

**К-14038**

**П305106**

# **ВЕСТНИК**

---

**ХАРЬКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**№ 230**

**МЕХАНИКА, ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ  
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

**1982**

1 р. 10 к.



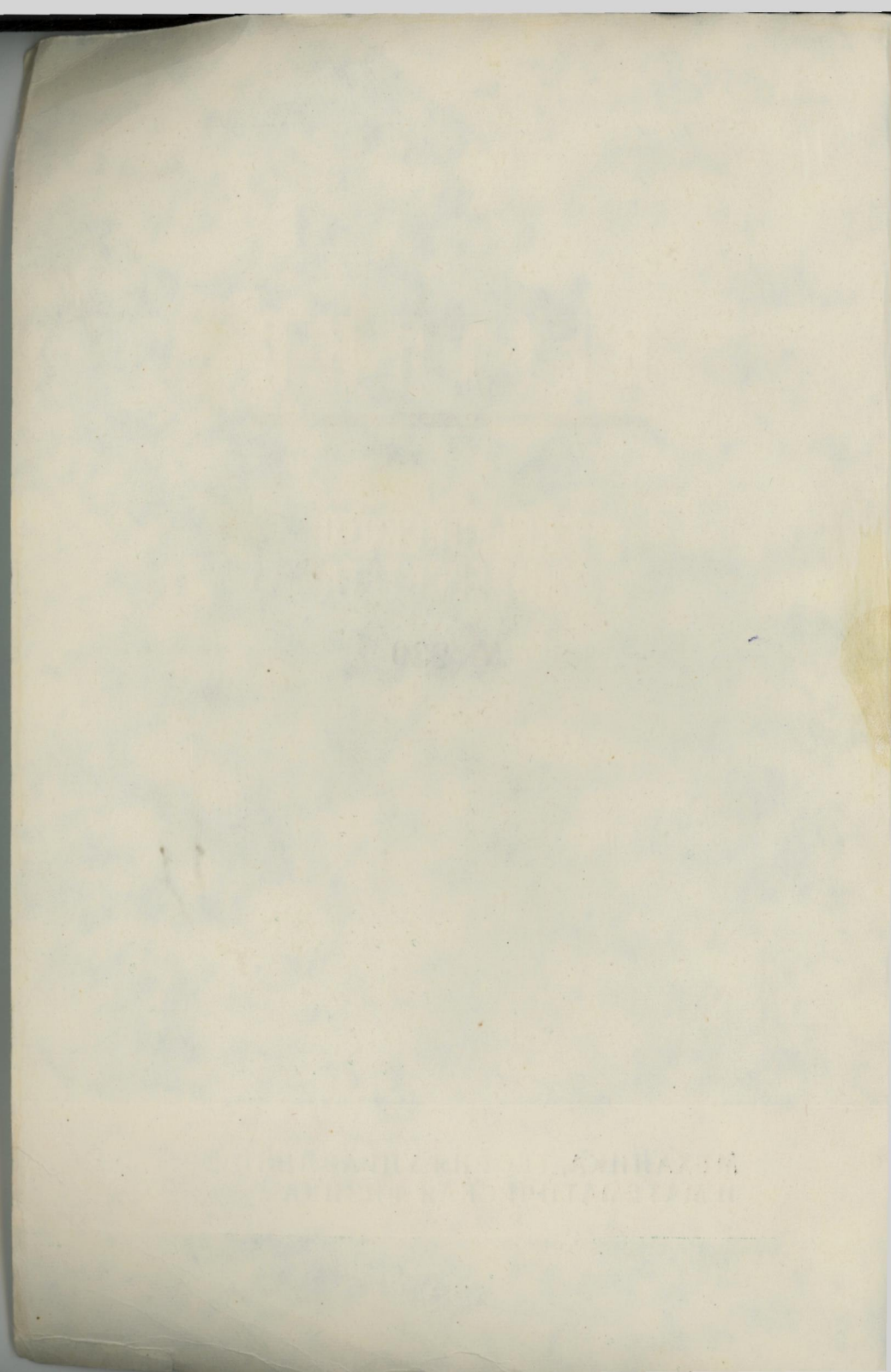
Вестн. Харьк. ун-та, 1982, № 230, 1—96.

V.N. Karazin Kharkiv National University



00279684

6



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

**ВЕСТНИК**  
**ХАРЬКОВСКОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА**  
**№ 230**

---

**МЕХАНИКА, ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ  
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА**

---

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ  
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ  
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ  
«ВИЩА ШКОЛА»

1982

Механика, теория управления и математическая физика.  
— Вестн. Харьк. ун-та, № 230. — Харьков: Вища школа.  
Изд-во при Харьк. ун-те, 1982. — 96 с.

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, механике сплошной среды, уравнениям математической физики, а также по некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1982 г.

Для научных работников и специалистов.

Списки лит. в конце статей.

*Редакционная коллегия:* И. Е. Тарапов (отв. ред.),  
А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов,  
В. И. Коробов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко.

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 5 от 20 февраля 1981 года)

*Адрес редакционной коллегии:* 310077, Харьков-77,  
пл. Дзержинского, 4, госуниверситет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40

Редакция естественнонаучной литературы

И. Е. ТАРАПОВ, д-р физ.-мат. наук,

И. И. ИЕВЛЕВ, канд. физ.-мат. наук

### ПРЕДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ НА ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ РАЗРЫВЕ

Рассмотрим движущуюся сплошную среду, характеризующую непрерывным полем скоростей  $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r})$  ( $t$  — время,  $\vec{r}$  — радиус-вектор произвольной точки среды) и содержащую поверхность тангенциального разрыва  $\Gamma = \Gamma(t)$  [1]. Выделим произвольный материальный объем  $V = V(t)$  так, чтобы внутри него содержалась часть поверхности  $\Gamma$ . Обозначим через  $F = F(t)$  некоторую экстенсивную величину, связанную с данным объемом:  $F = \int_V f dV +$

$+\int_{\Gamma} f_{\Gamma} d\Gamma$ , где  $f$ ,  $f_{\Gamma}$  — объемная и поверхностная плотности величины  $F$ , соответственно. Изменение этой величины в объеме со временем происходит из-за притока извне и наличия источников внутри объема [2]. Соответствующее уравнение баланса в интегральной форме представим

$$\frac{dF}{dt} = - \int_{\Sigma} \vec{I} \cdot \vec{n} d\Sigma + \int_V \sigma dV - \int_L \vec{i} \cdot \vec{v} dl + \int_{\Delta\Gamma} \sigma_{\Gamma} d\Gamma. \quad (1)$$

Здесь  $\vec{I}$  — объемная плотность потока величины  $F$  через материальную поверхность (кондуктивный поток);  $\vec{i}$  — поверхностный кондуктивный поток величины  $F$  через материальный контур  $L$  на  $\Gamma$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_{\Gamma}$  — объемная и поверхностная плотности источников величины  $F$  соответственно;  $\vec{n}$  — внешняя нормаль к  $\Sigma$ ;  $\Delta\Gamma = \Delta\Gamma(t)$  — часть поверхности  $\Gamma$ , лежащая внутри  $V$ ;  $\vec{v}$  — нормаль к контуру  $L$ , касательная к  $\Gamma$  и внешняя по отношению к  $\Delta\Gamma$  (рис. 1).

Рассмотрим левую часть уравнения (1)

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V f dV + \frac{d}{dt} \int_{\Delta\Gamma} f_{\Gamma} d\Gamma.$$

Введем локальную сопутствующую систему координат, связанную с поверхностью  $\Gamma_0 = \Gamma(t_0)$ , где  $t_0$  — произвольный фиксированный момент времени [1];  $u^1$ ,  $u^2$  — переменные, соответствующие координатной системе на  $\Gamma_0$ ;  $n$  — расстояние, отсчитываемое вдоль нормали  $\vec{n}_{\Gamma}$  от  $\Gamma_0$  до точки среды в момент времени  $t = t_0$ ,  $\vec{n}_{\Gamma}$  — нор-

малы к поверхности  $\Gamma_0$ . Тогда  $f_\Gamma = f_\Gamma(t, u^1, u^2)$ ,  $\Gamma(t): \vec{r} = \vec{r}(t, u^1, u^2)$ ,  $\int_{\Delta\Gamma} f_\Gamma d\Gamma = \int_{\Delta\Gamma_0} f_\Gamma \sqrt{a} du^1 du^2$ . Здесь  $a$  — определитель матрицы коэффициентов первой квадратичной формы  $\|a_{\alpha\beta}\|$  поверхности  $\Gamma$  [3]  $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(t, u^1, u^2) = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$ ,  $\vec{e}_\alpha = \vec{e}_\alpha(t, u^1, u^2) = \frac{\partial \vec{r}(t, u^1, u^2)}{\partial u^\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Производную по времени интеграла по материальной поверхности  $\Delta\Gamma$  в (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Delta\Gamma} f_\Gamma d\Gamma &= \int_{\Delta\Gamma_0} \left( \frac{df_\Gamma}{dt} \sqrt{a} + f_\Gamma \frac{d\sqrt{a}}{dt} \right) du^1 du^2 = \\ &= \int_{\Delta\Gamma} \left( \frac{df_\Gamma}{dt} + f_\Gamma \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\sqrt{a}}{dt} \right) d\Gamma, \quad \frac{d(\dots)}{dt} = \frac{\partial(\dots)}{\partial t} \Big|_{u^1, u^2 = \text{const}} \end{aligned} \quad (3)$$

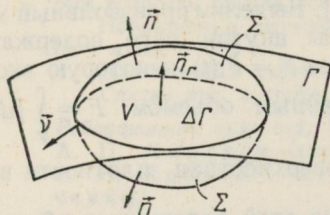


Рис. 1

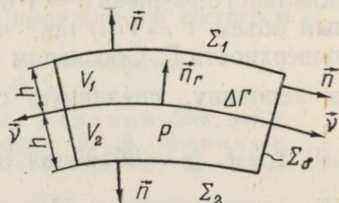


Рис. 2

Путем несложных преобразований можно показать, что  $\frac{1}{\sqrt{a}} \frac{d\sqrt{a}}{dt} = \text{div}_\Gamma \vec{v}_\tau - 2\kappa v_n$  (4), где  $2\kappa$  — удвоенная средняя кривизна поверхности  $\Gamma$ ;  $v_n$ ,  $\vec{v}_\tau$  — нормальная и касательная компоненты скорости жидкой частицы на  $\Gamma$ :  $\vec{v}_\tau = v^1 \vec{e}_1 + v^2 \vec{e}_2$ ,  $\text{div}_\Gamma \vec{v}_\tau = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[ \frac{\partial}{\partial u^1} (\sqrt{a} v^1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (\sqrt{a} v^2) \right]$  — поверхностная дивергенция [4, 5].

Учитывая соотношения (2)–(4), правило дифференцирования интеграла по материальному объему [1] и формулу Гаусса—Остроградского для двухмерного многообразия [4], представим (1) так:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\Delta\Gamma} \left( \frac{df_\Gamma}{dt} + f_\Gamma \text{div}_\Gamma \vec{v}_\tau - 2\kappa v_n f_\Gamma \right) d\Gamma = \\ = - \int_\Sigma (f v_n + I_n) d\Sigma + \int_V \sigma dV + \int_{\Delta\Gamma} (\sigma_\Gamma - \text{div}_\Gamma \vec{i}) d\Gamma. \end{aligned} \quad (5)$$

Для получения предельного соотношения на тангенциальном разрыве воспользуемся методом, изложенным в [1, 3]. Возьмем произвольную точку  $P \in \Gamma$ , выделим некоторый объем  $V = V_1 + V_2$  постоянной толщины  $2h$ , содержащий  $\Delta\Gamma$  — часть поверхности  $\Gamma$  и ограниченный поверхностью  $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_\delta$ , где  $\Sigma_\delta$  обра-

зована нормальными к  $\Gamma$  (рис. 2). Введем поле скоростей  $\vec{u} = \vec{u}(t, \vec{r}) = \vec{v}(t, \vec{r}) - v_n(t', \vec{r}_p) \vec{n}_\Gamma(t', \vec{r}_p)$ , где  $t'$  — фиксированный произвольный момент времени;  $\vec{r}_p$  — радиус-вектор точки  $P$  в момент времени  $t = t'$ . Запишем соотношение (5) для данного поля скоростей  $\vec{u}$  в момент времени  $t = t'$

$$\int_V \left( \sigma - \frac{\partial f}{\partial t} \right) dV = \int_{\Delta\Gamma} \left( \frac{df_\Gamma}{dt} + f_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \vec{u}_\tau - 2\kappa u_n f_\Gamma + \operatorname{div}_\Gamma \vec{i} - \sigma_\Gamma \right) d\Gamma + \int_\Sigma (I_n + f u_n) d\Sigma. \quad (6)$$

Устремляя  $h$  к нулю, стягивая  $\Delta\Gamma$  в точку  $P$  при  $t = t'$ , учитывая ограниченность подынтегральных функций в левой части (6) и то, что  $u_n(t', \vec{r}_p) = 0$ , получим предельное соотношение  $\frac{df_\Gamma}{dt} + f_\Gamma \operatorname{div}_\Gamma \vec{u}_\tau + \operatorname{div}_\Gamma \vec{i} - \sigma_\Gamma + \langle I_n \rangle = 0$ , где  $\langle I_n \rangle = I_{n1} - I_{n2}$  — скачок величины  $I_n$  на  $\Gamma$ ,  $I_{n1}$ ,  $I_{n2}$  — предельные значения  $I_n$  на  $\Gamma$  со стороны  $V_1$  и  $V_2$ , соответственно. Можно показать, что  $\operatorname{div}_\Gamma \vec{u}_\tau = \operatorname{div}_\Gamma \vec{v}_\tau - 2\kappa v_n$ . Тогда предельное соотношение для величины  $F$  можно записать

$$\frac{df_\Gamma}{dt} + f_\Gamma (\operatorname{div}_\Gamma \vec{v}_\tau - 2\kappa v_n) = -\langle I_n \rangle - \operatorname{div}_\Gamma \vec{i} + \sigma_\Gamma.$$

В качестве примера получим предельное соотношение для заряда  $Q$  [6, 7]. В уравнении баланса (1) нужно положить  $f = \rho_e$  — объемной плотности заряда,  $f_\Gamma = \sigma_e$  — поверхностной плотности заряда на  $\Gamma$ ,  $\vec{I} = \vec{j}$  — объемной плотности тока проводимости,  $\vec{i}$  — равной поверхностной плотности тока проводимости на  $\Gamma$ ,  $\sigma = \sigma_\Gamma = 0$  — отсутствие источников заряда, отражающее закон сохранения заряда. Получим соотношение

$$\frac{d\sigma_e}{dt} + \sigma_e (\operatorname{div}_\Gamma \vec{v}_\tau - 2\kappa v_n) = -\langle j_n \rangle - \operatorname{div}_\Gamma \vec{i}, \quad (7)$$

являющееся обобщением соотношений (87.2) [6, с. 396], [7, с. 67]

В качестве второго примера рассмотрим предельное соотношение баланса энергии для свободной поверхности, разделяющей две движущиеся в консервативном поле сил вязкие жидкие среды и обладающей поверхностным натяжением, зависящим от температуры  $T$ . В этом случае нужно положить:  $f = e$  — объемная плотность полной энергии;  $f_\Gamma = e_\Gamma = \alpha - T \frac{d\alpha}{dT}$  — поверхностная плотность полной энергии [8], где  $\alpha = \alpha(T)$  — коэффициент поверхностного натяжения на  $\Gamma$ ;  $\vec{I} = -\hat{p} \cdot \vec{u} - \lambda \nabla T$ ;  $\hat{P}$  — ньютоновский тензор натяжений;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности

[1],  $\vec{i} = -\alpha \vec{v}_\tau$  (предпоследнее слагаемое в левой части (1) определяет мощность работы поверхностных сил при изменении  $\Delta\Gamma$ ),  $\sigma = \sigma_\Gamma = 0$  — источники полной энергии отсутствуют в силу закона сохранения полной энергии.

