

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра фізики низьких температур

«Допущено до захисту»
в.о. зав. кафедри фізики
низьких температур
проф. Шкловський В.О. _____
«13» червня 2025 р.

Оцінка «_____»
Голова ЕК,
д-р фіз.-мат. наук, с.н.с.
Сорокін О. В. _____
«19» червня 2025 р.

ХОМЯКОВ Данііл Дмитрович

**Моделювання процесів руйнування зразків
за допомогою середовища ANSYS**

Дипломна робота на здобуття
освітнього ступеня «Бакалавр» за
спеціальністю 104 – «Фізика та
астрономія»
освітня програма – «Фізика»

Науковий керівник:
канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри
фізики низьких температур
ЛЕБЕДЄВ Сергій

Рецензент:
канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри
фізики твердого тіла
ШУРІНОВ Роман

Харків 2025

АНОТАЦІЯ

Хомяков Д.Д. “Моделювання процесів руйнування зразків за допомогою середовища ANSYS”

Дипломна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» з галузі знань 10 природничі науки за спеціальності 104 - «фізика та астрономія» Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків 2025. -36 с, -Іл. 17.

У роботі досліджуються процеси руйнування матеріалів із застосуванням чисельного моделювання у середовищі ANSYS. Проведено аналіз сучасних підходів до моделювання механічної поведінки зразків під навантаженням, зокрема при одновісному розтягуванні. Розглянуто можливості програмного комплексу ANSYS для вирішення задач механіки деформованого твердого тіла та прогнозування руйнування. Описано етапи створення скінченого-елементних моделей зразків, застосування відповідних матеріальних моделей та критеріїв руйнування. Визначено переваги та обмеження чисельного моделювання у порівнянні з експериментальними методами.

Ключові слова: механічні випробування, одновісній розтяг, ANSYS.

ANNOTATION

Khomyakov D.D. “Modeling of sample fracture processes using the ANSYS environment”

Graduation assignment to receive educational qualification level, «Bachelor» in the field of knowledge 10 natural sciences direction of training 104-«physics and astronomy» - V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv 2025.-36p.-Il. 17.

The work investigates the processes of material fracture using numerical modeling in the ANSYS environment. An analysis of modern approaches to modeling the mechanical behavior of samples under load, in particular during

uniaxial tension, is carried out. The capabilities of the ANSYS software complex for solving problems in the mechanics of deformation solids and predicting fracture are considered. The stages of creating finite-element models of samples, the use of appropriate material models and fracture criteria are described. The advantages and limitations of numerical modeling in comparison with experimental methods are determined.

Keywords: mechanical tests, uniaxial tension, ANSYS.

ЗМІСТ

ВСТУП	4
ГЛАВА 1	5
1. Механічні випробування	5
1.1 Одновісний розтяг	6
1.2 Тритучковий згин	9
1.3 Small punch test (малий тест із продавлюванням)	11
1.4 Інженерна крива напруження	13
1.5 Істинна крива напруження	15
ГЛАВА 2	18
2.1 Середовище ANSYS	18
2.2 Метод скінченних елементів (МСЕ) та його реалізація в середовищі ANSYS	22
ГЛАВА 3	28
3.1 Моделювання поведінки циліндричних та плоских зразків	28
3.2 Матеріал та методи дослідження	28
3.3 Модель Гурсона-Твергаарда-Нідлмана (GTN)	31
3.4 Результати	32
ВИСНОВКИ	35
Список використаних джерел	36

ВСТУП

Проблема міцності та надійності матеріалів є однією з ключових у сучасному інженерії та матеріалознавстві. Розуміння механізмів деформації та руйнування під впливом різноманітних навантажень є критично важливим для проектування безпечних та довговічних конструкцій. Традиційні експериментальні методи дозволяють отримати важливі дані про механічні властивості матеріалів та процеси їх руйнування.

В останні десятиліття значного розвитку набули методи чисельного моделювання, які дозволяють імітувати фізичні процеси, що відбуваються в матеріалах під навантаженням. Одним із провідних інструментів для такого моделювання є програмний комплекс ANSYS, який надає широкі можливості для аналізу напружено-деформованого стану та прогнозування руйнування матеріалів різної природи. Використання ANSYS дозволяє проводити віртуальні випробування, досліджувати вплив геометрії, властивості матеріалів та умови навантаження на поведінку зразків, що є потужним доповненням до експериментальних досліджень.

Метою даної роботи є дослідження можливостей чисельного моделювання процесів руйнування зразків із використанням програмного середовища ANSYS.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити наступні завдання:

1. Проаналізувати теоретичні основи механізмів деформації та руйнування матеріалів.
2. Ознайомитись з основними принципами та можливостями програмного комплексу ANSYS у сфері механіки твердого тіла.
3. Дослідити підходи до моделювання процесів руйнування зразків у ANSYS.
4. Визначити переваги та обмеження застосування ANSYS для прогнозування руйнування.

ГЛАВА 1

1. Механічні випробування

Це сукупність процесів та впливів на досліджуваний матеріал з метою отримання певних механічних параметрів або дослідження поведінки чи властивостей матеріалу за певних умов [1]. Ці випробування мають стандартизацію із детальним описом умов та методики отримання даних під час попередньої підготовки зразка, його випробування та отримання інформації із використаних зразків. А також методику обробки та аналізу отриманої інформації. Випробування поділяються за швидкістю:

- статичні або квазістатичні – коли зразки деформуються із малою за величиною швидкістю і вона стала чи повільно зростає;
- динамічні – коли навантаження змінюється із великою швидкістю за малий проміжок часу;
- циклічні – навантаження та напрямки навантаження змінюються за величиною та напрямком;
- технологічні – відбувається аналіз поведінки матеріалів на спеціальних установах, котрі імітують роботу у справжніх умовах.

Також випробування поділяються за методом дослідження:

- випробування на твердість – методика випробування (за Вікерсом, за Бріннелем чи за Роквеллом) котра дає змогу отримати інформацію про опір матеріалу на проникнення у нього більш твердого індентора (наконечник приладу, виготовлений із алмазу, гартованої сталі або твердого сплаву, вдавлюванням якого виміряють твердість матеріалів) [11] із більш твердого матеріалу [3,4,5];
- випробування на розтягування – один із найпоширеніших та найпростіших видів механічних досліджень. Дає змогу отримати низку параметрів, таких як: границя пропорційності, границя плинності, границя міцності, модуль Юнга (фізична величина, що характеризує пружні властивості ізотропних речовин, один із модулів пружності та

позначається літерою E (вимірюється в ньютонах на метр в квадраті H/m^2) [12] та інші.

- випробування на стискання – використовується для дослідження крихких матеріалів, аналогічний до випробування на розтяг [6];
- скручування – полягає у скручуванні зразка у площині, перпендикулярній до осі закріплення зразка із певною швидкістю та визначеними зовнішніми чинниками [7];
- згин – методика полягає у пластичному деформуванні зразка певного поперечного перерізу, без зміни напрямку прикладання навантаження на сам зразок до моменту згину на певний кут або руйнування зразка [8];
- зсув або зріз – повздовжня деформація зразка, котра полягає у прикладанні навантаження дотична до поверхні, при чому одна умовна площина, перпендикулярна до осі затискання зразка, зміщується паралельно у тій самій площині до іншої умовної площини [9];
- повзучість – методика закладається у ідеї, що матеріал із часом поступово деформується під впливом постійного фіксованого навантаження [10];

Існують одновісні, триточковий та small punch test (випробування на малий удар) варіанти випробування [1];

1.1 Одновісний розтяг

Це вид деформування твердого тіла, при якому його розміри вздовж однієї осі збільшуються під дією сил, рівнодійна яких є перпендикулярною до поперечного перерізу тіла і проходить через центр його ваги [13]. Під час випробування зразка отримують так звану діаграму деформування, яка фіксує залежність між силою P , що діє на зразок і викликану нею деформацією Δl – абсолютне видовження. Діаграма деформування (деформаційна крива) – це графік, відображає залежність між механічною напругою та деформацією матеріалу в процесі його навантаження [1]. Вона є

одним з основних інструментів аналізу характеристик міцності конструкційних та інженерних матеріалів. За допомогою цієї кривої можна визначити, як поводить ся матеріал на різних стадіях навантаження: від початкової пружної поведінки до руйнування. Зазвичай деформаційна крива будується за результатами випробування зразків розтягування чи стиск. По осі абсцис (горизонтальній) відкладаються значення відносної деформації (ϵ), а по осі ординат (вертикальній) – напруга (σ), розраховані як відношення прикладеної сили до площі поперечного перерізу зразка (рис. 1).

