

**Міністерство освіти і науки України**

**Харківський національний університет імені В.М.Каразіна**

**Фізичний факультет**

**Кафедра теоретичної фізики імені академіка І.М.Ліфшиця**

**Луїза Рубенівна Крбашян**

**Методи теоретичного дослідження нелінійної динаміки магнітних систем з  
антиферомагнітною взаємодією**

Кваліфікаційна робота на здобуття освітнього ступеня  
«Магістр»  
за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» освітньо-  
наукова програма «фізика»

Науковий керівник - професор кафедри  
теоретичної фізики імені академіка І.М.  
Ліфшиця, доктор фізико-математичних  
наук  
Олександр Семенович Ковальов

**Харків 2024 р.**

## **Зміст**

### **Вступ**

### **I. Властивості антиферомагнітної взаємодії та антиферомагнітних середовищ.**

1.1. Моделі антиферомагнетиків

1.2. Основні взаємодії в антиферомагнетиках

1.3. Структура антиферомагнітного впорядкування

1.4. Динаміка антиферомагнетика

### **II. Системи антиферомагнітно пов'язаних магнітних елементів.**

2.1. Методи дослідження нелінійної динаміки

2.2. Стаціонарні одночастотні стани.

2.3. Якісні методи дослідження динаміки на фазовій площині. Аналіз нутаційних коливань.

2.4. Аналіз динаміки магнітних моментів у межах наближених розв'язків.

2.5. Знаходження та дослідження точних розв'язків динамічних рівнянь для нутаційних коливань.

2.6. Обчислення частот прецесії

2.7. Чисельна симуляція нелінійної динаміки пов'язаних магнітних моментів.

### **Висновки**

### **Список використаних джерел**

## ВСТУП

Антиферомагнітна взаємодія магнітних моментів добре вивчена як у класичному, так і в квантовому підході. Вона може виявлятися у магнітоупорядкованих середовищах – антиферомагнетиках та у взаємодії окремих магнітних елементів, наприклад, магнітних шарів у багат шарових елементах сучасної мікроелектроніки. Серед збуджених станів антиферомагнетиків особливе значення мають просторово однорідні стани, що відіграють основну роль у термодинаміці низькорозмірних магнетиків і в резонансних експериментах в зовнішніх однорідних полях (однорідний антиферомагнітний резонанс). При цьому опис таких станів аналогічний до опису збуджених станів антиферомагнітно-взаємодіючих шарів у спінтроніку. Обидва типи завдань можуть досліджуватися подібною методикою теоретичної фізики. У той час, як динаміка антиферомагнітов добре вивчена в лінійній межі (наприклад, лінійні АФМ хвилі), нелінійна динаміка цих систем навіть у класичній межі вивчена набагато слабше. Для вивчення цієї проблеми необхідно залучати різні методи теоретичної фізики. Деякі підходи вивчення нелінійної динаміки АФМ обговорюються у цій роботі з прикладу двох магнітних верств, пов'язаних АФМ зв'язком. Результати переносяться на нелінійну динаміку просторово однорідних збуджень об'ємних АФМ.

**Завданням даної дипломної роботи** є демонстрація різних методів всебічного дослідження нелінійної динаміки магнітних систем на прикладі системи з антиферомагнітною взаємодією, для якої отримана повна інформація про нелінійну динаміку, що є оригінальним результатом автора.

**Об'єктом дослідження** є система двох класичних магнітних моменту, що описує як просторово однорідні нелінійні збудження антиферомагнітних середовищ, так і магнітні багат шарові структури, що експериментально досліджуються, як перспективні елементи сучасної мікроелектроніки.

**Методи вирішення поставленої задачі** включають знаходження приватних рішень динамічної системи, що вивчається, якісний аналіз її збуджень методами якісного аналізу динамічних систем, отримання точних аналітичних

рішень використуваних рівнянь Ландау-Ліфшиця і чисельне вивчення відповідної нелінійної динаміки.

**Результатом роботи** стало повне теоретичне рішення задачі про нелінійні збудження в системі двох антиферомагнітно взаємодіючих класичних магнітних моментів.

## ВЛАСТИВОСТІ АНТИФЕРОМАГНІТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТА АНТИФЕРОМАГНІТНИХ СЕРЕДОВИЩ

Антиферромагнетиками (АФМ) називаються магнітоупорядковані середовища, в яких магнітні моменти атомів відмінні від нуля, але повна намагніченість середовища відсутня. Причина цього явища полягає в тому, що магнітна взаємодія між найближчими магнітними моментами (так звана обмінна взаємодія) призводить до їхньої взаємно протилежної орієнтації. Такий стан магнетика було вперше теоретично запропоновано Л.Д.Ландау 1933 року, і експериментально спостерігалось Л.В.Шубниковим 1935 року [1-3].

### 1.1. Моделі антиферромагнетиків

Найбільш проста і наочна модель АФМ (двограткова модель) представлена на Рис.1 в двовимірному перерізі АФМ.

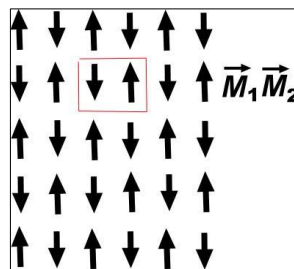


Рис. 1. Двограткова модель АФМ.

У цій моделі магнітна решітка складається з елементарних осередків, що містять два магнітні моменти величиною  $\vec{M}_1$ , спрямованих  $\vec{M}_2$  в основному стані антиколінеарно. природа магнетизму – квантово-механічна, ми вважатимемо магнітні вектори класичними. речовинах це виправдано великою величиною магнітного моменту ( $M > 1/2$ ).

Спрощеною моделлю АФМ є одновимірна модель двограткового АФМ ланцюжка, яка зображена на рис.2.

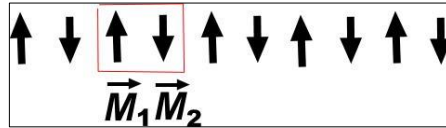


Рис. 2.

## 1.2. Основні взаємодії АФМ.

Основною взаємодією в магнетиках є так звана **обмінна взаємодія**. Воно має квантову природу та обумовлено симетрією хвильових функцій електронів, загальних для двох найближчих магнітних атомів. Енергія обмінної взаємодії (на один елементарний осередок) має вигляд

$$E_{ex} = J\vec{M}_1\vec{M}_2, J > 0, (1)$$

де  $J$  називається обмінним інтегралом чи константою обмінної взаємодії. Воно впорядковує магнітні моменти у протилежному напрямку при  $J > 0$ . (При  $J < 0$ ) система перетворюється на *ферромагнітний* стан). Вибрано найпростіший вид т.зв. ізотропної АФМ взаємодії, коли загальний вигляд анізотропної обмінної взаємодії  $E_{ex} = J_x M_{1x} M_{2x} + J_y M_{1y} M_{2y} + J_z M_{1z} M_{2z}$  спрощується при  $J_x = J_y = J_z = J$ .

