

Лінійні оператори в скінченновимірному просторі та їх матриці

Курінний Григорій Чарльзович
Шугайло Олена Олексіївна

Травень, 2015

Зміст

1	Означення лінійного оператора	2
1.1	Означення лінійного оператора	2
1.2	Приклади лінійних операторів	3
1.3	Ранг та дефект лінійного оператора	8
1.4	Обмеження лінійного оператора на інваріантний підпростір	11
2	Алгебра лінійних операторів.	12
2.1	Додавання та множення лінійних операторів	12
2.2	Множення лінійного оператора на число	14
2.3	Оператор, що обернений до даного	16
3	Матриця лінійного оператора	18
3.1	Означення матриці лінійного оператора	18
3.2	Зміна матриці лінійного оператора при переході до нового базису	21
4	Діагоналізація матриці лінійного оператора	22
4.1	Власні числа та власні вектори лінійного оператора	22
4.2	Анулюючий та мінімальний многочлен	27
4.3	Діагоналізація матриці лінійного оператора.	30
5	Жорданова форма матриці лінійного оператора	31
5.1	Розкладення лінійного простору у пряму суму кореневих підпросторів.	31
5.2	Жорданова форма матриці з одним власним числом	35
5.2.1	Теорема Жордана	40

1 Означення лінійного оператора

1.1 Означення лінійного оператора

Означення 1.1 Лінійним перетворенням векторного простору L , чи лінійним оператором у лінійному просторі L над полем F , називають закон f , згідно з яким кожному вектору $x \in L$ ставиться у відповідність вектор $f(x)$, і який задовольняє дві умови —

- умова однорідності:

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad x \in L, \lambda - \text{число},$$

- умова адитивності:

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in L.$$

Приклад 1.1 Нехай L — двовимірний арифметичний простір. Перевіримо, що відображення $f : L \rightarrow L$, що задане правилом

$$(x, y) \xrightarrow{f} (-2x + 3y, 5x - y)$$

є адитивним і однорідним (отже є лінійним оператором), а відображення $: L \rightarrow L$, що задане правилом

$$(x, y) \mapsto (-2x + 3y + 1, 5x - y)$$

не є ні адитивним ні однорідним і, відповідно, не є лінійним оператором.

Перевіряємо адитивність відображення f . Для цього вибираємо два вектори $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ і проводимо обчислення:

$$a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$f(a) = (-2x_1 + 3y_1, 5x_1 - y_1), \quad f(b) = (-2x_2 + 3y_2, 5x_2 - y_2),$$

$$f(a + b) = (-2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2), 5(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)),$$

$$f(a) + f(b) = (-2x_1 + 3y_1, 5x_1 - y_1) + (-2x_2 + 3y_2, 5x_2 - y_2) = (-2x_1 + 3y_1 - 2x_2 + 3y_2, 5x_1 - y_1 + 5x_2 - y_2)$$

Оскільки

$$-2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) = -2x_1 + 3y_1 - 2x_2 + 3y_2, \quad 5(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 5x_1 - y_1 + 5x_2 - y_2,$$

то $f(a+b) = f(a)+f(b)$ і перевірка адитивності відображення f закінчена.

Перевіряємо неадитивність відображення g . Для цього вибираємо два вектори $a = (x_1, y_1)$, $b = (x_2, y_2)$ і проводимо обчислення:

$$a + b = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$g(a) = (-2x_1 + 3y_1 + 1, 5x_1 - y_1), \quad g(b) = (-2x_2 + 3y_2 + 1, 5x_2 - y_2),$$

$$g(a + b) = (-2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + 1, 5(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2)),$$

$$g(a)+g(b) = (-2x_1+3y_1+1, 5x_1-y_1)+(-2x_2+3y_2+1, 5x_2-y_2) = (-2x_1+3y_1-2x_2+3y_2+2, 5x_1-y_1-5x_2+y_2)$$

Оскільки

$$-2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + 1 \neq -2x_1 + 3y_1 - 2x_2 + 3y_2 + 2,$$

то $g(a + b) \neq g(a) + g(b)$ і перевірка неадитивності відображення g закінчена.

Перевіряємо однорідність відображення f і неоднорідність відображення g . Для цього вибираємо вектор $a = (x_1, y_1)$, число λ і проводимо обчислення:

$$\lambda a = (\lambda x_1, \lambda y_1), f(a) = (-2x_1+3y_1, 5x_1-y_1), f(\lambda a) = (-2\lambda x_1+3\lambda y_1, 5\lambda x_1-\lambda y_1),$$

$$\lambda f(a) = (\lambda(-2x_1 + 3y_1), \lambda(5x_1 - y_1)), g(a) = (-2x_1 + 3y_1 + 1, 5x_1 - y_1),$$

$$g(\lambda a) = (-2\lambda x_1+3\lambda y_1+1, 5\lambda x_1-\lambda y_1), \quad \lambda g(a) = (\lambda(-2x_1+3y_1+1), \lambda(5x_1-y_1)).$$

Оскільки $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ при будь-яких a і λ , то f — однорідне відображення. А оскільки $g(\lambda a) \neq \lambda g(a)$ при $\lambda \neq 1$, то відображення g не однорідне.

1.2 Приклади лінійних операторів

В наведених нижче прикладах L означає векторний (або лінійний¹) простір над полем F ; $x, y, \dots$ означають вектори, елементи лінійного простору L ; $\lambda, \mu, \dots$ — числа, елементи поля F ; $f, g \dots$ — лінійні перетворення.

Приклад 1.2 Нульовий оператор 0 ставить у відповідність кожному вектору x нульовий вектор, тобто $0(x) = 0$. Перевіркою того, що це справді є лінійним оператором є

$$0(\lambda x) = 0, 0(x) = 0 \Rightarrow 0(\lambda x) = \lambda 0(x);$$

$$0(x + y) = 0, 0(x) = 0(y) = 0 \Rightarrow 0(x + y) = 0(x) + 0(y).$$

¹Лінійний простір і векторний простір є синонімічними поняттями. Вважаємо, що знайомство з лінійними просторами уже відбулося. Тому основні поняття лінійних просторів використовуються без нагадування означень і без пояснень

Приклад 1.3 *Одиничний оператор id ставить у відповідність кожному вектору x той же вектор, тобто $id(x) = x$. Перевіркою того, що це справді є лінійним оператором є*

$$id(\lambda x) = \lambda x, id(x) = x \Rightarrow id(\lambda x) = \lambda id(x);$$

$$id(x + y) = x + y, id(x) = x, id(y) = y \Rightarrow id(x + y) = id(x) + id(y).$$

Приклад 1.4 *Скалярний оператор μ ставить у відповідність кожному вектору x той же самий вектор помножений на μ , тобто $\mu(x) = \mu x$. Перевіркою того, що це справді є лінійним оператором є*

$$\mu(\lambda x) = \mu \lambda x, \mu(x) = \mu x \Rightarrow \mu(\lambda x) = \lambda \mu(x);$$

$$\mu(x + y) = \mu x + \mu y, \mu(x) = \mu x, \mu(y) = \mu y \Rightarrow \mu(x + y) = \mu(x) + \mu(y).$$

Приклад 1.5 *Оператор проектування на підпростір паралельно іншому підпростору. Припустимо, що лінійний простір L є прямою сумою двох підпросторів L_1 та L_2 , тобто кожен вектор $z \in L$ можна записати і тільки одним способом у вигляді*

$$z = x + y, \quad x \in L_1, y \in L_2. \quad (1)$$

Оператор pr проектування на L_1 паралельно L_2 задають правилом

$$(z = x + y, \quad x \in L_1, y \in L_2) \Rightarrow (pr(z) = x)$$

.

Перевіримо, що оператор проектування pr дійсно є лінійним оператором, тобто він задовольняє умову однорідності та умову адитивності. Для цього виберемо два вектори $z_1, z_2 \in L$ і числа $\lambda, \mu \in F$. Розкладемо вектори $z_1, z_2, \lambda z_1, \mu z_2$ в суму:

$$z_1 = u_1 + v_1, \quad z_2 = u_2 + v_2 \quad (u_1, u_2 \in L_1, \quad v_1, v_2 \in L_2).$$

Тоді

$$\lambda z_1 = \lambda u_1 + \lambda v_1, \quad \mu z_2 = \mu u_2 + \mu v_2 \quad (\lambda u_1, \mu u_2 \in L_1, \quad \lambda v_1, \mu v_2 \in L_2),$$

$$pr(z_1) = u_1, \quad pr(z_2) = u_2, \quad pr(\lambda z_1) = \lambda pr(z_1),$$

і

$$pr(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda pr(z_1) + \mu pr(z_2).$$

Приклад 1.6 Нехай e_1, e_2, e_3 — базис тривимірного простору L . Тоді відображення

$$f : L \rightarrow L, \quad f(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = x_3e_3 \quad (x_1, x_2, x_3 \in F)$$

є проектуванням цього тривимірного простору на одновимірний підпростір з базисом e_3 паралельно двовимірному відпростору з базисом e_1, e_2 .

Приклад 1.7 Розглядається площина — двовимірний лінійний простір над полем дійсних чисел. Вона складається із векторів на дійсній площині, які виходять із заданої точки — початку відрізка. Рисунок 1.2 показує, що обертання цієї площини навколо початку відрізка є лінійним оператором.

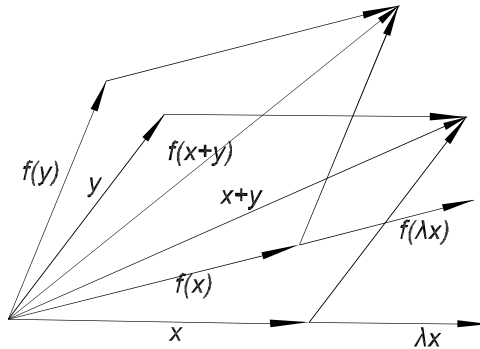


Рис. 1: Обертання площини

Теорема 1.1 Нехай L — n -вимірний лінійний простір, $e_1, e_2, \dots, e_n \in L$ — його базис і $a_1, a_2, \dots, a_n \in L$ — довільна система векторів із L . Тоді існує і до того ж єдиний лінійний оператор $f : L \rightarrow L$ такий, що

$$f(e_i) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Доведення. В припущенні, що лінійний оператор f , для якого виконується (2) існує, доводимо його єдиність. Справді, будь-який вектор $x \in L$ може бути єдиним чином записаний у вигляді

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in F.$$

Однорідність і адитивність оператора f забезпечують нам, що образ $f(x)$ вектора x визначається єдиним чином:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i.$$

Єдиність потрібного оператора перевірена. Переходимо до доведення існування цього оператора. Доведення конструктивне, тобто ми вказуємо на той оператор, довести існування якого нам потрібно, — для

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in F$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i a_i.$$

Лишилося перевірити, що вказане нами відображення $f : L \rightarrow L$ є лінійним оператором для якого виконується умова (2).