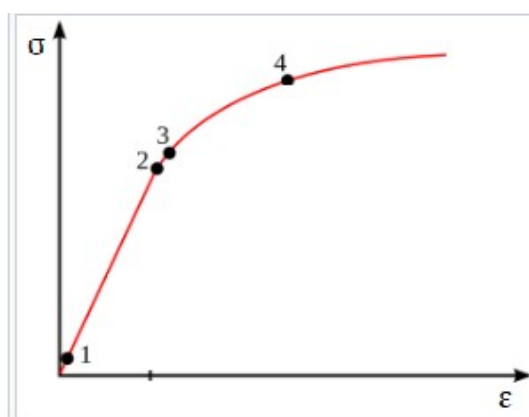


Рис. 1. Деформаційна крива для механічного випробування на одновісний розтяг.

Типова установка для деформації при одновісному розтягненні включає два штоки, які можуть рухатись один відносно одного (рис. 2).

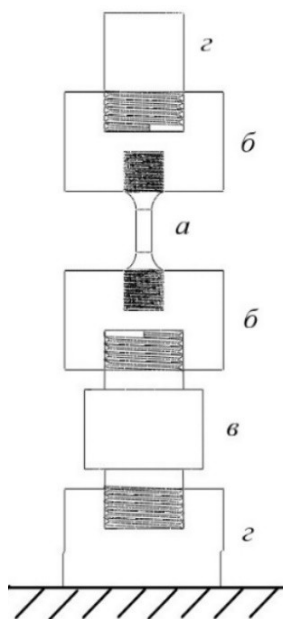


Рис. 2. Схематичне зображення типової деформаційної машини: а – встановлений циліндричний зразок, б – тримач для зразка з різьбою, в – тензометр, г – верхній (рухомий) та нижній (закріплений) штоки.

Зазвичай, один шток нерухомо закріплений, а інший рухається із заданою швидкістю або створює постійне навантаження. Величина навантаження вимірюється за допомогою тензометра, встановленого між штоками та основою машини. Зразки закріплюються в спеціальних тримачах. Стандартизовані зразки для таких випробувань можуть бути циліндричної, або кістко подібної (рис 3.) [1,2,14].

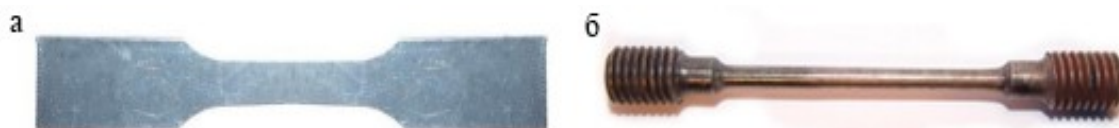


Рис. 3. Фото зразків, а) кістко подібний, б) циліндричний зразок

Процес випробування розпочинається із встановлення зразка у випробувальній машині і прикладання до нього зростаючого розтягувального зусилля аж до руйнування зразка [15]. Під час випробування визначається абсолютний приріст деформації на розрахунковій довжині відповідно до

величини прикладеного зусилля. За певним результатом випробування є машинна діаграма деформування (діаграма розтягнення), яка записується за допомогою пристрою для побудови діаграм в координатах «розтягувальна сила P – абсолютне видовження Δl ».

Вимірне видовження Δl використовується для обчислення відносного видовження ε за таким рівнянням, (l_0 – довжина тіла до деформації):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Вимірне зусилля P використовується для обчислення напруження σ , (A_0 – початкове значення деформації у зразку до початку розтягування):

$$\sigma = \frac{P}{A_0}$$

Побудова діаграми розтягування у координатах « $\sigma - \varepsilon$ » - умовної діаграми розтягування, тому що напруження і деформації обчислюються за початковими розмірами зразка. На умовною діаграмою визначаються такі механічні характеристики матеріалу [15].

- границя пропорційності – найбільше умовне напруження, за якого з обумовленим відхиленням зберігається лінійна залежність між напруженням і деформаціями у зразку;
- границя плинності – найменше умовне напруження, за якого зразок деформується без помітного збільшення навантаження;
- границя міцності – умовне напруження, що відповідає найбільшому навантаженню, досягнутому до поділу зразка на частини;

Також із діаграми « $\sigma - \varepsilon$ » очевидно що модуль пружності при розтягу (модуль Юнга) дорівнює тангенсу кута нахилу прямолінійної ділянки діаграми до осі абсцис. $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \operatorname{tg} \alpha$

1.2 Тритучковий згин

Це тип випробування матеріалів, який використовується для визначення твердості та пружності матеріалів, таких як балки або стержні,

при застосуванні згинального навантаження. При цьому матеріал піддається навантаженню в трьох точках, що створює певну геометрію навантаження [16]. При триточковому згині матеріал поміщається на дві опори, між якими розташовується навантаження. При цьому навантажувач навантажує матеріал у центрі між опорами. Випробування триточковим згином дозволяє визначити такі характеристики матеріалу, як:

- межа текучості – для матеріалів, які не розраховані на великі деформації;
- максимальна деформація (прогин) – для матеріалів, які не розраховані на великі деформації, що дозволяє оцінити їх пружність;
- модуль пружності – для матеріалів, які розраховані на великі деформації;

Осі обох кінців зразка залишаються в площині, перпендикулярній до осі згину. У разі згинання на кут 180° обидві бокові поверхні можуть залежно від вимог стандарту на матеріал, прилягати одна до одної або розташуватись паралельно на заданій відстані. Для контролю цієї відстані застосовують відповідну вставку (рис. 4).

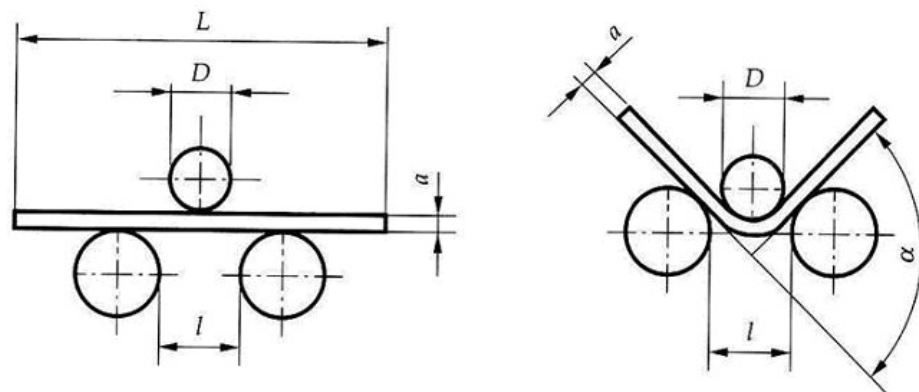


Рис. 4. Пристрій для згинання з двома опорами і оправкою (триточкова схема)

Довжина опор і ширина оправки повинні перевищувати ширину або діаметр зразка. Діаметр оправки визначається стандартом на матеріалі. У разі

відсутності таких визначень діаметр заокруглення (товщину) оправки приймають рівною товщині (діаметру) зразка, а радіус заокруглення опор не меншими за товщину (діаметр) зразка. Якщо інше не вимагається, відстань між опорами l повинна бути рівною [16]:

$$l = (D + 3a) \pm \frac{a}{2},$$

де a – товщина або діаметр зразка (або діаметр вписаного кола для зразків багатокутного поперечного перерізу), D – діаметр оправки.

1.3 Small punch test (малий тест із продавлюванням)

Це випробування small punch (SP), також відоме як випробування на згин диска, це методика, що використовує мініатюрні диски для оцінки механічних властивостей металевих матеріалів. Зазвичай використовуються диски діаметром 8 мм та товщиною 0,5 мм (рис. 5).

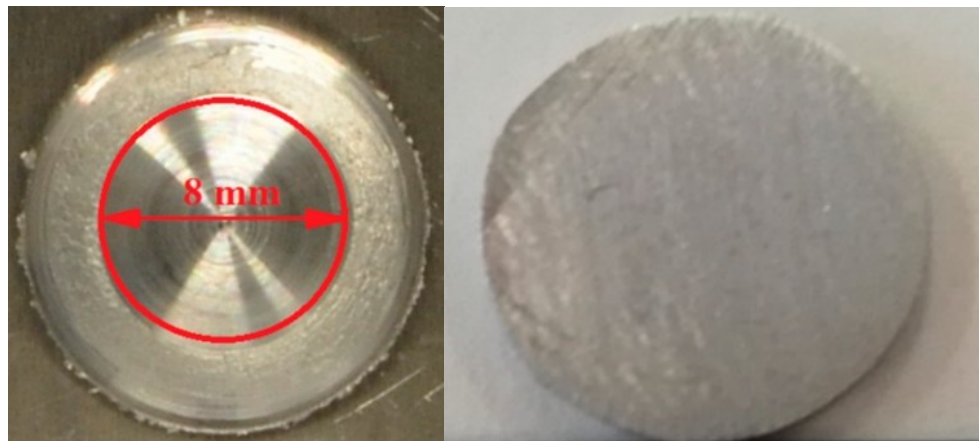


Рис. 5. Дискподібний зразок для small punch tests.