Крім анізотропії обмінної взаємодії в магнетизмі може бути так звана **одноіонна магнітна анізотропія**. Вона виникає через електричні поля немагнітних атомів (легандів), що оточують даний магнітний атом. Ця анізотропія може мати різну симетрію. Нижче буде розглянуто окремий випадок так званої одноіонної анізотропії типу «легка вісь». У цьому є виділена вісь, характеризується напрямом одиничного вектору ( $\vec{n}$  Рис.3). В основному стан вектора магнітних моментів вибудовуються в протилежних напрямках вздовж цього вектора.

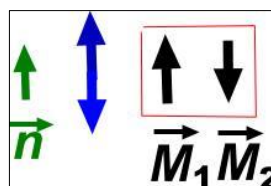


Рис.3. Вибудовування магнітних векторів у полі одноіонної анізотропії типу «легка вісь намагнічування».

Найпростіша модель одноіонної анізотропії відповідає енергії (на один елементарний осередок)

$$E_a = -\frac{\beta}{2} \left( (\vec{M}_1 \vec{n})^2 + (\vec{M}_2 \vec{n})^2 \right) \quad (2)$$

У «звичайних» магнетиках енергія одноіонної анізотропії значно менше обмінної енергії:  $J/\beta \sim 10^2$  і т.зв. "магнітна довжина"  $l = a\sqrt{J/\beta} \sim 10a$  ( $a$  - Постійна решітки). Однак, у нових низькорозмірних магнітних матеріалах, що складаються з слабовзаємодіючих магнітних шарів, кожен шар може розглядатися як ефективний момент одновимірної системи зі слабким зв'язком між шарами, тобто. малим ефективним значенням  $J$ . Це ж відноситься і до магнітних багатошарників, в яких міжшарова взаємодія може змінюватися в залежності від товщини шару, що розділяє магнетики, або від температури.

Важливо, що вибраний вид анізотропії (2) описує систему, ізотропну в площині, виділеної перпендикулярної легкої осі, тобто. система симетрична щодо повороту у цій площині. Наявність такої симетрії призводить до виникнення інтегралу руху – збереження повної намагніченості вздовж осі анізотропії.

Нарешті, нижче ми враховуватимемо наявність *зовнішнього магнітного поля*, напрям якого вважатимемо паралельним «легкої осі» (Рис.4). При цьому не порушується аксіальна симетрія системи та збереження зазначеного інтегралу руху.

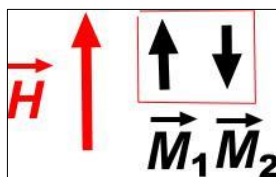


Рис.4. АФМ осередок у зовнішньому магнітному полі.

Енергія магнетика в магнітному полі (енергія Зеемана) має вигляд (на комірку)

$$E_z = -(\vec{M}_1 + \vec{M}_2)\vec{H} \quad (3)$$

Таким чином, повна енергія антиферомагнетика має вигляд

$$E = \sum_{i,\delta} \left( J\vec{M}_i\vec{M}_{i+\delta} - \frac{\beta}{2} (\vec{M}_i\vec{n})^2 - \vec{M}_i\vec{H} \right), \quad (4)$$

де підсумовування здійснюється за всіма моментами ( $i$ ) та найближчими сусідами ( $\delta$ ).

### 1.3. Структура антиферомагнітного впорядкування

Структура розподілу напрямів магнітних моментів в АФМ залежить від величини та напрямки магнітного поля, і при зростанні його величини виникає послідовність різних впорядкувань моментів (різних фаз).

#### Антиколінеарна фаза

У малих магнітних полях, спрямованих вздовж легкої осі, АФМ знаходиться в антиколінеарній фазі, в якій для моделі двоїдрешітка АФМ напрямки моментів чергуються, як показано на Рис.5. Тут же виділено елементарний осередок.

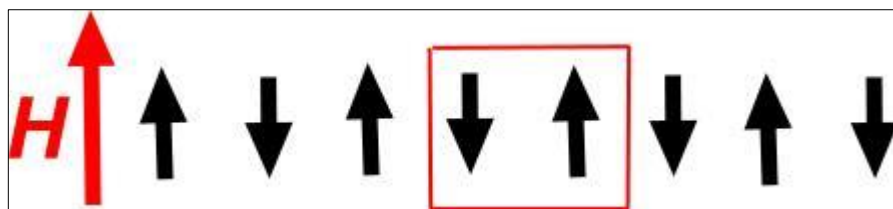


Рис.5 . Орієнтація магнітних моментів в антиколінеарній фазі АФМ.

Енергія колінеарної фази (на один магнітний момент) дорівнює

$$E_{col} = -JM_0^2 - \frac{\beta}{2} M_0^2, \quad (5)$$

де  $M_0$ - Величина магнітного моменту.

#### "Спін-флоп" фаза

При критичному значенні поля  $H_{sf}$  АФМ перетворюється на «спін-флоп» конфігурацію моментів ( *спін-флоп фаза* ). Розподіл орієнтацій моментів у спін-флоп фазі зображено Рис.6.

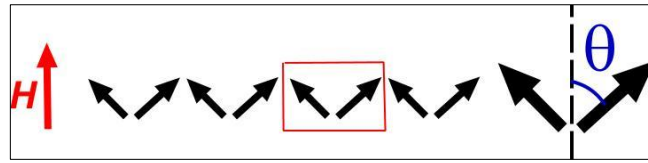


Рис.6. Розподіл напрямків магнітних моментів у симетричній спін-флоп фазі.

Ми будемо нижче розглядати «скошені» спін-флоп зміни типу, зображених на Рис.7.

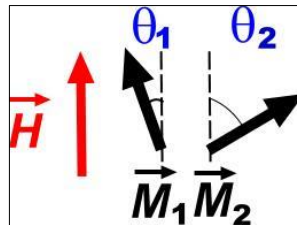


Рис.7. Скошена конфігурація у спін-флоп фазі.

Енергія симетричної спін-флоп фази (на один магнітний момент) має вигляд

$$E_{sf} = JM_0^2 \cos(2\theta) - \frac{\beta}{2} M_0^2 \cos^2 \theta - M_0 H \cos \theta \quad (6)$$

Величина кута скосу  $\theta$  знаходиться варіюванням  $E_{sf}$  по  $\theta$ :

$$\partial E_{sf} / \partial \theta = 0. \quad (7)$$

Воно дає намагніченість уздовж поля на один момент

$$\cos \theta_0 = M_z / M_0 = \frac{H}{M_0(4J - \beta)}. \quad (8)$$

Звідси залежність енергії  $E_{sf}$  від зовнішнього поля виглядає так:

$$E_{sf} = -JM_0^2 - \frac{1}{2} \frac{H^2}{4J - \beta}. \quad (9)$$

З порівняння  $E_{col}(5)$  та  $E_{sf}(9)$  видно, що система переходить у спін-флоп фазу в полі спін-флоп-переходу

$$H_{sf} = M_0 \sqrt{\beta(4J - \beta)}, \quad (10)$$

при якому кут скосу моментів стрибком змінюється від нуля до

$$\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{\beta}{4J - \beta}}. \quad (11)$$

З (10,11) видно, що спин-флоп фаза може виникати тільки в АФМ з  $\beta < 4J$ , що характерно для більшості магнетиків.