Беремо два довільні вектори $x, y \in L$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

і число $\lambda \in F$. Тоді

$$x + y = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) e_i, \quad \lambda x = \sum_{i=1}^n \lambda x_i e_i,$$

$$f(x + y) = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) a_i = \sum_{i=1}^n x_i a_i + \sum_{i=1}^n y_i a_i = f(x) + f(y),$$

$$f(\lambda x) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda x_i e_i\right) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i a_i = \lambda f(x).$$

Однорідність та адитивність відображення f перевірені.

Оскільки

$$e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n, \quad e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n, \quad \dots$$

то $f(e_i) = 1 \cdot a_i = a_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), умова (2) виконана і теорема доведена повністю.

■

Приклад 1.8 В чотиривимірному просторі з базисом e_1, e_2, e_3, e_4 вибираємо чотири вектори

$$a_1 = 2e_1 - 3e_2 - 7e_3 + e_4, \quad a_2 = -e_2 + 3e_4, \quad a_3 = -e_1 - e_2 - e_3 + 9e_4, \quad a_4 = -e_2 + 3e_4,$$

Лінійний оператор f , який переводить вектори e_i у вектори a_i $i = 1, 2, 3, 4$, ставить у відповідність кожному вектору $x = x_1, x_2, x_3, x_4$ вектор з координатами

$$f(x) = (2x_1 - x_3, -3x_1 - x_2 - x_3 - x_4, -7x_1 - x_3, x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 3x_4).$$

Приклад 1.9 Розглядаємо лінійний простір L всіх дійсних многочленів від змінної x , які мають степінь n або менше. Похідна від многочлена із L є лінійним оператором, оскільки похідна від суми двох многочленів є сумою похідних доданків і скаляр (число) можна виносити за знак похідної.

Приклад 1.10 Розглядаємо лінійний простір L всіх дійсних многочленів від змінної x , які мають степінь n або менше. Оскільки визначений інтеграл від суми двох многочленів є сумою інтегралів доданків і скаляр (число) можна виносити за знак інтеграла, то відображення

$$f(x) \mapsto g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

є лінійним оператором

Приклад 1.11 Розглядаємо лінійний простір L всіх функцій $f(x)$, які можна записати у вигляді $f(x) = a \sin x + b \cos x$. Знаходження похідної в цьому просторі є лінійним оператором.

Приклад 1.12 Нехай L є лінійним простором стовпчиків заданої довжини n , елементами яких є числа, належать певному полю. Тоді відображення, що ставить у відповідність стовпчику добуток цього стовпчика зліва на задану матрицю A є лінійним оператором.

Приклад 1.13 Нехай L дійсний двовимірний арифметичний лінійний простір. Знайти лінійний оператор $f : L \rightarrow L$, який переводить вектори $a_1 = (3, 2), a_2 = (1, 1)$ відповідно у вектори $b_1 = (5, 5), b_2 = (4, 7)$, тобто

$$f(a_1) = b_1, \quad b_2 = f(a_2).$$

Вираз “знайти лінійний оператор” означає, що потрібно знайти правило, згідно з яким кожному вектору $x \in L$ ставиться у відповідність його образ $f(x)$.

Вектор $x = (x_1, x_2)$ записуємо у вигляді $x = t_1 \cdot a_1 + t_2 \cdot a_2$. В таких позначеннях

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}.$$

і

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 3x_2 \end{pmatrix},$$

або

$$t_1 = x_1 - 2x_2, \quad t_2 = -x_1 + 3x_2.$$

Тепер

$$f(x) = t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) = (x_1 - 2x_2)b_1 + (-x_2 + 3x_2)b_2 = ((x_1 - 2x_2)5 + (-x_2 + 3x_2)4, (x_1 - 2x_2)5 + (-x_2 + 3x_2)4).$$

Отже відповіддю буде

$$f(x) = (x_1 + 2x_2, -2x_1 + 11x_2).$$

1.3 Ранг та дефект лінійного оператора

Зауважимо, що кожний лінійний оператор f переводить нульовий вектор в нульовий. Це випливає з однорідності:

$$f(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot f(\bar{0}) = 0 \cdot \bar{0} = \bar{0}.$$

Тут ми над нульовим вектором зобразили рисочку — це зроблене, щоб відрізнити число нуль від нульового вектора. Так будемо робити і далі — там, де ясно, де вектор а де число, рисочку зверзу писати не будемо, а в разі можливої плутанини над вектором будемо писати рисочку.

Означення 1.2 Для заданого оператора $f : L \rightarrow L$ множина

$$\ker(f) = \{x \in L | f(x) = 0\}$$

називається ядром, а множина

$$\text{im}(f) = \{y \in L | y = f(x) \text{ для некоторого } x \in L.\}$$

називається образом цього оператора. Образ називають також коядром, а ядро інколи називають кообразом оператора.

Теорема 1.2 *Ядро і образ оператора є підпросторами того лінійного простору, в якому діє лінійний оператор.*

Доведення. Нехай маємо лінійний оператор $f : L \rightarrow L$, що діє в лінійному просторі L над полем F . Оскільки $f(0) = 0$, то і ядро і образ містять в собі нульовий вектор.

Виберемо будь-які два вектори $x, y \in L$, $\lambda, \mu \in F$. Якщо $x, y \in \ker f$, то $f(x) = f(y) = 0$,

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) = 0,$$

і $\lambda x + \mu y \in \ker f$. Доведення того, що $\ker f$ є підпростором лінійного простору L завершено. Якщо $x, y \in \operatorname{im} f$, то $f(x') = x$, $f(y') = y$ для деяких $x', y' \in L$ і

$$f(\lambda x' + \mu y') = \lambda x + \mu y.$$

А це означає, що $\lambda x + \mu y \in \operatorname{im} f$. Доведення того, що $\operatorname{im} f$ є підпростором лінійного простору L завершено.

■

Означення 1.3 *Вимірність ядра оператора f називають дефектом і позначається $\operatorname{def}(f)$, а вимірність образу називається рангом лінійного перетворення f і позначається $\operatorname{rang}(f)$.*

Приклад 1.14 *Образом оператора обертання площини (див. приклад 1.7) буде вся площина, оскільки кожен вектор є образом. Відповідно, ранг цього оператора дорівнює 2. В нульовий вектор при обертанні переходить лише нульовий вектор. Тому ядро в цього оператора збігається з нульовим підпростором (кажуть — нульове ядро). Відповідно, дефект оператора обертання дорівнює нулю.*

Приклад 1.15 *Дефект оператора проектування на вісь паралельно площині (див. приклад 1.6) дорівнює 2, а ранг дорівнює 1.*

Приклад 1.16 *Дефект нульового оператора дорівнює вимірності всього простору, а ранг дорівнює нулю.*

Приклад 1.17 *Ранг одиничного оператора дорівнює вимірності всього простору, а дефект дорівнює нулю.*

Теорема 1.3 *Нехай f — лінійний оператор в скінченновимірному просторі L над полем F . Тоді*

$$\operatorname{rang}(f) + \operatorname{def}(f) = \dim L. \quad (3)$$

Доведення. Нехай

$$\dim L = n, \quad \text{rang}(f) = p, \quad \text{def}(f) = q.$$

Виберемо в L базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Оскільки кожен вектор $x \in L$ можна записати у вигляді $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$, то кожен вектор $f(x) \in \text{im}(f)$ можна записати у вигляді $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i)$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in F$. Тому $\text{im}(f)$ є лінійною оболонкою векторів $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ і вектори $e_1, \dots, e_n$ можна підібрати так, щоб вектори $f(e_1), \dots, f(e_p)$ утворювали базис $\text{im}(f)$.

Із означення базису випливає, що для будь-якого $i = p+1, p+2, \dots, n$ вектори $f(e_1), \dots, f(e_p), f(e_i)$ є лінійно залежними і для деяких $b_1, b_2, \dots, b_p, b_{p+1} \in F$, серед яких є ненульове число, буде виконуватись рівність

$$b_1 f(e_1) + b_2 f(e_2) + \dots + b_p f(e_p) + b_{p+1} f(e_i) = 0. \quad (4)$$

Число b_{p+1} в (4) є ненульовим — в протилежному випадку вектори $f(e_1), \dots, f(e_p)$ були б лінійно залежними. Отже рівність (4) можна розділити на b_{p+1} і для деяких $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ip} \in F$ можна записати

$$a_{i1} f(e_1) + a_{i2} f(e_2) + \dots + a_{ip} f(e_p) = f(e_i), \quad i = p+1, p+2, \dots, n,$$

або

$$f\left(e_i - \sum_{j=1}^p a_{ij} e_j\right) = 0, \quad i = p+1, p+2, \dots, n, \quad (5)$$

Позначимо

$$u_{i-p} = e_i - \sum_{j=1}^p a_{ij} e_j.$$

Рівності (5) показують, що $u_1, u_2, \dots, u_{n-p}$ належать ядру. Із лінійної незалежності векторів $e_1, e_2, \dots, e_n$ випливає лінійна незалежність векторів $u_1, u_2, \dots, u_{n-p}$. Тому маємо доведену нерівність

$$\text{def}(f) \geq n - p. \quad (6)$$

Позначимо через $L_1 \subseteq L$ підпростір з базисом $e_1, e_2, \dots, e_p$. Із лінійної незалежності векторів $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p)$ випливає, що

$$L_1 \cap \ker(f) = 0.$$

Із відомої рівності

$$\dim(L_1 + \ker(f)) = \dim L_1 + \dim \ker(f) - \dim(L_1 \cap \ker(f))$$

одержуємо рівність

$$\dim(L_1 + \ker(f)) = \dim L_1 + \dim \ker(f),$$

нерівність

$$p + \operatorname{def}(f) \leq n$$

і, відповідно, нерівність

$$\operatorname{def}(f) \leq n - p. \quad (7)$$

Нерівності (6) та (7) доводять рівність (3).