Ця методика базується на використанні зразків зменшеного або мініатюрного розміру. Вона дозволяє характеризувати механічні властивості компонентів або конструкцій, з мінімальною кількістю матеріалу, вилученого з компонента для деструктивного випробування. Значну кількість

дискових зразків можна виготовити з залишків обробки або вже випробуваних звичайних зразків. В результаті тесту SP на диску утворюється випуклість, а не зріз (Рис. 6) [17].



Рис. 6. Схематичне зображення методу. 1 – напівсферичні головка ударника, 2 – верхня матриця, 3 – мініатюрний диск, 4 – приймальний отвір, 5 – нижня матриця

На цьому записі можна виділити п'ять різних областей: 1. Пружна область, 2. Відхилення від лінійності (пружно-пластичний перехід), 3. Локальний згин, що режим мембранного напруження, 4. Пластична нестабільність, 5. Область остаточного руйнування (Рис. 7).

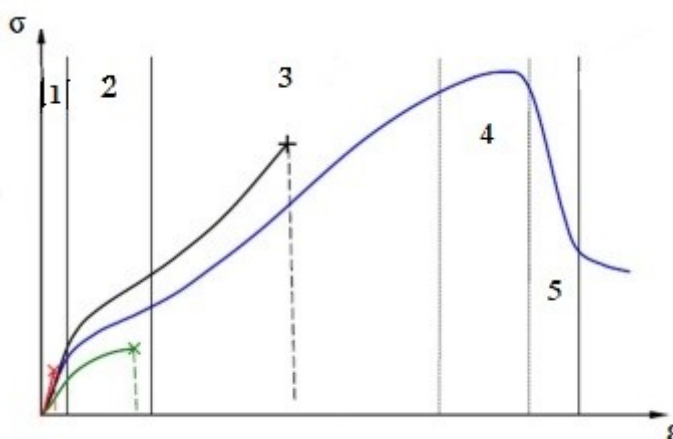


Рис. 7. 5 зон деформації.

За допомогою випробування SP (small punch) можна оцінити механічні властивості металевих матеріалів, таких як властивості розтягу, в'язкості

руйнування, температуру переходу від пластичного до крихкого стану та властивості повзучості та властивості втоми [17].

Для проведення випробування SP (small punch) потрібні зразки (у вигляді мініатюрних дисків), підготовка поверхні зразка (якість поверхні зразків впливає на результати), оснащення для випробування (складається з верхньої та нижньої матриць, стержня та кульки, які разом утворюють процес продавлювання (рис. 8), випробувальна машина, датчик сили (потрібен для вимірювання навантаження), система збору даних (для запису сили та даних про зміщення/прогин) [17].

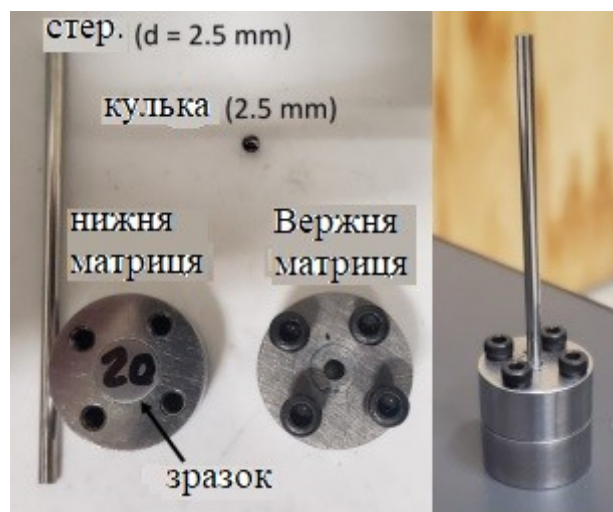


Рис. 8. Оснащення для випробування. 1 – стержень, 2 – кулька, 3 – нижня матриця, 4 – верхня матриця, 5 – зразок.

Результати SP сильно залежать від різних тестових параметрів, включаючи розмір та форму зразка, товщину зразка, швидкість тестування, діаметр кульки та сила затискання.

1.4 Інженерна крива напруження

Також відома як діаграма напруження або інженерна діаграма напруження-деформація, є основним інструментом для опису механічної поведінки матеріалів під час випробування, зокрема при одновісному розтягуванні циліндричного зразка [18].

Інженерне напруження (σ) розраховується як відношення прикладеної сили (F) до початкової площі поперечного перерізу зразка (S_0): $\sigma = \frac{F}{S_0}$. Ключовим моментом є те, що початкова площа (S_0) використовується для розрахунку напруження протягом усього випробування, навіть якщо фактична площа змінюється. Інженерна деформація (ϵ) визначається як відношення абсолютного подовження (ΔL) до початкової довжини робочої частини зразка (l_0): $\epsilon = \frac{\Delta L}{l_0}$. Початкова довжина також є константою для розрахунку.

Типова інженерна крива для високоміцного, помірного пластичного матеріалу, отримана під час одновісного розтягування циліндричного зразка (рис. 9).

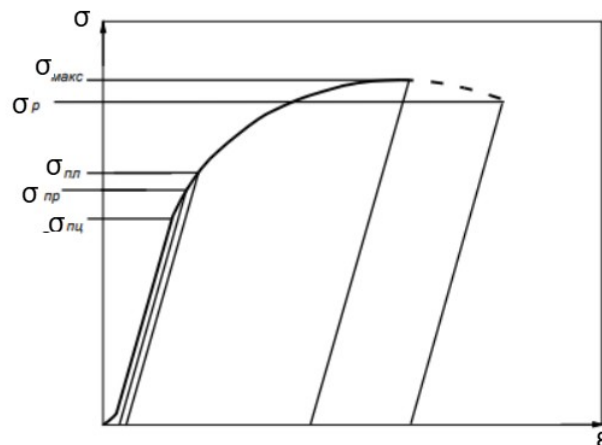


Рис. 9. Графік інженерного напруження

На цій кривій виділяють декілька характерних ділянок і точок, які відповідають різним етапам деформації матеріалу [18]:

- $\sigma_{пц}$ (границя пропорційності): точка, до якої напруження прямо пропорційне деформації. Ця ділянка лінійної пружної деформації;
- $\sigma_{пр}$ (границя пружності): Максимальне напруження, при якому матеріал деформується тільки пружно. При знятті навантаження деформацій повністю зникає;

- $\sigma_{пл}$ (площадка текучості) або умовна границя текучості: Напруження, при якому відбувається помітна пластична деформація без значного збільшення навантаження. Деякі матеріали мають чітко виражену площадку текучості, тоді як інші можуть мати плану криву переходу до пластичної деформації і для них визначають умовну границю текучості;
- $\sigma_{макс}$ (границя міцності): Найбільше напруження, яке зразок може витримати перед початком локалізації деформації. Від границі текучості до границі міцності відбувається рівномірне пластичне видовження по всій довжині робочої частини зразка. Зменшення поперечного перерізу на цьому етапі невелике порівняно з початковим;
- σ_p (навантаження розриву): Навантаження, при якому відбувається руйнування зразка.

Після досягнення границі міцності ($\sigma_{макс}$) інженерна крива навантаження часто показує зменшення навантаження аж до моменту руйнування (σ_p) [18]. Оскільки розрахунок інженерного напруження базується на початковій площі (S_0), яка є постійною, розраховане інженерне напруження перестає відповідати реальному напруженню у найвужчому місці зразка. Воно здається меншим, оскільки фактична площа, на яку діє сила, стала набагато меншою за S_0 .

1.5 Істинна крива напруження

Істинна крива напруження, або істинна діаграма напруження-деформація, є більш фундаментальною характеристикою матеріалу, оскільки вона враховує фактичні зміни розмірів зразка під час деформації. Вона будується в координатах істинне напруження та істинна деформація [18].

Істинне напруження розраховується як відношення прикладеної сили (F) до миттєвої (актуальної) площі поперечного перерізу зразка (S_{true}) у даний

момент часу: $\sigma = \frac{F}{S_{true}}$. Оскільки при пластичній деформації площа

поперечного перерізу зразка під навантаженням зменшується, істинне напруження є більшим за інженерне напруження при тій самій силі (навантаження), за винятком початкової стадії випробування. Істинна крива напруження-деформації дозволяє точніше описати механічну поведінку матеріалу в умовах значної пластичної деформації та визначається:

$$\sigma_{true} = \sigma_{eng} (1 + \varepsilon_{eng}).$$

Істинна деформація враховує зміну розмірів зразка під час навантаження та визначається як натуральний логарифм відношення поточної довжини до початкової та обчислюється: $\varepsilon = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$, де ε - істинна деформація, \ln – натуральний логарифм, l – поточна довжина зразка після деформації, l_0 – початкова довжина. Відношення між інженерною та істинною деформацією: $\varepsilon_{true} = \ln(1 + \varepsilon_{eng})$.