Тогда соотношение (7) примет вид

$$-\frac{d^2\alpha}{dT^2} T \frac{dT}{dt} - T \frac{d\alpha}{dT} (\text{div}_\Gamma \vec{v}_\tau - 2\kappa v_n) - \vec{v}_\tau \cdot \nabla_\Gamma \alpha = \langle \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \vec{n} \cdot \hat{P} \cdot \vec{v}_\tau \rangle, \quad (8)$$

где  $\nabla_\Gamma \alpha = \vec{e}^1 d\alpha/d\mu^1 + \vec{e}^2 d\alpha/d\mu^2$ ,  $\vec{e}^1$ ,  $\vec{e}^2$  — контравариантный базис на  $\Gamma$ . Полученное соотношение является обобщением соответствующего соотношения (28) [10] на случай переменного  $\alpha$ .

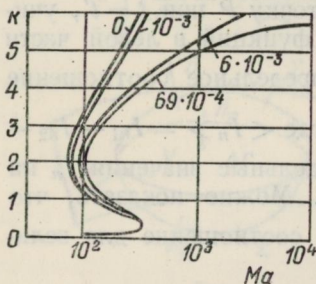


Рис. 3

В заключение рассмотрим задачу о термокапиллярной конвективной неустойчивости плоского слоя жидкости, лежащего на нагретой плоской твердой стенке [9, 10]. При этом воспользуемся обобщенным условием (8). При условии перпендикулярности градиента температуры к поверхности жидкости в условиях невесомости возможно механическое равновесие. При достижении определенной величины градиента темпера-

туры равновесие теряет устойчивость, возникает термокапиллярное конвективное движение жидкости [9, 10]. Воспользуемся соответствующим решением для равновесия и системой уравнений с крайними условиями для возмущений, приведенными в [10], изменив предельное соотношение баланса энергии на свободной поверхности в соответствии с выражением (8) на следующее:

$$-\alpha_2 T_0 \left( \frac{\partial T'}{\partial t} - A \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) + \alpha_1 T_0 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \lambda \frac{\partial T'}{\partial z} - a(T' - A\xi) = 0$$

при  $z = h$ , где  $T_0 = T_0(z)$  — равновесная температура;  $T'$  — возмущение равновесной температуры;  $A = a(T_1 - T_3)/(ah + \lambda)$ ;  $T_1$  — температура твердой стенки;  $T_3$  — температура газа над слоем жидкости;  $a$  — коэффициент теплоотдачи;  $\xi$  — возмущение свободной поверхности;  $\alpha_1 = \frac{d\alpha}{dT}[T_0(h)]$ ;  $\alpha_2 = \frac{d^2\alpha}{dT^2}[T_0(h)]$ ;  $h$  — толщина слоя;  $z$  — переменная координатной оси, перпендикулярной слою.

Аналогично [10] можно получить аналитическое решение данной задачи в предположении, что имеет место «принцип изменения устойчивости» [11]. Дисперсионное уравнение имеет вид

$$Ma = \frac{8k(k \operatorname{ch} k + \operatorname{Bi} \operatorname{sh} k)(\operatorname{ch} k \operatorname{sh} k - k)}{\operatorname{sh}^3 k - k^3 \operatorname{ch} k + 8\operatorname{We} k^3 \operatorname{ch} k - 4k^2 \operatorname{sh} k (\operatorname{sh}^2 k - k^2) K} \quad (9)$$

и переходит при  $K = 0$  в соответствующее соотношение, полученное в [10].

Здесь  $k$  — волновое число для возмущений;  $Ma = \rho c_p \alpha_1 \times h^2 A / (\eta \lambda)$  — число Марангони;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости жидкости;  $Bi = ah/\lambda$  — число Био;  $We = \eta \lambda / (\rho c_p \alpha_0 h)$  — число Вебера;  $\alpha_0 = \alpha [T_0(h)]$ ,  $K = \alpha_1 T_0(h) / (\rho c_p A h^2)$  — безразмерный параметр;  $\rho$  — средняя плотность жидкости;  $c_p$  — удельная теплоемкость жидкости при постоянном давлении.

На рис. 3 изображены кривые  $Ma = Ma(k)$  при следующих значениях параметров:  $Bi = 0$ ,  $We = 10^{-4}$ ,  $K = 0, 10^{-3}, 0.006, 0.0069$ . Видно, что учет дополнительных членов в соотношении (8) в данном случае приводит к появлению в знаменателе правой части (9) слагаемого, содержащего сомножитель  $K$ . Как видно из рис. 3, влияние этого слагаемого проявляется при коротковолновых возмущениях.

**Список литературы:** 1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1, М.: Наука, 1976. — 536 с. 2. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1974. — 304 с. 3. Тарапов И. Е. Основные задачи гидродинамики намагничивающихся и поляризующихся сред. — Дис. . . д-ра физ.-мат. наук. Харьков, 1973. — 278 с. 4. Мак-Коннелл А. Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике. — М.: Физматгиз, 1963. — 411 с. 5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1973. — 832 с. 6. Тамм И. Е. Основы теории электричества. — М.: Наука, 1976. — 616 с. 7. Мелчер Дж., Тейлор Дж. Электродинамика: обзор роли межфазных касательных напряжений. — Механика, 1971, № 5 (129), с. 66—99. 8. Оно С., Кондо С. Молекулярная теория поверхностного натяжения в жидкостях. — М.: Изд-во иностр. лит., 1963. — 292 с. 9. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970. — 392 с. 10. Scriven L. E., Sternling C. V. On cellular convection driven by surface gradients: effects of mean surface tension and surface viscosity. — Journ. Fluid Mech., 1964, 19, part 3, p. 321—340. 11. Гидромеханика невесомости/В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис и др. — М.: Наука, 1976. — 504 с.

Поступила в редколлегию 23.01.81

УДК 538.3:532:538.4

В. И. ЕРМАКОВ

### ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Рассматриваемая задача принадлежит к числу работ [1], посвященных вопросу равновесия и устойчивости равновесия жидких диэлектриков со свободной поверхностью, подверженных, помимо гравитации и капиллярности, действию электрических сил. Эти исследования стимулируются в связи с возникшей проблемой стабилизации и ориентации жидкости в условиях пониженной

гравитации [1—4]. Указанные задачи имеют и принципиальный теоретический интерес.

В работе продолжено изучение устойчивости плоской поверхности раздела жидкостей в тангенциальном электрическом поле [4, 5] с учетом вязкости и конечности толщины объемов жидкостей. Исходной является система уравнений электрогидродинамики [6].

В произвольный момент времени на деформируемой поверхности раздела жидкостей  $F(x, y, z, t) = 0$  должны выполняться условия [3—6].

$$\left[ p - 2\mu v_{ik} n_i n_k - \rho \varepsilon_p \frac{E^2}{2} + \frac{\varepsilon E_\tau^2 - \varepsilon E_n^2}{2} \right] = -\gamma \kappa; \quad (1)$$

$$[2\mu v_{ik} n_i \tau_k] = \vartheta E_\tau; \quad (2)$$

$$[\vec{E}_\tau] = 0, [\varepsilon E_n] = \vartheta, [\sigma E_n] + \text{Div } \vec{\vartheta} \tau - \vartheta \kappa v_n + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v} \nabla F = 0, [\vec{v}] = 0. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon_p = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_E$ ,  $\kappa$  — удвоенная средняя кривизна поверхности раздела  $F = 0$ ;  $\gamma$  — коэффициент удельного поверхностного натяжения;  $\vartheta$  — поверхностная плотность зарядов;  $[A] = A_2 - A_1$  — скачок  $A$  при переходе через границу раздела вдоль нормали  $\vec{n}$  из среды 1 в 2.

На границе жидкость — твердая стенка должны выполняться следующие условия:  $[\vec{E}_\tau] = 0$ ,  $[\varepsilon E_n] = \vartheta$ ,  $[\sigma E_n] + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$  (5),  $\vec{v} = 0$  (6).

Из (2) видно, что в равновесии либо  $E_\tau = 0$ , либо  $\vartheta = 0$ . В настоящей работе рассматривается случай  $\vartheta = 0$ , а  $E_\tau \neq 0$ , т. е. когда поле касательное к поверхности раздела.

Пусть две несмешивающихся жидкости, одна из которых находится над другой, занимают некоторые области  $\Omega_1 = \{-h_1 < y < f\}$  и  $\Omega_2 = \{f < y < h_2\}$ , так что их общая граница — поверхность раздела  $F \equiv y - f(x, z, t) = 0$  имеет в равновесии уравнение  $y = 0$ , а  $y = h_1$  и  $y = h_2$  — уравнения твердых стенок. Обозначим через  $\Omega_+ = \{h_2 < y < \infty\}$  и  $\Omega_- = \{-\infty < y < h_1\}$  полубесконечные области, расположенные соответственно выше и ниже поверхности  $y = -h_1$  и  $y = h_2$ . Характеристики сред в областях  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$  будут отмечаться соответственно индексами 1, 2, + или —.

В невозмущенном состоянии на поверхности раздела  $y = 0$  и на твердых стенках  $y = -h_1$  и  $y = h_2$  заряды отсутствуют, а поле однородное и равное во всех областях считается направленным вдоль оси  $x$ -ов, т. е.  $E_1 = E_2 = E_+ = E_- = \{E, 0, 0\}$ .

В произвольном возмущенном состоянии в каждой из четырех указанных областях электрическое поле и объемная плотность зарядов  $\rho_e$  определяются из уравнений

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho_e, \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (7)$$

а поле скоростей в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  из уравнений

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \left\{ p - \rho_e \frac{E^2}{2} \right\} + \rho \vec{g} + \rho_e \vec{E} + \mu \Delta \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (8)$$

Система (7), (8) замыкается соотношением Ома, взятом в виде  $\vec{j} = \sigma \vec{E} + \rho_e \vec{v}$  (9). Решения уравнений (7), (9) должны быть «сшиты» на общих границах областей  $\Omega$  в соответствии с (5), (6) на твердых стенках  $y = -h_1$  и  $y = h_2$  и согласно условиям (1)–(4) на подвижной границе раздела.

Для малых возмущений поверхности раздела  $y = f(x, z, t)$ , а также возмущений скорости  $\vec{v}'$ , давления  $p'$ , поля  $\vec{e}'$  и объемного заряда  $\rho_e'$  как функций  $x, y, z$  и  $t$  вида:

$$\begin{pmatrix} f \\ \vec{v}' \\ p' \\ \vec{e}' \\ \rho_e' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ \vec{v}^*(y) \\ p^*(y) \\ \vec{e}^*(y) \\ \rho_e^*(y) \end{pmatrix} \zeta(x, z, t), \quad (\zeta = e^{i\omega t - i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}), \quad (10)$$

из (7), (9) получаем  $\nabla^* \vec{v}^* = 0$ ,  $\nabla^* p^* = \mu D_s \vec{v}^* + \rho_e \vec{v}^* (\vec{e}^* \cdot \vec{E}) + \rho_e \vec{E}$  (11);  $\nabla^* \times \vec{e}^* = 0$ ,  $\rho_e^* - \varepsilon \nabla \cdot \vec{e}^* = 0$ ,  $\omega \rho_e^* + \sigma \nabla \cdot \vec{e}^* = 0$  (12), где

$$\nabla^* = (-i\kappa_x, d/dy, -i\kappa_z), \quad D_s = \frac{d^2}{dy^2} - S^2, \quad S^2 = \kappa^2 + \omega \rho / \mu.$$

Из (12) следует, что  $\rho_e^* = 0$ , а для определения  $\vec{v}^*$ ,  $p^*$  в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\vec{e}^*$  в  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_+$ ,  $\Omega_-$ , имеем согласно (1)–(6) задачу  $D_\kappa e_y^* = 0$ ,

$$\begin{aligned} e_x^* &= -\frac{i\kappa_x}{\kappa^2} \frac{de_y^*}{dy}, \quad \kappa_z e_x^* = \kappa_x e_z^* \quad (13), \quad D_s D_\kappa V_y^* = 0, \quad v_z^* = -\frac{\kappa_x}{\kappa_z} v_x^* - \\ &- \frac{i}{\kappa_z} \frac{dv_y^*}{dy}, \quad D_s \left( v_x^* + \frac{i\kappa_x}{\kappa^2} \frac{dv_y^*}{dy} \right) = 0, \quad p^* = \frac{\mu}{\kappa^2} \tilde{D}_s \frac{d}{dy} v_y^* + \rho_e \vec{e}^* \cdot \vec{E}; \quad \text{при} \\ y = 0 \left[ \frac{de_y^*}{dy} \right] &= 0, \quad [(\sigma + \varepsilon \omega) e_y^*] = -i\kappa_x a E [\sigma + \varepsilon \omega], \quad \left[ \mu \left( \frac{dv_x^*}{dy} - i\kappa_x v_y^* \right) \right] + \\ &+ E [\varepsilon e_y^*] = i\kappa_x a E^2 [\varepsilon] \quad (14), \quad -2 \left[ \mu \frac{dv_y^*}{dy} \right] + [p^*] + E [(\varepsilon - \rho_e) e_y^*] = \\ &= (\gamma \kappa^2 + [\rho] g) a, \quad \left[ \mu \left( \frac{dv_z^*}{dy} - i\kappa_z v_y^* \right) \right] = 0, \quad [\vec{v}^*] = (0, a\omega, 0); \quad \text{при } y = \end{aligned}$$