■

1.4 Обмеження лінійного оператора на інваріантний підпростір

Означення 1.4 Підпростір називається інваріантним, коли образ кожного вектора із цього підпростору знову лежить в цьому підпросторі.

Приклад 1.18 Оскільки образ нульового вектора є нульовим вектором, то нульовий підпростір є інваріантним. Оскільки образи всіх векторів містяться у цілому просторі, то весь лінійний простір є інваріантним. Таким чином, тривіальні лінійні підпростори є інваріантними.

Приклад 1.19 Образ і ядро лінійного оператора є інваріантними підпросторами.

Інваріантні підпростори дозволяють будувати обмеження лінійного оператора на підпростір — ці два оператори (весь і обмеження) відрізняються лише областю визначення. Один діє на всьому просторі, а другий — на інваріантному підпросторі.

Теорема 1.4 Сума інваріантних підпросторів є інваріантним підпростором. Перетин двох інваріантних підпросторів є інваріантним підпростором.

Доведення. Нехай L_1, L_2 — два інваріантні підпростори для лінійного оператора f . Якщо $z \in L_1 + L_2$ і $z = x + y$ для деяких $x \in L_1, y \in L_2$, то

$$f(x) \in L_1, f(y) \in L_2 \Rightarrow f(z) = f(x) + f(y) \in L_1 + L_2.$$

Отже сума інваріантних підпросторів є інваріантним підпростором.

Нехай $x \in L_1 \cap L_2$. Тоді $x, f(x) \in L_1, \quad x, f(x) \in L_2$ і $f(x) \in L_1 \cap L_2$.

Доведення теореми завершене. ■

Означення 1.5 Нехай L — лінійний простір, і M — інваріантний для лінійного оператора f підпростір. Тоді лінійний оператор $g : M \rightarrow M$, що визначається умовою $g(x) = f(x)$ для будь-якого вектора $x \in M$ називається обмеженням f на M і позначається

$$g = f|_M.$$

2 Алгебра лінійних операторів.

2.1 Додавання та множення лінійних операторів

Означення 2.1 Якщо f, g — два лінійні перетворення векторного простору L , то відображення $h_1 : L \rightarrow L$, яке визначається формулою

$$h_1(x) = f(x) + g(x),$$

є лінійним. Це перетворення називається сумою лінійних перетворень f та g і позначається через

$$h_1 = f + g.$$

Також лінійним буде перетворення $h_2 : L \rightarrow L$, що визначається формулою

$$h_2(x) = f(g(x)).$$

Лінійне перетворення h_2 називається добутком (або композицією) перетворень f та g і позначається

$$h_2 = fg.$$

Приклад 2.1 Нехай лінійний простір L розкладений у пряму суму двох підпросторів L_1, L_2 , лінійний оператор f є проектуванням на L_2 паралельно L_1 , а g є проектуванням на L_1 паралельно L_2 . Тоді $fg = gf = 0$, а $f + g = id$.

Означення 2.2 Якщо для лінійного оператора $f^2 = f$, то такий оператор називають ідемпотентним. Якщо $f^2 = id$, то такий оператор називають інволютивним. Якщо для деякого натурального n $f^n = 0$, то такий оператор називають нільпотентним.

Приклад 2.2 Всі оператори проектування є ідемпотентними. Оператор обертання площини на 180 градусів є інволютивним.

Приклад 2.3 Обмеження ідемпотентного оператора на образ є одиничним оператором. Це випливає із тотожності $f(f(x)) = f(x)$.

Теорема 2.1 Множення лінійних перетворень асоціативне, але не комутативне. Одиничне перетворення грає роль одиниці при множенні, тобто для будь-якого оператора f виконуються рівності

$$id \cdot f = f \cdot id = f. \quad (8)$$

Нульовий оператор грає роль нуля при множенні, тобто для будь-якого оператора f виконуються рівності

$$0 \cdot f = f \cdot 0 = 0. \quad (9)$$

Доведення. Множення відображень асоціативне — це вважаємо відомим. А множення лінійних операторів є окремим випадком множення відображень. Тому множення лінійних операторів асоціативне.

Коли стверджується, що множення лінійних операторів не комутативне, то мається на увазі, що існують лінійні оператори f, g такі, що $fg \neq gf$. Прикладом, який доводить некомутативність, є оператор f проектування площини на пряму паралельно іншій прямій і оператор обертання цієї площини на кут $\frac{\pi}{2}$.

Рівності (8), (9) — є простим наслідком із означень операторів $id, 0$ та множення операторів.

■

Нагадаємо, що множина разом з асоціативною бінарною операцією називається напівгрупою. Таким чином, лінійні перетворення заданого простору разом з операцією множення утворюють напівгрупу. Вони утворюють напівгрупу також з операцією додавання.

Теорема 2.2 Додавання лінійних операторів асоціативне, комутативне. Серед лінійних операторів існує нульовий і для кожного лінійного оператора існує протилежний.

Доведення. Наявність заявлених властивостей у лінійних операторів на даному лінійному просторі впливає і наявності відповідних властивостей в лінійному просторі, на якому діють оператори. ■

Нагадаємо, що множина з двома бінарними асоціативними операціями операціями множення та додавання називається кільцем, якщо разом з додаванням ця множина утворює комутативну групу, а між собою додавання та множення зв'язані дистрибутивними законами. Теорема 2.2 дозволяє стверджувати, що лінійні оператори на заданому лінійному просторі утворюють кільце.

2.2 Множення лінійного оператора на число

Означення 2.3 Для лінійного оператора f на лінійному просторі L і числа λ відображення *отображение*

$$h_\lambda : L \rightarrow L, x \mapsto h_\lambda(x) = \lambda f(x)$$

називається добутком f на число λ і позначається

$$h_\lambda = \lambda f.$$

Теорема 2.3 Всі лінійні оператори, що діють в лінійному просторі L разом з операціями додавання та множення на число утворюють векторний простір $\text{End } L$ вимірності n^2 , де n — вимірність L .

Якщо $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис в L , то базисом векторного простору лінійних операторів на L можна взяти лінійні оператори

$$f_{ij} : L \rightarrow L,$$

що визначені умовами

$$f_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_j, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases} \quad (10)$$

Доведення. Щоб довести, що лінійні оператори із $\text{End } L$ утворюють лінійний простір, потрібно згадати аксіоми лінійного простору і перевірити їх виконання в $\text{End } L$.

Аксіоми лінійного простору стверджують, що разом з додаванням $\text{End } L$ утворює комутативну групу (тобто додавання асоціативне, існує 0, кожен елемент має протилежний), множення на число асоціативне (тобто $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$) і унітарне (тобто $1 \cdot a = a$, і між собою додавання

та множення на число зв'язані двома дистрибутивними законами (тобто $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu b$, $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.)

Всі аксіоми перевіряються з використанням відповідних властивостей операцій над векторами. Візьмемо одну аксіому — асоціативність додавання лінійних операторів, і доведемо її виконання. Решта аксіом перевіряються подібним чином.

Нехай маємо три лінійні оператори — $f, g, h \in \text{End } L$. Доведемо, що

$$f + (g + h) = (f + g) + h. \quad (11)$$

Два лінійні оператори збігаються, коли образи одного і того ж елемента під дією цих операторів збігаються. Отже, для того, щоб довести (11) необхідно і достатньо довести рівність

$$(f + (g + h))(a) = ((f + g) + h)(a). \quad (12)$$

для кожного вектора $a \in L$. З використанням асоціативності додавання векторів, та з використанням означення додавання лінійних операторів рівність (12) перевіряється наступним чином:

$$\begin{aligned} (f + (g + h))(a) &= f(a) + (g + h)(a) = f(a) + (g(a) + h(a)) = \\ &= (f(a) + g(a)) + h(a) = (f + g)(a) + h(a) = ((f + g) + h)(a). \end{aligned}$$

Переходимо до обгрутування того, що лінійні оператори f_{ij} $i, j = 1, 2, \dots, n$, є базисом простору лінійних операторів. Спочатку відмітимо, що лінійні оператори f_{ij} визначені коректно, це нам забезпечує теорема 1.1. Для доведення того, що оператори f_{ij} утворюють базис, необхідно і достатньо довести повноту і лінійну незалежність бараної системи лінійних операторів.

Повнота означає, що будь-який лінійний оператор $f \in \text{End } L$ є лінійною комбінацією вибраних лінійних операторів. Перевіримо це. Нехай

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} e_j.$$

Тоді

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij}(e_i),$$

і

$$f = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_{ij}.$$

Повнота перевірена.

Переходимо до доведення лінійної незалежності лінійних операторів f_{ij} . Виберемо довільну лінійну комбінацію

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} f_{ij} \quad (13)$$

цих векторів, яка дорівнює нулю (нульовому лінійному оператору), і доведемо, що всі числа $a_{k,j}$ $k, j = 1, 2, \dots, n$, дорівнюють нулю.

Оскільки лінійний оператор (13) нульовий, то для будь-якого базисного вектора e_k буде

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} f_{ij}(e_k) = \sum_{j=1}^n a_{kj} e_j = 0 \quad (14)$$

Оскільки базисні вектори обов'язково незалежні, то остання рівність можлива в тому і тільки тому випадку, коли всі числа $a_{k,j}$ $j = 1, 2, \dots, n$, дорівнюють нулю.

Теорема доведена повністю. ■

Нагадаємо, що лінійний простір, який в той же час є кільцем, називається лінійною алгеброю. Отже многолчени утворюють лінійну алгебру, квадратні матриці заданого розміру утворюють лінійну алгебру. Ми довели, що також лінійні оператори утворюють і кільце і лінійний простір, Отже маємо обгрунтовану теорему

Теорема 2.4 *Лінійні оператори, що діють в заданому лінійному n просторі утворюють лінійну алгебру.*

2.3 Оператор, що обернений до даного

Означення 2.4 *Коли для двох лінійних операторів f, g виконується рівність*

$$fg = gf = 1,$$

- то оператори f, g називають взаємно оберненими. (оператор g обернений до оператора f , а оператор f обернений до оператора g). В цьому випадку пишуть

$$f = g^{-1}, \quad g = f^{-1}.$$

За означенням, якщо заданий оператор f має обернений оператор f^{-1} , то можна писати

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Теорема 2.5 *Лінійний оператор має обернений (оборотний) тоді і тільки тоді, коли він є бієктивним.*

Доведення. Будь-яке відображення має обернене тоді і тільки тоді, коли воно бієктивне — цей факт вважаємо відомим. Отже, коли оператор має обернений, то він бієктивним. Потрібно перевіряти лише, що коли він бієктивний, то в такому випадку він має обернений.