Типова істинна крива напруження показана на рис. 10 в порівнянні з інженерною кривою. Характерною особливістю істинної кривої є те, що істинне напруження зазвичай продовжує зростати протягом усього процесу пластичної деформації аж до моменту руйнування. Це пояснюється тим, що, хоча напруження може зменшуватися після утворення шийки (на інженерній кривій), фактична площа поперечного перерізу в шийці зменшується ще швидше, ніж падає навантаження, що призводить до зростання істинного напруження (сила, розділена на меншу площу).

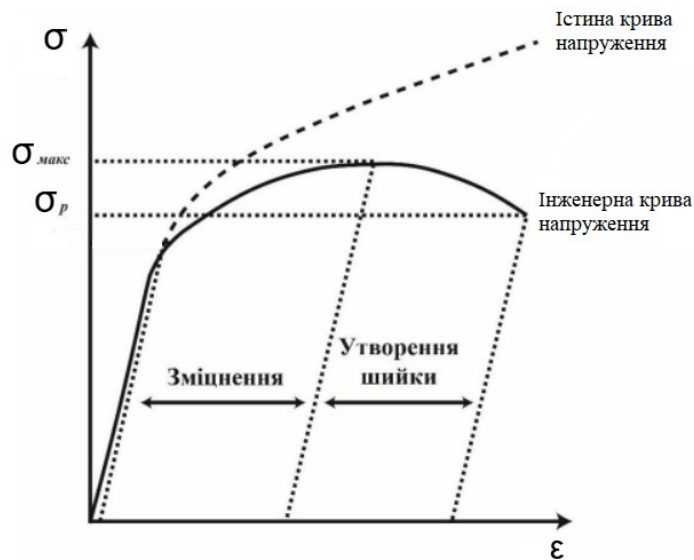


Рис. 10. Різниця між інженерною та істинною кривою

Істина крива напруження більш точно описує опір матеріалу пластичній течії і є важливою для розуміння фізичних процесів деформації та для розробки моделей пластичності. Вона часто використовується у числових методах моделювання поведінки матеріалів під складним напруженням, оскільки не залежить від геометрії зразка в тій мірі, як інженерна крива (до моменту початку локалізації деформації та зміни схеми напруження стану). Ключова відмінність між інженерною та істинною кривими напруження полягає у способі розрахунку напруження та деформації:

- інженерна крива використовує початкові розміри зразка (початкову площу поперечного перерізу S_0 та початкову довжину l_0) як константи протягом усього випробування;
- істина крива використовує миттєві (актуальні) розміри зразка (фактичну площу поперечного перерізу S та миттєву довжину l), які змінюються під час деформації.

На початковій стадії деформації (в області пружної та рівномірної пластичної деформації, приблизно до границі міцності $\sigma_{\text{макс}}$). Зміна площі поперечного прорізу є відносно невеликою. Тому інженерна та істинна криві практично збігаються. Після досягнення границі міцності ($\sigma_{\text{макс}}$), фактична площа поперечного перерізу в зоні локалізації деформації починає швидко

зменшуватись. В цей момент інженерна крива показує зменшення напруження (оскільки розрахунок ведеться на постійну початкову площу), тоді як істинна крива продовжує зростати.

Таким чином, інженерна крива є більш простою для отримання та використання для інженерних розрахунків на основі вихідної геометрії, тоді як істинна крива дає точніше уявлення про властивості матеріалу щодо опору пластичній деформації, особливо після початку локалізації деформації. Істинна крива відображає справжній опір матеріалу течії, не спотворений ефектом зменшення площі зразка при розтягуванні.

ГЛАВА 2

2.1 Середовище ANSYS

ANSYS – це потужне програмне забезпечення для інженерного моделювання, яке використовується для аналізу механічних, теплових, електромагнітних, гідродинамічних процесів і багатьох інших задач у різних галузях техніки. За допомогою ANSYS Workbench практично весь комплекс програмних продуктів ANSYS може бути об'єднаний за допомогою CAD-систем (computer aided design), такими як SolidWorks, Unigraphics та інші, в єдине розрахунково-проектване середовище. Система ANSYS реалізує метод скінченних елементів (МСЕ) та інші числові методи для прогнозування поведінки конструкцій, деталей і матеріалів під дією різноманітних навантажень і умов. Цей метод включає в себе універсальність алгоритмів рішення різних краєвих задач з ефективністю комп'ютерної реалізації розрахунків. Найбільш загальним випадком представлення CAD-моделей (computer aided design) є твердотільні, які є тривимірними або двовимірними геометричними об'єктами. При цьому геометричні моделі можна транслювати в CAE (computer aided engineering) програми безпосередньо з інтерфейсу CAD (computer aided design), так і через інтерфейс CAE-програм (computer aided engineering). ANSYS Workbench передбачає роботу препроцесорного модуля Design Modeler, що реалізує з'єднання в одній деталі кількох різноманітних геометричних об'єктів (твердо тільних та оболонкових). Таким чином можна здійснювати перехід до дослідження складової моделі.

Призначений для користувача інтерфейс ANSYS Workbench (рис. 11) містить панелі і вікна: на панелі “Toolbox” представлені всі можливі засоби для проведення мультидисциплінарного аналізу (їх набір може відрізнятися залежно від типу ліцензії і переліку встановлених продуктів ANSYS).

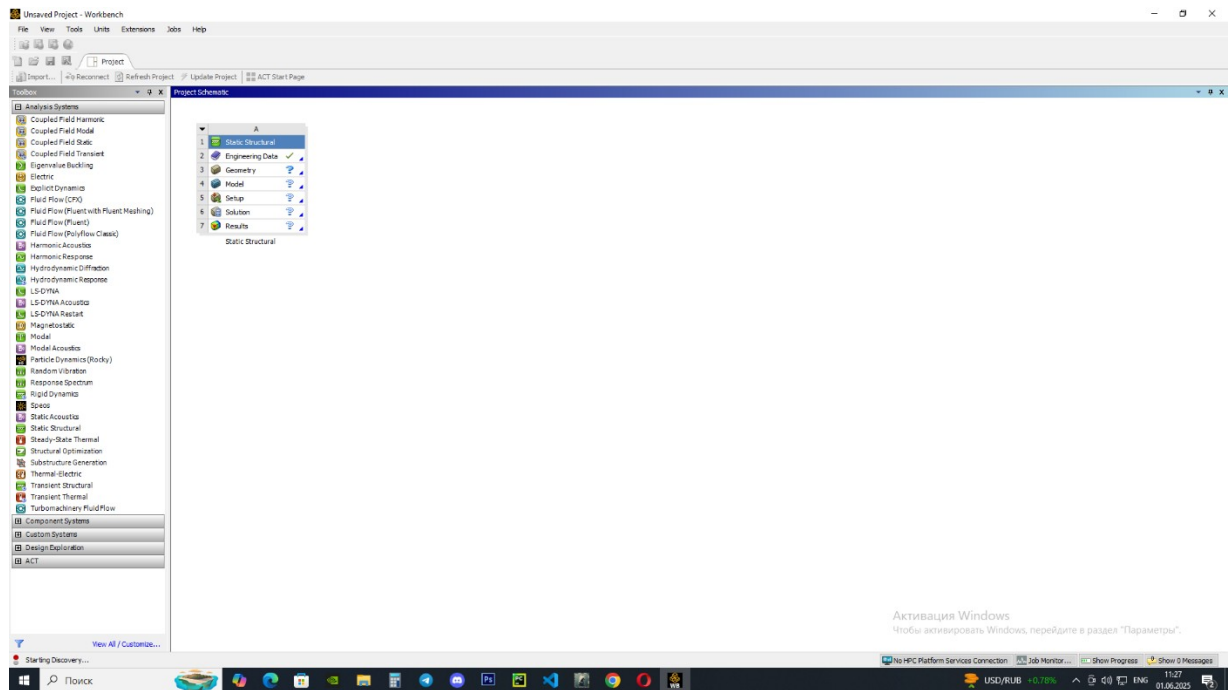


Рис. 11. Головна інтерфейс програми ANSYS Workbench.

