариации, $S(0) = 0$. При этом оператор V и о.-ф. S определяются по X однозначно.

Список литературы: 1. Потапов В. П. Мультипликативная структура F -нерастягивающих матриц-функций // Тр. Моск. мат. об-ва. 1955. 4. С. 125—236. 2. Гинзбург Б. Ю. О делителях и минорантах оператор-функций ограниченного вида //

Мат. исследования. 1967. 2, № 4. С. 49—72. 3. Гинзбург Ю. П. Мультипликативные представления и миноранты ограниченных аналитических оператор-функций // Функцион. анализ и его прил. 1967. 1, № 3. С. 9—23. 4. Гинзбург Ю. П. Мультипликативные представления оператор-функций ограниченного вида // Успехи мат. наук, 1967. 22, № 1. С. 163—165. 5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М., 1956. 632 с. 6. Гинзбург Ю. П. О мультипликативных представлениях J -нерастягивающих оператор-функций. II // Мат. исследования 1967. 2, № 3. С. 20—51.

Поступила в редколлегию 10.07.87

УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

О ТОТАЛЬНЫХ НЕНОРМИРУЮЩИХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ СОПРЯЖЕННОГО БАНАХОВА ПРОСТРАНСТВА

Используемые нами определения совпадают с принятыми в [1 — 3]. Напомним некоторые из них. Пусть X — банахово пространство. Подпространствами будем называть замкнутые линейные многообразия. Коразмерностью фактор-пространства X/L будем называть размерность подпространства $L \subset X$. Будем говорить, что подпространство $M \subset X^*$ нормирует подпространство $L \subset X$, если $\exists \lambda > 0 \forall x \in L \exists f \in M (\|f\| \leq 1 \wedge |f(x)| \geq \lambda \|x\|)$.

Подпространство M называется нормирующим, если оно нормирует все X .

Слабым* секвенциальным замыканием подпространства $M \subset X^*$ (иногда слабой* производной или ω^* -производной) называется множество всех пределов слабо* сходящихся последовательностей из M . Обозначается слабое* секвенциальное замыкание через $M_{(1)}$. Слабое* секвенциальное замыкание не является топологическим — С. Мазуркевич (1930) показал, что, вообще говоря, равенство $M_{(1)} = (M_{(1)})_{(1)}$ не имеет места. Это послужило причиной введения (С. Банахом) следующего определения. Для ординала α слабым* секвенциальным замыканием порядка α подпространства $M \subset X^*$ называется $M_{(\alpha)} := \bigcup_{\beta < \alpha} (M_{(\beta)})_{(1)}$.

Для тотального подпространства $M \subset X^*$ через X_M обозначим пополнение пространства X по норме $\|x\|_M = \sup \{|f(x)| : f \in M, \|f\| = 1\}$.

В связи с исследованиями о регуляризуемости суперпозиций линейных операторов [4] возник вопрос: для каких сепарабельных банаховых пространств (СБП) X найдется в X^* такое подпространство M , что $M_{(1)} \neq M_{(2)} = X^*$ (1) и что при этом можно сказать об X_M ? Ответ на первый вопрос является частным случаем основного результата работы [5]: такое подпространство M в X^* существует в том и только в том случае, когда СБП X неквазирефлексивно. Поэтому вопрос сводится к такому. Пусть X — неквазирефлексивное СБП, подпространство $M \subset X^*$ таково, что выполнено условие (1). Каким может

быть X_M ? Мы будем рассматривать этот вопрос и в случае, когда M — произвольное тотальное подпространство в X^* .

В работе [4] доказано, что для пространств, представимых в виде бесконечной прямой суммы нереклексивных СБП по пространству с безусловно монотонным базисом (и, следовательно, для классических нереклексивных пространств) найдется подпространство $M \subset X^*$, удовлетворяющее условию (1), для которого X_M изоморфно X .

В [6, с. 356] указано, что Дейнман доказал, что любое бесконечномерное подпространство M в l_1 нормирует некоторое бесконечномерное подпространство в c_0 , откуда следует, что для любого тотального $M \subset (c_0)^* = l_1$ пространство $(c_0)_M$ содержит подпространство, изоморфное c_0 .

В настоящей работе эти исследования будут продолжены. Полученные результаты позволяют выделить класс СБП, сопряженные к которым содержат тотальные подпространства, не нормирующие никаких бесконечномерных подпространств.