Коли лінійний оператор є бієктивним відображенням, то до нього є обернене відображення. Тому потрібно лише перевірити, що обернене відображення є лінійним оператором.

Нехай $f : L \rightarrow L$ є бієктивним лінійним оператором і $g : L \rightarrow L$ є оберненим відображенням. Потрібно перевірити адитивність і однорідність g , тобто виконання умов

$$g(a + b) = g(a) + g(b), \quad g(\lambda a) = \lambda g(a). \quad (15)$$

Виберемо $a, b \in L$ і $\lambda \in F$. Оскільки оператор f бієктивний, то для деяких векторів $a', b' \in L$ будуть виконуватися рівності

$$f(a') = a, \quad f(\lambda a') = \lambda a, \quad f(b') = b, \quad f(a' + b') = a + b,$$

і, відповідно, рівності

$$a' = g(a), \quad \lambda a' = g(\lambda a), \quad b' = g(b), \quad a' + b' = g(a + b).$$

Грунтуючись на останніх рівностях робимо висновок про правильність (15). ■

Теорема 2.6 *Лінійний оператор $f : L \rightarrow L$ скінченновимірного простору L має обернений тоді і тільки тоді, коли виконується одна із рівностей:*

$$\text{rang } f = \dim L, \quad \text{def } f = 0.$$

Доведення.

Згідно з теоремою 1.3 умови $\text{rang } f = \dim L$ та $\text{def } f = 0$ рівносильні. А умова $\text{rang } f = \dim L$ рівносильна умові бієктивності, яка рівносильна умові існування оберненого оператора згідно з теоремою 2.5. ■

Приклад 2.4 *Оберненим до оператора обертання площини є обертання на протилежний кут. Оберненим до оператора множення на число є оператор множення на обернене число.*

Теорема 2.7 *Оборотні оператори (ті, що мають обернені) лінійного простору утворюють мультиплікативну групу.*

Доведення. Нагадаємо, що мультиплікативною групою називають непорожню множину $\mathcal{P}$ разом з бінарною асоціативною операцією, яка названа множенням, причому ця множина містить одиницю і кожен елемент має обернений. Оскільки множення операторів асоціативне, одиничний оператор має обернений, і, кожен оборотний оператор за означенням має обернений, то доводити потрібно лише те, що добуток оборотних операторів є оборотним оператором.

Нехай f, g — два оборотні оператори і f^{-1}, g^{-1} — обернені до цих операторів. Тоді

$$(f \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot f^{-1}) = f \cdot (g \cdot g^{-1}) \cdot f^{-1} = id.$$

Отже оберненим до оператора $f \cdot g$ буде оператор $g^{-1} f^{-1}$.

Доведення теореми завершене. ■

3 Матриця лінійного оператора

3.1 Означення матриці лінійного оператора

Означення 3.1 *Матрицею лінійного оператора $f : L \rightarrow L$ в заданному базисі $e_1, e_2, \dots, e_n \in L$ називається матриця, стовпчики якої утворені координатами образів базисних векторів при преобразованні f . Тобто коли*

$$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n,$$

$$f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n,$$

...

$$f(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n,$$

- то матрицею $A = A_f$ оператора f буде матриця

$$A = A_f = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.1 Матрицею одиничного оператора є одинична матриця. Матрицею нульового оператора є нульова матриця. Матрицею обертання площини на заданий кут φ є матриця

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.2 Нехай L лінійний простір з базисом e_1, e_2, e_3, e_4 і $f : L \rightarrow L$ — лінійний оператор, для якого

$$f(e_1) = f(e_2) = 7e_1 - e_2 + 5e_4, \quad f(e_3) = 2e_2 + e_3 - 6e_4, \quad f(e_4) = e_1 + e_2 + e_3.$$

Матрицею оператора f в базисі e_1, e_2, e_3, e_4 буде

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 3.1 Коли в лінійному просторі L вибрано базис, матриця A є матрицею лінійного оператора f в цьому базисі, вектор x має стовпчик

координат $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, а вектор y має стовпчик координат $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, то

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow y = f(x). \quad (16)$$

Доведення. Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис l ,

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j,$$

і, відповідно,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нехай також

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^n y_i e_i,$$

Тоді

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \right) e_j \Leftrightarrow y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i (j = 1, 2, \dots, n).$$

■

Теорема 3.2 Коли в n -вимірному лінійному просторі є вибраний базис, то відображення, що ставить у відповідність кожному оператору його матрицю, є ізоморфізмом між алгеброю лінійних операторів і алгеброю квадратних матриць розміру $n \times n$, тобто

- це відображення є бієктивним;
- сумі двох операторів ставиться у відповідність сума матриць цих операторів;
- добутку двох операторів ставиться у відповідність добуток матриць цих операторів;
- нульовому оператору ставиться у відповідність нульова матриця;
- одиничному оператору ставиться у відповідність одинична матриця;
- протилежному оператору ставиться у відповідність протилежна матриця;
- оберненому оператору ставиться у відповідність обернена матриця.

Доведення. Кроки доведення однотипні, тому зупинимося лише на одному пункті — добутку операторів ставиться у відповідність добуток відповідних матриць.

Нехай $e_1, e_2, \dots, e_n$ базис лінійного простору L , нехай в цьому базисі лінійні оператори $f, g, h = f \cdot g$ мають матриці A, B, C

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

За означенням матриці лінійного оператора

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j, \quad g(e_i) = \sum_{j=1}^n b_{ji} e_j, \quad h(e_i) = \sum_{k=1}^n c_{ki} e_k.$$

За означенням добутку двох операторів

$$h(e_i) = f(g(e_i)) = f\left(\sum_{j=1}^n b_{ji} e_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{ji} f(e_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{kj} b_{ji} e_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} b_{ji}\right) e_k$$

Звідси випливає, що $c_{ki} = \sum_{j=1}^n a_{kj} b_{ji}$, тобто $C = A \cdot B$. ■

Теорема 3.3 Матриця A лінійного оператора в лінійному просторі L вимірності n в деякому базисі має блочний вигляд

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

де матриця A_1 має розмір $n_1 \times n_1$, а матриця A_2 має розмір $n_2 \times n_2$, $n_1 + n_2 = n$, тоді і тільки тоді, коли і лінійна оболонка перших n_1 базисних векторів і лінійна оболонка останніх n_2 векторів є інваріантними підпросторами.

Доведення. Теорема є прямим наслідком означення матриці лінійного оператора та означення інваріантного підпростору. ■

3.2 Зміна матриці лінійного оператора при переході до нового базису

Теорема 3.4 Нехай в лінійному просторі L є два базиси: $e_1, e_2, \dots, e_n$ — старий базис, $u_1, u_2, \dots, u_n$ — новий базис, i є матриця C переходу від старого базису до нового. Нехай також лінійний оператор f має матрицю A в старому базисі і матрицю B в новому базисі. Тоді

$$B = C^{-1}AC.$$

Доведення.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

За означенням матриці лінійного оператора

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k, \quad f(u_i) = \sum_{j=1}^n b_{ji} u_j.$$

А за означенням матриці переходу від старого базису до нового

$$u_i = \sum_{j=1}^n c_{ji} e_j.$$

Тоді

$$f\left(\sum_{j=1}^n c_{ji} e_j\right) = \sum_{j=1}^n b_{ji} \left(\sum_{k=1}^n c_{kj} e_k\right).$$

$$\sum_{j=1}^n c_{ji} f(e_j) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{kj} b_{ji}\right) e_k, \quad \sum_{j=1}^n c_{ji} \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{kj} b_{ji}\right) e_k.$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} c_{ji}\right) e_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n c_{kj} b_{ji}\right) e_k, \quad \sum_{j=1}^n a_{kj} c_{ji} = \sum_{j=1}^n c_{kj} b_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Останні рівності означають $AC = CB$. що й потрібно було довести. ■

4 Діагоналізація матриці лінійного оператора

4.1 Власні числа та власні вектори лінійного оператора

В цьому розділі, як і раніше, через L позначаємо лінійний простір, а через f лінійний оператор в цьому просторі.

Означення 4.1 Число λ називається власним числом оператора f , якщо для деякого ненульового вектора x виконується рівність

$$f(x) = \lambda x. \tag{17}$$

Означення 4.2 Вектор $x \in L$ називається власним вектором лінійного оператора f , що відповідає власному числу λ , якщо виконується рівність (17).

Підкреслимо, що власний вектор визначається після власного числа, і власне число може бути нульовим. Нульовий вектор є власним вектором для будь-якого власного числа. А при визначенні власного числа вимагається, щоб існував ненульовий власний вектор, який цьому числу відповідає. Порядок визначень тут не можна змінювати.

Приклад 4.1 Кожну квадратну матрицю розміру $n \times n$ можна розглядати як лінійний оператор у просторі стовпчиків довжини n : якщо A матриця, а x — стовчик елементів того поля, якому належать елементи матриці A , то

$$x \rightarrow A \cdot x.$$

Природно, власні числа (відповідно, власні вектори) цього оператора називають власними числами (відповідно, власними векторами) матриці A . Отже, число λ є власним числом матриці A тоді і тільки тоді (за означенням) коли для деякого ненульового вектора (стовпчика елементів відповідного поля) виконується рівність

$$A \cdot x = \lambda x. \quad (18)$$

А вектор x є власним вектором матриці A , що відповідає власному числу λ , називається вектор x , що задовольняє рівнянню (18)

Теорема 4.1 Якщо в лінійному просторі вибрали базис і лінійному оператору f поставили у відповідність матрицю A , то власні вектори і власні числа матриці A і лінійного оператора f збігаються.

Доведення. Нехай вектор x має стовпчик координат $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, а вектор $f(x)$ має стовпчик координат $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$. Тоді (див. (16)), то

$$f(x) = \lambda \cdot x \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

■

Приклад 4.2 Розглянемо лінійний простір дійсних функцій, що мають похідні всіх порядків у всіх точках інтервалу $(0,1)$, і лінійний оператор в цьому просторі, що ставить у відповідність функції її похідну. Тоді власними числами будуть ті дійсні числа λ , для яких існує ненульова функція f така, що

$$f' = \lambda f. \quad (19)$$

Оскільки $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$, то всі дійсні числа є власними для цього оператора. Оскільки розв'язками рівняння (19) для заданого λ є функції $C \cdot e^{\lambda x}$, то власними векторами введеного оператора знаходження похідної, що відповідають власному числу λ , будуть функції $C \cdot e^{\lambda x}$, де C — стале число.