Панель Toolbox завжди включає п'ять розділів (рис 12):

- 1) Розділ Analysis Systems містить готові шаблони для різних типів чисельного аналізу, наприклад для статичного аналізу конструкції, аналізу втрати стійкості і т.д. Як правило, кожний шаблон має ядро у вигляді певного вирішувача (Fluent, CFX, Static Structural і т.д.), а також включає допоміжні модулі для підготовки геометричної моделі (Design Modeler), кінцевої-елементної моделі (Meshing), завдання властивостей матеріалів (Engineering Data) і пост обробки результатів розрахунку (Results).
- 2) Розділ Component System включає основні і допоміжні модулі, що використовуються при рішенні задач. Так в робочий простір проекту може бути окремо доданий компонент для побудови геометричної моделі, пост обробки результатів і т.д.
- 3) В розділі Custom Systems містяться готові зв'язки шаблонів для вирішення міждисциплінарних задач. Наприклад, компонент Thermal-Stress додасть в проект два зв'язані шаблони – стаціонарний тепловий аналіз і заснований на його результатах статичний аналіз міцності. Для

вирішення зв'язаних задач можна також використовувати шаблони з розділу Analysis Systems, вручну встановлюючи між ними зв'язок.

- 4) Розділ Design Exploration дозволяє вирішувати задачі оптимізації для параметрів, які задаються в інтерфейсі Parameter Set (набір параметрів).
- 5) Розділ ACT дозволяє інтегрувати призначені для користувача зовнішні додатки і процеси в проект.



Рис. 12. Панель Toolbox

Основні модулі і додатки, які можуть використовуватися в ANSYS Workbench, такі як Static Structural призначений для вирішення задач механіки твердого тіла, що деформується, в статичній постановці. 1) static structural - тип розрахунків, 2) engineering Data - властивості матеріалів, 3)

geometry - геометрія, 4) model - розрахункова сітка, 5) setup - навантаження, 6) solution - вирішувач, 7) results-результати (рис. 13). При виконанні командних вставок на мові APDL (ANSYS Parametric Design Language) функціонал модуля може бути розширений для вирішення, наприклад, зв'язних задач (термопружність, електропружність і т.д).

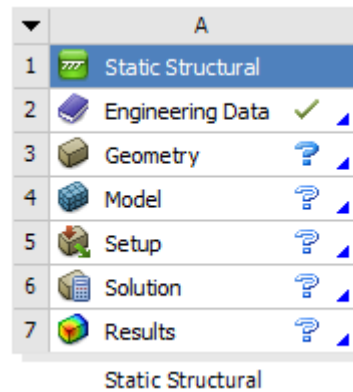


Рис. 13. Статичний аналіз конструкції Static Structural

Принцип роботи ANSYS полягає:

- дискретизації - коли геометрія об'єкта розбивається на кінцеві елементи (елементи сітки: трикутники, квадрати, тетраедри тощо);
- формування локальних рівнянь – записуються локальні рівняння рівноваги на основі фізичних законів (наприклад, закон Гука ($F = -kx$, де F – сила, k - коефіцієнт жорсткості, x – видовження) знак мінус вказує що сила напрямлена у протилежний бік до деформації. Рівняння теплопровідності, що визначає закон зміни температури при теплопередачі через теплопровідність.

$$c \frac{dT}{dt} = -\nabla \cdot q(r) + S(r),$$
 де c – питома теплоємність, q – тепловий потік, S – джерело тепла);
- збірка глобальної матриці - локальні рівняння всіх елементів об'єднанні у глобальну систему лінійних чи нелінійних рівнянь;
- застосування граничних умов - задаються фіксації, навантаження, температура тощо;

- розв'язання системи рівнянь - використовуються чисельні методи (наприклад, метод Гауса, ітераційні методи);
- післяпроцесінг - аналіз результатів (поля напруження, переміщення, температура, руйнування, пластичні деформації, тощо).

2.2 Метод скінченних елементів (МСЕ) та його реалізація в середовищі ANSYS

Моделювання механічної поведінки зразків у середовищі ANSYS базується на методі скінченних елементів (МСЕ). МСЕ – це чисельна техніка для знаходження наближених розв'язків інтегральних та диференціальних рівнянь у частинних похідних, що особлива зручно для задач зі складною геометрією або властивостям зразків, де аналітичні рішення отримати неможливо [20]. Застосовується МСЕ для розв'язання різноманітних інженерних та математично-фізичних задач.

Основні завдання МСЕ включають розуміння фізичної поведінки складного об'єкту (наприклад міцності), передбачення його характеристик та поведінки в експлуатації, розрахунок запасу міцності, виявлення слабких місць конструкції та визначення її оптимальної побудови.

Вирішення МСЕ поставленої задачі здійснюється програмою ANSYS в три етапи. На першому етапі створюється основа скінчено-елементної моделі досліджуваного об'єкта. Цей етап включає в себе інші процедури [20]:

- встановлюється фізичний тип завдання та здійснюються відповідні налаштування програми;
- вибирається тип скінченого елемента в залежності від розмірів об'єкту та інших його властивостей; можуть бути задані деякі характеристики елемента;
- вибирається матеріал об'єкта і вказуються всі його властивості; властивості можуть бути задані з клавіатури або імпортовані з бібліотеки матеріалів ANSYS; задання властивостей визначає модель матеріалу, що впливає на вибір визначальних рівнянь МСЕ;

- будується геометрична твердотільна модель об'єкта (3D – модель); у ANSYS Workbench використовується модуль Design Modeler; геометрична модель може бути експортована з будь-якого CAD – пакету;
- геометрична модель розбивається на скінченні елементи, при розбивці можуть бути задані різні параметри сітки.

Другий етап складається з накладення на модель необхідних фізичних умов і вирішення задачі – складається з трьох основних етапів:

- задаються граничні умови – сили, переміщення (зв'язки) та інші;
- вибирається тип аналізу (статичний, динамічний, та інші); можливий вибір методу розв'язання системи рівняння МСЕ і завдання параметрів обчислювальних процедур (кількість кроків навантаження, ітерацій, та інші);
- здійснюється вирішення системи рівнянь, отриманої методом МСЕ; в результаті цього формується файл результатів, який містить вектор знайдених ступенів свободи (вузлових переміщень, вузлових температур, та інші).

Третій етап складається з аналізу розрахунку. Пораховані МСЕ фізичні величини (переміщення, деформації, напруження, температури, та інші), зображуються у графічному вікні ANSYS у вигляді картинок, таблиць, графіків, анімацій. Всі ці результати можна записати у відповідні файли.

При виконанні всіх етапів, програма створює в пам'яті комп'ютера базу даних, що містить повну інформацію про модель.

Одні із небагатьох рівняння які використовуються у середовищі ANSYS це [22]:

- 1) Матриця тензора напруження (у тривимірному випадку), у механіці суцільного середовища тензор напруження описує внутрішні сили в матеріалі. У 3D-просторі його можна подати у вигляді симетричної

матриці 2-го рангу: $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$, де σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} – нормальні

напруження у напрямках, τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} – дотичні напруження, через симетрію тензора: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. У площинній задачі (2D,

наприклад, площинний стан деформації): $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$, Або в

розгорнутому вигляді (вектор напруження), який часто

використовується у методі скінченних елементів: $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$ (у площині

XY) [22].

- 2) Вектор напруження на довільній площадці, вектор напруження на деякій малій площадці з нормаллю \vec{n} визначає дію внутрішніх сил у даному напрямку, його ще називають вектором напруженості (вектором Коші). Основна формула Коші: $\vec{T}^{(n)} = \sigma * \vec{n}$, де $\vec{T}^{(n)}$ – вектор напруження (вектор внутрішніх сил) на площадці з нормаллю \vec{n} , σ – тензор напруження, $\vec{n} = [n_x, n_y, n_z]^T$ – одиничний вектор нормалі до площадки. Нормальні та дотичні напруження на довільній площадці, коли на внутрішню площадку в тілі з нормаллю \vec{n} діє вектор напруженості $\vec{T}^{(n)}$, його можна розкласти на дві складові: На нормальне напруження (σ_n), це складова вектора напруженості, перпендикулярна до площадки (у напрямку нормалі \vec{n}): $\sigma_n = \vec{T}^{(n)} * \vec{n}$. Дотичне напруження ($\vec{\tau}$), це частина вектора напруженості, що лежить у площині площадки, тобто перпендикулярна до \vec{n} : $\vec{\tau} = \vec{T}^{(n)} - \sigma_n \vec{n}$ [22].