Предложение. Пусть X — неквазиреклексивное СБП, M — тотальное не нормирующее подпространство в X^* . Тогда сопряженное к X_M содержит нормирующее подпространство бесконечной коразмерности.

Доказательство. Ясно, что M , рассматриваемое как подпространство в X_M^* , является нормирующим. Покажем, что M имеет бесконечную коразмерность в X_M^* . Предположим противное. Тогда X_M^* можно разложить в прямую сумму $X_M^* = K \oplus M$, где K — некоторое конечномерное пространство. Нетрудно видеть, что X_M^* , рассматриваемое как подпространство в X^* , совпадает с $M_{(1)}$. Поэтому $M_{(1)} = K \oplus M$. Отсюда легко выводится, что $M_{(1)} = M_{(2)}$, и, следовательно, [2, с. 48] $M_{(1)}$ слабо* замкнуто. В силу тотальности отсюда следует $M_{(1)} = X_M^*$. Последнее равенство, как известно [2, с. 47], эквивалентно тому, что M — нормирующее. Получаем противоречие.

Теорема. Пусть $\{V_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность нереклексивных СБП, Z — пространство с фиксированным безусловно монотонным базисом $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, а $Y = (\sum_{i=1}^\infty \oplus V_i)Z$. Если СБП X имеет факторпространство бесконечной коразмерности, изоморфное Y , то в X^* найдется подпространство M , удовлетворяющее условию (1), и такое, что X_M изоморфно $Y \oplus Z$.

Доказательство. Через $\{e_i^*\}_{i=1}^\infty \subset Z^*$ обозначим биортогональные функционалы базиса $\{e_i\}_{i=1}^\infty$. Они образуют безусловно монотонную базисную последовательность. Нетрудно видеть, что пространство Y^* можно описать следующим образом: $Y^* = \{y^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*, \dots) : v_i^* \in V_i^*; \|y\| = \sup_k \|\sum_{i=1}^k v_i^* e_i^*\|_{Z^*} < \infty\}$.

Для каждого натурального i в V_i^{**} найдется такой функционал ω_i , что $\|\omega_i\| = 1$ и $\ker \omega_i \subset V_i^*$ имеет характеристику Диксмье, не меньшую $1/3$. Введем функционалы $\Omega_i \in Y^{**}$ равенствами $\Omega_i((v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*, \dots)) = \omega_i(v_i^*)$.

Обозначим через F фактор-отображение $F: X \rightarrow Y$, существующее по предположению. Выберем согласно [3, с. 225—226] в $\ker F$ M -базис $\{x_i\}_{i=1}^\infty$, для которого $r(\{x_i^*|_{\ker F}\}_{i=1}^\infty) = 1$ (r — характеристика Диксмье). Дополним его до M -базиса всего пространства X векторами $\{z_i\}_{i=1}^\infty$ [3, с. 231, 858]. Пусть $\{x_i^*\}_{i=1}^\infty \cup \{z_i^*\}_{i=1}^\infty$ — соответствующие биортогональные функционалы. Не уменьшая общности, можно считать, что $\|x_i^*\| = 1$. Введем оператор $T: Y^* \rightarrow X^*$ равенством $T(y^*) = \sum_{i=1}^\infty 4^{-i} \Omega_i(y^*) x_i^* + F^*(y^*)$. Ясно, что T — изоморфное вложение; $(1 - 1/3)\|y^*\| \leq \|Ty^*\| \leq (1 + 1/3)\|y^*\|$ (2).

Покажем, что подпространство $M := T(Y^*) \subset X^*$ будет удовлетворять заключению теоремы.

Проверим, что для подпространства M выполнено условие (1)

Чтобы убедиться, что $M_{(1)} \neq X^*$, покажем, что $x^* = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i} x_i^* \notin M_{(1)}$.

Действительно, пусть последовательность $\{y_k^*\}_{k=1}^\infty \subset Y^*$ такова, что $\omega^* - \lim_{k \rightarrow \infty} T(y_k^*) = x^*$. Из этого соотношения и неравенства (2) следует что $\sup_k \|y_k^*\| = C < \infty$. Кроме того, для любого натурального i имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} T(y_k^*) x_i = x^*(x_i)$, или $\lim_{k \rightarrow \infty} 4^{-i} \Omega_i(y_k^*) = 2^{-i}$, следовательно, $2^{-i} \leq C \cdot 4^{-i}$. Полученное противоречие показывает, что $x^* \notin M_{(1)}$.