Приклад 4.3 Розглянемо оператор проектування на підпростір L_2 паралельно підпростору L_1 , який розглядали у прикладі 1.5. Якщо L_1, L_2 є ненульовими підпросторами, то власними числами є 0 та 1, причому, власними векторами, які відповідають власному числу 0 будуть вектори із L_1 , а власними числами, які відповідають власному числу 1 будуть вектори із L_2 .

Означення 4.3 Характеристичним многочленом матриці A називають многочлен $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Характеристичним многочленом лінійного оператора називають характеристичний многочлен його матриці в якомусь базисі.

Потрібно перевіряти коректність визначення характеристичного многочлена лінійного оператора, тобто потрібно доводити, що характеристичний многочлен матриці лінійного оператора не залежить від вибору базису. Перевірка коректності наступна. Нехай є два базиси - новий і старий. В новому оператор має матрицю B , а в старому - матрицю A , і нехай C — матриця переходу від старого базису до нового. Тоді

$$\det(B - \lambda E) = \det(C^{-1}AC - E) = \det(C^{-1}(A - \lambda E)C) = \det(A - \lambda E).$$

Отже характеристичні многочлени збігаються і означення коректне.

Теорема 4.2 Число є власним для лінійного оператора тоді і тільки тоді, коли воно є коренем характеристичного многочлена $\chi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ матриці A цього оператора в деякому базисі.

Доведення. Твердження теореми випливає з того, що рівняння $Ax = \lambda \cdot x$ має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли має ненульовий розв'язок система лінійних рівнянь

$$Ax - \lambda x = (A - \lambda E)x = 0,$$

а останнє рівняння має ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю (або ранг системи менше кількості невідомих).

■

Теорема 4.3 *Всі власні вектори, що відповідають заданому власному числу λ , утворюють ненульовий інваріантний підпростір.*

Доведення. Всі власні вектори лінійного оператора $f : L \rightarrow L$, що відповідають власному числу λ , утворюють ядро оператора $f - \lambda \cdot id$ і тому утворюють підпростір всього простору. Цей підпростір ненульовий тому, що за означенням власного числа, повинен бути бодай один ненульовий власний вектор, який цьому числу відповідає

■

Теорема 4.4 *Сума власних підпросторів, що відповідають різним власним числам, є прямою сумою.*

Доведення. Нехай L — лінійний простір, і $L_1, L_2, \dots, L_k \subseteq L$, — підпростори цього простору. Нагадаємо, що сума

$$L_1 + L_2 + \dots + L_k$$

є прямою, якщо для кожного $i = 1, 2, \dots, k$

$$\left(\sum_{j \neq i, j=1}^k L_j \right) \cap L_i = 0.$$

Припустимо далі, що $L_1, L_2, \dots, L_k \subseteq L$, є власними підпросторами, L_i відповідає власному числу λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$ причому всі власні числа різні. Оскільки нумерація власних підпросторів довільна, то можна доводити лише рівність

$$(L_1 + L_2 + \dots + L_{k-1}) \cap L_k = 0,$$

яка означає, що

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0, \tag{20}$$

лише в одному випадку, коли всі доданки дорівнюють нулю.

Подіємо на рівність (20) операторами $f, f^2, f^3, \dots, f^{k-1}$. Одержимо систему рівностей

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0,$$

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = 0,$$

$$\lambda_1^2 x_1 + \lambda_2^2 x_2 + \dots + \lambda_k^2 x_k = 0,$$

...

$$\lambda_1^{k-1} x_1 + \lambda_2^{k-1} x_2 + \dots + \lambda_k^{k-1} x_k = 0,$$

яку можна записати в матричному вигляді $W \cdot x = 0$, де

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Оскільки матриця W це матриця Вандермонда, і всі власні числа різні, то ця матриця має обернену W^{-1} — вважаємо це відомим. Домноживши зліва рівність $W \cdot x = 0$ на W^{-1} одержуємо потрібне $x = W^{-1} \cdot W \cdot x = W^{-1} \cdot 0 = 0$.

■

Приклад 4.4 Знайдемо власні числа та власні підпростори лінійного оператора, що заданий матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Спочатку шукаємо характеристичний многочлен:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 4 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda.$$

Потім шукаємо корені характеристичного многочлена:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 8.$$

Отже власними числами лінійного оператора є числа 0, 8.

Далі для кожного власного числа шукаємо власний підпростір, що відповідає цьому числу. Знайти власний підпростір означає знайти базис цього підпростору.

Для власного числа 0 відповідним власним підпростором є підпростір розв'язків рівняння

$$Ax = 0$$

Базис цього простору складається із одного вектора — ним можна взяти

$$e_1 = (-3, 2).$$

Для власного числа 8 відповідним власним підпростором є підпростір розв'язків рівняння

$$(A - 8E)x = 0, \quad \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Базис цього простору складається із одного вектора — ним можна взяти

$$e_2 = (1, 2).$$

В базисі e_1, e_2 матриця B лінійного оператора має вигляд

$$B = C^{-1}AC,$$

де C — це матриця переходу від старого базису $(1, 0), (0, 1)$ до нового базису e_1, e_2 , тобто

$$C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Отже

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$$

4.2 Анулюючий та мінімальний многочлен

Означення 4.4 Многочлени, які мають своїм коренем заданий оператор (відповідно, матрицю), називають анулюючими цей оператор (відповідно, цю матрицю).

Приклад 4.5 Оскільки $A^2 = 0$ для матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то многочлен x^2 є анулюючим для матриці A .

Теорема 4.5 Для кожного оператора (відповідно, матриці) є ненульовий анулюючий многочлен. Серед анулюючих многочленів є многочлен найменшого степеня (один з точністю до сталого множника).

Доведення. Відомо (див. теор. 2.3), що вимірність лінійного простору лінійних операторів, що діють в заданому скінченновимірному просторі, скінченна. Тому для заданого оператора f певна кількість степенів $f, f^2, f^3, \dots, f^n$ буде лінійно залежною, тобто

$$a_1 f + a_2 f^2 + \dots + f^n = 0,$$

причому серед коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots, a_n$ є ненульовий. А це означає, що многочлен

$$a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

є анулюючим для оператора f .

Існування ненульових анулюючих многочленів доведене.

Оскільки степені ненульових многочленів є нуль або натуральне число, то за принципом найменшого числа серед ненульових анулюючих многочленів є многочлен найменшого степеня. Доведемо, що такий многочлен єдиний з точністю до сталого множника.

Нехай $u(x), v(x)$ два ненульових анулюючих многочлени найменшого степеня для заданого оператора f . Розділимо $u(x)$ на $v(x)$ з остачею:

$$u(x) = v(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg v(x).$$

Оскільки

$$u(f) = v(f) \cdot q(f) + r(f),$$

і $u(f) = v(f) = 0$, то $r(f) = 0$, тобто $r(x)$ є анулюючим для f . Але $\deg r(x) < \deg v(x)$, тому $r(x) = 0$ і многочлен u ділиться на многочлен v .

■

Означення 4.5 *Ненульовий анулюючий многочлен найменшого степеня називають мінімальним.*

Теорема 4.6 *Всі анулюючі многочлени діляться на мінімальний. Мінімальний многочлен єдиний з точністю до сталого множника.*

Доведення. Нехай $u(x)$ є анулюючим многочленом, а $m(x)$ є мінімальним многочленом для лінійного оператора f .

Розділимо $u(x)$ на $m(x)$ з остачею:

$$u(x) = m(x) \cdot q(x) + r(x), \quad \deg r(x) < \deg m(x).$$

Оскільки

$$u(f) = m(f) \cdot q(f) + r(f),$$

і $u(f) = m(f) = 0$, то $r(f) = 0$, тобто $r(x)$ є анулюючим для f . Але $\deg r(x) < \deg m(x)$, тому $r(x) = 0$ і многочлен u ділиться на многочлен m .

■

Теорема 4.7 (Теорема Гамільтона — Келі) *Кожна матриця і кожен лінійний оператор є коренем свого характеристичного многочлена.*

Доведення. З огляду на ізоморфізм між алгеброю операторів і алгеброю матриць теорему можна доводити лише для матриць.

Матриця A є коренем многочлена $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ (за визначенням) коли

$$a_0E + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_nA^n = 0.$$

Доведення (взяте із книги Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.:Наука, 1970, стр59).

Нехай у нас є матриця A розміру $n \times n$ над деяким полем F . Нагадаю, що визначення многочленів у нас алгебраїчне — многочлени — це вирази певного вигляду, і вони збігаються лише у випадку, коли всі коефіцієнти у них збігаються. Будуємо матрицю $A - \lambda E$ і називаємо її характеристичною. До характеристичної матриці будуємо приєднану матрицю B — її елементами є алгебраїчні доповнення певних елементів характеристичної матриці. Точніше, якщо

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

то b_{ij} — це мінор, що одержаний із характеристичної матриці викреслюванням j -го рядка і i -го стовпчика і помноженого на $(-1)^{i+j}$. Досить очевидно, що елементи матриці B є многочленами від λ степені, що не перевищує $n - 1$. Тому можна написати

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}\lambda + b_{ij}^{(2)}\lambda^2 + \dots + b_{ij}^{(n-1)}\lambda^{n-1}.$$

В таких позначеннях матриця B розкладається в суму

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \cdot \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \dots & b_{1n}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \dots & b_{2n}^{(k)} \\ \dots & & & \\ b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \dots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

або

$$B = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \cdot B^{(k)}, \text{ де } B^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \dots & b_{1n}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & \dots & b_{2n}^{(k)} \\ \dots & & & \\ b_{n1}^{(k)} & b_{n2}^{(k)} & \dots & b_{nn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Далі будемо користуватися відомою рівністю

$$B(A - \lambda E) = \det(A - \lambda E) \cdot E. \quad (21)$$

Характеристичний многочлен часто позначають χ , і ми так зробимо:

$$\chi(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \lambda^n.$$

Вважаємо зрозумілим, що характеристичний многочлен має степінь n і старший коефіцієнт в ньому дорівнює 1.

Далі переписуємо рівняння (21) в нових позначеннях:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \cdot B^{(k)}(A - \lambda E) = \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k \alpha_k \right) \cdot E, \quad \alpha_n = 1.$$

Остання рівність виконується, коли збігаються коефіцієнти при степенях λ зліва і справа. Хоч тут і не многочлени над полем чи комутативним кільцем з одиницею, як ми їх визначали, все ж так можна стверджувати — ми можемо перейти на рівень окремих елементів і зовсім строго прослідкувати за правильністю такого твердження.