$= -h_1$  и  $y = h_2$   $[(\sigma + \varepsilon\omega) e_y^*] = 0$ ,  $\vec{v}^* = 0$  (15). Используя также условие убывания возмущений электрического поля при  $y \rightarrow \pm \infty$  в полубесконечных областях  $\Omega_+$  и  $\Omega_-$ , из (13), (15) получаем

$$e_{y-}^* = a_1 e^{\kappa y}, e_{y+}^* = a_2 e^{-\kappa y}, e_{y1}^* = a_1 e^{-\kappa h_1} \left\{ \text{sh} \kappa (h_1 + y) + \frac{\sigma_- + \omega \varepsilon_-}{\sigma_1 + \omega \varepsilon_1} \text{ch} \kappa (h_1 + y) \right\}, e_{y2}^* = a_2 e^{-\kappa h_2} \left\{ \text{sh} \kappa (h_2 - y) + \frac{\sigma_+ + \omega \varepsilon_+}{\sigma_2 + \omega \varepsilon_2} \text{ch} \kappa (h_2 - y) \right\}. \quad (16)$$

Нейтральную кривую устойчивости рассматриваемого равновесного состояния определим, воспользовавшись принципом смены устойчивости [2], т. е. положив  $\omega = 0$ . В области  $\Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ) возмущение скорости, как следует при этом из (13), имеет вид

$$v_{yj}^* = a_{6j-3} e^{\kappa y} + a_{6j-2} e^{-\kappa y} + y a_{6j-1} e^{\kappa y} + y a_{6j} e^{-\kappa y}; v_{xj}^* = -\frac{i\kappa_x}{\kappa^2} \frac{dv_{yj}^*}{dy} + a_{6j+1} e^{\kappa y} + a_{6j+2} e^{-\kappa y}; v_{zj}^* = -\frac{i\kappa_z}{\kappa^2} \frac{dv_{yj}^*}{dy} - \frac{\kappa_x}{\kappa_z} a_{6j+1} e^{\kappa y} - \frac{\kappa_x}{\kappa_z} a_{6j+2} e^{-\kappa y}. \quad (17)$$

Согласно условиям (14), (15) для определения в решениях (16), (17) постоянных  $a, a_1, a_2, \dots, a_{14}$  имеем однородную линейную систему, матрицу которой здесь не приводим из-за громоздкости. Равенство нулю определителя этой системы или дисперсионное уравнение позволяет указать для рассматриваемых монотонных возмущений с волновым вектором  $\vec{\kappa}$ , те значения физических параметров задачи, при которых исследуемое равновесное состояние становится неустойчивым. Параметры задачи могут быть таковы, что равновесная поверхность остается устойчивой относительно возмущений с произвольным по величине и направлению вектором  $\vec{\kappa}$ . Определим эти условия, т. е. укажем критерии так называемой абсолютной устойчивости.

При этом, изучая устойчивость, сделаем некоторые упрощающие предположения, которые позволяют сохранить интересные явления, получить физически обозримые для анализа выражения. Так будем считать, что одна из жидкостей, например, нижняя, невязкая, т. е. положим  $\mu_1 = 0$ . Если же считать нижнюю жидкость вязкой, а верхнюю нет, то во всех следующих ниже формулах нужно заменить  $g$  на  $-g$ , а величины с индексами 1 — соответственно на 2, + и наоборот.

Тогда дисперсионное уравнение можно представить в виде

$$(\rho_1 - \rho_2) g = -\gamma \kappa^2 - \frac{E^2 \cos^2 \theta}{\sigma_1 N_1 + \sigma_2 N_2} \left\{ [\varepsilon] [\sigma] - \frac{2\sigma_1 \sigma_2 [\tau_e] \kappa^2 h_2^2 (N_1 + N_2)}{\text{sh } 2\kappa h_2 - 2\kappa h_2} \right\}. \quad (18)$$

где  $N_1 = \frac{\sigma_- + \sigma_+ \operatorname{th} \kappa h_1}{\sigma_1 + \sigma_- \operatorname{th} \kappa h_1}$ ;  $N_2 = \frac{\sigma_+ + \sigma_2 \operatorname{th} \kappa h_2}{\sigma_2 + \sigma_+ \operatorname{th} \kappa h_2}$ ;  $\theta$  — угол между  $\vec{E}$  и  $\vec{\kappa}$ ;

$\tau_{ei} = \epsilon_i / \sigma_i$  — время релаксации электрического заряда в области  $\Omega_i$ .

Заметим, что в (18) не входит коэффициент вязкости  $\mu$ .

Для значительного большинства пар несмешивающихся жидкостей (или пар жидкость — газ) произведение  $[\epsilon][\sigma] > 0$ , так как проводящая среда, как правило, имеет и более высокую диэлектрическую проницаемость [3]. Если при этом  $[\tau_e] < 0$ , то, как видно из (18), тангенциальное поле оказывает стабилизирующее влияние на систему двух жидкостей с плоской границей раздела. Степень взаимодействия поля с возмущенной поверхностью раздела зависит от направления волнового вектора  $\vec{\kappa}$ . Наибольшее влияние оказывается полем на возмущения, для которых  $\vec{\kappa}$  направлен вдоль поля ( $\theta = 0$ ), а на возмущения с направлением  $\theta = \pi/2$  поле не влияет. Поэтому при  $[\tau_e] < 0$  независимо от значений  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  критерием абсолютной устойчивости будет  $(\rho_1 - \rho_2)g = 0$ , как и в случае отсутствия поля. Условие  $[\tau_e] < 0$  можно переписать в виде  $\sigma_2 / \sigma_1 > \epsilon_2 / \epsilon_1$ . Поскольку диэлектрические проницаемости различных сред  $\epsilon_i$  мало различаются, а проводимости зачастую существенно, то электрическое поле не влияет на устойчивость системы двух жидкостей, из которых вязкая более проводящая. Указанное имеет место, например, для воды и воздуха.

Если же  $[\tau_e] > 0$ , то в достаточно большом электрическом поле равновесное состояние может оказаться неустойчивым. Условие  $[\tau_e] > 0$  означает, что неустойчивость может наступить только в случае, когда время релаксации электрических зарядов для слоя вязкой жидкости больше, чем для невязкой. Поскольку реально проводимости жидкостей отличаются на несколько порядков, то это означает, что вязкая жидкость должна быть менее проводящей.

Пусть слой невязкой жидкости (область  $\Omega_1$ ) будет бесконечно глубоким:  $h_1 = \infty$ . Тогда, как следует из (18), неустойчивость наступает в касательном электрическом поле, превышающем критическое

$$E = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{(\rho_1 - \rho_2) g h_2 (\sigma_1 + \sigma_+)}{[\tau_e] (\sigma_2 + \sigma_+) \sigma_1}}, \quad (19)$$

причем при  $A = [\sigma] \left\{ \frac{2}{3} \frac{\sigma_1 [\tau_e] (\sigma_+^2 - \sigma_2^2)}{\sigma_2 (\sigma_+ + \sigma_1)^2} - \frac{[\epsilon]}{\sigma_+ + \sigma_1} \right\} \leq 0$  неустойчивы длинноволновые ( $\kappa = 0$ ) возмущения. Если  $A > 0$ , то неустойчивы возмущения конечной длины волны и их волновое число  $\kappa$  при малых  $\kappa$  приближенно равно  $\kappa = AE^2 / 2\gamma$ .

Критическое поле существенно зависит от разности времен релаксации  $[\tau_e]$  и соотношения проводимостей сред. Как видно из (19) наибольшая чувствительность к потере устойчивости проявляется в случае, когда проводимость слоя вязкой жидкости

$\sigma_2$  значительно меньше  $\sigma_1$ , а проводимость «жесткой крышки»  $\sigma_2$  совпадает с  $\sigma_1$ .

Возьмем для примера  $\sigma_1 = 10^{-3} \text{ 1/ом} \cdot \text{м}$  (вода),  $\sigma_2 = 10^{-11} \text{ ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$  (нефть),  $\sigma_+ = \sigma_1$ ,  $\varepsilon_2 = 2,2 \varepsilon_0 \approx 2 \cdot 10^{-11} \text{ ф/м}$ ,  $h_2 = 1 \text{ см}$ . Тогда критическое поле  $E \sim 1,2 \text{ в/см}$  и неустойчивы длинноволновые возмущения.

Устремив в (18) толщину слоя вязкой жидкости  $h_2$  к бесконечности, приходим к

$$(\rho_1 - \rho_2) g = -\gamma \kappa^2 - \frac{E^2 \kappa \cos^2 \theta [\varepsilon] [\sigma]}{\sigma_1 N_1 + \sigma_2}. \quad (20)$$

Для большинства сред  $[\varepsilon][\sigma] > 0$  и как следует из (20) поле всегда оказывает стабилизирующее влияние на систему. Именно это заключение было сделано в [4], где рассматривалась устойчивость двух полубесконечных объемов жидкостей в касательном поле. Указанное в (4) дисперсионное уравнение можно получить из (20) предельным переходом при  $h_2 \rightarrow \infty$ . Таким образом, найденный эффект дестабилизации двух плоских слоев жидкостей продольным электрическим полем связан с конечностью их толщины.

**Список литературы:** 1. Тарапов И. Е. Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред. — Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1974, №5, с. 141—144. 2. Гидромеханика невесомости/В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис и др. — М.: Наука, 1976. — 504 с. 3. Melcher J. R., Smith C. V. Electrohydrodynamic Charge Relaxation and Interfacial Perpendicular Field Instability. — Phys. Fluids, 1969, 12, № 4, p. 778—790. 4. Melcher J. R. Schwarz W. J. Interfacial Relaxation Overstability in a Tangential Electric Field. — Phys. Fluids, 1969, 11, № 12, p. 2604—2616. 5. Ермаков В. И. К устойчивости плоской поверхности раздела движущихся жидкостей в электрическом поле. — Материалы Всесоюз. совещ. по проблемам намагнич. жидкостей. Изд. МГУ, 1979, с. 21—22. 6. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики и поляризующихся и намагничивающихся сред. — Теория функций, функц. анализ и их приложения, 1973, вып. 17, с. 221—239.

Поступила в редколлегию 24. 01. 81.

УДК 532.516

Л. П. ТЕРЕХОВ

### ЗАДАЧА О СМАЗКЕ ВИБРИРУЮЩИХ ПОДШИПНИКОВ

В работе [1] указано на возможность применения в современной технике подшипников скольжения с вибрирующими смазываемыми поверхностями. Однако в этой работе нестационарность учтена лишь в граничных условиях, а изучение существенно зависящих от времени процессов в слое смазки ведется на основе уравнений, описывающих стационарное течение.

В обычных для теории смазки предположениях о малости зазора и нелинейных членов в уравнениях движения плоское нестационарное течение несжимаемой смазки в слое между цилиндрическими поверхностями  $y = 0$  и  $y = h(x)$ , перпендикулярными к плоскости течения, описывается системой

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где  $\rho$ ,  $\mu$  — плотность и вязкость смазки; пространственная координата  $x$  отсчитывается вдоль смазочного слоя:  $0 \leq x \leq L$ , а  $y$  — поперек слоя:  $0 \leq y \leq h(x)$ .

Граничные условия для скорости, соответствующие вибрации поверхности  $y = 0$ , имеют вид  $v_x|_{y=0} = -u_0 \exp(i\omega t)$ ;  $v_y|_{y=0} = v_x|_{y=h} = v_y|_{y=h} = 0$  (2),

где значения частоты  $\omega$  и амплитуды  $u_0$  колебаний скорости для определенности считаются положительными.

При этом реальный физический смысл имеют вещественные (или мнимые) части всех комплекснозначных выражений. Кроме того, считая, что граница смазочного слоя не меняется с течением времени, необходимо, очевидно, потребовать, чтобы  $y = 0$  являлась или плоскостью или боковой поверхностью прямого кругового цилиндра.

Если рассматривать практически важную задачу об установившихся колебаниях и искать решение вида  $v_x = u(x, y) \exp(i\omega t)$ ;  $p = \mu \Pi(x) \exp(i\omega t)$ , то, считая, что давление  $p$  на входе и выходе имеет одно и то же значение  $\mu \Pi_0 \exp(i\omega t)$ , из (1) с учетом (2) приходим к основной краевой задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a^2 u = \frac{d\Pi}{dx}; \quad u|_{y=0} = -u_0, \quad u|_{y=h} = 0 \quad (3), \quad \frac{dQ}{dx} = 0; \quad \Pi|_{x=0} = \Pi|_{x=L} = \Pi_0 \quad (4),$$

где  $a^2 = i\omega\rho/\mu$ , а расход жидкости  $Q = \int_0^{h(x)} u dy$ .

Здесь и далее всюду по тексту без дополнительных оговорок основные динамические характеристики опоры отождествляются с их амплитудами при колебаниях. Так, например, истинная величина расхода фактически равна  $Q \cdot \exp(i\omega t)$ .

Под корнем квадратным из комплексного числа  $z = |z| \exp(i \arg z)$ , где  $0 \leq \arg z < 2\pi$ , для определенности будем подразумевать выражение  $\sqrt{z} = \sqrt{|z|} \exp(i \arg z / 2)$  (5), соответствующее той однозначной ветви корня, на которой  $\sqrt{1} = 1$ . Например,  $a = \sqrt{\omega\rho/\mu} \times \exp(i\pi/4)$ . Задача (3) имеет решение

$$u = u_0 [\operatorname{cth}(ah) \operatorname{sh}(ay) - \operatorname{ch}(ay)] + \frac{1}{a^2} \frac{d\Pi}{dx} [\operatorname{ch}(ay) - 1 - \operatorname{th}(ah/2) \operatorname{sh}(ay)]. \quad (6)$$

Интегрируя (6) поперек слоя, получим выражение для градиента давления

$$\frac{d\Pi}{dx} = a^2 \left( aQ + u_0 \operatorname{th} \frac{ah}{2} \right) / \left( 2 \operatorname{th} \frac{ah}{2} - ah \right). \quad (7)$$

Интегрируя (7) вдоль слоя, с учетом (4) имеем:  $Q = -\frac{u_0 I_1}{a l_0}$  (8),

где 
$$I_n = \int_0^L \frac{\operatorname{th}^n \frac{ah}{2}}{\operatorname{th} \frac{ah}{2} - \frac{ah}{2}} dx \quad (9).$$

Так как соотношения (6)–(8) в принципе полностью решают задачу о смазке, то, как легко заметить, исследование влияния частот колебаний скорости на величину подъемной силы опоры и сил трения на ней при каждом конкретном выражении  $h(x)$  по существу сводится к вычислению интегралов, подобных  $I_n$  по своей структуре. Необходимо отметить, что с математической точки зрения к вычислению таких же интегралов сводится ряд стационарных задач магнитогидродинамической теории смазки, имеющих, естественно, совершенно другую физическую сущность (см., например, [2]).

Производя в (9) замену переменных  $z = ah/2$ , получим

$$I_n = \frac{2}{a} \int_{ah(0)/2}^{ah(L)/2} \frac{f_n(z)}{w(z)} dz, \quad \left( f_n(z) = \frac{\operatorname{th}^n z}{\operatorname{th} z - z} \right), \quad (10)$$

где  $w(z)$  является производной  $dh/dx$ , в которой сделан переход к переменной  $z$ .