Покажем, что $M_{(2)} = X^*$.

Лемма. Для любого вектора $y^* \in Y^*$ найдется последовательность векторов $y_k^* \in Y^*$, для которых $\|y_k^*\| \leq 4\|y^*\|$; $\omega^* - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k^* = 0$, и для всех натуральных i имеет место $\Omega_i(y_k^*) = \Omega_i(y^*)$.

Доказательство. Пусть $y^* = (v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*, \dots)$. Так как $r(\ker \omega_i) \geq 1/3$, то для любого натурального i найдутся такие $u_{ij}^* \in V_i^*$, что $\forall j \in N$, $u_{ij}^* \in \ker \omega_i$ (3) $\|u_{ij}^*\| \leq 3\|v_i^*\|$ и $\omega^* - \lim_{j \rightarrow \infty} u_{ij}^* = v_i^*$ (4).

Положим $y_k^* = (v_1^* - u_{1k}^*, v_2^* - u_{2k}^*, \dots, v_n^* - u_{nk}^*, \dots)$. Ясно, что $\|v_n^* - u_{nk}^*\| \leq 4\|v_n^*\|$. Следовательно, $\|y_k^*\| \leq 4\|y^*\|$ (5).

То, что $\Omega_i(y_k^*) = \Omega_i(y^*)$ следует из (3). То, что $\omega^* - \lim_{k \rightarrow \infty} y_k^* = 0$, следует из (4) и (5). Лемма доказана.

Применяя лемму к произвольному $y^*(j) \in Y^*$, для которого $\Omega_i(y^*(j)) = \delta_{ij}$, получаем $x_i^* \in M_{(1)}$.

Используя лемму, можно показать также, что $F^*(Y^*) \subset M_{(1)}$. Действительно, пусть $y^* \in Y^*$. Выберем последовательность $\{y_k^*\}_{k=1}^\infty \subset Y^*$ согласно лемме. Имеем $M \ni T(y^*) - T(y_k^*) = F^*(y^*) - F^*(y_k^*)$, и, так как $\omega^* \lim_{k \rightarrow \infty} F^*(y_k^*) = 0$, то $F^*(y^*) \in M_{(1)}$.

Покажем, что $M_{(1)} \subset X^*$ — нормирующее подпространство. Пусть $x \in X$. Если $\|Fx\| \geq \|x\|/3$, то найдется такой $y^* \in Y^*$, что $(F^*y^*) \times x \geq \|x\|/3$ и $\|F^*y^*\| = 1$. Если же $\|Fx\| < \|x\|/3$, то представим

вектор x в виде $x = y + z$, где $\|y\| < \|x\|/3$, а $z \in \ker F$. Ясно, что $\|z\| > 2\|x\|/3$. Пусть функционал $\sum_{i=1}^m a_i x_i^* \in X^*$ таков, что $\|\sum a_i \times \times x_i^*|_{\ker F}\| \leq 1$ и $(\sum a_i x_i^*)(z) > 2\|x\|/3$. Пусть z^* — продолжение с сохранением нормы функционала $\sum a_i x_i^*|_{\ker F}$ на все X . Ясно, что $(\sum a_i x_i^* - z^*) \in F^*(Y^*)$, и, следовательно, $z^* \in M_{(1)}$. Кроме того, имеем $|z^*(x)| \geq |z^*(z)| - |z^*(y)| > \|x\|/3$. Итак, подпространство $M_{(1)} \subset X^*$ является нормирующим. В силу [2, с. 47] отсюда следует, что $M_{(2)} = X^*$. Таким образом, доказательство соотношения (1) завершено.

Докажем, что X_M изоморфно $Y \oplus Z$. Нетрудно видеть, что для доказательства этого достаточно для векторов $x \in X$, представимых в виде

$$x = \sum_{i=1}^m a_i x_i + \sum_{k=1}^n b_k z_k,$$

доказать, что $C\gamma \leq \|x\|_M < C\gamma$, где $\gamma = \max \{ \|\sum a_i e_i\|_Z, \|F(\sum b_k z_k)\|_Y \}$.