### Колінеарна фаза

Зі зростанням поля після спин-флоп переходу намагніченість уздовж поля  $M_z$  лінійно зростає з полем, досягаючи максимально можливого значення  $M_z = M_0 \cos\theta = 0$  у полі

$$H_p = M_0(4J - \beta). \quad (12)$$

У великих полях зберігається таке *колінеарне* впорядкування вздовж поля, зображене на рис.

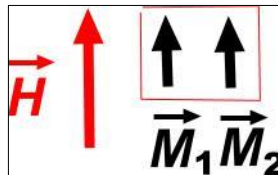


Рис.8. Упорядкування магнітних моментів у колінеарній фазі.

Таким чином, повна залежність намагніченості вздовж поля від величини поля має вигляд, наведений Рис.9.

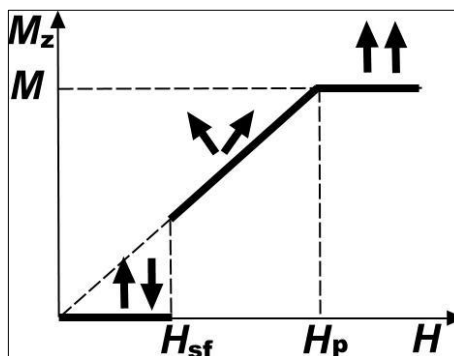


Рис.9. Крива намагніченості АФМ у полях, спрямованих вздовж легкої осі.

Наведений розгляд справедливий при  $J > \beta/4$  (тобто для «стандартних» АФМ). Однак, останнім часом було синтезовано велику кількість квазі-одномірних (шаруватих) АФМ з аномально слабкою обмінною взаємодією між шарами з  $J/\beta \sim 10^{-2}$  де  $J$ - обмінна взаємодія між шарами [4,5]. У напрямку, перпендикулярному площин шарів, систему можна розглядати, як одновимірну систему. При такому співвідношенні параметрів спін-фlop фаза не виникає і існують тільки колінеарні структури з паралельним ( $\uparrow\uparrow$ ) і антипаралельним ( $\uparrow\downarrow$ ) упорядкуванням моментів (Рис.5,8)).

$$H_{cr} = 2J. \quad (13)$$

Але за зазначеному співвідношенні параметрів особливо яскраво виявляються особливості нелінійної динаміки магнетиків. Залежність намагніченості від поля у розглянутому випадку зображена на Рис.10.

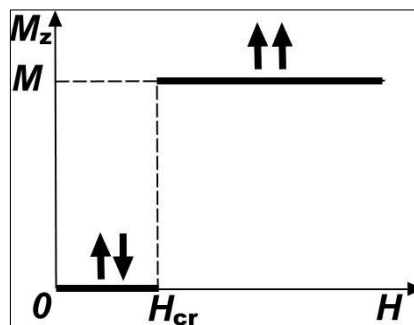


Рис.10 . Крива намагніченості вздовж поля величини поля при  $\beta > 2J$ .

#### 1.4. Динаміка антиферомагнетика.

Класична динаміка АФМ визначається динамікою окремого магнітного моменту та характером взаємодії цього моменту з магнітним полем, іншими моментами та оточуючими немагнітними атомами. (Надалі ми не розглядаємо магніто-дипольну взаємодію, яка істотно менша за обмінну взаємодію на малих відстанях між моментами).

Рівняння руху магнітного моменту у зовнішньому магнітному полі має вигляд [2,3]:

$$d\vec{M}/dt = \gamma[\vec{H}, \vec{M}], \quad (14)$$

де гіромагнітне відношення  $\gamma = |e|\hbar/2m_e c = 2\mu_0/\hbar$  та магнетон Бора  $\mu_0 = |e|\hbar/2m_e c$  [6]. У магнетиці зовнішнє поле  $\vec{H}$  замінюється ефективно поле. Оскільки з (3) магнітне поле можна подати у вигляді  $\vec{H} = -dE_z/d\vec{M}$ , то ефективно магнітне поле вводиться як

$$\vec{H}_{eff} = -\partial E/\partial \vec{M}, \quad (15)$$

де  $E$ - Повна енергія магнетика (4). Таким чином, рівняння динаміки магнітного моменту в магнетиці – рівняння Ландау-Ліфшиця без загасання [3,7] мають вигляд

$$\partial \vec{M}_i/\partial t = \gamma [\vec{M}_i, \partial E/\partial \vec{M}_i]. \quad (16)$$

Далі для спрощення введемо вектора намагніченості одиничної довжини

$$\vec{m}_i = \vec{M}_i/M_0, \quad (17)$$

перенормоване магнітне поле  $\vec{h} = \vec{H}/M_0$  та перенормований час  $\gamma M_0 t \rightarrow t$ . При цьому рівняння Ландау-Ліфшиця набуває вигляду

$$\partial \vec{m}_i/\partial t = [\vec{m}_i, \partial E/\partial \vec{m}_i] \quad (19)$$

де

$$E = \sum_{i,\delta} \left( J \vec{m}_i \vec{m}_{i+\delta} - \frac{\beta}{2} (\vec{m}_i \vec{n})^2 - \vec{m}_i \vec{h} \right). \quad (20)$$

Після підстановки енергії (20) в рівняння руху моменту (19) наводимо його у разі одновимірного антиферромагнітного ланцюжка до виду

$$\dot{\vec{m}}_i = J[\vec{m}_i, (\vec{m}_{i+1} + \vec{m}_{i-1})] - \beta[\vec{m}_i \vec{n}](\vec{m}_i \vec{n}) - h[\vec{m}_i \vec{n}]. \quad (21)$$

З рівняння динаміки (21) випливають такі властивості:

$$(\vec{m}_i \dot{\vec{m}}_i) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{m}_i)^2 = \left( \vec{m}_i, \left[ \vec{m}_i, \frac{\partial E}{\partial \vec{m}_i} \right] \right) = 0. \quad (22)$$

Тобто. величина магнітних моментів зберігається.