Отже прирівнюємо коефіцієнти зліва і справа.

$$\begin{aligned} -B^{(0)}A &= \alpha_0 E, \\ -B^{(1)}A + B^{(0)} &= \alpha_1 E, \\ -B^{(2)}A + B^{(1)} &= \alpha_2 E, \\ &\vdots \\ -B^{(n-1)}A + B^{(n-2)} &= \alpha_{n-1} E, \\ B^{(n-1)} &= E. \end{aligned} \quad \Bigg) \quad \Bigg)$$

Ми виписали $n+1$ рівність. Помножимо їх відповідно на $E, A, A^2, \dots, A^n$ і складемо. Зліва одержимо 0, а справа характеристичний многочлен від матриці. Тобто ми одержали, що матриця є коренем свого характеристичного многочлена.

Теорема Гамільтона — Келі доведена. ■

4.3 Діагоналізація матриці лінійного оператора.

Теорема 4.8 *Матриця лінійного оператора має діагональний вид тоді і тільки тоді, коли базис лінійного простору складається із власних векторів.*

Доведення.

Доведення однокрокове — виписуємо матрицю лінійного оператора у базисі із власних векторів і бачимо, що вона діагональна (доведення “туди”). Потім виписуємо дію оператора на базисні вектори у випадку,

коли матриця діагональна і бачимо, що базис складається виключно із власних векторів (доведення “назад”).

■

Означення 4.6 *Діагоналізувати матрицю лінійного оператора означає знайти базис, в якому матриця цього оператора має діагональний вигляд.*

Кожну матрицю можна розглядати як матрицю A означає знайти оборотну матрицю C таку, що матриці $C^{-1}AC$ має діагональний вигляд.

5 Жорданова форма матриці лінійного оператора

Не кожену матрицю можна привести до діагонального вигляду (знайти базис із власних векторів). Але для кожної матриці A існує матриця переходу C така, що матриця $B = C^{-1}AC$ має блочний вигляд, в якому по головній діагоналі стоять клітини Жордана, а за межами діагоналі — нульові клітини. Кажуть, що так побудована матриця B має форму Жордана.

Означення 5.1 *Клітини Жордана $J(\lambda)$ — це матриці, в яких по діагоналі стоїть одне число (власне), над діагоналлю йде рядок одиниць, а решта елементів — нулі, тобто*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

5.1 Розкладення лінійного простору у пряму суму кореневих підпросторів.

В розділі будемо стало використовувати позначення:

L — лінійний простір над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел;

$\dim L = n \geq 1$; $e_1, e_2, \dots, e_n$ — базис простору L ;

I — одиничний оператор, $I(x) = x$ для будь-якого вектора $x \in L$;

$f : L \rightarrow L$ — лінійний оператор;

$\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} (\lambda - \lambda_2)^{p_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{p_k}$ — характеристичний многочлен оператора f ;

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — різні власні числа оператора f ;

A — матриця оператора f базисі $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$\text{Ker}(f)$ — ядро оператора f , воно складається із тих векторів, які переводяться оператором f в 0.

$\text{Im}(f)$ — образ лінійного простору під дією оператора f . Він складається із тих векторів $y \in L$ для яких можна підібрати такий вектор $x \in L$, що буде виконуватися рівність $y = f(x)$.

Нагадаємо, що обмеження заданого оператора на інваріантний підпростір це новий оператор, який відрізняється від заданого лише областю визначення - він визначений лише на інваріантному підпросторі, але на векторах інваріантного підпростору діє так же, як і заданий.

Без нагадування будемо використовувати два факти:

1) добуток двох многочленів від одного оператора не залежить від порядку множників;

2) якщо x — власний вектор оператора f , що відповідає власному числу λ , і $\alpha(f)$ — многочлен від f , то x буде також власним вектором оператора $\alpha(f)$, який відповідає власному числу $\alpha(\lambda)$.

Означення 5.2 *Кореневим підпростором, що відповідає власному значенню λ_i , $i = 1, 2, \dots, k$, називається підпростір $V_i \subseteq L$, елементами якого є ті вектори, які переводяться в 0 певним степенем оператора $f - \lambda_i I$.*

Іншими словами, кореневий підпростір V_i , що відповідає власному числу λ_i , це об'єднання ядер операторів $(f - \lambda_i I)^p$ при всіх $p = 1, 2, \dots$

Визначення коректне, кореневий підпростір дійсно є підпростором. Для перевірки цього факту беремо два вектори $a, b \in V_i$ $x, y \in \mathbb{C}$. Потрібно переконатися, що $c = xa + yb \in V_i$.

Дійсно, оскільки $a, b \in V_i$, то для деяких натуральних чисел $n_1 \geq n_2$,буде

$$(f - \lambda_i I)^{n_1}(a) = (f - \lambda_i I)^{n_2}(b) = 0.$$

Тоді

$$(f - \lambda_i I)^{n_1}(c) = x(f - \lambda_i I)^{n_1}(a) + y(f - \lambda_i I)^{n_2}(b) = 0.$$

Розділ присвячений доведенню наступної теореми:

Теорема 5.1 *Лінійний простір є прямою сумою корневих підпросторів, тобто*

$$L = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k.$$

Доведення.

Спочатку одержимо декілька допоміжних результатів.

Лема 5.1 *Кожен кореневий підпростір є ненульовим інваріантним підпростором.*

Для доведення потрібно показати, що для вектора $x \in L_i$ також $f(x) \in L_i$. А це випливає з того, що коли $(f - \lambda_i I)^p(x) = 0$, то

$$(f - \lambda_i I)^p(f(x)) = f((f - \lambda_i I)^p(x)) = f(0) = 0.$$

Лема 5.2 *Для кожного кореневого підпростору V_i існує цілком певне число q_i таке, що*

$$V_i = \text{Ker}(f - \lambda_i I)^{q_i} = \{v \in V \mid (f - \lambda_i I)^{q_i}(v) = 0\}.$$

Доведення. Використовуємо інваріантність підпростору V_i . В цьому підпросторі оператор f має єдине власне число $-\lambda_i$. Обмеження f_1 оператора f на підпростір V_i має характеристичний многочлен $(\lambda - \lambda_i I)^{q_i}$. А характеристичний многочлен є анулюючим. Тому оператор $(f_1 - \lambda_i I)^{q_i}$ є нульовим, а оператор $(f - \lambda_i I)^{q_i}$ переводить всі вектори підпростору V_i в нуль. Лема доведена.

■

Лема 5.3 *Нехай кореневий підпростір V_i є ядром оператора $(f - \lambda_i I)^{q_i}$. Тоді лінійний простір V є прямою сумою двох інваріантних підпросторів $V = V_i + V'_i$, де $V'_i = \text{Im}((f - \lambda_i I)^{q_i})$.*

Доведення. Якщо φ лінійний оператор, і A — його матриця в певному базисі, то ядро оператора це лінійний підпростір векторів x для яких $Ax = 0$. Уже нам відомо, що вимірність підпростору розв'язків дорівнює $N - \text{rang} A$, де N — вимірність усього простору, а $\text{rang} A$ — ранг матриці A . Образи базисних векторів є стовпчиками матриці A . Тому вимірність образу оператора φ дорівнює $\text{rang} A$. Звідси випливає, що сума вимірностей ядра і образу оператора дорівнює вимірності усього простору.

В нашому випадку, якщо $V'_i = \text{Im}((f - \lambda_i I)^{q_i})$, то

$$\dim V_i + \dim V'_i = n.$$

Для доведення того, що $V = V_i + V'_i$, лишилося перевірити рівність

$$V_i \cap V'_i = 0.$$

Припустимо, що $V_i \cap V'_i = U \neq 0$. Тоді U , як перетин двох інваріантних підпросторів, також є інваріантним підпростором. Обмеження g лінійного оператора f на лінійний підпростір U має характеристичний

многочлен і, відповідно, власне число. Тому оператор f має власний вектор $x \in U$, що відповідає певному власному числу μ . Якщо $\mu \neq \lambda_i$, то для будь-якого натурального m

$$(f - \lambda_i I)^m(x) \neq 0$$

і $x \notin V_i$. Якщо ж $\mu = \lambda_i$, то для деякого $y \in V$ буде

$$x = (f - \lambda_i I)^{q_i}(y) \neq 0, \quad (f - \lambda_i I)^{q_i}(x) = (f - \lambda_i I)^{2q_i}(y) = 0.$$

А це суперечить лемі 5.2.

■

Лема 5.4 *Кореневий підпростір V_i має вимірність p_i . Характеристичним многочленом обмеження оператора f на інваріантний підпростір $V'_i = \text{Im}((f - \lambda_i I)^{q_i})$ є многочлен*

$$\frac{\chi(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{p_i}}.$$

Доведення. Правильність леми випливає з того, що 1) обмеження f_1 оператора f на V_i має єдине власне число — λ_i ; 2) обмеження f_2 оператора f на V'_i не має власних векторів, що відповідають власному числу λ_i — в протилежному випадку підпростори V_i та V'_i мали б ненульовий перетин; 3) Характеристичний многочлен оператора f є добутком характеристичних многочленів операторів f_1 та f_2 .

■

Тепер заготовано все необхідне для швидкого доведення теореми. Це доведення проводиться індукцією по кількості різних власних чисел.

База індукції — одне власне число. В такому разі весь простір є єдиним кореневим підпростором і теорема правильна.

Індуктивне припущення, нехай ми можемо розкласти лінійний простір у пряму суму корневих підпросторів у випадку, коли власних чисел менше ніж k .

Індуктивний перехід. Нехай оператор f має k різних власних чисел. Тоді розкладаємо лінійний простір у пряму суму $V = V_1 + V'_1$ (в позначеннях леми 5.4). А далі користуємося лемою 5.4 і розкладаємо уже V'_1 у суму корневих, що дозволене індуктивним припущенням.

Теорема 5.1 доведена.

■

5.2 Жорданова форма матриці з одним власним числом

Користуємося позначеннями попереднього розділу про кореневі підпростори.

Протягом цього розділу оператор f буде мати лише одне власне число. Починаємо ми з випадку, коли цим власним числом є 0 — основна частина матеріалу стосується цього найважливішого окремого випадку. В цьому випадку характеристичний многочлен оператора має вигляд λ^n і f^n є нульовим оператором.