Воспользовавшись определением $\|x\|_M$, неравенством (2) и соотношением $\|\sum a_i \Omega_i\|_{Y^{**}} = \|\sum a_i e_i\|_Z$, имеем $\|x\|_M = \sup \{ |h^*(x)| : h^* \in M, \|h^*\| = 1 \} \leq \sup \{ |(F^* y^*)(\sum b_k z_k) + \sum a_i \Omega_i(y^*)| : y^* \in Y^*, \|y^*\| \leq 3/2 \} \leq (3/2) (\|F(\sum b_k z_k)\|_Y + \|\sum a_i e_i\|_Z)$.

Перейдем к оценке снизу. Рассмотрим сначала случай $\|\sum a_i e_i\|_Z > \|F(\sum b_k z_k)\|_Y/3$.

Пусть $c_1, \dots, c_m$ — такие скаляры, что

$$\|\sum_{i=1}^m c_i e_i^*\|_{Z^*} = 1 \text{ и } \sum_{i=1}^m a_i c_i = \|\sum_{i=1}^m a_i e_i\|_Z.$$

Пусть вектор $y^* \in Y^*$ таков, что $\Omega_i(y^*) = c_i$ и $\|y^*\| < 1 + 1/3$. То что такой вектор существует, вытекает из вида функционалов Ω_i и формулы для нормы в Y^* . Имеем $\|Ty^*\| \leq (1 + 1/3)^2$ и $(Ty^*) \times \times (x) \geq \|\sum a_i e_i\|_Z - |(F^* y^*)(\sum b_k z_k)|$. Воспользовавшись леммой, получаем требуемую оценку.

Перейдем к случаю $\|\sum a_i e_i\|_Z \leq \|F(\sum b_k z_k)\|_Y/3$ (6). Выберем вектор $y^* \in Y^*$, $\|y^*\| = 1$, для которого $|(F^* y^*)(\sum b_k z_k)| = \|F \times \times (\sum b_k z_k)\|_Y$. Имеем $|Ty^*(x)| \geq |(F^* y^*)(\sum b_k z_k)| - |\sum_{i=1}^m \Omega_i(y^*) a_i| \geq \geq \|F(\sum b_k z_k)\|_Y - \|\sum a_i e_i\|_Z$. Остается воспользоваться неравенствами (2) и (6). Теорема доказана.

Следствие 1. Если СБП X имеет фактор-пространство Y , представимое в виде $c_0 \oplus U$ или $l_1 \oplus U$ для некоторого СБП U , то в X^* найдется подпространство M , удовлетворяющее условию (1), для которого X_M изоморфно Y .

В работе [6, с. 356] приведен пример пространства X и тотального подпространства $M \subset X^*$, которое не нормирует никакого бесконечного подпространства в X . Доказанная теорема позволяет вы-

делить обширный класс СБП, сопряженные к которым содержат подпространства с указанным свойством.

Следствие 2. Если СБП X и Y удовлетворяют условиям теоремы и у них нет изоморфных бесконечномерных подпространств, то X^* содержит подпространство M , удовлетворяющее условию (1), и не нормирующее никакого бесконечномерного подпространства в X .

Примеры. $X = l_1$; $L_1(0, 1)$, в качестве Y можно взять c_0 ; $X = l_1 \oplus \oplus c_0$, $Y = (\Sigma \oplus J)_{l_1}$, где J — пространство Джеймса [1, с. 25].

Следствие 3. В $c_0^* = l_1$ существует такое подпространство M , удовлетворяющее условию (1), для которого $(c_0)_M$ не изоморфно c_0 .

Это вытекает из того, что у c_0 есть фактор-пространство, удовлетворяющее условиям следствия 1, но не изоморфное c_0 , например,

фактор-пространство, изоморфное $(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus l_2^n)_{c_0}$.

Список литературы: 1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, v. I. Berlin, 1977. 188 p. 2. Петунин Ю. И., Пlichко А. Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с. 3. Singer I. Bases in Banach spaces, v. II. Berlin, 1981. 880 p. 4. Островский М. И. Пары регуляризуемых обратных линейных операторов с нерегуляризуемой суперпозицией // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1989. Вып. 52. С. 78—88. 5. Островский М. И. W^* -производные трансфинитного порядка подпространств сопряженного банахова пространства // Докл. АН УССР. 1987. № 10. С. 9—12. 6. Davis W. J., Johnson W. B. Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces // Isr. J. Math. 1973. 14. P. 353—367.