Имея в виду, что в (10) для  $n = 0, 1$

$$f_1(z) = 1 - f(z); \quad f_0(z) = -f(z)/z, \quad (f(z) = z/(z - \operatorname{th} z)), \quad (11)$$

исследуем свойства функции комплексного переменного  $f(z)$ . Заметим, что она мероморфна с полюсами в точках  $0; \pm i\alpha_m$  ( $\alpha_m$  — положительные корни уравнения  $x = \operatorname{tg} x$ ) и, кроме того, удовлетворяет условиям (см., например, [3]), при выполнении которых справедливо разложение

$$f(z) = \frac{3}{z^2} + \frac{6}{5} - 2z^2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{-2} (z^2 + \alpha_m^2)^{-1}, \quad (12)$$

равномерно сходящееся в любой замкнутой области, не содержащей нуля и точек  $\pm i\alpha_m$ .

Кроме того, разложение (12) можно использовать и при нахождении сумм некоторых сходящихся числовых рядов. Так, напри-

мер, используя (12) и разложение  $f(z)$  по степеням  $z$  в окрестности нуля, можно получить

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{-4} = 1/350 \quad (13).$$

С учетом (12) из (11) следуют разложения

$$f_1(z) = -\frac{3}{z^2} - \frac{1}{5} + 2z^2 \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{-2} (z^2 + \alpha_m^2)^{-1}; \quad f_0(z) = -\frac{3}{z^3} - \frac{6}{5z} + \\ + 2z \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m^{-2} (z^2 + \alpha_m^2)^{-1}, \quad (14)$$

удобные при непосредственном вычислении  $I_n$ .

В качестве примеров рассмотрим случаи радиального и плоского подшипников.

В случае полностью охватывающего радиального подшипника  $y=0$  — уравнение поверхности вибрирующего вала радиуса  $R_1$ , а  $y=h(x)=\delta h_2(\varphi)$  — уравнение поверхности неподвижного подшипника радиуса  $R$ .

Здесь  $\delta = R - R_1$ ,  $h_2 = 1 + \varepsilon \cos \varphi$ ,  $\varepsilon = e/\delta$ ,  $\varphi = x/R_1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $e$  — расстояние между центрами шипа и подшипника.

Таким образом, учитывая периодичность тригонометрических функций, в соответствии с (10) имеем  $M_n \equiv I_n/R_1 = 2 \times$

$$\times \int_{b(1-\varepsilon)}^{b(1+\varepsilon)} \frac{f_n(z)}{\sqrt{b^2 \varepsilon^2 - (z-b)^2}} dz, \quad \text{где } b = a\delta/2.$$

Тогда, с учетом (6) — (8), для безразмерных расхода  $Q_2$ , подъемной силы  $P_2$  и момента сил трения на шипе  $T_2$  получим выражения

$$Q_2 \equiv -Q/(u_0 \delta) = M_1/(2bM_0); \quad P_2 \equiv -\frac{\delta^2}{u_0} \int_0^{2\pi} \frac{d\Pi}{d\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{2b^2}{\varepsilon} [2Q_2(-2\pi + \\ + M_1 - bM_0) - 2\pi + M_1 - b \int_0^{2\pi} h_2^2 f_0(bh_2) d\varphi]; \quad T_2 \equiv \frac{\delta}{u_0} \int_0^{2\pi} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} d\varphi = \\ = b [2 \int_0^{2\pi} \operatorname{cth}(2bh_2) d\varphi + 2Q_2 b M_1 - M_2]. \quad (15)$$

Все входящие в (15) интегралы могут быть выражены в элементарных функциях с помощью почленного интегрирования

соответствующих выражений, в которых учтены разложения (14) и аналогично им получаемые соотношения

$$\operatorname{th} z = 2z \sum_{n=1}^{\infty} \left[ z^2 + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4} \right]^{-1}; \quad \operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{\infty} (z^2 + n^2 \pi^2)^{-1}.$$

Операция почленного интегрирования законна при любом фиксированном значении относительного эксцентриситета  $\varepsilon$ , удовлетворяющем условию  $0 \leq \varepsilon < 1$ , в силу равномерной сходимости разложений на отрезке, соединяющем точки  $z_1 = b(1 - \varepsilon)$  и  $z_2 = b(1 + \varepsilon)$  и являющемся областью интегрирования.

Итак, окончательно

$$M_1 = -\frac{6\pi}{b^2(1-\varepsilon^2)^{3/2}} - \frac{2\pi}{5} + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left[ \frac{2}{\alpha_n} + g(\alpha_n) - g(-\alpha_n) \right];$$

$$M_0 = -\frac{3\pi(2+\varepsilon^2)}{b^3(1-\varepsilon^2)^{5/2}} - \frac{12\pi}{5b\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} [g(\alpha_n) + g(-\alpha_n)];$$
(16)

$$\int_0^{2\pi} h_2^2 f_0(bh_2) d\varphi = \frac{6\pi}{b^3\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \frac{12\pi}{5b} + \frac{2\pi}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\frac{2b}{\alpha_n^2} + i[g(\alpha_n) + g(-\alpha_n)] \right\};$$

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{cth}(2bh_2) d\varphi = \frac{\pi}{b\sqrt{1-\varepsilon^2}} + \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ g\left(\frac{n\pi}{2}\right) + g\left(-\frac{n\pi}{2}\right) \right]; \quad M_2 =$$

$$= -\frac{6\pi}{b\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{2\pi b}{5} + \pi i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ 2g\left(\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) + 2g\left(-\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) - g(\alpha_n) - \right.$$

$$\left. - g(-\alpha_n) - \frac{4bi}{\alpha_n^2} \right], \text{ где } g(x) = [b^2\varepsilon^2 - (b+ix)^{-1/2}].$$

С помощью элементарных вычислений можно показать, что все бесконечные ряды из (16) сходятся не медленнее, чем сравнительно быстро сходящийся числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ .

Таким образом, соотношения (15), (16) могут быть использованы при непосредственном численном расчете вибрирующих опор в произвольном диапазоне безразмерных частот  $b$ .

Рассмотрим предельный случай малых частот ( $|b| \ll 1$ ). Так как тогда с учетом (5)  $g(x) \approx -\frac{1}{x} \left( 1 + i\frac{b}{x} - \frac{2+\varepsilon^2}{2} \frac{b^2}{x^2} - \frac{2+3\varepsilon^2}{2} \times \right.$   
 $\left. \times i\frac{b^3}{x^3} \right)$ , то, используя (13) и известные соотношения  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} =$

$$= \pi^2/6; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4} = \pi^4/90; \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-2} = \pi^2/8; \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^{-4} = \pi^4/96,$$

получаем из (15) и (16) приближенные формулы

$$\begin{aligned} Q_2 &\approx \frac{1-\varepsilon^2}{2+\varepsilon^2} + \frac{b^2(1-\varepsilon^2)^{5/2}}{15(2+\varepsilon^2)^2} [(2+\varepsilon^2) - 12\sqrt{1-\varepsilon^2}] + b^4 \frac{(1-\varepsilon^2)^{5/2}}{1050(2+\varepsilon^2)^3} \times \\ &\quad \times [(2+\varepsilon^2)(-57\varepsilon^4 + 104\varepsilon^2 - 56) + 672(1-\varepsilon^2)^{5/2}]; \\ P_2 &\approx \frac{12\pi\varepsilon}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} + b^2 \left[ \frac{12\pi}{5\varepsilon(2+\varepsilon^2)} (5\varepsilon^2 - 4) + \frac{96\pi(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{5\varepsilon(2+\varepsilon^2)^2} \right] + \\ &\quad + \frac{2\pi b^4}{175\varepsilon(2+\varepsilon^2)^2} (-791\varepsilon^6 + 2318\varepsilon^4 - 2356\varepsilon^2 + 784) + \frac{16\pi b^4(1-\varepsilon^2)^{5/2}}{25\varepsilon(2+\varepsilon^2)^3} \times \\ &\quad \times (-\varepsilon^4 + 20\varepsilon^2 - 28); \quad (17) \\ T_2 &\approx \frac{4\pi(1+2\varepsilon^2)}{(2+\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}} + b^2 \frac{48\pi(1-\varepsilon^2)^{3/2}}{5(2+\varepsilon^2)^2} + b^2 \frac{8\pi}{15(2+\varepsilon^2)} (1+5\varepsilon^2) + b^4 \times \\ &\quad \times \frac{4\pi}{1575(2+\varepsilon^2)^2} (434 - 1696\varepsilon^2 + 1313\varepsilon^4 - 546\varepsilon^6) + b^4 \frac{4\pi(1-\varepsilon^2)^{5/2}}{75(2+\varepsilon^2)^3} \times \\ &\quad \times (-148 + 140\varepsilon^2 - \varepsilon^4). \end{aligned}$$

Эти же формулы можно получить и непосредственно из определения  $Q_2$ ,  $P_2$ ,  $T_2$  (без учета (16)), используя результаты интегрирования степенных разложений.

Необходимо отметить, что если в (17) положить  $b=0$ , то получим известные значения расхода, подъемной силы и момента сил трения, описывающие стационарный режим работы гидродинамической опоры.

В случае плоского подшипника  $y=0$  и  $y=h(x)=h_0(1+k \times \frac{x}{L})$  — уравнения вибрирующей и неподвижной плоскостей соответственно.

Опуская промежуточные элементарные выкладки, аналогичные случаю радиального подшипника, приведем окончательные выражения для безразмерных подъемной силы  $P_3$  и силы трения  $F_3$

$$\begin{aligned} P_3 &\equiv \frac{h_0^2}{Lu_0} \int_0^L (\Pi - \Pi_0) dx = \frac{4Q_3 c^2}{k} \left[ -\frac{3k}{2c^2(1+k)} + \frac{6}{5} - \frac{6}{5} \frac{1+k}{k} \ln(1+k) + \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \left( -2 + \frac{1+k}{k} a_n + \frac{i}{ck} \alpha_n b_n \right) \left. \right] + \frac{2c}{k} \left[ \frac{3}{ck} \ln(1+k) - \frac{3}{c} - \frac{ck}{10} + \right. \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^2} \left( ck - i \frac{1+k}{k} \alpha_n b_n + \frac{1}{ck} \alpha_n^2 a_n \right) \left. \right]; \quad (18) \end{aligned}$$

$$F_3 \equiv \frac{h_0}{Lu_0} \int_0^L \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} dx = -\frac{2cQ_3}{k} I_1 + \frac{1}{k} \ln \frac{\text{sh}[2c(1+k)] [\text{th}(c(1+k)) - c(1+k)]}{\text{sh}(2c) (\text{th} c - c)},$$

где  $c = ah_0/2$ ;  $Q_3 \equiv Q/u_0 h_0 = -I_1/(2cI_0)$ ;  $a_n = \ln \frac{c^2(1+k)^2 + \alpha_n^2}{c^2 + \alpha_n^2}$ ;

$$b_n = \ln \frac{c^2(1+k) + \alpha_n^2 - i\alpha_n ck}{c^2(1+k) + \alpha_n^2 + i\alpha_n ck}. \text{ При этом } I_1/L = -\frac{3k}{c(1+k)} - \frac{ck}{5} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} \left( \frac{2ck}{\alpha_n} - ib_n \right); I_0/L = -\frac{3k(2+k)}{2c^2(1+k)^2} - \frac{6}{5} \ln(1+k) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha_n^2}.$$

По аналогии со случаем радиального подшипника можно ис- следовать приближение малых частот ( $|c| \ll 1$ ).

В другом предельном случае ( $k=0$ ), соответствующем виб- рации одной из параллельных плоскостей, из (18) имеем  $Q_3 = -\frac{thc}{2c}$ ;  $P_3 = 0$ ;  $F_3 = 2c \operatorname{cth}(2c)$ . Эти результаты полностью совпа- дают с выводами, полученными в работе [4].

Список литературы: 1. Наркис, Кохен. Реакция газовых радиальных подшип- ников бесконечной длины на гармонические возмущения скорости вращения. — Проблемы трения и смазки, 1977, т. 99, № 4, с. 51—57. 2. Тарапов И. Е. Задача смазки в магнитной гидродинамике. — В кн.: Вопросы магнитной гидро- динамики и динамики плазмы. — Рига: Изд-во АН Латв. ССР, 1962, с. 147—154. 3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций, т. 1. — М.: Наука, 1967. — 486 с. 4. Жигулин Е. М. Движение вязкой жидкости между двумя параллельными движущимися пластинами. — Уч. зап. ЦАГИ, 1972, т. 3, № 2, с. 51—59.

Поступила в редколлегию 22. 12. 80.

УДК 517.934.1 + 517.929

С. И. ВОВНА, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАКОПЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ РЕКУРРЕНТНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ОДНОЙ СЛЕДЯЩЕЙ СИСТЕМЫ

В работах [1]—[3] было рассмотрено движение самоходной машины, управляемой автоматом вождения и отслеживающей некоторую заданную кривую. В данной работе изучается движе- ние этой машины, состоящее в последовательных отслеживании ряда кривых, каждая из которых определяется при отслежива- нии предыдущей кривой. При этом исследуется характер измене- ния формы (в частности, кривизны и спектральных свойств) этих кривых и существование для них предельной кривой.

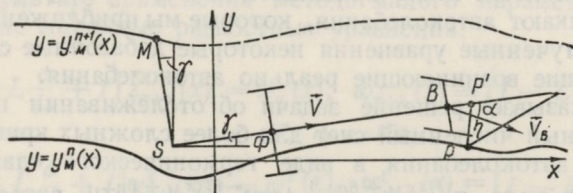
На рисунке изображено движение вдоль  $n$ -й кривой  $y = y_M^n(x)$ ; при этом точка  $M$  машины намечает  $(n+1)$ -ю кривую  $y = y_M^{n+1}(x)$ .

Характер движения машины, управляемой автоматом вожде- ния, описан в работах [1]—[3]. Дифференциальные уравнения

движения получаются из кинематических предположений [1] и имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_\Phi = v\gamma \quad (v = \text{const}) \\ \dot{x}_\Phi = v \\ \dot{\gamma} = \frac{v}{L_B} \alpha. \end{cases}$$

Управление  $\alpha(t)$  (см. рисунок) при этом выбирается линейно зависящим от отклонения  $\eta$  фиксированной точки  $P'$  оси машины от кривой (вдоль оси  $y$ -ов):  $\alpha = -K\eta$  (1). Как легко видеть (см. рисунок)  $\eta = y_\Phi + L\gamma - y_M^n(x_\Phi + L)$  ( $L = L_{P'}$ ).



Удобно вместо независимой переменной  $t$  ввести переменную  $x_\Phi = vt$ , тогда движение описывается одним уравнением второго порядка

$$\left( \frac{L_B}{K} \frac{d^2}{dx_\Phi^2} + L \frac{d}{dx_\Phi} + I \right) y_\Phi^{n+1}(x_\Phi) = y_M^n(x_\Phi + L). \quad (2)$$

Естественно рассматривать только ограниченные на всей оси решения этого уравнения (нетрудно видеть, что таких решений не более одного).