- 3) Фізичні залежності: Закон Гука для ізотропного матеріалу. Закон Гука встановлює зв'язок між напруженнями та деформаціями для пружного деформування твердих тіл. Для ізотропного (однакові властивості в усіх напрямках), лінійно-пружного матеріалу цей зв'язок має просту форму. Тензорна форма закону Гука (3D): $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$, де σ_{ij} – тензор напруження, ϵ_{ij} – тензор деформації, δ_{ij} – символ Кронекера, $\epsilon_{kk} =$

$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ - слід деформацій (об'ємна деформація), λ, μ - параметри Ламе (це два основні коефіцієнти, що використовуються в теорії пружності для опису властивостей ізотропного лінійно-пружного матеріалу, λ – перше число Ламе (модуль об'ємного стиску), μ – друге число Ламе (модуль зсуву або модуль здвигу), залежить від матеріалу:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad [22].$$

- 4) Метод Рітца, апроксимація розв'язку, це варіаційний метод, який дозволяє знаходити наближені розв'язки задач механіки деформованого тіла (особливо задач про згин, коливання, напружено-деформований стан, тощо). Суть методу Рітца ґрунтується на принципі мінімум повної потенціальної енергії: $\Pi(u) = U(u) - W(u) \rightarrow \min$, де $\Pi(u)$ – повна потенціальна енергія системи, $U(u)$ - потенціальна енергія деформації, $W(u)$ - робота зовнішніх сил, u - шукане переміщення (або поле переміщення у 2D/3D). Апроксимація розв'язку (шукану функцію $u(x)$) апроксимуємо кінцевим рядом за відомими функціями: $u(x) = u_h(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$, де c_i – невідомі коефіцієнти, $\varphi_i(x)$ - задані базисні (формуотворюючі) функції які задовольняють граничні умови, $u_h(x)$ - апроксимований розв'язок [22].

- 5) Система рівнянь для скінченного елемента, він базується на дискретизації області на елементи, для кожного з яких формується локальна система рівнянь. Ці рівняння потім об'єднуються в глобальну систему. Загальний вигляд рівняння для одного скінченного елемента система рівнянь має вигляд: $K^{(\varepsilon)} \vec{u}^{(\varepsilon)} = \vec{f}^{(\varepsilon)}$, $K^{(\varepsilon)}$ – локальна матриця жорсткості елемента, $\vec{u}^{(\varepsilon)}$ – вектор переміщень вузлів елемента, $\vec{f}^{(\varepsilon)}$ – вектор зовнішніх сил (зосереджених або еквівалентно розподілених).

Побудова матриці жорсткості елемента: $K^{(\varepsilon)} = \int_{V_\varepsilon} B^T D B dV$, де B – матриця похідних базисних функцій (градієнт форми), D – матриця пружності (визначається законом Гука), V_ε - об'єм елемента. Глобальна система

- для всієї моделі після зборки всіх елементів: $K\vec{u}=\vec{f}$, де K – глобальна матриця жорсткості всієї системи (формується з усіх $K^{(e)}$), \vec{u} – глобальний вектор переміщень всіх вузлів, \vec{f} – глобальний вектор зовнішніх навантажень [22].
- 6) Зв'язок напружень з вузловими переміщеннями елемента, у методі скінченних елементів (як і в ANSYS), напруження в межах елемента визначаються через вузлові переміщення за допомогою спеціальних матриць. Загальний зв'язок: $\sigma = D\varepsilon = DB\vec{u}^{(e)}$, де σ – вектор напруження, D – матриця пружності (визначається матеріальними властивостями, наприклад, законом Гука), B – матриця геометрії 9градієнт базисних функцій), яка визначає деформації через вузлові переміщення, $\vec{u}^{(e)}$ – вектор вузлових переміщень елемента [22].
- 7) Рівняння стаціонарної теплопровідності (рівняння Пуассона), у задачах теплопровідності розподіл температури $T(\vec{x})$ у тілі визначається рівнянням теплопровідності. У стаціонарному випадку воно зводиться до рівняння Пуассона (загальний вид у 3D): $-\nabla*(k\nabla T)=Q$, де $T(\vec{x})$ – температура в точці простору, k – коефіцієнт теплопровідності (може бути сталим або тензорним), Q – густина внутрішніх джерел тепла, ∇ – оператор дивергенції, ∇T – градієнт температури (напрямок теплового потоку) [22].
- 8) Система рівнянь для розрахунку стійкості в МСЕ. При аналізі стійкості конструкції (наприклад, при розрахунку на втрату стійкості під дією стискуючих навантажень) використовують задачу на власні значення, система рівнянь для аналізу стійкості має вигляд: $(K-\lambda K_\sigma)\vec{u}=\vec{0}$, де K – матриця жорсткості конструкції (лінійна жорсткість), K_σ – матриця геометричної жорсткості (напружено-деформованого стану), λ – власне число (коефіцієнт навантаження), \vec{u} – власний вектор (модальна форма деформації/втрати стійкості). (K) визначає жорсткість без урахування осьових сил (початковий стан), (K_σ) враховує вплив перенапружень

(зазвичай стискаючих), розв'язок задачі на власні значення дає критичне навантаження при якому система втрачає стійкість [22].

ГЛАВА 3

3.1 Моделювання поведінки циліндричних та плоских зразків

Результати дослідження еквівалентності мініатюрних плоских та циліндричних зразків для визначення механічних властивостей сталі Eurofer97 [23].

Сталь Eurofer97 обрана як основний конструкційний матеріал для термоядерних реакторів. Для оцінки її механічних властивостей, у цьому дослідженні використовувалися мініатюрні плоскі та циліндричні зразки. Плоский міні-зразок забезпечує значно краще завантаження реакторів, що дає пряму економічну вигоду. Однак, оскільки геометрія впливає на локальну тривісність напружень під час утворення шийки, значення важливих властивостей, таких як відносне подовження та напруження при руйнуванні, залежить від конкретного поперечного перерізу. Відповідно, потрібно продемонструвати еквівалентність щодо пластичності, особливо в режимі деформації після утворення шийки, та міцності при руйнуванні, отриманих за допомогою плоских та циліндричних геометрій, як для вихідного стану, так і після опромінення.

3.2 Матеріал та методи дослідження

Досліджуваним матеріалом є сталь Eurofer97. Термічна обробка, застосована виробником, включала нормалізацію при 980 °C протягом 45 хвилин та відпуск при 740 °C з часом циклу 18 см/хв. Хімічний склад сталі Eurofer97 наведено у таблиці 1.

Таблиця 1. Хімічний склад Eurofer97 (мас. %).

C	Si	Ni	Cr	Mo	V	Ta	W	Co
0.09	0.019	0.01	8.6	0.002	0.2	0.12	1	0.03

Одновісне випробування на розтяг проводилися за стандартом ASTM E8/E8M. Використовувалась деформаційна машина та повітряна піч для нагріву до 600 °C. В дослідженні випробовувались два типи

мініатюризованих зразків для розтягу: плоскі та циліндричний. Розміри плоского зразка: робоча довжина 16 мм, ширина 4,2 мм, ширина у робочій зоні 1,6 мм, довжина у робочій зоні 5,2 мм, товщина 1 мм, радіус закруглення R1.3 мм (рис. 15). Розміри циліндричного зразка: робоча довжина 22 мм, діаметри робочої частини 2 мм, довжина робочої частини 10 мм, діаметр головки 3,5 мм, радіус закруглення R0,05 мм (Рис.14). Випробування проводились при кімнатній температурі (RT, згідно стандартних умов, кімнатна температура дорівнює 20 °C), 300 °C, 350 °C та 450 °C зі швидкістю деформації $2.78 * 10^{-4}/\text{с}$ для обох зразків [23].

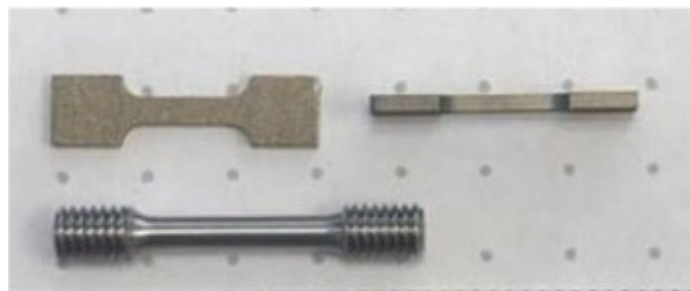


Рис. 14. Фотографія зразків для випробувань на розтяг

Для виконання чисельного моделювання методом скінченних елементів (МСЕ) використовувалось комерційне програмне забезпечення ANSYS Workbench. Механічна поведінка сталі Eurofer97 описувалась пружно-пластичною моделлю матеріалу, що враховує пошкодження, викликане порами. Пластичність моделювання за допомогою моделі пластичності Гурсона з ізотропним зміцненням. Для опису зародження, зростання та злиття пор використовувалася модель Гурсона-Твергаарда-Нідлмана (GTN). Ця модель інтегрована в ANSYS Workbench і є перевіреним інструментом для аналізу складних компонентів та умов навантаження. Поведінка матеріалу в ANSYS описується за допомогою модуля Юнга, коефіцієнта Пуассона, густини та закону зміцнення.