Поступила в редколлегию 04.10.88

УДК 517.98

Б. А. РУБШТЕИН

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА С УСЛОВИЕМ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧНОСТИ

В работе рассматривается задача о сохраняющем меру траекторном изоморфизме счетных эргодических групп преобразований с квазиинвариантной мерой. Для различных классов аппроксимативно конечных групп решение этой задачи было получено в [1—3].

Ниже вводится класс групп автоморфизмов пространства с мерой, обладающих свойством почти периодичности (ПП). Эти группы занимают промежуточное положение между группами автоморфизмов, содержащими меру (см. [1]) и группами со свойством условной почти периодичности (УПП), описанными в [3].

1. Траекторный изоморфизм и условие (ПП). Пусть G — счетная эргодическая подгруппа группы всех автоморфизмов $\text{Aut} X$ пространства Лебега (X, m) , $mX = 1$. Через $\Theta(G)$ обозначается разбиение на траектории $Gx = \{gx, g \in G\}$, $x \in X$ группы G и $[G] = \{g \in \text{Aut} X :$

$g(Gx) = Gx$ п. в.} полная группа группы G . Две такие группы автоморфизмов G_1 и G_2 пространств (X_1, m_1) и (X_2, m_2) соответственно называются траекторно изоморфными с сохранением меры ($(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2)$), если $S\Theta(G_1) = \Theta(G_2)$ (или $S[G_1]S^{-1} = [G_2]$) и $Sm_1 = m_2$ для некоторого изоморфизма $S: X_1 \rightarrow X_2$.

Пусть $M(G)$ — фактор, построенный по G с помощью конструкции Кригера [4]. (Если G действует свободно, то $M(G)$ — скрещенное произведение $L^\infty(X, m)$ на G . Через φ_m обозначается точное нормальное состояние на факторе $M(G)$, определяемое мерой m . Очевидно, из соотношения $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2)$ следует изоморфизм пар $(M(G_1), \varphi_{m_1}) \sim (M(G_2), \varphi_{m_2})$. Обратное, вообще говоря, не верно, если группы G_1 и G_2 не являются аппроксимативно конечными [5].

Будем говорить, что (G, m) удовлетворяет условию почти периодичности (ПП), если существует счетное подмножество $\Gamma \subset]0, +\infty[$ такое, что $\frac{dm(gx)}{dm(x)} \in \Gamma$ для всех $g \in G$ и почти всех $x \in X$. В этом случае обозначим через $\Gamma(G, m)$ совокупность всех $\alpha \in \Gamma$, для которых $m\{x \in X: \frac{dm(gx)}{dm(x)} = \alpha\} > 0$ при некотором $g \in G$ и через $\tilde{\Gamma}(G, m)$ — счетную подгруппу группы положительных чисел $\mathbf{R}_+^*$, порожденную $\Gamma(G, m)$. Понятно, что свойство (ПП) является инвариантом сохраняющего меру траекторного изоморфизма.

Нетрудно проверить, что условие (ПП) означает, что состояние φ_m на факторе $M(G)$ является почти периодическим (в смысле [6] п. 3.7), т. е. модулярный оператор Δ_{φ_m} состояния φ_m имеет полный набор собственных векторов; при этом точечный спектр оператора Δ_{φ_m} совпадает с $\tilde{\Gamma}(G, m)$.

Если при условии (ПП) группа $[G, m] \equiv \{g \in G: gm = m\}$ эргодическая, то говорят, что G содержит меру m (см. [1]). С другой стороны, условие (ПП) влечет более слабое свойство условной периодичности, введенное автором в [3].

2. Частичные действия. Обозначим через $U(X)$ множество всех частичных изоморфизмов пространства Лебега (X, m) , т. е. множество изоморфизмов $u: A \rightarrow B$, где $A \subset X$, $B \subset X$, $mA > 0$, $mB > 0$ и $u(A) = B$. Для таких u положим $E(u) = A$, $F(u) = B$. В $U(X)$ определим естественные операции: $u \rightarrow u^{-1}$, $u \in U(X)$, а также $(u, v \rightarrow u \circ v$, если $m(F(v) \cap E(u)) > 0$. Введем на $U(X)$ частичный порядок, полагая $u \leq v$, если $E(u) \subset E(v)$ и $u = v|_{E(u)}$.