Означення 5.3 Лінійний оператор, який в певному степені є нульовим, називають нільпотентним. Найменше натуральне число, в якому нільпотентний оператор дорівнює нулю називають висотою нільпотентності оператора.

Означення 5.4 Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

називається клітиною Жордана, яка відповідає власному числу λ , коли

$$a_{ii} = \lambda, i = 1, 2, \dots, n \quad a_{i+1,i} = 1, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad a_{ij} = 0 \text{ якщо } j \notin \{i, i-1\}.$$

Прикладами клітин Жордана, що відповідають власному числу λ є матриці

$$(\lambda), \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \dots$$

Теорема 5.2 Для нільпотентного оператора f існує базис, в якому матриця цього оператора блочно-діагональна і по діагоналі стоять клітини Жордана, які відповідають власному числу 0 .

Далі вважаємо, що оператор f нільпотентний і має висоту p . Нульова матриця є блочно діагональною, де по діагоналі стоять клітини Жордана

(0). Отже для нульового оператора теорема очевидна. Далі вважаємо, що $f \neq 0$, $p > 1$, $f^p = 0$, $f^{p-1} \neq 0$.

Позначимо через $V_i \subset V$ ядро оператора f^i , $i = 1, 2, \dots, p$. Таким чином, $V_p = V$ і V_1 — власний підпростір, що відповідає власному числу 0. Якщо для деякого натурального i і для деякого вектора x виконується рівність $f^i(x) = 0$, то також буде $f^{i+1}x = 0$. Тому побудовані підпростори $V_1, V_2, \dots, V_p$ вкладені попередній в наступний:

$$0 = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_p = V.$$

Через U_i $i = 2, 3, \dots, p$ позначимо доповнення підпростору V_{i-1} до підпростору V_i . Таким чином,

$$V_1 = U_1, V_2 = V_1 \oplus U_2, V_3 = V_2 \oplus U_3, \dots, V = V_p = V_{p-1} \oplus U_p.$$

Лема 5.5 *Припустимо, що для деякого $1 < q \leq p$ вектори $u_1, u_2, \dots, u_k \in U_q$ лінійно незалежні в U_q . Тоді для будь-якого натурального r , $q > r \geq 1$ вектори $f^r(u_1) = v_1, f^r(u_2) = v_2, \dots, f^r(u_k) = v_k \in V_{q-r}$ лінійно незалежні і $\text{Lin}(v_1, v_2, \dots, v_k) \cap V_{q-r-1} = 0$.*

Доведення. В цій лемі міститься три твердження:

1. Вектори $v_1, v_2, \dots, v_k \in V_{q-r}$.
2. Вектори $v_1, v_2, \dots, v_k$ лінійно незалежні.
3. Лінійна оболонка $\text{Lin}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ векторів $v_1, v_2, \dots, v_k$ має нульовий перетин із підпростором V_{q-r-1} .

По черзі перевіряємо наведені твердження.

Оскільки $u_1, u_2, \dots, u_k \in U_q$ і $U_q \subseteq V_q$, то $f^q(u_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Звідси випливає, що $f^{q-r}(v_i) = f^{q-r}(f^r(u_i)) = f^q(u_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$ і $v_i \in V_{q-r}$. Перша частина перевірена.

Переходимо до другої частини. Візьмемо лінійну комбінацію v векторів $v_1, v_2, \dots, v_k$:

$$v = \sum_{i=1}^k \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^k \alpha_i f^r(u_i) = f^r \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \right).$$

Позначимо вектор $\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$ через u . Маємо

$$u \in U_q, u \in V_q, u \notin V_{q-1}, f^r(u) = 0 \Rightarrow f^{q-1}(u) = 0 \Rightarrow u = 0.$$

Оскільки вектори $u_1, u_2, \dots, u_k$ лінійно незалежні, то ми можемо написати

$$v = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0,$$

що і означає лінійну незалежність векторів $v_1, v_2, \dots, v_k$. Доведення другої частини завершено.

Переходимо до третьої частини, виристовуючи позначення із доведення другої частини. Отже, маємо лінійну комбінацію $v \in V_{q-r}$. Припустимо, що також $v \in V_{q-r-1}$. Тоді

$$0 = f^{q-r-1}(v) = f^{q-r-1} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i f^r(u_i) \right) = f^{q-1} \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i \right).$$

Звідси випливає, що $u = 0$ і $v = 0$. Третья частина леми доведена, і вся лема доведена.

■

Приклад 5.1 З'ясуємо, який вигляд може мати матриця оператора f у 7-вимірному просторі, якщо ранг його матриці дорівнює 4 і $f^2 = 0$.

В нашому випадку

$$\dim V_2 = 7, \dim V_1 = \dim U_1 = 4, \dim U_2 = \dim V_2 - \dim V_1 = 3.$$

Вибираємо базис $u_1, u_2, u_3 \in U_2$. Лінійно незалежні вектори $f(u_1), f(u_2), f(u_3)$ доповнюємо до базису U_1 вектором u_4 . Об'єднання базисів U_1 і U_2 дає базис всього простору. В базисі

$$e_1 = u_1, e_2 = f(u_1), e_3 = u_2, e_4 = f(u_2), e_5 = u_3, e_6 = f(u_3), e_7 = u_4$$

матриця A оператора f має вигляд

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

тобто матриця A блочно-діагональна, в ній по діагоналі стоять клітини жордана, що відповідають власному числу 0.

Доведення. Переходимо власне до доведення теореми Жордана. Теорему доводимо конструктивно — будуємо базис в якому матриця лінійного нільпотентного оператора f має жорданову форму.

Базис будується кроками.

На першому кроці будується базис $e_{11}, e_{12}, \dots$ лінійного простору U_p . Оскільки ранг лінійного оператора (ранг його матриці) менше ніж n , і вимірність простору V_{p-1} дорівнює рангу f , то

$$\dim U_p = \dim V_p - \dim V_{p-1} \geq 1.$$

На другому кроці вектори $f(e_{11}), f(e_{12}), \dots$ доповнюємо векторам $e_{21}, e_{22}, \dots$ до базису U_{p-1} .

На i -ому кроці ($i = 2, 3, \dots, p-1$) беремо базис лінійного простору U_{p-i+2} ліємо на його елементи (базисні вектори) оператором f і одержані лінійно незалежні вектори доповнюємо до базису лінійного підпростору U_{p-i+1} .

На останньому p -му кроці беремо базис підпростору U_2 діємо най його елементи оператором f . Одержані образи лінійно незалежні і ми доповнюємо їх векторами $e_{p1}, e_{p2}, \dots$ до базису $U_1 = V_1$.

Можливість здійснення вказаних кроків забезпечується лемою 5.5.

Об'єднання побудованих базисів є потрібним нам базисом жордана — потрібно лише розташувати одержані вектори в належному порядку. Те, що об'єднання базисів підпросторів $U_i, i = 1, 2, \dots, p$ дасть базис усього простору випливає з рівності $U_1 \oplus \dots \oplus U_p = V$.

Одержані вектори розташовуються таким чином. Спочатку вибирається перший базисний вектор e_{11} із U_p , а далі ставляться його образи: $f(e_{11}), f^2(e_{11}), \dots, f^{p-1}(e_{11})$. Такі послідовності називаємо ланцюгами жордана. Отже впорядкування базису починається із створення першого ланцюга жордана

$$e_{11}, f(e_{11}), f^2(e_{11}), \dots, f^{p-1}(e_{11}).$$

Далі ставиться ланцюг жордана, що починається із другого базисного вектора e_{12} підпростору U_p :

$$e_{11}, f(e_{11}), f^2(e_{11}), \dots, f^{p-1}(e_{11}).$$

Потім виписуються ланцюги жордана, що починаються із решти базисних векторів підпростору U_p :

$$e_{21}, f(e_{21}), f^2(e_{21}), \dots, f^{p-2}(e_{21}).$$

$$e_{22}, f(e_{22}), f^2(e_{22}), \dots, f^{p-2}(e_{22}).$$

...

Коли закінчуються ланцюги з початками в підпрострі U_i , переходимо до ланцюгів, що починаються в U_{i-1} . Таким чином, ми множину всіх базисних векторів розбили на ланцюги і ці ланцюги записали по черзі. Оце і є кінцевий результат — базис Жордана.

Ретельніше розглянемо одержаний базис Жордана.

Ланцюг Жордана є базисом інваріантного підпростору — це досить ясно. Також ясно, що в цьому інваріантному підпрострі у вибраному базисі матриця обмеження оператора буде клітиню Жордана. Весь простір розбивається в пряму суму таких інваріантних підпросторів, а матриця лінійного оператора стає блочно діагональною, і по діагоналі стоять клітини Жордана.

■

Приклад 5.2 *Маємо нільпотентний оператор f в десятивимірному просторі V . Його матриця в жордановій формі має три клітини — одна розміру 4 на 4 і дві клітини розміру 3 на 3. Які вимірності підпросторів*

$$V_4 = \text{Ker} f^4, V_3 = \text{Ker} f^3, V_2 = \text{Ker} f^2, V_1 = \text{Ker} f?$$

Аналіз ситуації. Базис, в якому матриця оператора має жорданову форму складається із 3-х ланцюгів жордана (за кількістю клітин) — один ланцюг довжини 4 і два ланцюги кожен довжиною 3. Отже f^4 є нульовим оператором і

$$\dim V_4 = \dim \text{Ker} f^4 = \dim V = 10.$$

Кількість жорданових ланцюгів довжини 4 — це вимірність простору U_4 , який є доповненням підпростору V_3 V_4 . Тому

$$1 = \dim U_4 = \dim V_4 - \dim V_3 = 10 - \dim V_3 \Rightarrow \dim V_3 = 9.$$

Кількість ланцюгів довжини 3 — це вимірність U_3 без вимірності U_4 . Тому

$$2 = \dim U_3 - \dim U_4 = (\dim V_3 - \dim V_2) - \dim U_4 = 9 - \dim V_2 - 1 \Rightarrow \dim V_2 = 6.$$

Кількість ланцюгів довжини 2 — це вимірність U_2 без вимірності U_3 . $\dim U_3 = (\dim V_3 - \dim V_2) = 9 - 6 = 3$. Тому

$$0 = \dim U_2 - \dim U_3 = (\dim V_2 - \dim V_1) - 3 = 6 - \dim V_2 - 3 \Rightarrow \dim V_1 = 3.$$

Зауважимо, що $V_1 = \text{Ker} f$ є власним підпростором, і $\dim \text{Ker} f$ збігається із кількістю клітин жордана в жордановій формі нільпотентного оператора.