Три компоненти вектора намагніченості пов'язані співвідношенням

$$m_{ix} + m_{iy} + m_{iz} = 1. \quad (23)$$

Незалежними є лише дві компоненти. Якщо взяти в їх якості  $m_{ix}$  і  $m_{iy}$ , то зручно ввести комплексну величину

$$\psi_i = m_{ix} + im_{iy} = a_i e^{i\varphi_i}, \quad (24)$$

$$a_i = \sqrt{m_{ix}^2 + m_{iy}^2} = \sqrt{1 - m_{iz}^2}. \quad (25)$$

Нижче скрізь вводиться позначення

$$m_{iz} \equiv m_i = (\vec{n} \vec{m}_i). \quad (26)$$

У термінах введеної комплексної змінної рівняння динаміки мають такий вигляд

$$i\dot{\psi}_i = J\psi_i(m_{i+1} + m_{i-1}) - Jm_i(\psi_{i+1} + \psi_{i-1}) - \beta m_i \psi_i - h\psi_i. \quad (27)$$

При вибраному напрямку поля та вигляді магнітної анізотропії в системі є симетрія, пов'язана з можливістю її повороту навколо «легкої осі», що збігається з напрямком поля. По теоремі Еммі Нетер із цією симетрією пов'язаний інтеграл руху. Їм є повна проекція суми всіх моментів на вісь симетрії (вісь Z).

$$M_z = \sum_i m_i. \quad (28)$$

Справді, це легко перевірити:

$$\begin{aligned} \dot{M}_z &= \sum_i (\dot{\vec{m}}_i \vec{n}) = \sum_i \left( \vec{n} \left[ \vec{m}_i \frac{\partial E}{\partial \vec{m}_i} \right] \right) = \\ &= J \sum_i (\vec{n} [\vec{m}_i (\vec{m}_{i+1} + \vec{m}_{i-1})]) = \\ &= J \sum_i (\vec{n} [\vec{m}_i \vec{m}_{i+1}]) + J \sum_i (\vec{n} [\vec{m}_{i+1} \vec{m}_i]) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Отже, у системі є два інтеграли руху: повна енергія  $E$  і повна проекція намагніченості на вісь симетрії  $M_z$  (нижче позначимо  $M_z = M$ ).

**Спинові хвилі (АФМ магнони).**

## Антиколінеарний стан.

Лінійними (малими) збудженнями АФМ магнітної системи є спінові хвилі (квазікласичною мовою – квазічастинки – АФМ магнони) [1-3]. Ці збудження можуть існувати як над основним станом системи, і над станами з умовним мінімумом енергії.

Розглянемо лінійні спінові хвилі в колінеарній спіновій структурі при малих полях, менших від критичного поля переходу в спін-флоп фазу. Припустимо, що моменти з парними номерами спрямовані полем, а з непарними – проти поля. Тоді для збуджень виду

$$\psi_i = v_i = v \exp(ik2n + i\omega t), m_i = 1 \text{ при } i = 2n, \quad (30)$$

$$\psi_i = w_i = w \exp(ik(2n + 1) + i\omega t), m_i = -1, \text{ при } i = 2n + 1, \quad (31)$$

де  $k$  – хвильовий вектор хвилі, з рівнянь динаміки (27) впливає система рівнянь алгебри для амплітуд прецесії моментів

$$-\omega v = -2Jv - Jw(e^{ik} + e^{-ik}) - \beta v - hv, \quad (32)$$

$$-\omega w = 2Jw + Jv(e^{ik} + e^{-ik}) + \beta w - hw. \quad (33)$$

Рівність нулю детермінанта цієї системи визначає закон дисперсії спинових хвиль, тобто  $\omega = \omega(k)$ .

$$\omega = h \pm \sqrt{(2J + \beta)^2 - 4J^2 \cos^2 k}. \quad (34)$$

Цей закон дисперсії зображено Рис.11. На малюнку виділено точки  $(A, B, C, A', B', C')$  з  $k = \pi/2$  і  $k = \pi$ , які відповідають просторово однорідним збудженням. (Зауважимо, що у цих точках групова швидкість спинових хвиль перетворюється на нуль:  $V = d\omega/dk = 0$ ). Стан системи в точках  $A$  і  $C$  (і  $A', C'$ ) ідентичні. Особливий інтерес представляє точка  $A$ . У ній коливання моментів в елементарному осередку (виділена на Рис.5) повторюються переважають у всіх інших осередках. Таким чином, динаміка АФМ ланцюжка в цьому стані повністю еквівалентна динаміці динаміки системи з двох пов'язаних магнітних

шарів, що взаємодіють антиферомагнітним чином. Ця система буде розглянута нижче.

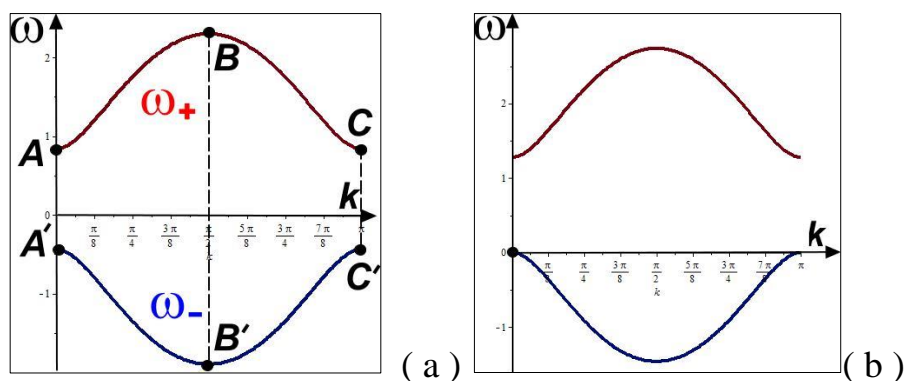


Рис.11. Закон дисперсії лінійних спинових хвиль в АФМ в антиколлінеарній

$$\text{фазі ( а ) } .H_* = \sqrt{\beta(4J + \beta)}$$

Частота АФМ коливань у точках  $A, A'$  рівні

$$\omega_A = \omega_C = h + \sqrt{\beta(4J + \beta)}, \quad (35)$$

$$\omega_{A'} = \omega_{C'} = h - \sqrt{\beta(4J + \beta)}.$$

Ці частоти називаються частотами *однорідного АФМ резонансу*, що відіграє важливу роль високочастотних експериментальних дослідженнях АФМ. При полі  $h_* = \sqrt{\beta(4J + \beta)}$  частота  $\omega_{A'}$  перетворюється на нуль (Рис.11 b), і однорідна спинова хвиля стає нестійкою. Зауважимо, що поле  $H_*$  більше від частоти спін-флопа. (На Рис.11  $\beta = 0.1, J = 1$ , на лівому малюнку  $H = 0.2$ , правому  $h = h_* \approx 0.64$ ). З рівнянь (31,32) легко знаходяться співвідношення амплітуд обертання моментів ґрат у спиновій хвилі для верхньої та нижньої гілок спектру, відповідно:

$$\frac{v}{w} = -\frac{(2J+\beta)+\sqrt{(2J+\beta)^2-4J^2\cos^2k}}{2J\cos k}, |v| > |w|, (ABC), \quad (37)$$

$$\frac{v}{w} = -\frac{(2J+\beta)-\sqrt{(2J+\beta)^2-4J^2\cos^2k}}{2J\cos k}, |v| < |w|, (A'B'C'). \quad (38)$$

У точках АФМ резонансу ці співвідношення мають вигляд  $v/w = -(2J + \beta \pm h_*)/2J$ . Прецесія моментів цих частотах має вигляд, зображений на

Рис.12. (У рішеннях А та А' магнітні моменти прецесують у протилежних напрямках).