Частичным действием (ч. д.) счетной группы $\tilde{\Gamma}$ на (X, m) назовем отображение $\delta: \Gamma_\delta \ni a \rightarrow \delta(a) \in U(X)$ подмножества $\Gamma_\delta \subset \tilde{\Gamma}$, удовлетворяющее условиям: 1. $\Gamma_\delta \ni e$ и $\delta(e) = Id_X$, где e — единица группы $\tilde{\Gamma}$ и Id_X — тождественный автоморфизм; 2. если $a \in \Gamma_\delta$, то $a^{-1} \in \Gamma_\delta$ и $\delta(a^{-1}) = \delta(a)^{-1}$; 3. если $a, b \in \Gamma_\delta$ и $m(E(\delta(a)) \cap F(\delta(b))) > 0$, то $ab \in \Gamma_\delta$ и $\delta(a) \cdot \delta(b) \leq \delta(ab)$; 4. наименьшая подгруппа в $\tilde{\Gamma}$, содержащая Γ_δ , совпадает с $\tilde{\Gamma}$.

Частичное действие δ называется эргодическим, если для любых A и B положительной меры существует $a \in \Gamma_\delta$, такое что $m(A \cap E(\delta(a))) > 0$ и $m(B \cap F(\delta(a))) > 0$.

Два ч. д. $\delta_i: \Gamma_{\delta_i} \rightarrow U(X_i)$, $i = 1, 2$, назовем эквивалентными $(\delta_1, m_1) \sim (\delta_2, m_2)$, если $\Gamma_{\delta_1} = \Gamma_{\delta_2}$, и существует изоморфизм $S: X_1 \rightarrow X_2$ такой, что $S(\delta_1(a)) = \delta_2(a) \cdot S$ для всех $a \in \Gamma_{\delta_1}$ и $Sm_1 = m_2$.

Теорема 1. Пусть $\alpha: \bar{\Gamma} \rightarrow \text{Aut } \bar{X}$ — эргодическое действие счетной группы $\bar{\Gamma}$ на пространстве $(\bar{X}, m)$; $X \subset \bar{X}$, $\bar{m}X > 0$ и $m = \bar{m}|_X \cdot \times (mX)^{-1}$. Положим $\Gamma_\delta = \{a \in \bar{\Gamma}: m(X \cap \alpha(a)X) > 0\}$, и для каждого $a \in \Gamma_\delta$ введем сужение $\delta(a) = \alpha(a)|_{E(\delta(a))}$, где $E(\delta(a)) = X \cap \alpha(a)^{-1}X$ и $F(\delta(a)) = X \cap \alpha(a)X$. Тогда построенное отображение $\delta: \Gamma_\delta \rightarrow U(X)$ является эргодическим ч. д. группы $\bar{\Gamma}$ на (X, m) .

Это ч. д. назовем сужением α на X и обозначим $\alpha|_X$.

Теорема 2. Всякое эргодическое ч. д. счетной группы $\bar{\Gamma}$ эквивалентное сужению некоторого эргодического действия группы $\bar{\Gamma}$ на подходящее подмножество положительной меры.

Определим траекторное разбиение $\Theta(\delta)$ ч. д. δ , полагая $x^{\Theta(\delta)} \sim y$, если $y = \delta(a)x$ для некоторого $a \in \Gamma_\delta$. Из теоремы 2, в частности, следует, что разбиение $\Theta(\delta)$ является траекторным разбиением некоторой счетной группы автоморфизмов X . В силу теоремы Кона—Фельдмана—Вейси разбиение $\Theta(\delta)$ аппроксимативно конечно (а.к.), если группа $\bar{\Gamma}$ аменабельна.

3. Инвариант $\delta(G, m)$. Обозначим через σ измеримое разбиение X на эргодические компоненты группы $[G, m]$ и через $(X_G, m_G) = (X/\sigma, m/\sigma)$ — фактор-пространство (X, m) по этому разбиению.