По найденной траектории точки  $\Phi$  получим траекторию точки  $M$ . Имеем  $y_M = y_\Phi - L_s \sin y_\Phi + d \cos y_\Phi$ ,  $x_M = x_\Phi - L_s \cos y_\Phi - d \sin y_\Phi$ . Так как нас интересует лишь форма кривых, а не сдвиг их вдоль оси  $y$ -ов, то имеет смысл вместо  $y_M(x)$  рассматривать сдвинутое к нулю  $\{y_M(x)\}$ , что означает сдвиг вдоль оси  $y$ -ов на среднее значение функции  $y_M(x)$ :  $\{y_M(x)\} = y_M(x) - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \times \int_{-N}^N y_M(x) dx$ . В частности, из выражения для  $y_M$  всюду будем

отбрасывать постоянные слагаемые. Тогда, учитывая, что  $y_\Phi'(x_\Phi)$  — малая величина, и пренебрегая слагаемыми третьего порядка малости по сравнению с малыми первого порядка и величинами второго порядка малости по сравнению с конечными величинами, получим такие выражения:  $y_M = \{y_\Phi(x_\Phi) - L_s y_\Phi(x_\Phi) - \frac{d}{2} \times [y_\Phi'(x_\Phi)]^2\}$ ,  $x_M = x_\Phi - L_s - d y_\Phi'(x_\Phi)$ . Отсюда, с той же точностью, получим (обозначая  $y_\Phi = y_\Phi^{n+1}$ )

$$\begin{aligned}
y_M^{n+1}(x_M) &= \{y_\Phi(x_M + L_s + dy_\Phi(x_\Phi)) - L_s y'_\Phi(x_M + L_s + dy_\Phi(x_\Phi)) - \\
&- \frac{d}{2} [y'_\Phi(x_M + L_s + dy_\Phi(x_\Phi))]^2\} \approx \{y_\Phi(x_M + L_s) + d[y'_\Phi(x_M + L_s)]^2 - \\
&- L_s y'_\Phi(x_M + L_s) - L_s dy'_\Phi(x_M + L_s) y''_\Phi(x_M + L_s) - \frac{d}{2} [y'_\Phi(x_M + L_s)]^2\} = \\
&= \left\{ \left( I - L_s \frac{d}{dx} \right) [y_\Phi(x_M + L_s) + \frac{d}{2} [y'_\Phi(x_M + L_s)]^2] \right\}.
\end{aligned}$$

Полученные уравнения недостаточно адекватно отражают реальный процесс автовождения, так как ввиду нелинейностей в конструкции автомата вождения (см. [2, 3]) закон обратной связи (1) выполняется лишь приближенно. По этой причине в системе возникают автоколебания, которые мы приближенно учтем, вводя в полученные уравнения некоторые добавочные слагаемые, моделирующие возникающие реально автоколебания.

Как показывает решение задачи об отслеживании прямой [2] и проведенный численный счет для более сложных кривых, можно учесть автоколебания в виде гармонического слагаемого в формуле (3) вида  $ge^{iT(x_M + \beta_{n+1})} + ge^{-iT(x_M + \beta_{n+1})}$ , где  $gT$  можно считать малым вещественным числом, а  $\beta_n$  определяется ниже:

$$\begin{aligned}
y_M^{n+1}(x) &= \left\{ \left( I - L_s \frac{d}{dx} \right) \left[ y_\Phi^{n+1}(x_M + L_s) + \frac{d}{2} \left[ \frac{d}{dx} y_\Phi^{n+1}(x_M + L_s) \right]^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + g(e^{iT(x_M + \beta_{n+1})} + e^{-iT(x_M + \beta_{n+1})}) \right\}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Чтобы избавиться от сдвижек вдоль оси  $x$ -ов в формулах (2) и (4), удобно ввести следующие обозначения:  $y_\Phi^n(x_\Phi) = Z_n(x_\Phi + n(L + L_s) - L_s + \beta)$ ,  $y_M^n(x_\Phi) = W_n(x_M + n(L + L_s) + \beta)$ , причем  $\beta_n = n(L + L_s) + \beta$ .

Тогда формулы (2) и (4) переписутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{L_B}{K} \frac{d^2}{dx^2} + L \frac{d}{dx} + I \right) Z_{n+1}(x) &= W_n(x), \quad (5) \\
W_{n+1}(x) &= \left\{ \left( I - L_s \frac{d}{dx} \right) Z_{n+1}(x) + \frac{d}{2} [Z_{n+1}(x)]^2 + g(e^{iT_x} + e^{-iT_x}) \right\}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Заметив, что так как среднее значение двух последних слагаемых в (6) равно нулю, то они выведены из-под знака  $\{\dots\}$ . Из уравнения (5)  $z_{n+1}(x)$  однозначно находится как ограниченное на всей оси решение.

У разностных функциональных уравнений (5), (6) должно быть задано начальное условие — начальная функция  $W_0(x)$ . Для практических целей достаточно рассмотреть начальную функцию в виде суммы конечного числа гармоник:  $W_0(x) = \sum_{j=1}^m (B_j e^{iA_j x} +$

$+ \bar{B}_j e^{-iA_j x}$ ), где величины  $B_j A_j$  — малые того же порядка, что и  $gT$ .

Для решения нелинейных разностных уравнений (5), (6) применим метод малого параметра: будем разлагать решение в асимптотические ряды по степеням безразмерного малого параметра  $gT$  (для сокращения выкладок практически удобнее разлагать по степеням  $g$ ):  $w_n(x) = w_n^1(x)g + w_n^2(x)g^2 + \dots$ ,  $z_n(x) = z_n^1(x)g + z_n^2(x)g^2 + \dots$ . В соответствии с принятой в данной работе точностью имеет смысл находить только два первых члена разложения, отбрасывая члены третьего порядка малости относительно  $gT$ .

В результате применения метода малого параметра получим следующие линейные разностные уравнения:

$$\left( \frac{L_B}{K} \frac{d^2}{dx^2} + L \frac{d}{dx} + I \right) z_{n+1}^1(x) = w_n^1(x), \quad w_{n+1}^1(x) = \left( I - L_s \frac{d}{dx} \right) z_{n+1}^1(x) + e^{iT x} + e^{-iT x}; \quad (7)$$

$$\left( \frac{L_B}{K} \frac{d^2}{dx^2} + L \frac{d}{dx} + I \right) z_{n+1}^2(x) = w_n^2(x), \quad w_{n+1}^2(x) = \left( I - L_s \frac{d}{dx} \right) z_{n+1}^2(x) + \left\{ \frac{d}{2} \left( I - L_s \frac{d}{dx} \right) (z_{n+1}^1(x))^2 \right\} \quad (8)$$

с начальными условиями  $w_0^1(x) = \frac{1}{g} \sum_{j=1}^m (B_j e^{iA_j x} + \bar{B}_j e^{-iA_j x})$ ,  $w_0^2(x) = 0$ . Решая эти уравнения, получим  $w_n^1(x) = M_n^0 e^{iT x} + \bar{M}_n^0 e^{-iT x} + \sum_{j=1}^m (M_n^j e^{iA_j x} + \bar{M}_n^j e^{-iA_j x})$ , где  $M_n^0$  и  $M_n^j$  удовлетворяют следующим разностным уравнениям:  $M_{n+1}^0 = a(T) M_n^0 + 1$ ,  $M_0^0 = 0$ ,  $M_{n+1}^j = a(A_j) M_n^j$ ,  $M_0^j = \frac{1}{g} B_j$ , причем  $a(A) = \frac{1 - L_s A i}{1 + L A i - \frac{L_B}{K} A^2}$ .

Отсюда

$$M_n^0 = \frac{1}{1 - a(T)} (1 - a^n(T)); \quad (9)$$

$$M_n^j = \frac{1}{g} B_j a^n(A_j), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Из рассмотрения полученного первого приближения

$$w_n(x) \approx w_n^1(x)g = 2\text{Re} \left[ \frac{g(1 - a^n(T))}{1 - a(T)} e^{iT x} + \sum_{j=1}^m B_j a^n(A_j) e^{iA_j x} \right]$$

следует, что для устойчивой работы данной системы необходимо, чтобы  $|a(T)| < 1$ ,  $|a(A_j)| \leq 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Частоты  $A_j$

и  $T$  могут быть произвольными положительными числами, поэтому необходимо выбрать коэффициент  $K$  так, чтобы  $|a(A)| < 1$  ( $\forall A > 0$ ) (11). Это приводит к неравенству  $K \geq 2L_B/(L^2 - L_S^2)$  (12) при обязательном требовании  $L^2 - L_S^2 > 0$  (13).

Найдем теперь второй член асимптотики  $\omega_n^2(x)$ . Отыскиваем его в виде  $\omega_n^2(x) = \sum_{j,p=0}^m M_n^{jp} e^{i(A_j + A_p)x} + \sum_{j,p=0}^m \bar{M}_n^{jp} e^{-i(A_j + A_p)x} + \sum_{\substack{j,p=0 \\ j \neq p}}^m \times \times N_n^{jp} e^{i(A_j - A_p)x}$ , где принято обозначение  $A_0 = T$ . Подставляя в уравнения (8), получим разностные уравнения  $M_{n+1}^{jp} = a(A_j + A_p) M_n^{jp} + R(A_j, A_p) M_n^j \bar{M}_n^p$ ;  $N_{n+1}^{jp} = a(A_j - A_p) N_n^{jp} + R(A_j, -A_p) \times \times M_n^j \bar{M}_n^p$  с нулевыми начальными условиями, где  $R(A_j, A_p) = \frac{dA_j A_p (1 - L_S (A_j + A_p) i)}{2 \left(1 + LA_j i - \frac{L_B}{K} A_j^2\right) \left(1 + LA_p i - \frac{L_B}{K} A_p^2\right)}$ . Так как формулы (9), (10)

можно объединить:  $M_n^j = \frac{1}{g} B_j a^n(A_j) + \frac{1}{1 - a(A_j)} \delta_{0j}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ ,

где принято  $\frac{1}{g} B_0 = \frac{1}{a(T) - 1}$ ,  $\delta_{0j} = \begin{cases} 1 & j = 0, \\ 0 & j \neq 0, \end{cases}$  то решение разностных уравнений (14) можно записать следующим образом:

$$M_n^{jp} = R(A_j, A_p) \left[ \frac{B_j B_p}{g^2} \frac{a^n(A_j) a^n(A_p) - a^n(A_j + A_p)}{a(A_j) a(A_p) - a(A_j + A_p)} + \frac{B_j}{g(1 - a(A_p))} \times \right. \\ \times \frac{a^n(A_j) - a^n(A_j + A_p)}{a(A_j) - a(A_j + A_p)} \delta_{0p} + \frac{B_p}{g(1 - a(A_j))} \frac{a^n(A_p) - a^n(A_j + A_p)}{a(A_p) - a(A_j + A_p)} \delta_{0j} + \\ \left. + \frac{1}{(1 - a(A_j))(1 - a(A_p))} \frac{1 - a^n(A_j + A_p)}{1 - a(A_j + A_p)} \delta_{0j} \delta_{0p} \right], \text{ а выражение для } N_n^{jp}$$

получается из данного заменой  $A_p$  на  $-A_p$  и  $B_p$  на  $\bar{B}_p$ . Заметим, что для конкретности мы приняли, что наряду с обязательным требованием (11) выполняются также неравенства  $a(A_j) \times \times a(A_p) \neq a(A_j + A_p)$ ,  $a(A_j) \overline{a(A_p)} \neq a(A_j - A_p)$ ,  $a(A_j) \neq a(A_j + A_p)$ ,  $\overline{a(A_p)} \neq a(A_j - A_p)$ .

Исследование двух найденных членов асимптотики показывает, что с рассматриваемой точностью  $\omega_n(x)$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к функции

$$\omega_\infty(x) = 2Re \left[ \frac{ge^{iTx}}{1 - a(T)} + \frac{g^2 e^{i2Tx}}{(1 - a(T))^2 (1 - a(2T))} \right]. \quad (15)$$

Эту предельную функцию можно получить и формально, перейдя в разностных уравнениях (5), (6) к пределу при  $n \rightarrow \infty$  и решая полученные дифференциальные уравнения (с той же точностью), и тем самым полученная сходимость к предельному решению доказывает устойчивость работы рассматриваемой системы.

Полученный результат можно сформулировать в следующих терминах: если условие (11) не выполняется, то существует начальная кривая, при последовательном отслеживании которой погрешность неограниченно растет; если же условие (11) выполнено, то погрешность остается ограниченной, а сама кривая приближается к достаточно простой предельной кривой (15).

Данная задача имеет практическое применение при исследовании последовательных движений самоходного посевного агрегата, управляемого автоматом вождения. Аналогичная задача возникает и при автовождении пахотного агрегата; при этом роль траектории  $y_m^{n+1}(x)$  играет последняя вспаханная борозда. В данном случае величина  $L_S$  сравнительно велика, и поэтому выполнение условия (13) вызывало на практике огромные трудности.

**Список литературы:** 1. Математическая модель автомата вождения самоходной машины, отслеживающего кривую с помощью копира / А. С. Кашурко, В. И. Коробов, Е. Н. Подольский, В. А. Синяков. — Вестн. Харьк. ун-та. Математика и механика, 1976, вып. 41, с. 3—11. 2. Влияние зон нечувствительности, люфтов и запаздывания на работу автомата вождения самоходной машины / С. И. Вовна, А. С. Кашурко, Е. Н. Подольский, В. А. Синяков. — Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика, 1977, вып. 42, с. 27—36. 3. Вовна С. И., Подольский, Е. Н. Автоколебания системы самоходной машины-автомата вождения. — Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика, 1979, вып. 44, с. 11—22.

Поступила в редколлегию 10. 01. 81..

УДК 517.928 + 517.934

В. А. СИНЯКОВ

## К ОБОСНОВАНИЮ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ САМОХОДНОЙ МАШИНЫ

В работе [1] при учете явления увода колес самоходной машины показано, что с точностью до некоторого малого параметра углы уводов колес  $\beta_A$  и  $\beta_B$  пропорциональны углу поворота передних колес  $\alpha$  (см. рисунок), причем соответствующие коэффициенты пропорциональности зависят от параметров машины и коэффициентов сопротивления уводу. При численных расчетах эти коэффициенты пропорциональности по возможности упрощают, не учитывая входящие в них малые величины, без необходимого обоснования. В данной работе покажем, что зависимостью коэффициентов пропорциональности от малых величин можно пренебречь, не теряя точности.

Под углом увода колес обычно понимают угол между направлением движения центра колеса и его средней плоскостью. Аналогично, углом увода рабочих органов, середина оси которых расположена в точке  $Q$  на оси машины  $AB$ , и вообще лю-

бой точки оси  $AB$ , например, центра инерции  $O$ , будем называть угол между направлением скорости этих точек и осью  $AB$ .