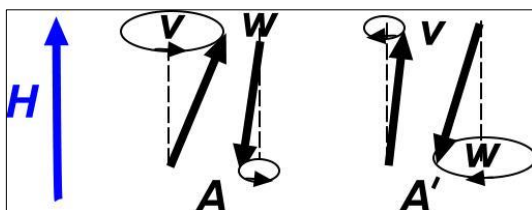


Рис.12. Прецесія - момент при частоті однорідного АФМ резонансу.

Максимальна частота прецесії досягається в точці В на Рис.11 з  $k = \pi/2$ :

$$\omega_B = h + (2J + \beta), \quad (39)$$

$$\omega_{B'} = h - (2J + \beta). \quad (40)$$

Відповідні хвилі називаються АФМ обмінними модами. З (27,32,33) видно, що в цих модах прецесує тільки одна з подрешіток:

$$w = 0, \quad \psi_{2n} = -\psi_{2n+2}, \quad (B) \quad (41)$$

$$v = 0, \quad \psi_{2n-1} = -\psi_{2n+1}. \quad (B') \quad (42)$$

Прецесія моментів у цих станах зображено на рис. 13.

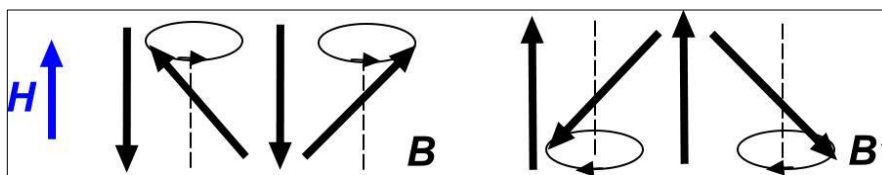


Рис.13. Прецесія магнітних моментів у хвилі с  $k = \pi/2$ .

З малюнка видно, що з  $k = \pi/2$  динамічна структура повторюється з періодом  $4a$ , де  $a$  – міжатомне відстань, тобто. містить 2 елементарні осередки. Тому ці стани не можуть спостерігатися в системах двох магнітних шарів з АФМ взаємодією, які будуть розглянуті нижче.

Щільність станів спинових хвиль в одномірному ланцюжку, який впливає із закону дисперсії (33) визначається виразом

$$g = \frac{1}{|d\omega/dk|} = \frac{\sqrt{(2J+\beta)^2 - 4J^2 \cos^2 k}}{4J^2 \cos k \sin k}, \quad (43)$$

наведеним на Рис.14.

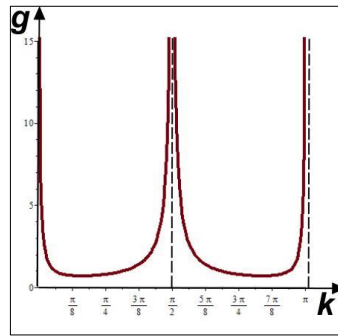


Рис.14. Щільність збуджених станів АФМ спинового ланцюжка  $g = g(k)$ .

Зазвичай ця щільність станів виражається як залежності від частот спинових хвиль. Вона наведена на Рис.15.

$$g(\omega) = \frac{|\omega - h|}{\sqrt{(\omega - \omega_{B'}) (\omega_{A'} - \omega) (\omega - \omega_A) (\omega_B - \omega)}} \quad (44)$$

та наведена на Рис.15.

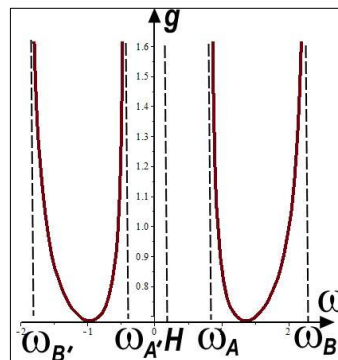


Рис.15. Щільність станів спинових хвиль як функція їх частот.

При  $k = 0, \pi/2$  ( $\omega = \omega_A, \omega_B, \omega_{A'}, \omega_{B'}$ ) у щільності станів є звані Ван-Хововские особливості. Тобто. ці стани дають основний внесок у динаміку та термодинаміку збуджень квазіоднорідної системи. Понад те, в резонансних експериментах система перебуває у однорідному зовнішньому змінному полі і порушуються саме ці стани. Фактично вони описують систему двох магнітних моментів, яка буде докладно описана нижче.

## Колінеарний стан.

У високих полях  $H > H_{cr}$  система перебуває в колінеарному стані, в якому всі моменти орієнтовані по полю. У цьому випадку рівняння (32,33) замінюються одним рівнянням для всіх моментів

$$-\omega v = 2Jv - Jw(e^{ik} + e^{-ik}) - \beta v - Hv, \quad (45)$$

і закон дисперсії спинових хвиль складається тільки з однієї гілки та має вигляд

$$\omega = \beta + h - 4J \sin^2(k/2). \quad (46)$$

Він наведено на Рис.16 . Максимальна частота, що відповідає  $k = 0$ , дорівнює  $\omega_{max} = \beta + h$ , а мінімальна при  $k = \pi$  дорівнює  $\omega_{min} = \beta + h - 4J$ .

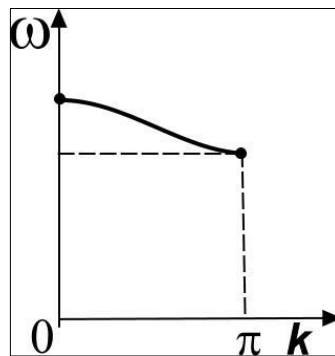


Рис.16. Спектр частот спинових хвиль АФМ ланцюжка в колінеарному стані.

Стану  $k = 0$  відповідає синфазне обертання всіх моментів, аналогічне зображеному на Рис.18 s , а стану  $k = \pi$  відповідає синхронне обертання всіх моментів з послідовним зрушенням фаз обертання на кут  $\pi$ , аналогічне зображеному на Рис.18 а .

## СИСТЕМИ АТИФЕРОМАГНІТНО ПОВ'ЯЗАНИХ МАГНІТНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Це завдання тісно пов'язане з розглянутою вище динамікою АФМ середовищ, зокрема з їх просторово однорідними збудженнями. Але вона має важливі технології застосування в сучасній мікроелектроніці і спінтроніці. Основним елементом таких пристроїв є магнітні багатошаровики з мікро-і наношарів феромагнетиків, розділеними прошарками феро-, антиферо-і парамагніков. Залежно від товщини прошарку міжшарова взаємодія може змінюватися за величиною та за своїм характером. На рис.17 наведені структури магнітних багатошарових систем, експериментально досліджені в роботах [8-12].