Теорема 3. Если (G, m) удовлетворяет условию (ПП), то существует единственное эргодическое ч. д. $\delta = \delta(G, m): \Gamma(G, m) \rightarrow U(X_G)$ группы $\bar{\Gamma}(G, m)$ в пространстве (X_G, m_G) такое, что для всех $a \in \Gamma(G, m)$, $g \in G$, и п.в. x из равенства $\frac{dm(gx)}{dm(x)} = a$ следует $\delta(a)(\pi_G(x)) = \pi_G(gx)$, где π_G — проекция X в X_G .

Если (G_1, m_1) и (G_2, m_2) — две группы с условием (ПП), то из $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2)$ следует $(\delta(G_1, m_1), m_{G_1}) \sim (\delta(G_2, m_2), m_{G_2})$.

Таким образом, ч. д. $\delta(G, m)$, точнее его класс эквивалентности, является инвариантом (G, m) относительно сохраняющего меру траекторного изоморфизма.

4. Случай а.к. групп. Поскольку группа $\bar{\Gamma}(G, m)$, соответствующая паре (G, m) со свойством (ПП), коммутативна и траекторное разбиение ч. д. $\delta = \delta(G, m)$ является аппроксимативно конечным. Поэтому из теоремы 1 работы [3] получаем, что для групп с условием (ПП) полная группа $[G]$ — аппроксимативно конечна в том и только в том случае, когда таковой является группа $[G, m]$. В частности, если $[G, m]$ — типа 1, то группа $[G]$ со свойством (ПП) всегда аппроксимативно конечна. Отметим, что при условии (ПП) группа $[G, m]$ либо типа 1, либо типа II, т. е. смешанный случай исключен.

Если $[G, m]$ — типа 1, то на фактор-пространстве (X_G, m_G) определена измеримая функция $e_G: X_G \rightarrow N$, где $e_G(y)$, $y \in X_G$ — число точек с положительной условной мерой в элементе π_G^{-1} разбиения $\sigma = \pi_G^{-1}e_{X_G}$.

Приведем теперь основную теорему классификации для групп со свойством (ПП).

Теорема 4. Пусть (G_i, m_i) , $i = 1, 2$ удовлетворяет условию (ПП), причем обе группы G_1 и G_2 аппроксимативно конечны. Тогда:

1. $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2) \Leftrightarrow (M(G_1), \varphi_{m_1}) \sim (M(G_2), \varphi_{m_2})$.
2. Если при этом $[G_i, m_i]$ — типа Π , то $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2) \Leftrightarrow (\delta(G_1, m_1), m_{G_1}) \sim (\delta(G_2, m_2), m_{G_2})$.
3. Если $[G_i, m_i]$ — типа I , то $(G_1, m_1) \sim (G_2, m_2)$ в том и только в том случае, когда существует изоморфизм S , переводящий $(\delta(G_1, m_1), m_{G_1})$ в $(\delta(G_2, m_2), m_{G_2})$ такой, что $e_{G_2} = e_{G_1} \circ S$.

Первое утверждение теоремы верно и для групп со свойством условной почти периодичности ([3], теорема 2).

В случае, когда G_i содержат меры m_i , условие эквивалентности ч. д. $\delta(G_i, m_i)$ $i = 1, 2$, сводится к равенству $\Gamma(G_1, m_1) = \Gamma(G_2, m_2)$, причем $\Gamma(G_i, m_i) = \tilde{\Gamma}(G_i, m_i)$, и второе утверждение теоремы сводится к теореме 4.1 из работы В. Кригера [1].

Для расширений, групп, содержащих меру, изученных автором в [2], инвариант $\delta(G, m)$ совпадает с введенным в [2] инвариантом φ . При этом (G, m) является расширением группы, содержащим меру в смысле [2], в том и только в том случае, когда $\Gamma(G, m) = \tilde{\Gamma}(G, m)$ и $\delta(G, m)$ есть сохраняющее меру m_G действие e группы $\Gamma(G, m)$ в X_G .

Теорема 5. Пусть $\delta: \Gamma_\delta \rightarrow U(Y)$ — эргодическое ч.д. счетной подгруппы $\tilde{\Gamma} \subset R_+^*$ в пространстве Лебега (Y, ν) . Тогда существует счетная эргодическая аппроксимативно конечная группа G автоморфизмов пространства Лебега (X, m) такая, что (G, m) удовлетворяет условию (ПП), $[G, m]$ — типа Π и $\Gamma(G, m) = \Gamma_\delta$, $(X_G, m_G) = (Y, \nu)$, $\delta(G, m) = \delta(1)$.