Початкова інженерна крива спочатку коригувалась для усунення зміщення, пов'язаного з початковим натягом, а також виключалась податливість машини, що давало відповідно інженерну криву (рис. 15(a))

Потім скоригована інженерна крива перетворювалась у справжню криву за допомогою рівнянь $\sigma_{true} = \sigma_{eng}(1 + \epsilon_{eng})$ та $\epsilon_{true} = \ln(1 + \epsilon_{eng})$ (рис. 15(б)). Ці рівняння дійсні до границі міцності (UTS-ultimate tensile stress), і відповідно, перша частина закону зміцнення (рис 15(в)) отримується до точки утворення шийки. Далі визначалась точка справжнього руйнування шляхом вимірювання площі поверхні руйнування, і за допомогою рівнянь $\sigma_{true\ fracture} = \frac{F_{fracture}}{A_{fracture}}$ та $\epsilon_{true\ fracture} = \ln\left(\frac{A_{original}}{A_{fracture}}\right)$ оцінювались, справжнє напруження руйнування та справжня деформація руйнування. Потім закон зміцнення припускався лінійною функцією від UTS до точки справжнього руйнування (рис 15(г)) [23].

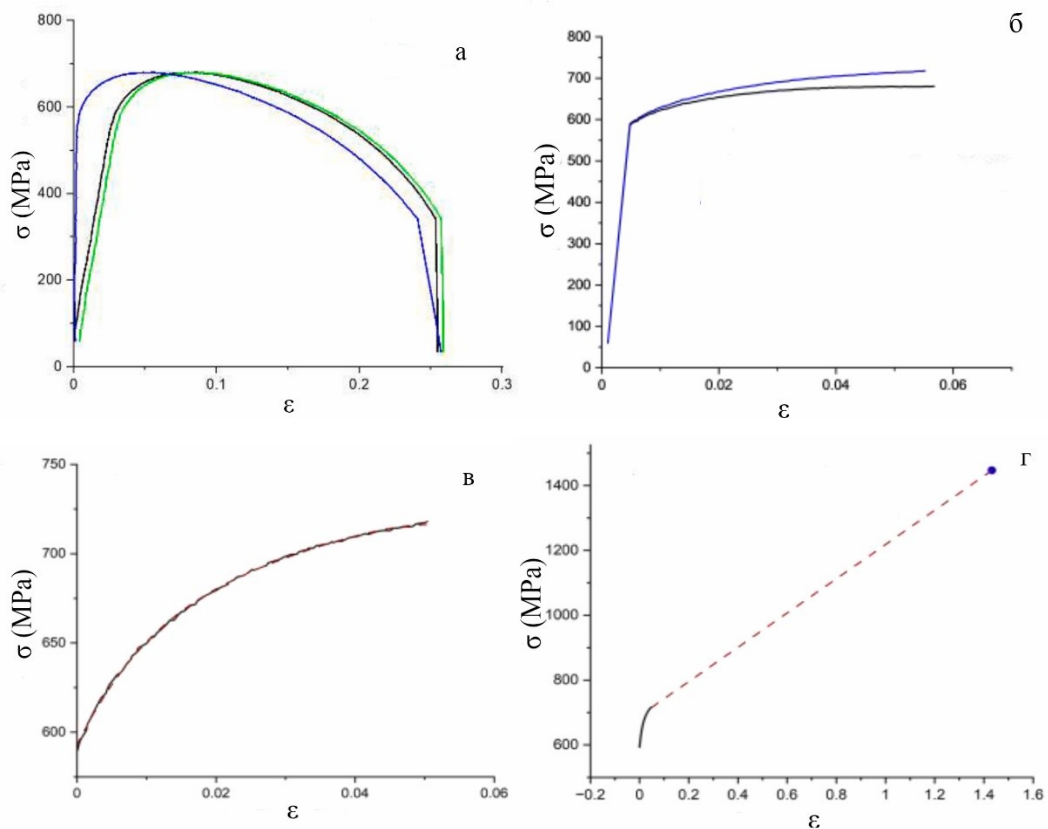


Рис. 15. Різні кроки, виконані для визначення закону зміцнення: а) пост обробка експериментальних даних, б) перетворення інженерної кривої на справжню криву, в) згладжування справжньої кривої, г) лінійна екстраполяція від точки максимального навантаження до точки руйнування.

Однак, через складний механізм руйнування, існує невизначеність щодо міцності при руйнуванні. Отже, розраховане значення $\sigma_{true \text{ fracture}}$ є початковим припущенням для $\sigma_{fracture}$. Шляхом зміни нахилу (тобто коригування напруження руйнування) можна знайти найкраще узгодження інженерної кривої з моделювання МСЕ з експериментальною.

3.3 Модель Гурсона-Твергаарда-Нідлмана (GTN)

В'язке руйнування в металах зазвичай є результатом зародження, зростання та злиття мікропор. Модель GTN описує функцію текучості, що враховує порожнини, і була модифікована Твергаардом та Нідлманом для кращого узгодження з експериментами. Ця модель успішно застосовується для моделювання пошкоджень, викликаних деформацією, у пластичних металевих матеріалах таких як сталь Eurofer97.

Функція текучості моделі GTN задається рівнянням $\phi = \left[\frac{\sigma_{eq}}{\bar{\sigma}} \right]^2 + 2q_1 \cosh \left[\frac{3q_2 \sigma_m}{2\bar{\sigma}} \right] - 1 - (q_1 f^i)$. В цьому рівнянні f^* є Ефективною об'ємною часткою пор, запропонованою Твергаардом та Нідлманом, і

визначається функцією $f^i = \begin{cases} f, & f \leq f_c \\ f_c + \frac{f_u - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c), & f_c < f < f_F \end{cases}$. Еволюція об'ємної частки

пор f складається з двох членів: один пов'язаний із зародженням нових пор (f nucleation), а інший – із зростанням існуючих пор (f growth). Швидкість зародження пор (f nucleation) задається рівняннями $\dot{f}_{nucleation} = A \dot{\epsilon}_{eq}^{pl}$ та

$A(\bar{\epsilon}) = \frac{f_n}{S_n \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\bar{\epsilon} - \epsilon_N}{S_n} \right)^2 \right]$, де $A(\epsilon)$ є Гауссовим розподілом. Швидкість

зростання пор (f growth) задається рівнянням $\dot{f}_{growth} = (1-f) \dot{\epsilon}_{kk}^p$. [23]

Модель GTN має вісім параметрів ($q_1, q_2, f_0, f_N, \epsilon_N, S_N, f_c, f_F$), які мають бути відкалібровані для досліджування матеріалу. Значення q_1 та q_2 часто фіксуються (наприклад, $q_1=1.5, q_2=1$). f_0 (початкова об'ємна частка пор) зазвичай вважається дуже низькою або нульовою для Eurofer97. f_N (загальна об'ємна частка зародження пор може бути оцінена на основі

експериментальних даних), ϵ_N (середнє значення деформації зародження) та SN (стандартне відхилення) описує розподіл зародження пор. f_c (критична об'ємна частка пор) відповідає початку злиття пор, а f_F (порогове значення) – втрата несучої здатності при руйнуванні. Параметри f_c та f_F є основними параметрами підгонки в цьому дослідженні і визначаються на основі найкращого узгодження з експериментальними кривими [23].

3.4 Результати

Запропонований спрощений метод визначення закону зміцнення не вимагає спеціального обладнання. Результати МСЕ з використанням скоригованого закону зміцнення, отриманого цим методом демонструють хороше узгодження з експериментальними кривими для кожної температури випробування (рис. 16) [23].

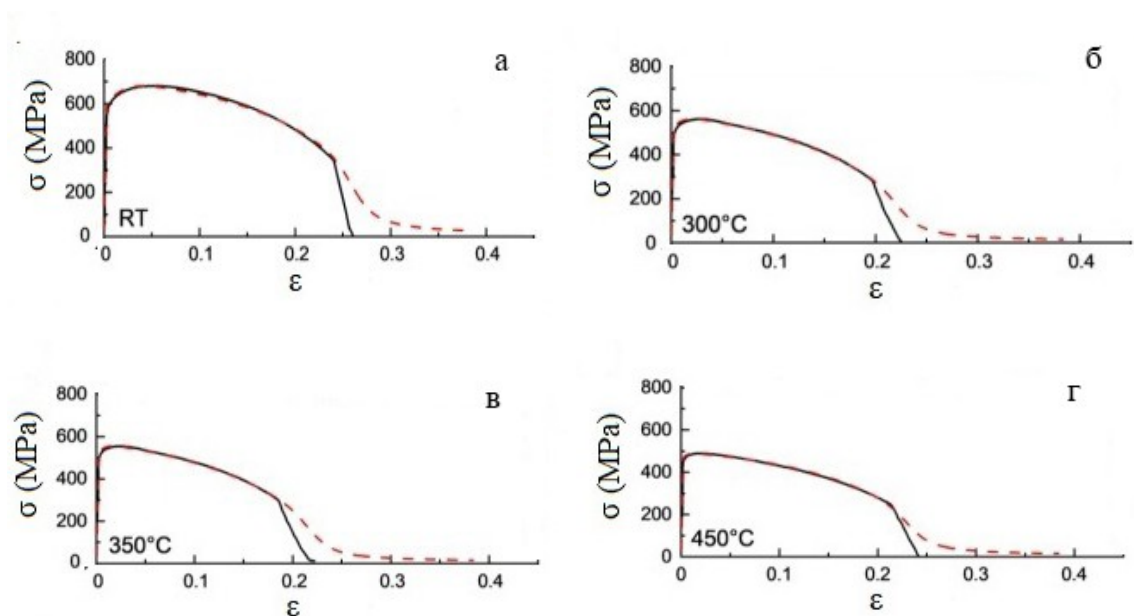


Рис. 16. інженерні криві, отримані за допомогою методу скінчених елементів (пунктирні), порівняно з експериментальними кривими (суцільна лінія) за різних температур випробування.