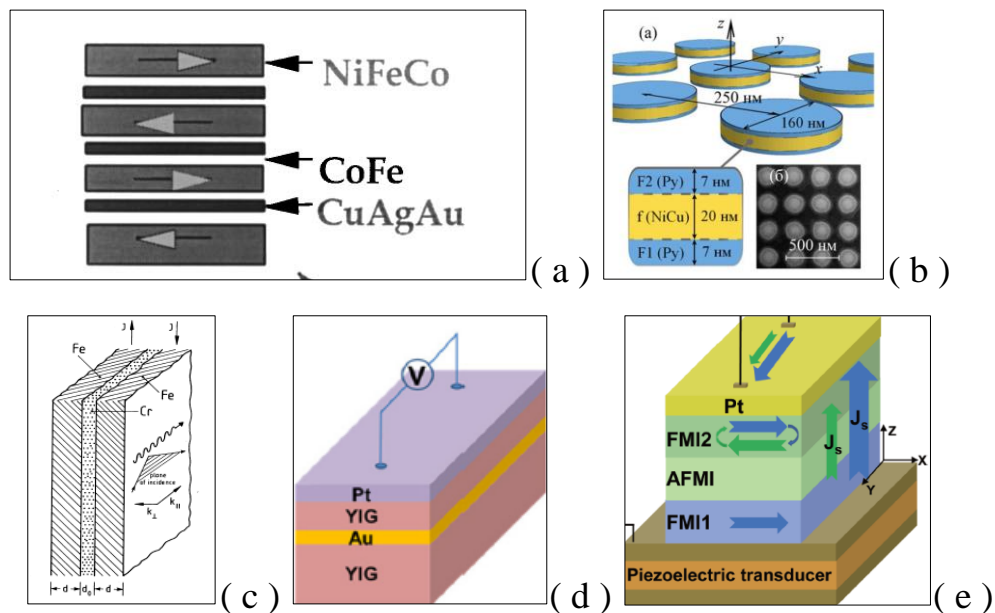


Рис.17. Типи багатошарових магнітних систем, експериментально досліджених у роботах [8] ( a ), [9] ( b ), [10] ( c ), [11] ( d ) і [12] ( e ).

Це завдання еквівалентна розглянутій вище межі просторово однорідних станів. Але в цій системі макроскопічний магнітний момент шару взаємодіє лише з одним моментом сусіднього магнітного шару. Тому в попередніх виразах для енергії та в рівняннях необхідно замінити обмінну взаємодію  $2J$  на  $J$ .

Для спрощення викладок введемо нове безрозмірне магнітне поле  $h = H/\beta M_0$ , параметр  $\varepsilon = J/\beta i$  безрозмірний час  $\omega_0 t$ , де-  $\omega_0 = 2\beta\mu_0 M_0/\hbar$  частота однорідного **феро** магнітного резонансу без поля. У цих позначеннях наведені вище інтеграли руху та динамічні рівняння (20,21,28) переписуться у вигляді (енергія відраховується від основного стану ( $\uparrow\downarrow$ ):

$$E = \varepsilon \vec{m}_1 \vec{m}_2 - (m_1^2 + m_2^2)/2 - h(m_1 + m_2) + 1 + \varepsilon, \quad (47)$$

$$M = m_1 + m_2, \quad (48)$$

$$\dot{\vec{m}}_i = \varepsilon [\vec{m}_i, \vec{m}_j] - [\vec{m}_i \vec{n}] (\vec{m}_i \vec{n}) - h [\vec{m}_i \vec{n}], \quad (49)$$

( $i, j = 1, 2, i \neq j$ ).

На відміну від нескінченного ланцюжка, цей фрагмент має лише два ступені свободи. Наявність двох інтегралів руху забезпечує повну інтегрованість цієї динамічної системи у квадратурах. У відсутності зовнішнього поля та згасання ця система була досліджена в роботі [13], а в роботі [14] подібне завдання розглядалося за відсутності зовнішнього поля та одноіонної анізотропії, але за наявності анізотропії обмінної взаємодії.

Як зазначалося, вивчення суттєво нелінійної динаміки магнітних систем потребує залучення різних методів дослідження.

## 2.1. Методи дослідження нелінійної динаміки

Послідовне дослідження цієї системи включає:

1. Вивчення простих окремих випадків одночастотних рішень типу стаціонарних станів у квантовій механіці.
2. Якісне дослідження динаміки методами якісного аналізу динамічних систем на фазовій площині.
3. Аналіз динаміки системи у межах наближених рішень.
4. Знаходження та дослідження точних розв'язків динамічних рівнянь.
5. Чисельне вивчення динаміки намагніченості у найпростіших обчислювальних пакетах.

На різних етапах цієї програми зручно використання рівнянь динаміки в  $\psi_i = m_{xi} + im_{yi}$  різній формі  $m_i = m_{zi}$ .

$$i\dot{\psi}_i = -(m_i + h)\psi_i + \varepsilon\psi_i m_j - \varepsilon m_i \psi_j. \quad (50)$$

Рівняння динаміки в термінах  $m_i$ , проєкцій на площину  $XY$ :  $a_i = \sqrt{m_{xi}^2 + m_{yi}^2}$  азимутальних кутів магнітних моментів  $\varphi_i$ , де  $\psi_i = a_i \exp(i\varphi_i)$ :

$$\dot{m}_1 = \varepsilon a_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (51)$$

$$\dot{m}_2 = -\varepsilon a_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (52)$$

$$\dot{a}_1 = -\varepsilon m_1 a_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (53)$$

$$\dot{a}_2 = \varepsilon m_2 a_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (54)$$

$$\dot{\varphi}_1 = m_1 + h - \varepsilon m_2 + \varepsilon(m_1 a_2 / a_1) \cos(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (55)$$

$$\dot{\varphi}_2 = m_2 + h - \varepsilon m_1 + \varepsilon(m_2 a_1 / a_2) \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (56)$$

## 2.2. Стаціонарні одночастотні стани.

Найпростіші одночастотні порушення описуються рішеннями (50) виду

$$\psi_i = a_i \exp(i\omega t), \quad (57)$$

де  $a_i$ - Постійні амплітуди. Ми називаємо їх «стаціонарними» за аналогією з видом хвильових функцій стаціонарних станів у квантовій механіці. У цих рішеннях магнітні моменти синхронно прецесують навколо напрямку поля та анізотропії з частотою  $\omega$  (далі - *частотою прецесії*). Кути відхилення магнітних моментів у своїй не змінюються. Після підстановки цих виразів (57) в рівняння (50) для  $\psi_i$  скорочення експонент, домноження на  $a_1$  і  $a_2$ , відповідно, і віднімання один з одного, отримуємо рівняння, що не містить частоту:

$$(m_1 - m_2)((1 + \varepsilon)a_1 a_2 + \varepsilon(1 + m_1 m_2)) = 0. \quad (58)$$

Одне рішення з  $m_1 = m_2$  відокремлюється. Йому відповідають два стани  $a_1 = a_2$  і  $a_1 = -a_2$ . У першому стані вектора намагніченості обертаються у фазі

(синфазні коливання ( s )), а в другому - зі зрушенням фази  $\pi$  («протифазні коливання» ( a )) в одному і тому ж напрямку. Така динаміка представлена на Рис.18 s , а ці стани в межі малих амплітуд обертань аналогічні просторово однорідним станам спинових хвиль в колінеарній конфігурації (див. вище).