5.2.1 Теорема Жордана

Теорема 5.3 (Теорем Жордана) Для кожного лінійного оператора f існує базис, в якому матриця цього оператора блочно-діагональна і по діагоналі стоять клітини Жордана.

Доведення. Доведення теореми Жордана. Спочатку лінійний простір V розкладаємо в пряму суму кореневих підпросторів лінійного оператора f . На кореновому підпросторі, що відповідає власному числу λ_0 , розглядаємо нільпотентний оператор $g = f - \lambda_0 E$. Для оператора g на кореновому підпросторі будемо Жорданів базис. В цьому базисі оператор g має матрицю, що знаходиться в жордановій формі. Клітини в цій формі відповідають власному числу 0. Тоді оператор $f = g + \lambda_0 E$ на кореновому підпросторі, що відповідає власному числу λ_0 буде мати в цьому базисі матрицю, що знаходиться в формі жордана і клітини відповідають власному числу λ_0 .

Кореневі підпростори інваріантні, матриця оператора блочно-діагональна, і по діагоналі стоять матриці, що знаходяться в формі Жордана. Отже і вся матриця знаходиться в формі Жордана.

Кінець доведення. ■

Матеріал лекції розглядається лінійною алгеброю. Отже його можна шукати в будь-якому підручнику з лінійної алгебри.

Приклад 5.3 Привести до жорданової форми матрицю

$$A = \begin{bmatrix} -262 & -590 & 951 & -821 & -619 \\ 327 & 740 & -1196 & 1041 & 749 \\ 54 & 122 & -197 & 171 & 125 \\ -73 & -166 & 269 & -236 & -162 \\ -21 & -48 & 78 & -69 & -45 \end{bmatrix}$$

з одним власним числом 0.

Відповідь: Матриця A має жорданову форму

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Знаходження жорданової форми. Вважаємо відомим, що $A^2 = 0$ (власне, це не важко перевірити). Шукаємо базис ядра і вимірність образу оператора f . Ядро — це підпростір розв’язків однорідної системи рівнянь $Ax = 0$ із основною матрицею A . Розв’язуємо методом Гауса: виписуємо матрицю A і приводимо її до спрощеного вигляду.

$$A = \begin{bmatrix} -262 & -590 & 951 & -821 & -619 \\ 327 & 740 & -1196 & 1041 & 749 \\ 54 & 122 & -197 & 171 & 125 \\ -73 & -166 & 269 & -236 & -162 \\ -21 & -48 & 78 & -69 & -45 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -4 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & 9 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 & 7 & -17 \\ 0 & 2 & -5 & 9 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

За матрицею B розділяємо основні змінні — x_1, x_2 і вільні змінні — x_3, x_4, x_5 , виписуємо систему рівнянь, що відповідає матричному рівнянню $Bx = 0$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - 7x_4 + 17x_5 = 0, \\ 2x_2 - 5x_3 + 9x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases}$$

Переносимо вільні змінні направо:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 + 7x_4 - 17x_5, \\ 2x_2 = 5x_3 - 9x_4 + 13x_5. \end{cases}$$

Надаємо вільним відомих належних значень, обчислюємо відповідні значення основних змінних, результати записуємо в таблицю

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
e_1	-4	5	2	0	0
e_2	14	-9	0	2	0
e_3	-34	13	0	0	2

Ранг матриці B і відповідно, ранг матриці A дорівнюють двом. Отже вимірність образу оператора f дорівнює 2. Ядро оператора f тривимірне

(кажуть, ще, що дефект оператора f дорівнює 3). Базис ядра оператора f складають вектори

$$e_1 = (-4, 5, 2, 0, 0), \quad e_2 = (14, -9, 0, 2, 0), \quad e_3 = (-34, 13, 0, 0, 2).$$

В позначеннях, що використані при доведенні теореми, маємо V_2 — увесь 5-вимірний простір, V_1 — ядро оператора f — тривимірний простір. Потрібно знайти базис доповнення U_2 :

$$V_2 = U_2 \oplus V_1.$$

Ми знаємо, що $\dim U_2 = \dim V_2 - \dim V_1 = 2$.

Перший спосіб полягає в тому, щоб подумки ввести скалярний добуток і знайти ортогональне доповнення, тобто знайти базис підпростору розв'язків однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} (e_1, x) = 0, \\ (e_2, x) = 0, \\ (e_3, x) = 0. \end{cases}$$

Другий спосіб полягає в грубому підбиранні потрібних векторів. В якості кандидатів на випробування можна брати стандартні базисні вектори

$$u_1 = (1, 0, 0, 0, 0), \quad u_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \quad u_3 = (0, 0, 1, 0, 0), \quad u_4 = (0, 0, 0, 1, 0), \quad u_5 = (0, 0, 0, 0, 1)$$

Випробовуємо перший вектор u_1 . Він підходить, якщо ранг системи векторів $\{u_1, e_1, e_2, e_3\}$ дорівнює 4. Виписуємо матрицю із координат цих векторів

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 14 & -9 & 0 & 2 & 0 \\ -34 & 13 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Міnor, що стоїть у першому, третьому, четвертому та 5 стовпчиках дорівнює 8 — не нульовий. Отже ранг матриці дорівнює 4 і вектор u_1 лежить в доповненні.

Випробовуємо другий вектор u_2 . Цей вектор є другим вектором базиса доповнення, якщо ранг системи векторів $\{u_1, u_2, e_1, e_2, e_3\}$ дорівнює 5. Виписуємо матрицю із координат цих векторів

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 14 & -9 & 0 & 2 & 0 \\ -34 & 13 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Визначник цієї матриці дорівнює 8 — не нульовий. Отже ранг матриці дорівнює 5 і вектор u_2 є другим базисним вектором доповнення.

Базисні вектори U_2 початками ланцюгів Жордана довжини 2. Таким чином ми одержуємо два ланцюги Жордана довжини 2:

$$u_1 = (1, 0, 0, 0, 0), f(u_1) = (-262, 327, 54, -73, -21)$$

і

$$u_2 = (0, 1, 0, 0, 0), f(u_2) = (-590, 740, 122, -166, -48).$$

Переходимо до пошуку 5-го, останнього вектора (позначимо його через w) базиса Жордана, який утворює ланцюг довжини 1. Цей вектор повинен лежати в підпросторі V_1 , базисними векторами якого є e_1, e_2, e_3 , і не лежати в підпросторі $f(U_2)$, базисним векторами якого є $f(u_1), f(u_2)$. Знову ж, для пошуку вектора w маємо дві можливості.

Перший спосіб полягає в записі вектора w у вигляді $w = xe_1 + ye_2 + ze_3$, складанні умови ортогональності вектора w векторам $f(u_1), f(u_2)$, і розв'язуванні одержаної системи рівнянь:

$$(w, f(u_1)) = 0, \quad (w, f(u_2)) = 0.$$

Другий спосіб полягає в брутальному підбиранні потрібного базисного вектора. Кандидатами для випробування є базисні вектори e_1, e_2, e_3 . Підемо цим шляхом. Випробовуємо вектор $w = e_1$. Він підходить нам, якщо ранг системи векторів $f(u_1), f(u_2), w$ дорівнює трьом. Виписуємо матрицю із координат аших векторів

$$\begin{pmatrix} -262 & 327 & 54 & -73 & -21 \\ -590 & 740 & 122 & -166 & -48 \\ -4 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Міnor, що стоїть в останніх трьох стовпчиках дорівнює $2 \cdot (73 \cdot 48 - 166 \cdot 21) = 36 \neq 0$. Тому ранг побудованої матриці дорівнює 3-м і вектор e_1 можна взяти 5-м базисним вектором у базисі Жордана.

Записуємо одержані базисні вектори в належному порядку

$$\begin{aligned} v_1 &= u_1 = (1, 0, 0, 0, 0), \\ v_2 &= f(u_1) = (-262, 327, 54, -73, -21), \\ v_3 &= u_2 = (0, 1, 0, 0, 0), \\ v_4 &= f(u_2) = (-590, 740, 122, -166, -48), \\ v_5 &= e_1 = (-4, 5, 2, 0, 0). \end{aligned} \tag{22}$$

Оце і є базис Жордана

Матрицею переходу до нового базису буде матриця

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -262 & 0 & -590 & -4 \\ 0 & 327 & 1 & 740 & 5 \\ 0 & 54 & 0 & 122 & 2 \\ 0 & -73 & 0 & -166 & 0 \\ 0 & -21 & 0 & -48 & 0 \end{bmatrix}$$

Оберненою до матриці C буде матриця

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -8/3 & \frac{83}{9} \\ 0 & 1 & -5/2 & 9/2 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 7/6 & -\frac{73}{18} \\ 0 & 0 & 1/2 & 5/6 & -\frac{29}{18} \end{bmatrix}$$

Можна зробити перевірку того, що в процесі підрахунків не допущено якоїсь помилки. Для цього потрібно перемножити три матриці $C^{-1} \cdot A \cdot C$. Оскільки

$$C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то в обчисленнях помилку не зробили.

Показчик

- адитивність, 2
- базис
 - Жордана, 39
- число
 - власне
 - матриці, 23
 - оператора, 23
- дефект
 - лінійного оператора, 9
- діагоналізація
 - матриці, 31
- добуток
 - лінійних перетворень, 12
- група
 - коммутативная, 13
- клітина
 - жордана, 35
- композиція лінійних перетворень, 12
- кообраз
 - оператора, 9
- коядро
 - оператора, 9
- ланцюг
 - жордана, 38
- матриця
 - лінійного оператора, 18
- напівгрупа, 13
- обернений оператор, 16
- обмеження
 - оператора, 11
- образ
 - оператора, 9
- однорідність, 2
- оператор
 - лінійний, 2
 - нільпотентний, 35
 - нульовий, 3
 - оборотний, 18
 - одиничний, 4
 - проектуювання, 4
 - скалярний, 4
- перетворення
 - лінійне, 2
- підпростір
 - інваріантний, 11
 - кореневий, 32
- простір
 - лінійний, 3
 - векторний, 3
- ранг
 - лінійного оператора, 9
- ступінь
 - нільпотентності, 35
- сумма преобразований, 12
- вектор
 - власний
 - матриці, 23
 - оператора, 23
- ядро
 - оператора, 9, 32