Параметри моделі GTN є залежними від матеріалу та температури. У дослідженні розглянуто два сценарії калібрування параметрів f_c та f_F . Перший сценарій використовує найкращий набір f_c та f_F , визначений при кімнатній

температурі, для всіх температур випробування. Другий сценарій коригує набір f_c та f_F для досягнення кращої точності при підвищених температурах. Відкалібровані параметри узагальнені в таблиці 2 [23].

Таблиця 2. Зведення каліброваних параметрів GTN.

T	q_1	q_2	q_3	f_0	f_N	ϵ_N	S_N	f_c	f_F
RT	1.5	1	2.25	0	0.0005 5	0.057	0.01	0.18	0.22
300°C	1.5	1	2.25	0	0.0005 5	0.03	0.01	0.18	0.22
350°C	1.5	1	2.25	0	0.0005 5	0.025	0.01	0.088	0.105
450°C	1.5	1	2.25	0	0.0005 5	0.016	0.01	0.18	0.22

Результати MCE з параметрами GTN демонструє добре узгодження з експериментальними інженерними кривими для плоских зразків (рис. 17(a)). Прогнози моделі GTN добре відтворюють точку руйнування. Точність прогнозування для плоских зразків перевищує 90% за всіма дослідженими температурами, використовуючи параметри першого сценарію, так і другого. Точність прогнозування міцності при руйнуванні при 350 °C була нижче 95% при першому сценарію, і була покращена до 95.1% при другому сценарію шляхом коригування f_c та f_F .

Було помічено, що відносне подовження зменшується зі зростанням температури, досягаючи мінімуму при 350 °C. Це явище спостерігалось раніше і пов'язане з динамічним деформаційним старінням, зростання відносного подовження при 450 °C пояснюється посиленням рухливості дислокацій. Зміна значень f_c та f_F також може бути пов'язана із залежністю злиття пор від здатності до деформаційного зміцнення. Наступним кроком було застосування тих самих матеріальних моделей, визначених за даними випробувань плоских зразків, для моделювання випробувань на розтяг з циліндричними зразками (рис. 17(б)). Це дозволило оцінити точність прогнозування цього підходу [23].

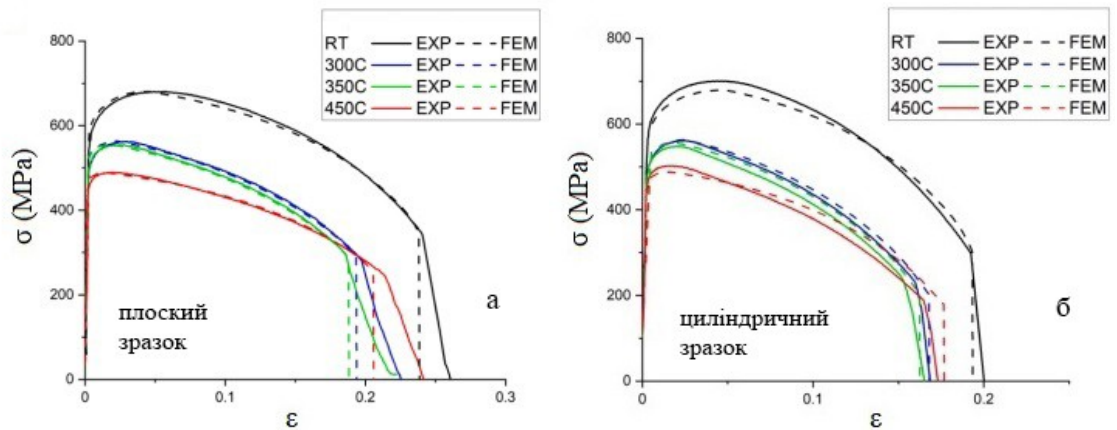


Рис. 17. Криві отримані методом скінченних елементів (МСЕ), у порівнянні з експериментальними кривими, отриманими за допомогою параметрів GTN для, а) плоского зразка, б) циліндричного зразка.

Однак, точність прогнозування міцності при руйнуванні для циліндричних зразків була значно нижчою, лише вище 81%. Основна причина зниженої точності для циліндричних зразків полягає у відмінності розподілу тривісних напружень між двома зразками.

ВИСНОВКИ

Дипломна робота була спрямована на вивчення моделювання методом скінченних елементів (FEM). З отриманих результатів впливають наступні висновки.

1. Показано, що моделювання методом скінченних елементів (FEM), достовірно відтворює експериментальні криві напруження-деформації для зразків, якщо припустити лінійне зростання істинного напруження від UTS до точки руйнування.
2. Встановлено, що точку руйнування можна точно передбачити за допомогою модифікованого набору параметрів GTN з точністю понад 90% для ключових характеристик після шийкоутворення, таких як зменшення площу, повне видовження та напруження руйнування.
3. Проаналізовано набір параметрів GTN, отримані на основі випробувань зразків, дають 10% похибку у прогнозуванні точки руйнування.

Список використаних джерел

1. ASTM E8/E8M-21. Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials. – ASTM International, 2021. – 32 p.
2. Hosford W.F. Mechanical Behavior of Materials. – 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2010. – ISBN 978-0-511-65836-5.
3. ASTM E2546-15. Standard Practice for Instrumented Indentation Testing. – ASTM International, 2015.
4. ASTM C1327-15(2019). Standard Test Method for Vickers Indentation Hardness of Advanced Ceramics. – ASTM International, 2019.
5. ASTM C730-98(2021). Standard test Method for Knoop Indentation Hardness of Glass. – ASTM International, 2021.
6. ASTM D575-91(2018). Standard Test Methods for Rubber Properties in Compression. – ASTM International, 2018.
7. ASTM A938-18. Standard Test Method for Torsion Testing of Wire. - ASTM International, 2018.
8. ASTM D7264/D7264M-21. Standard Test Method for Flexural Properties of Polymer Matrix Composite Materials. – ASTM International, 2021.
9. Standard Test Method for Shear Testing of Bulk Solids Using the Jenike Shear Tester. – ASTM International.
10. ASTM D6128-16. Standard Test Methods for Conducting Creep, Creep-Rupture and Stress-Rapture Tests of Metallic Materials. – ASTM International, 2016.
11. ASTM E6-15. Standard Terminology Relating to Methods of Mechanical Testing. – ASTM International, 2015.
12. ASTM E8/E8M – 21. Standard Test Method for Tension Testing of Metallic Materials. – ASTM International, West Conshohocken, PA, 2021. – 30 p.
13. Кобозев М.Ф. Опір матеріалів: підручник. – Київ: Вища школа, 2004. – 384 с.

14. Механічні властивості та конструкційна міцність матеріалів: лабораторний практикум. – КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ, 2019. – Вересень.
15. ASTM E21. Standard Test Method for Elevated Temperature Tension Tests of Metallic Materials. – ASTM International.
16. ASTM E290. Standard Test Method for Bend Testing of Material for Ductility. – ASTM International.
17. Subbaiah A. Overview of Small Punch Test // Metals and Materials International. – 2019. – DOI:10.1007/s12540-019-00454-5.
18. Boyer H.E. Atlas of Stress-Strain Curves. – ASM International, 1987. – Metals Park, Ohio.
19. Vossoughi J. Determination of true stress-strain curve. – DOI: 10.1111/j.1747-1567.1987.tb00667.x.
20. Liu G.R., Quek S.S. The Finite Elements Method: A Practical Course. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2003.
21. University of Victoria. Курс лекцій стосовно методу скінченних елементів. – [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.engr.uvic.ca/~mech410/lectures/FEA_Theory.pdf
22. Дубенгець В.Г., Хільчевський В.В., Савченко О.В. Основи методу скінченних елементів. – Чернігів: ЧДТУ, 2007.
23. Chang C.-C., Del Serra D., Terentyev D., Verleysen P., Bakaev A., Pardoen T., Zinovev A. On the equivalence of mini-flat and cylindrical tensile geometries to extract hardening law and ductility of Erufer97 // Metals and Materials International. – April 2023.