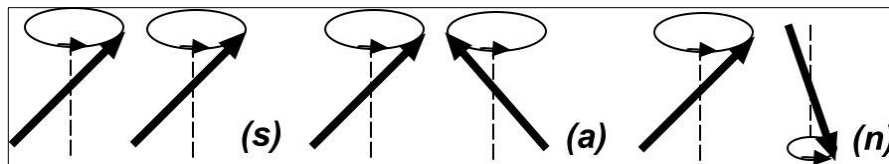


Рис.18. Прецесія моментів у синфазному ( s ), антифазному ( a ) та неоднорідному ( n ) стаціонарних станах.

Видно, що ці стани є сильно збудженими та далекими за енергією від основного стану з антиколлінеарним розташуванням моментів ( $\uparrow\downarrow$ ).

Крім цих двох стаціонарних станів можливе третє (неоднорідне) рішення, що зануляє другу дужку (58) і зображене на Рис.18 n . З (58) видно, що  $a_1 a_2 < 0$ , тобто. рішення близьке до протифазного обертання моментів. Якщо врахувати збереження повної намагніченості вздовж осі Z, то другу дужку можна переписати як

$$(1 + \varepsilon)\sqrt{(1 + m_1 m_2)^2 - M^2} = \varepsilon(1 + m_1 m_2). \quad (59)$$

Це квадратне рівняння для  $m_1 m_2$ , і з нього легко отримуємо співвідношення

$$m_1 m_2 = -1 + |M| (1 + \varepsilon)/\sqrt{1 + 2\varepsilon}, \quad (60)$$

$$a_1 a_2 = -|M| \varepsilon/\sqrt{1 + 2\varepsilon}. \quad (61)$$

Поява модуля  $|M|$  очевидна, оскільки за будь-яких знаків  $M$  маємо  $m_1 m_2 > -1$  і рух моментів близький до антифазного з різними знаками  $a_1$  і  $a_2$ . З (60) і (49) легко перебувають і самі проекції моментів на напрямок поля:

$$m_{1,2} = \frac{M}{2} \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} + 1 - |M| \frac{1+\varepsilon}{\sqrt{1+2\varepsilon}}}. \quad (62)$$

З цього виразу видно, що неоднорідне рішення існує лише за  $|M| < 2/\sqrt{1+2\varepsilon}$ . При  $|M| = 2/\sqrt{1+2\varepsilon}$  підкорене вираз (62) звертається в нуль, і при цьому значенні  $m_1 = m_2$  і  $a_1 = -a_2$ , тобто. неоднорідний стан перетворюється на антисиметричне рішення. При критичних значеннях (біфуркаційних)

$$M_b = \pm 2/\sqrt{1+2\varepsilon} \quad (63)$$

відбувається *біфуркація*, тобто. відщеплення неоднорідного збудження з різним рівнем порушення окремих моментів від однорідного стану з рівнорозподілом енергії між двома моментами (антисиметричних коливань). Явище біфуркації притаманно нелінійних систем із кількома ступенями свободи [15].

Після підстановки трьох рішень (59-61) у вихідні рівняння (50) отримуємо  $\psi_i$  залежності частот цих рішень від повної намагніченості  $M$ . (Для неоднорідного рішення треба підставити рішення в рівняння для  $i = 1, 2$ , помноживши відповідно на  $a_1$  і  $a_2$  скласти їх).

$$\omega_s = h + M/2, a_1 = a_2, \quad (64)$$

$$\omega_a = h + (1 - 2\varepsilon)M/2, a_1 = -a_2, \quad (65)$$

$$\omega_n = h + M - \text{sign}M\sqrt{1+2\varepsilon}, a_1 \neq a_2. \quad (66)$$

частоти відрізняються лише зсувом частот у полі. Однак, наявність поля вздовж осі  $Z$   $M \rightarrow 2$  порушує симетрію  $M$  вздовж цієї осі щодо  $Z \rightarrow -Z$  заміни  $-2 < M < 2$ . синфазних та антифазних осциляцій мають різні значення і ця точка є особливою.  $\omega_s - \omega_a = 2\varepsilon$  Стрибок частоти прецесії зберігається і при менших намагніченостях.

Залежно (64-66) пов'язують динамічні характеристики (частоти) з інтегралом руху. Найважливіше побудувати співвідношення між інтегралами руху для розглянутих стаціонарних станів. Ці залежності задають площині інтегралів руху  $(M, E)$  область їх значень, у яких можливі збуджені стану системи. Підставляючи рішення  $m_1 = m_2$ ,  $a_1 = a_2$  та  $a_1 = -a_2$  (60,61) для енергії (47), знаходимо ці співвідношення:

$$E_s = (1 + 2\varepsilon) - M^2/4 - hM, \quad (67)$$

$$E_a = 1 - (1 - 2\varepsilon)M^2/4 - hM, \quad (68)$$

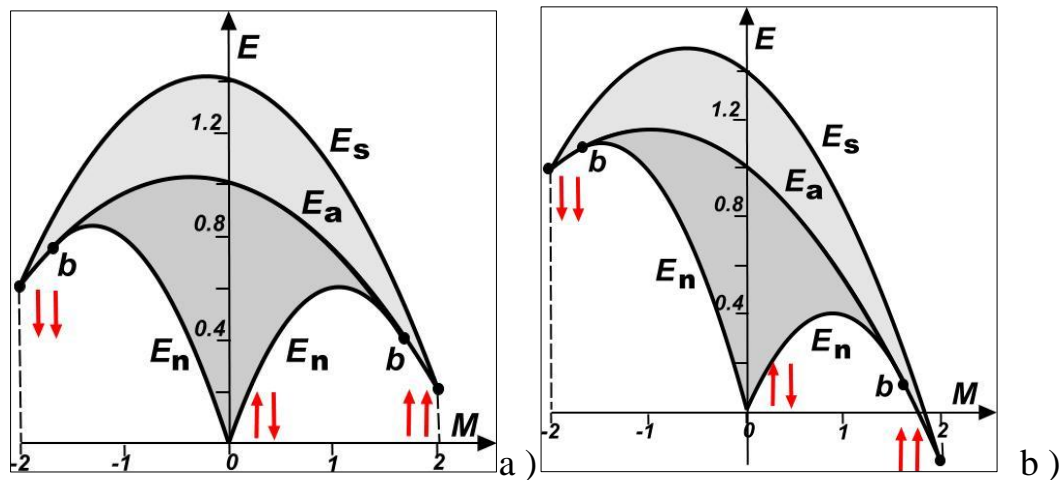
$$E_n = -M^2/2 + |M|\sqrt{1 + 2\varepsilon} - hM. \quad (69)$$