5. Теорема существования.

Теорема 6. Пусть δ — ч.д. такое же, как в теореме 5. $n e: Y \rightarrow N$ — измеримая функция, удовлетворяющая соотношению

$$ae(\delta(a)y) = e(y) \frac{dv(\delta(a)y)}{dv(y)} \quad (2)$$

для всех $a \in \Gamma_\delta$ и п.в. $y \in E(\delta(a))$. Тогда существует счетная эргодическая группа G автоморфизмов пространства (X, m) , для которой (G, m) обладает свойством (ПП), $[G, m]$ — типа I , причем выполнены равенства (1) и $e_G = e$.

Условие (2) в этой теореме является необходимым.

Список литературы: 1. Krieger W. On non-singular transformation of measure space. I, II // Wahr. und verw. Geb. 1969. 11, № 2. С. 83—97, 98—119. 2. Рубштейн Б. А. О неоднородных финитно-бернуллиевских последовательностях измеримых разбиений // Функцион. анализ. 1976. 10, № 1. С. 46—53. 3. Рубштейн Б. А. О сохраняющем меру траекторном изоморфизме групп преобразований с квазиинвариантной мерой // ДАН СССР. 1984. 276, № 6. С. 1328—1331. 4. Krieger W. On constructing non*-isomorphic hyperfinite factor of type III/J. Func. anal. 1970. 6. С. 97—109. 5. Connes A., Jones V. A II_1 -factor with two non-conjugate Cartan subalgebras // Bull. AMS. 1982. 6, N 2. С. 211—212. 6. Connes A. Une classification des facteurs de type III // Ann. Sci. Ecoll. norm. sup. 1973. 6, N 2. С. 133—252.

Поступила в редколлегию 04.10.88

<i>Кадец М. И., Любич Ю. И.</i> О связях между различными видами почти периодичности представлений полугрупп	3
<i>Овчаренко И. Е., Фильштинский В. А.</i> О структуре множества специальных подклассов в решении одномерной и двумерной проблемы моментов.	5
<i>Еременко А. Э., Содин М. Л.</i> Итерации рациональных функций и распределение значений функции Пуанкаре	18
<i>Зайденберг М. Г.</i> Семейства кривых и гиперболичность. II	26
<i>Левин Г. М.</i> Базисы функций, порожденные итерациями полиномов	43
<i>Третьяк Н. В.</i> Одно свойство матрицы Бореля	51
<i>Аров Д. З.</i> Гамма-производящие матрицы, J -внутренние матрицы функции и связанные с ними задачи экстраполяции. 3^*	57
<i>Романов Л. И.</i> О сюръективных билинейных отображениях	65
<i>Пличко А. Н.</i> Несколько замечаний об операторных образах.	69
<i>Антыпко И. И., Борок В. М.</i> Краевая задача Неймана в бесконечном слое	71
<i>Кадец В. М., Каибханов К. Э.</i> О структуре множества допустимых возмущений	79
<i>Гришин А. Ф.</i> Функции первого порядка субгармонические в полуплоскости и одна тауберова теорема	87
<i>Микитюк Я. В.</i> Об одной задаче интегральной геометрии	95
<i>Милославский А. И.</i> Об абстрактном интегродифференциальном уравнении с периодическим коэффициентом. I	100
<i>Гинзбург Ю. П., Земсков Л. М.</i> О мультипликативных представлениях оператор-функций ограниченного вида	108
<i>Островский М. И.</i> О тотальных ненормирующих подпространствах сопряженного банахова пространства	119
<i>Рубиштейн Б. А.</i> Группы автоморфизмов пространства Лебега с условием почти периодичности	123

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ,
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

В ы п у с к 53

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Г. П. Александрова*
Корректор *Л. Н. Быкова*

ИБ № 13196

Сдано в набор 04.11.89. Подписано в печать 30.03.90. Формат 60×90/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 8. Кр.-отг. 8,25. Уч.-изд. л. 9,9. Тираж 600 экз. Изд. № 1828. Зак. 9-447. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Основа» при Харьковском государственном университете.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16.

Отпечатано с матриц книжной ф-ки им. М. В. Фрунзе в Харьковской городской типографии № 16.
310003 Харьков, ул. Университетская, 16. Зак. 689.