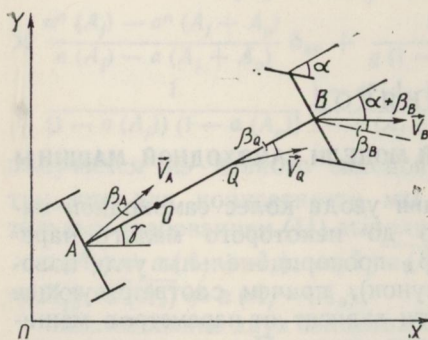
Дифференциальные уравнения, которые описывают движение самоходной машины с учетом явления увода, полученные в работе [1] при достаточно общих предположениях о характере движения машины и приложенных к ней сил, могут быть записаны в следующем виде:

$$z \begin{pmatrix} \frac{d\beta}{d\tau} \\ \frac{dq}{d\tau} \end{pmatrix} = -(N + \varepsilon S) \begin{pmatrix} \beta \\ q \end{pmatrix} + (D + \varepsilon d) \alpha \quad (1), \quad \varepsilon = \frac{MV}{T\mu_A};$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\mu_B}{\mu_A} - \frac{F}{\mu_A} \\ \left( \frac{\mu_B}{\mu_A} - \frac{F}{\mu_A} \right) \frac{\xi_B}{r} \end{pmatrix}; \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Tv_B}{MVr} \end{pmatrix};$$

$$n_1 = 1 + \frac{\mu_Q}{\mu_A} + \frac{\mu_B}{\mu_A}; \quad n_2 = n_3 = \frac{\xi_A}{r} + \frac{\mu_Q \xi_Q}{\mu_A r} + \frac{\mu_B \xi_B}{\mu_A r}; \quad n_4 = \frac{\xi_A^2}{r^2} + \frac{\mu_Q \xi_Q^2}{\mu_A r^2} + \frac{\mu_B \xi_B^2}{\mu_A r^2}; \quad N = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{pmatrix}; \quad (2)$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{VT}{r} \\ \frac{T}{MVr} (v_A + v_Q + v_B) & \frac{T}{MVr^2} (v_A \xi_A + v_Q \xi_Q + v_B \xi_B) \end{pmatrix}.$$



Здесь приняты следующие обозначения:  $M$  — масса машины;  $V$  — модуль скорости любой точки оси  $AB$  (в [1] показано, что с квадратичной точностью он постоянный);  $T$  — величина, характеризующая колебательный характер движения машины, с помощью которой введено новое время  $\tau = \frac{t}{T}$ ;  $\xi_A, \xi_Q, \xi_B$  — координаты соответственно точек  $A, Q, B$  относительно центра инерции  $O$  (положительное направление отсчета — от точки  $O$  к точке  $B$ );  $r$  — радиус инерции, определяемый обычным образом, равенством  $I_O = Mr^2$ , где  $I_O$  — момент инерции машины относительно вертикальной оси, проходящей через центр инерции  $O$ ;  $\beta$  и  $q$  — независимые переменные, определяемые соотношениями  $\beta \equiv \beta_0, \dot{\gamma} = \frac{V}{r} q$ , где  $\beta_0$  — угол увода точки  $O$ ,  $\gamma$  — угол между осью  $AB$  и осью  $x$ -ов неподвижной системы координат  $XOY$ ;  $F$  — продольная сила сопротивления передних колес;  $\mu_A, \mu_Q, \mu_B$  —

Здесь приняты следующие обозначения:  $M$  — масса машины;  $V$  — модуль скорости любой точки оси  $AB$  (в [1] показано, что с квадратичной точностью он постоянный);  $T$  — величина, характеризующая колебательный характер движения машины, с помощью которой введено новое время  $\tau = \frac{t}{T}$ ;  $\xi_A, \xi_Q, \xi_B$  — координаты соответственно точек  $A, Q, B$  относительно центра инерции  $O$  (положительное направление отсчета — от точки  $O$  к точке  $B$ );  $r$  — радиус инерции, определяемый обычным образом, равенством  $I_O = Mr^2$ , где  $I_O$  — момент инерции машины относительно вертикальной оси, проходящей через центр инерции  $O$ ;  $\beta$  и  $q$  — независимые переменные, определяемые соотношениями  $\beta \equiv \beta_0, \dot{\gamma} = \frac{V}{r} q$ , где  $\beta_0$  — угол увода точки  $O$ ,  $\gamma$  — угол между осью  $AB$  и осью  $x$ -ов неподвижной системы координат  $XOY$ ;  $F$  — продольная сила сопротивления передних колес;  $\mu_A, \mu_Q, \mu_B$  —

коэффициенты сопротивления уводу задних колес, точки  $Q$  и передних колес;  $v_A, v_Q, v_B$  — коэффициенты пропорциональности, выражающие зависимость стабилизирующих моментов от углов увода.

Система (1), как и соответствующая в работе [1], представляет собой ввиду наличия малого параметра  $\epsilon$  при старшей производной в соответствии с принятой терминологией (см., например, работу [2]) сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений. Однако, в отличие от работы [1], в системе (1) выделено регулярное возмущение, которое обусловлено не только малостью сил инерции по сравнению с силами сопротивления, но также малостью стабилизирующих моментов по сравнению с силами сопротивления (в отношении последнего см., например, работу [3]).

Для удобства дальнейшего изложения введем обозначение  $Z(\tau) = \begin{pmatrix} \beta(\tau) \\ q(\tau) \end{pmatrix}$ . В этом обозначении система уравнений (1) имеет следующий вид:

$$\epsilon \frac{dZ}{d\tau} = -(N + \epsilon S) Z + (D + \epsilon d) \alpha. \quad (3)$$

Приближенное решение таких систем дифференциальных уравнений при  $\tau \geq \tau_0 > \tau_0$  ( $\tau_0$  — начальный момент времени,  $\tau_0$  — некоторый момент времени, определяемый скоростью затухания экспоненциального вида слагаемых) ищем обычно в виде разложения по степеням малого параметра  $\epsilon$ :  $Z_k(\tau, \epsilon) = \sum_{i=0}^k \epsilon^i z_i(\tau)$  (4).

При этом на систему дифференциальных уравнений (3) согласно работе [2] должны быть наложены условия типа устойчивости по первому приближению, обеспечивающие при малых  $\epsilon > 0$  близость ее решений к решениям невозмущенной системы, получающейся из (3) при  $\epsilon = 0$ . Эти условия для системы (3) сводятся к выполнению неравенств  $\operatorname{Re} \lambda_1 > 0, \operatorname{Re} \lambda_2 > 0$  (5), где  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения матрицы  $N$ . Нетрудно убедиться с учетом конкретного вида матрицы  $N$  (2), что ее собственные значения вещественны, положительны и различны, а значит для системы (3) условия (5) выполняются. Пусть для определенности  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Строить асимптотическое приближение (4) для системы (3) путем интегрирования по частям, как это сделано в работе [1], мы не можем, так как в этом случае  $z_i(\tau)$  окажутся зависящими от  $\epsilon$ . Поэтому применим известный алгоритм, описанный в работе [2].

Подставим  $Z_k(\tau, \epsilon)$  вида (4) в систему (3) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$  правой части к левой. Получаем  $0 = -N z_0(\tau) + D \alpha(\tau); \frac{dz_0(\tau)}{d\tau} = -N z_1(\tau) - S z_0(\tau) + \alpha$ ;

$$\frac{dz_1(\tau)}{d\tau} = -Nz_2(\tau) - Sz_1(\tau); \frac{dz_{k-1}(\tau)}{d\tau} = -Nz_k(\tau) - Sz_{k-1}(\tau) \quad (6).$$

Отсюда по известной, нужное количество раз дифференцируемой функции  $\alpha(\tau)$  могут быть последовательно найдены все  $z_i(\tau)$ , входящие в выражение (4) для  $Z_k(\tau, \varepsilon)$ , так как условия (5) обеспечивают существование обратной матрицы  $N^{-1}$ .

Покажем что при наличии  $(K+1)$ -й ограниченной производной у  $\alpha(\tau)$  при  $\tau \geq \tau_0$  система (3) имеет единственное решение  $Z(\tau, \varepsilon)$  с начальным условием  $Z(0, \varepsilon) = \bar{Z}_0$ , причем для произвольного  $\tau_0$ , сколь угодно близкого к  $\tau_0$  и  $\tau_0 > \tau_0$ , существуют  $\varepsilon_0 > 0$  и константа  $C$ , что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  равномерно по  $\tau$  для  $\tau \geq \tau_0$  справедлива оценка  $\|Z(\tau, \varepsilon) - \bar{Z}_k(\tau, \varepsilon)\| \leq C\varepsilon^{k+1}$  (7). В таких случаях говорят, что разность есть малая величина порядка  $\varepsilon^{k+1}$  и обозначают ее через  $O(\varepsilon^{k+1})$ .

Для доказательства этого факта  $Z_k(\tau, \varepsilon)$  вида (4) с  $z_i(\tau)$ , определяемыми соотношениями (6), подставим в систему (3) и найдем разность  $\delta(\tau, \varepsilon)$  между правой и левой частями. Получаем

$$\delta(\tau, \varepsilon) = -\varepsilon^{k+1} \left( \frac{dz_k(\tau)}{d\tau} + Sz_k(\tau) \right). \quad (8)$$

В силу ограниченности  $(K+1)$ -й производной у  $\alpha(\tau)$  имеем:  $\|\delta(\tau, \varepsilon)\| \leq C_1 \varepsilon^{k+1}$  (9), где

$$C_1 = \max_{\tau} \left\| \frac{dz_k(\tau)}{d\tau} + Sz_k(\tau) \right\|.$$

Будем искать решение системы (3)  $Z(\tau, \varepsilon)$  в виде  $Z(\tau, \varepsilon) = U(\tau, \varepsilon) + Z_k(\tau, \varepsilon)$  (10), где через  $U(\tau, \varepsilon)$  обозначена разность, стоящая под знаком нормы в неравенстве (7). После подстановки  $Z(\tau, \varepsilon)$  вида (10) в систему (3) получаем систему дифференциальных уравнений относительно  $U(\tau, \varepsilon)$

$$\varepsilon \frac{dU(\tau, \varepsilon)}{d\tau} = -(N + \varepsilon S)U(\tau, \varepsilon) + \delta(\tau, \varepsilon). \quad (11)$$

Здесь  $\delta(\tau, \varepsilon)$  — известная функция от  $\tau$ , определяемая равенством (8). В силу требования, наложенного на  $\alpha(\tau)$ , решение системы (11) существует и может быть записано в виде

$$U(\tau, \varepsilon) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}(N + \varepsilon S)(\tau - \tau_0)} U(\tau_0, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(N + \varepsilon S)(\tau - \theta)} \delta(\theta, \varepsilon) d\theta, \quad (12)$$

где в соответствии с (10)  $U(\tau_0, \varepsilon) = Z(\tau_0, \varepsilon) - Z_k(\tau_0, \varepsilon)$ .

Нетрудно убедиться с учетом конкретного вида матрицы  $N + \varepsilon S$ , что ее собственные значения  $\lambda_1(\varepsilon)$  и  $\lambda_2(\varepsilon)$  в предположении малости сил инерции и стабилизирующих моментов по

сравнению с силами сопротивления вещественные, положительные и различные, причем  $\lambda_1(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1$  и  $\lambda_2(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_2$ , где  $\lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon)$ . Поэтому для любого малого  $\delta > 0$  можно подобрать  $\varepsilon_1 > 0$  такое, что при  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  будет выполнено неравенство  $\lambda_1 - \delta < \lambda_1(\varepsilon) < \lambda_2(\varepsilon)$ . С учетом оценки  $\left\| e^{-\frac{1}{\varepsilon}(N+\varepsilon S)(\tau-\tau_0)} \right\| \leq C_2 e^{\frac{-\lambda_1+\delta}{\varepsilon}(\tau-\tau_0)}$  (см., например, работу [2]) получаем оценку для первого слагаемого в выражении (12) для  $U(\tau, \varepsilon)$

$$\left\| e^{-\frac{1}{\varepsilon}(N+\varepsilon S)(\tau-\tau_0)} U(\tau_0, \varepsilon) \right\| \leq C_3 e^{\frac{-\lambda_1+\delta}{\varepsilon}(\tau-\tau_0)}, \quad (13)$$

где  $C_3 \geq C_2 \|U(\tau_0, \varepsilon)\|$  — некоторая постоянная. Возьмем произвольное  $\bar{\tau}_0 > \tau_0$  и близкое к  $\tau_0$ . Можно подобрать  $\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1$ ) и  $C_4$  ( $C_4 \geq C_3$ ) так, что правая часть неравенства (13) при  $\tau \geq \bar{\tau}_0$  окажется меньше  $C_4 \varepsilon^{k+1}$ , а значит для первого слагаемого в выражении (12) для  $U(\tau, \varepsilon)$  справедлива оценка при  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  равномерно по  $\tau$  при  $\tau \geq \bar{\tau}_0$   $\left\| e^{-\frac{1}{\varepsilon}(N+\varepsilon S)(\tau-\tau_0)} U(\tau_0, \varepsilon) \right\| \leq C_4 \varepsilon^{k+1}$  (14). Заметим, что полученную оценку можно считать независимой от начальных условий, так как  $U(\tau_0, \varepsilon)$  характеризует начальное положение самоходной машины, и поэтому  $\|U(\tau_0, \varepsilon)\|$  не может принимать сколь угодно большие значения.

Оценим второе слагаемое в выражении (12) для  $U(\tau, \varepsilon)$ . С учетом свойств нормы, оценок множителя экспоненциального вида и функции  $\delta(\theta, \varepsilon)$  (9), имеем при  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\frac{1}{\varepsilon}(N+\varepsilon S)(\tau-\theta)} \delta(\theta, \varepsilon) d\theta \right\| \leq C_1 \varepsilon^k \int_{\tau_0}^{\tau} \left\| e^{-\frac{1}{\varepsilon}(N+\varepsilon S)(\tau-\theta)} \right\| d\theta \leq C_5 \varepsilon^{k+1},$$

где  $C_5 \geq \frac{C_1 C_2}{\lambda_1 - \delta}$  — некоторая постоянная. Окончательно получаем, что для  $U(\tau, \varepsilon)$  при  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  равномерно по  $\tau$  для  $\tau \geq \bar{\tau}_0$  справедлива оценка  $\|U(\tau, \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{k+1}$ , где  $C \geq C_4 + C_5$ .

Таким образом,  $Z_k(\tau, \varepsilon)$ , определяемое выражением (4), в котором  $z_i(\tau)$  находятся из уравнений (6), является асимптотическим приближением при  $\tau \geq \tau_0$  решения исходной системы (3).

Для практического использования вполне достаточным является приближенное решение  $Z_0(\tau, \varepsilon)$ . Окончательно получаем, как и в работе [1], с точностью  $O(\varepsilon)$   $\begin{pmatrix} \beta(\tau) \\ q(\tau) \end{pmatrix} = N^{-1} D \alpha(\tau)$ .

Однако это решение проще аналогичного в [1] за счет отбрасывания малых величин. Кроме того, в нем используется меньшее количество экспериментальных данных, так как не учитываются стабилизирующие моменты.

Список литературы: 1. Синяков В. А. Обоснование кинематической модели автомата вождения. — Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика, 1978, вып. 43, с. 56—61. 2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973. — 272 с. 3. Работа автомобильной шины/В. И. Кноров, Е. В. Кленников, И. П. Петров и др. — М.; Транспорт, 1976. — 238 с.

Поступила в редколлегию 19.01.81.

УДК 517.919.2

А. П. ПРИХОДЬКО

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим задачу на скорейшее попадание из начального множества  $P$  на подвижное целевое множество  $M_t$  для управляемого уравнения  $\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + v(t)$ ,  $x \in X$ ,  $u \in U(1)$  при «геометрических» ограничениях на управление;  $u(\tau) \in \Omega_\tau$  п. б.  $(\Omega_\tau \subset U)$  (2) в случае, если фазовое пространство  $X$  и пространство управлений  $U$  банаховы.

Обозначим через  $[U, X]$  пространство линейных ограниченных операторов, действующих из  $U$  в  $X$ . Будем предполагать, что  $B(t) \in [U, X]$  при  $t \geq t_0$ ,  $B(\cdot) \in L_p^{loc}([t_0, +\infty), [U, X])$ ,  $p \geq 1$ ;  $u(t)$  — сильно измеримая функция из  $U$ ,  $u(\cdot) \in L_{p'}^{loc}([t_0, +\infty), U)$ ,  $(1/p + 1/p' = 1)$ ;  $v(\cdot) \in L_1^{loc}([t_0, +\infty), X)$ .

Временем быстрогодействия называют  $t^* = \inf \{t \geq t_0: K(\Omega_\tau, P, t_0, t) \cap M_t \neq \emptyset\}$ , где  $K(\Omega_\tau, P, t_0, t)$  — множество достижимости из начального множества  $P$  для уравнения (1) [1].

Управление  $u^*(\tau)$  называется оптимальным по быстродействию (оптимальным быстродействием), если соответствующая траектория  $x(t, u^*)$  удовлетворяет условиям:  $x(t_0, u^*) \in P$ ,  $x(t^*, u^*) \in M_{t^*}$ .

**Теорема 1.** Допустим, что в задаче на быстродействие из множества  $P$  на множество  $M_t$  уравнение (1)  $\varepsilon$  — управляемо без ограничений на управление;  $A(t)$  и  $B(t)$  — аналитические операторные функции, ограничивающие множества  $\Omega_\tau$  — почти всюду строго выпуклые, такие, что измеримое многозначное отображение  $\Omega_\tau: R^1 \rightarrow 2^U$  удовлетворяет условию  $\|\Omega_\tau\| \leq r(\tau)$ ,  $r(\tau) \in L_1^{loc}[t_0, +\infty)$ ;  $P, M_t$  — выпуклые множества,  $M_t$  — непрерывны по Хаусдорфу,  $\text{Int } M_t \neq \emptyset$ . Тогда оптимальное быстродействие  $u^*(\tau)$  единственно. Если  $P$  — строго выпуклое множество, то оптимальная траектория также единственна.

Доказательство. Если оптимальное управление существует, то  $K(\Omega_\tau, P, t_0, t^*) \cap M_{t^*} \neq \emptyset$ . Нетрудно видеть, что  $K(\Omega_\tau, P, t_0, t^*) \cap \text{Int } M_{t^*} \neq \emptyset$ . Выберем разделяющий функци-

онал  $f_0 \in X$ ,  $f_0 \neq 0$  так, чтобы  $\langle f_0, K(\Omega_t, P, t_0 t^\#) \cap M_{t^\#} \rangle \leq \leq \langle f_0, x(t^\#, u^\#) \rangle$ ,  $\langle f_0, M_{t^\#} \rangle \geq \langle f_0, x(t^\#, u^\#) \rangle$ .

Тогда, если решение сопряженного уравнения  $\eta(t) = -A^*(t) \times \times \eta(t)$ ,  $\eta \in X^*$  (3) подчинить условию  $\eta(t^\#) = f_0$ , то для всех оптимальных траекторий будет выполнено необходимое условие [2] в форме принципа максимума Л. С. Понтрягина

$$\langle \eta(t), B(t) u_i^\#(t) \rangle = \max_{u \in \Omega_t}^{\text{п. в.}} \langle \eta(t), B(t) u \rangle, \quad \langle \eta(t_0), y \rangle \leq \leq \langle \eta(t_0), x_0^i \rangle : y \in P \quad (4)$$

и при каждом  $x_i^e = x(t_0, u_i^\#)$ .

Покажем сначала, что семейство линейных функционалов  $B^*(t) \eta(t) \in U^*$  не обращается в нуль ни на каком множестве положительной меры. От противного. Предположим, что существует  $E \subset [t_0, t^\#]$ ,  $mE > 0$  такое, что  $B^*(t) \eta(t) = 0$  при  $t \in E$ , тогда  $B^*(t) \eta(t) = 0$  при всех  $t$ . Действительно,  $\eta(t)$  — аналитическая функция, так как является решением дифференциального уравнения с аналитической правой частью;  $B^*(t)$  — аналитическая функция, в силу аналитичности  $B(t)$ , откуда и следует аналитичность  $B^*(t) \eta(t)$ . Условие  $B^*(t) \eta(t) = 0$  эквивалентно условию  $\langle f_0, \Phi(t^\#, t) B(t) u \rangle = 0$  при всех  $u \in U$ , и для каждого  $t \in [t_0, t^\#]$ . (Здесь  $\Phi(t^\#, t)$  разрешающий оператор однородного уравнения  $\dot{x} = A(t)x$ ). Поэтому замыкание линейной оболочки  $\text{cl } \{ \Phi(t^\#, t) B(t) U \} \neq X$ , что противоречит условиям  $\varepsilon$  — управляемости [3].

$$\text{Таким образом, } \langle \eta(t), B(t) u_i^\#(t) \rangle = \max_{u \in \Omega_t}^{\text{п. в.}} \langle \eta(t), B(t) u \rangle$$

и функционалы  $B^*(t) \eta(t) \neq 0$  почти всюду на  $[t_0, t^\#]$ . Тогда, в силу строгой выпуклости множеств  $\Omega_t$ , при почти всех  $t$  оптимальное управление определяется единственно  $u^\#(t) = \arg \max_{u \in \Omega_t}$

$$\langle \eta(t), B(t) u \rangle.$$

Покажем, что если  $P$  также строго выпукло, то все оптимальные траектории выходят из одной точки и, следовательно, совпадают. От противного. Допустим, что существуют  $x_0^1, x_0^2 \in P$  и  $x_0^1 \neq x_0^2$ . Тогда, в силу (4), получим систему неравенств

$$\begin{aligned} \langle \eta(t_0), x_0^2 \rangle &\leq \langle \eta(t_0), x_0^1 \rangle \text{ при } y = x_0^2, \\ \langle \eta(t_0), x_0^1 \rangle &\leq \langle \eta(t_0), x_0^2 \rangle \text{ при } y = x_0^1. \end{aligned}$$

Откуда  $\langle \eta(t_0), x_0^1 \rangle = \langle \eta(t_0), x_0^2 \rangle$ , более того,  $\forall \lambda \in [0, 1]$   $\langle \eta(t_0), \lambda x_0^1 + (1 - \lambda) x_0^2 \rangle = \langle \eta(t_0), x_0^1 \rangle$  (5) при всех  $\lambda \in [0, 1]$ .

Заметим, что  $\eta(t_0) \neq 0$ , так как  $\eta(t^\#) \neq 0$ . Поэтому условие (5) совместно с (4) показывает, что все точки отрезка  $[x_0^1, x_0^2]$  лежат на границе множества  $P$ , а это противоречит строгой выпуклости множества  $P$ .

**Следствие 1.** Предположим, что в условиях теоремы 1  $A(t) \equiv A$ , где  $A$  — инфинитезимальный производящий оператор аналитической при  $t > 0$  полугруппы  $S(t)$ . Тогда оптимальное быстроедействие  $u^*(\tau)$  единственно. Если  $P$  — строго выпукло, то оптимальная траектория  $x(t, u^*)$  также единственна.

**Доказательство.** В силу аналитичности полугруппы  $S(t)$ , как и в теореме 1, получим  $\langle f_0, S(t^* - \tau) B(\tau) u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$  и при всех  $0 \leq \tau < t^*$ . Тогда, переходя к пределу при  $\tau \rightarrow t^*$ , по  $c_0$ -непрерывности полугруппы  $S(t)$  получим  $\langle f_0, B(0) u \rangle = 0 \quad \forall u \in U$ . Таким образом,  $\text{cl sp} \{S(t^* - \tau) B(\tau) U\} \neq X$ , что проти-

$0 < \tau < t^*$

воречит  $\varepsilon$ -управляемости полугруппы  $S(t)$  [4]. Последующие выкладки проводятся по плану доказательства теоремы 1. Далее рассмотрим множество  $\Omega$ , не являющееся заведомо строго выпуклым.

**Определение 1.** Эффективным множеством ( $\text{ef}(\Omega)$ ) слабо компактного в себе множества  $\Omega$  называется множество таких точек  $\Omega$ , которые доставляют максимум некоторому линейному непрерывному функционалу, т. е.  $\text{ef}(\Omega) = \{\bar{u} \in \Omega : \exists f \in U^*, \langle f, \bar{u} \rangle = \max_{u \in \Omega} \langle f, u \rangle\}$ .

Для выпуклого замкнутого ограниченного множества с непустой внутренностью в рефлексивном пространстве, очевидно, множество эффективных точек совпадает с множеством граничных точек.

**Определение 2.** Выпуклое слабо компактное в себе множество  $\Omega$  будем называть обобщенным многогранником, если его эффективное множество можно разбить на счетное число плоских граней:  $\text{ef}(\Omega) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_i$ , где  $\Gamma_i$  не являются одноточечными множествами и  $\exists f_i \neq 0$  такие, что  $\langle f_i, \Gamma_i \rangle = c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ ,  $c_i \in \mathbb{R}^1$ .

Заметим, что всякий конечномерный многогранник в банаховом пространстве в силу теоремы Хана—Банаха является обобщенным многогранником.

**Пример.** В банаховом пространстве  $c_0$  рассмотрим произвольный «гильбертов кирпич»  $D = \{x \in c_0 : |x_i| \leq c_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ ,  $c_i \rightarrow 0$ . Вычислим  $\text{ef}(D)$ . В силу  $(c_0)^* = l_1$ ,  $\forall f \in l_1 \quad \max_{x \in D} \langle f, x \rangle =$

$$= \max_{x \in D} \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i, \text{ откуда } \max_{x \in D} \sum_{i=1}^{\infty} f_i x_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \bar{x}_i, \text{ где } \bar{x}_i = c_i \times$$

$\times \text{sgn } f_i$ , если  $f_i \neq 0$ ,  $\bar{x}_i \in [-c_i, c_i]$ , если  $f_i = 0$ . Следовательно,  $\text{ef}(D) = \{x \in D : E_i \geq 1, x_{i_0} = \pm c_{i_0}\}$ . Обозначим  $\Gamma_i^+ = \{x \in c_0 : x_i = c_i, |x_j| \leq c_j \text{ при } j \neq i\}$ ,  $\Gamma_i^- = \{x \in c_0 : x_i = -c_i, |x_j| \leq c_j \text{ при } j \neq i\}$ ,  $\text{ef}(D) = \bigcup_{i>1} \Gamma_i^+ \cup \bigcup_{i>1} \Gamma_i^-$  и, следовательно,  $\text{ef}(D)$  разбива-

ется на счетное число граней. Грани плоские, так как лежат в гиперплоскостях  $x_i = c_i$  и содержат больше чем одну точку. Таким образом,  $D$  — обобщенный многогранник.

**Определение 3.** Будем говорить, что линейное уравнение  $\dot{x} = Ax + Bu$  (6) совместно с ограничениями на управление  $u(t) \in D$  удовлетворяет условию общности положения (операторы  $A, B$  ограничены), если для каждого ненулевого вектора  $w$ , параллельного грани  $D$ , уравнение  $\dot{x} = Ax + Bwv(t)$ ,  $v \in R^1$   $\varepsilon$ -управляемо, т. е.  $\text{cl sp}\{A^n Bw\}_0^\infty = X$ .

**Теорема 2.** Предположим, что в задаче на быстроедействие ограничения на управление заданы в виде  $u(t) \in D$  почти всюду, где  $D$  — обобщенный многогранник, уравнение (6) удовлетворяет условию общности положения при ограничениях  $u \in D$ .  $P, M_t$  — выпуклые множества,  $M_t$  — непрерывны по Хаусдорфу и  $\text{Int } M_t \neq \emptyset$ . Тогда, если оптимальное управление существует, то оно единственно.

**Доказательство.** От противного. Допустим, что существует два оптимальных управления  $u_1(t) \neq u_2(t)$  при  $t \in E \subset [t_0, t^*]$  и  $mE > 0$ . Как и в теореме 1, можно выбрать  $\eta(t^*)$  так, чтобы

$$\langle \eta(t), Bu_1(t) \rangle = \langle \eta(t), Bu_2(t) \rangle = \max_{u \in D} \langle \eta(t), Bu \rangle \quad (7)$$

почти всюду. Рассмотрим функцию  $F_t = \max_{u \in D} \langle \eta(t), Bu \rangle$  при  $t \in E$ .

По определению 1, учитывая (7), получим, что существует  $E' \subset E$ ,  $mE' > 0$  такое, что максимум в (7) достигается на одной и той же грани  $\Gamma_{i_0}$ . Тогда существует  $w/\Gamma_{i_0}$  такой, что  $\langle \eta(t), Bw \rangle = 0$ ,  $\forall t \in E'$ . Причем,  $w \neq 0$  в силу условия  $u_1(t) \neq u_2(t)$  при  $t \in E'$ . Следовательно, в силу аналитичности  $\eta(t)$ ,  $\langle \eta(t), Bw \rangle = 0$  при  $t \in [t_0, t^*]$ . Отсюда, дифференцируя по  $t$  и полагая  $t = t_0$ , получим  $\langle \eta(t_0), A^n Bw \rangle = 0$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\eta(t_0) \neq 0$ , что противоречит определению 3. Таким образом,  $u_1(t) = u_2(t)$  почти всюду.

Заметим, что теорема 1 остается в силе и для нестационарного уравнения (1) в случае, если  $A(t), B(t)$  — аналитические операторные функции. (В условии общности положения достаточно рассмотреть уравнение  $\dot{x} = A(t)x + B(t)wv(t)$ ,  $w \in \Gamma_i$ ,  $v \in R^1$ ).

**Список литературы:** 1. Приходько А. П. О множествах достижимости в банаховом пространстве. — Вестн. ХГУ. Прикл. математика и механика, 1979, № 177, с. 27—35. 2. Приходько А. П. Необходимые условия оптимальности для линейной задачи на быстроедействие в банаховом пространстве. — Тез. докл. III Всесоюз. семинара (25—27 сентября). Численные методы нелинейного программирования, Харьков, 1979, с. 154—158. 4. Triggiani R. Controllability and observability in Banach space with bounded operators. — SIAM Journ. Control,

УДК 517.977.1.

Г. М. СКЛЯР

# ЗАДАЧА О ВОЗМУЩЕНИИ ЭЛЕМЕНТА БАНАХОВОЙ АЛГЕБРЫ ПРАВЫМ ИДЕАЛОМ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ВОПРОСУ О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассмотрим систему управления:  $dx/dt = Ax + Bu$  (1), где  $x \in X$ ,  $u \in U$ ,  $A \in [X, X]$ ,  $B \in [U, X]$ . Здесь  $X$  и  $U$  — банаховы пространства,  $[Y, Z]$  — пространство линейных ограниченных операторов из  $Y$  в  $Z$ .

Система (1) называется стабилизируемой, если  $\exists P \in [X, U]: \|x(t)\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ , и экспоненциально стабилизируемой, если  $\forall \lambda > 0 \exists P = P(\lambda) \in [X, U]: \|x(t)\| \leq Ce^{-\lambda t}$ , где  $x(t)$  — решение системы (1) с управлением  $u = Px$ .

Изучение стабилизируемости линейных систем проведено в [2—3] в случае, когда  $X$  и  $U$  — конечномерные пространства. Задача стабилизации бесконечномерных систем рассматривалась в [5] для гильбертовых пространств  $X$  и  $U$ , а также в работах [6—7] в случае банаховых пространств  $X$  и  $U$ . В настоящей работе приводится алгебраический подход к задаче стабилизации, связанный с изучением спектра элемента банаховой алгебры при возмущении его правым идеалом.

1. В теории банаховых алгебр известен следующий результат.

Пусть  $V$  — банахова алгебра с единицей,  $a \in V$  и  $I \subset V$  — двусторонний нетривиальный идеал в  $V$ . Тогда  $\bigcap_{j \in I} \sigma(a + j) \neq \emptyset$ , где  $\sigma(v)$  — спектр элемента  $v$ . Следующая теорема развивает этот результат на односторонние идеалы.

**Теорема 1.** Пусть  $V$  — банахова алгебра с единицей  $e$ ,  $a \in V$  и  $I \subset V$  — правый идеал. Тогда следующие три утверждения

равносильны: а)  $\bigcap_{j \in I} \sigma(a + j) = \emptyset$ ; б)  $\exists k, j_i \in I, i = \overline{0, k}: \sum_{i=0}^k a^i j_i = e$ ;

в)  $\forall \lambda \in \mathbb{C} \exists v \in V, j \in I: (a - \lambda e)v + j = e$ .

Доказательство.

а)  $\rightarrow$  б). Пусть условие б) невыполнено. Обозначим через  $L$  линейную оболочку элементов вида  $a^n j$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots; j \in I$ . Тогда  $L \neq V$ . Поскольку  $L$  правый идеал, то отсюда  $\overline{L} \neq V$ , где  $\overline{L}$  — замыкание  $L$ .

Пусть  $l \in [V]$  — оператор умножения слева на  $a$ . Тогда  $\forall j \in I: (a + j)l \subset L$ , причем фактор-операторы  $(a + j)l/\overline{L}$  совпадают для

$\forall j \in I$ . Следовательно,  $\sigma[(a+j)_I/\bar{L}] = \sigma[a_I/\bar{L}]$ ,  $j \in I$  (2). Но на основании теоремы о граничной точке спектра [1, с. 44] можно показать, что  $\partial\{\sigma[(a+j)_I/\bar{L}]\} \subset \sigma[(a+j)_I]$ ,  $j \in I$  (3), где  $\partial\{\sigma[(a+j)_I/\bar{L}]\}$  — граница спектра этого оператора.

Из (2) и (3) получаем  $\bigcap_{j \in I} \sigma[(a+j)_I] \supset \partial(\sigma[a_I/\bar{L}]) \neq \emptyset$  (4). Как показано в [1],  $\sigma[(a+j)_I] = \sigma(a+j)$ . Отсюда и из (4)  $\bigcap_{j \in I} \sigma(a+j) \supset \partial(\sigma[a_I/\bar{L}]) \neq \emptyset$ .

б)  $\rightarrow$  в). Пусть выполнено б). Тогда  $\forall \lambda \in C: \sum_{i=0}^k (a - \lambda e)^i j'_i = e$ , где  $j'_i$ ,  $i = \overline{0, k}$  определяются рекуррентно  $j'_k = j_k$ ,  $j'_{i-1} = j_{i-1} - \sum_{p=i}^k C_p^{i-1} (-1)^{p-i+1} \lambda^{p-i+1} j'_p$ . в)  $\rightarrow$  а). Пусть  $\forall \lambda \in C \exists v \in V$ ,  $j \in I: (a - \lambda e)v + j = e$ . Обозначим через  $P$  множество чисел  $\lambda$ , для которых элемент  $v$  можно выбрать обратимым, а через  $Q$  — множество остальных комплексных чисел. Используя обратимость элемента  $e + \Delta v$ , где  $\|\Delta v\| < 1$ , нетрудно показать, что множество  $P$  открыто.

Покажем, что множество  $Q$  также открыто. Пусть  $\lambda \in Q$ . Это означает, что среди всех  $v$  таких, что  $(a - \lambda e)v + j = e$  ( $j \in I$ ) нет ни одного обратимого. Пусть  $\lambda + \Delta\lambda \in P$ , т. е.  $(a - (\lambda + \Delta\lambda)e)v_1 + j_1 = e$ , где  $v_1$  — обратим,  $j_1 \in I$ . Тогда  $(a - \lambda e)(e - \Delta\lambda v)v_1 - \Delta\lambda j v_1 + j_1 = (a - \lambda e)v_1 + j_1 - [(a - \lambda e)v + j]\Delta\lambda v_1 = (a - (\lambda + \Delta\lambda)e)v_1 + j_1 = e$ . Таким образом, если  $|\Delta\lambda| < \|v\|^{-1}$ , то  $\lambda \in P$ , что невозможно. Поэтому  $|\Delta\lambda| > \|v\|^{-1}$ , и множество  $Q$  — открыто. Так как  $P \cup Q = C$  и  $P \cap Q = \emptyset$ , то из связности комплексной плоскости либо  $P = \emptyset$ , либо  $Q = \emptyset$ . Но  $P \neq \emptyset$ , так как если  $\lambda \in \sigma(a)$ , то  $(a - \lambda e)(a - \lambda e)^{-1} + 0 = e$ , т. е.  $\lambda \in P$ . Отсюда  $Q = \emptyset$ . Следовательно, для  $\forall \lambda \in C \exists v \in V$ ,  $j \in I: (a - \lambda e)v + j = e$ , причем  $v$  — обратим. Но тогда  $(a + jv^{-1}) - \lambda e = v^{-1}$ , т. е.  $\lambda \in \bar{\sigma}(a + jv^{-1})$ . Откуда  $\bigcap_{j \in I} \sigma(a + j) = \emptyset$ .

2. Доказанная теорема дает необходимые условия экспоненциальной стабилизируемости системы (1). В самом деле, для экспоненциальной стабилизируемости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы  $\forall \lambda > 0 \exists P = P(\lambda): \text{Re} \sigma(A + BP) < \lambda$ . Пространство  $[X, X]$  будем рассматривать как банахову алгебру операторов. Тогда  $A \in [X, X]$ , а элементы вида  $BP$ ,  $P \in [X, U]$  образуют правый идеал  $\{B, P\} \subset [X, X]$ . Для экспоненциальной стабилизируемости системы (1) необходимо, в частности, чтобы  $\bigcap_{P \in [X, U]} \sigma(A + BP) = \emptyset$ . А это по теореме 1 равносильно утверж-

дению:  $\exists k, P_i \in [X, U]$ ,  $i = \overline{0, k}: \sum_{i=0}^k A^i B P_i = E$  (5), где  $E$  — единич-

ный оператор. Условие (5) равносильно следующим двум утверждениям:  $\exists k: \text{Lin}(BU, ABU, \dots, A^k BU) = X$  (5'),  $\exists k: \text{Ker} G_k \rightarrow$  дополняемое подпространство в  $U^{k+1}$  (5''), где  $G_k \in [U^{k+1}, X]$ ,

$$G_k(u_0, u_1, \dots, u_k) = \sum_{i=0}^k A^i B u_i.$$

Таким образом, для экспоненциальной стабилизируемости системы (1) необходимо, чтобы одновременно выполнялись условия (5'), (5'').

Для стабилизируемости системы (1) необходимо, чтобы  $\exists P \in [X, U]: \text{Re} \sigma(A + BP) \leq 0$ . Тогда, если  $\text{Re} \sigma(A) > 0$ , то для стабилизируемости системы (1) необходимо, в частности, чтобы  $\bigcap_{P \in [X, U]} \sigma(A + BP) = \emptyset$ . Таким образом, если  $\text{Re} \sigma(A) > 0$ , то условия (5'), (5'') являются необходимыми и для стабилизируемости системы (1).

3. Система (1) называется управляемой (точно), если  $\forall x_1, x_2 \in X \exists T > 0, u(t) \in L_1([0, T], U)$ , что решение системы (1) с управлением  $u(t)$ , начинающееся в точке  $x_1$  при  $t = 0$ , оканчивается в точке  $x_2$  при  $t = T$ . Как показано в [8], для того чтобы система (1) была точно управляемой, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие (5').

Остановимся на вопросе о связи точной управляемости и стабилизируемости. В конечномерном случае известно [2, 3], что точная управляемость системы (1) равносильна ее экспоненциальной стабилизируемости. В работе [5] показано, что в случае, когда  $X$  и  $U$  — гильбертовы пространства и система (1) точно управляема, то она экспоненциально стабилизируема. В случае банаховых пространств  $X$  и  $U$ , как мы показали, кроме точной управляемости (условие (5')) для экспоненциальной стабилизируемости системы (1) необходимо выполнение условия (5''). Покажем, что условие (5'') существенно, и в общем случае из точной управляемости системы (1) не следует даже ее стабилизируемость. Воспользуемся леммой Банаха — Мазура.

**Лемма [4].** Пусть  $X$  — сепарабельное банахово пространство. Тогда существует подпространство  $L \subset l_1$ , такое что фактор-пространство  $(l_1/L)$  изоморфно  $X$ .

Отсюда следует, что для любого сепарабельного банахова пространства  $X$  существует сюръективный оператор  $F \in [l_1, X]$ .

**Пример.** Пусть  $X = l_2, U = l_1$ . Рассмотрим систему  $dx/dt = x + Fu$ , где  $F$  — сюръективный оператор,  $F \in [U, X]$ . Тогда  $\text{Lin}(FU) = X$  и система точно управляема. Так как  $\text{Re} \sigma(E) > 0$ , то из (5) для стабилизируемости необходимо  $\exists P \in [l_2, l_1]: FP = E$ . Однако, как показано в [4], любой оператор  $P \in [l_2, l_1]$  вполне непрерывен и, следовательно,  $FP \neq E$ . Таким образом, в общем случае из точной управляемости системы (1) не следует ее стабилизируемости (экспоненциальной стабилизируемости). Полученный результат согласуется с результатами работ [2, 3, 5], так как в

случаях, когда  $X$  и  $U$  — гильбертовы или конечномерные пространства, условие (5'') выполнено автоматически.

**Список литературы:** 1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970. — 534 с. 2. Ли Э. В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 574 с. 3. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980. — 375 с. 4. Lindenstauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, Lecture Notes in Math. — Berlin — Heidelberg — New York: Springer — Verlag, 1973. — 684. 5. Stenrod M. A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert space. — SIAM Journ. Contr., 1974, 12, № 3, p. 500 — 508. 6. Triggiani R. On the stabilizability in Banach space. — Journ. Math. Anal. and Appl., 1975, 52, № 9, p. 383 — 403. 7. Рабах Р. О точной управляемости и стабилизации в бесконечномерных пространствах. — Вестн. Харьк. ун-та. — Прикл. математика и механика, 1978, вып. 43, с. 43 — 50. 8. Коробов В. И., Рабах Р. Точная управляемость в банаховых пространствах. — Диф. уравнения, 1979, 15, № 12, с. 2142 — 2154.

Поступила в редколлегию 04. 01. 81

УДК 518:517

А. В. ФОМЕНКО

# ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЫ

Пусть  $\Omega$  — открытая область евклидова пространства  $R^n$  с кусочно-гладкой границей  $S$ ,  $t$  — время, удовлетворяющее условию  $t \in [t_0, T]$ . Пусть далее  $V \subset L^2(\Omega) \subset V^1$  — оснащенное гильбертово пространство [1];  $V$  — сепарабельное пространство такое, что  $H_0^m(\Omega) \leq V \leq H^m(\Omega)$ , где  $H_0^m(\Omega)$ ,  $H^m(\Omega)$  — пространства Соболева [2].

Обозначим через  $A \in \mathcal{L}(V; V')$  эллиптический самосопряженный оператор порядка  $2m$  и будем предполагать, что управляемый процесс упругих колебаний описывается слабо нелинейным уравнением гиперболического типа  $u_{tt} + Au + \beta^1(u) + \beta^2(u_t) = p$ , в  $Q = (t_0, T] \times \Omega$  ( $u \equiv u(t, x)$ ,  $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$ ) (10), с начальными условиями  $u(t_0, x) = u_0(x) \in V$ ,  $u_t(t_0, x) = u_1(x) \in L^2(\Omega)$  (2). Здесь  $\beta_1(u)$ ,  $\beta^2(u_t)$  — нелинейные дифференцируемые функции своих аргументов;  $p = p(t, x)$  — управление. При  $V = H_0^m(\Omega)$  управляемый процесс описывается задачей Дирихле, при  $V = H^m(\Omega)$  — задачей Неймана и при строгом включении  $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$  — смешанной задачей.

Введем обозначения:  $|\cdot|$  — норма в  $L^2(\Omega)$ ;  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $L^2(\Omega)$  и скалярное произведение элементов из двойственных пространств  $V$  и  $V'$ ;  $\|\cdot\|$  — норма в  $V$ .

Будем полагать, что билинейная непрерывная на  $V \times V$  форма  $a(u, v) = (Au, v)$  удовлетворяет неравенству  $a(u, u) \geq \lambda \|u\|^2$ ,  $\lambda >$