Порівняння (67-69) з (64-66) показує виконання звичайного співвідношення механіки для одночастотних станів  $\omega = -dE/dM$ . (Знак мінус з'являється через те, що число елементарних збуджень  $N$ , що збігається з адіабатичним інваріантом системи, відраховується від стану з паралельною орієнтацією моментів по полю, а величина  $M$  відраховується від основного стану з їхньою антипаралельною орієнтацією. Тому  $N = 2 - M$ ). З (63) та (68) знаходимо енергії збуджень у точках біфуркацій

$$E_b = \frac{4\varepsilon}{1+2\varepsilon} - \frac{2h}{\sqrt{1+2\varepsilon}} \text{sign}M_b. \quad (70)$$

З (67-69) видно, що в полях  $h < h_{cr} = \varepsilon$  основним станом є антиколлінеарний стан ( $\uparrow\downarrow$ ) з  $M = 0$  і  $E = E_n = 0$ , а при  $h > h_{cr}$  основному (коллінеарному) стані ( $\uparrow\uparrow$ ) з  $M = 2$  енергія дорівнює  $E = E_s = E_a = 2(\varepsilon - h)$ . Це узгоджується з (13) та Рис.10.

Залежності (67-69) наведено на Рис.22 а, б для полів, менших і більших критичного  $h_{cr} = \varepsilon$ .



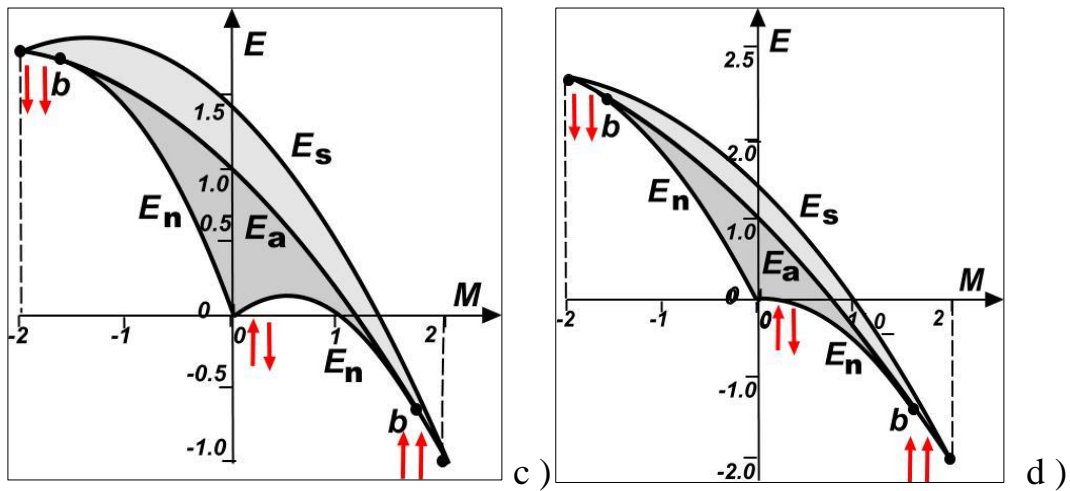


Рис.22. Области існування збуджених станів двошарової системи при  $h < h_{cr}$  ( а ) та  $h > h_{cr}$  ( b ). Вибрано такі значення параметрів:  $\varepsilon = 0.2$ ,  $h = 0.1$  ( a ),  $h = 0.3$  ( b ),  $h = 0.7$  ( c ) і  $h = 1.2$  ( d ).

Видно з малюнка, крім основних станів, можуть існувати додаткові стійкі локальні мінімуми енергії з більшими, ніж в основних станах енергіями. Кількість таких додаткових мінімумів енергії залежить від величини поля  $h$ . У полі  $h_{cr1} = 1 - 2\varepsilon$  зникає відносний мінімум енергії при  $M = -2$ . (При цьому поле  $dE_a/dM|_{M=-2} = 0$  і стан ( $\downarrow$ ) стає нестійким щодо зростання антифазних коливань). При вищому критичному полі  $h_{cr2} = \sqrt{1 + 2\varepsilon}$  зникає відносний мінімум енергії при  $M = 0$ . (При цьому поле  $dE_n/dM|_{M=0} = 0$ ). Области існування збуджених станів наведено на Рис.22 c для інтервалу полів  $h_{cr1} < h < h_{cr2}$  та на Рис.22 d для полів  $h > h_{cr2}$ . Зі порівняння  $h_{cr1}$  і  $h_{cr2}$  видно, що  $h_{cr1} < h_{cr2}$  при  $\varepsilon < 2/3$ .

У точці відносного мінімуму в антиколінеарному стані ( $\uparrow\downarrow$ ) частоти неоднорідних станів, наступні (66) при  $M = 0$ :  $\omega_n = h \pm \sqrt{2\varepsilon + 1}$  збігаються з частотами краю спектра спінових ланцюжків, наступні з (34) при  $k = 0$ :  $\omega = h \pm \sqrt{\beta(4J + \beta)}$ . В основному при ненульовому полі колінеарному стані ( $\uparrow\uparrow$ ) з  $M = 2$  частоти синфазних і антифазних коливань, що йдуть з (64,65), рівні відповідно  $\omega_s = 1 + h$  і  $\omega_a = 1 - 2\varepsilon + h$  що збігається з частотами однорідних станів спінового ланцюжка, що впливають з (46) при  $k = 0, \pi$  (див. Рис.16).

У той час, як на межах області існування збуджень  $(E_s, E_n)$  ці збудження є одночастотними і відповідають чистої синфазної прецесії двох моментів навколо осі  $Z_3$  частотою прецесії  $\omega$ , в області всередині обмеженої цими лініями, збудження є двочастотними і характеризуються частотою прецесії  $\omega$  та додатковою частотою нутації  $\Omega$ , намагніченості відхиляються від цієї осі. У системі відліку, що обертається із частотою прецесії, вектори намагніченості обертаються відносно один одного. На межі  $(E_s, E_n)$  частота нутації  $\Omega$  залишається кінцевою, але амплітуда нутаційних коливань звертається в нуль.

### **2.3. Якісні методи дослідження динаміки на фазовій площині. Аналіз нутаційних коливань.**

У вихідних рівняннях динаміки нутаційного руху моментів можна відокремити і знайти точні вирази для цих коливань. Оскільки система рівнянь (50) описує динамічну систему з двома ступенями свободи, що має два інтеграли руху, то вона може бути проінтегрована в квадратурах. Але необхідно вибрати зручні змінні, в яких легко врахувати наявність одного інтегралу руху. Після цього рівняння, що залишилися, для системи з одним ступенем свободи і одним інтегралом руху, що залишився, можуть бути досліджені методами якісного аналізу динамічних систем на узагальненій фазовій площині.

Як динамічні змінні зручно вибрати проекції векторів намагніченості на легку вісь  $m_i$  та азимутальні кути їх проекцій на площину  $(XY)$   $\varphi_i$ , що описуються системою рівнянь (51,52,55,56). Формула (52) підказує зручну заміну змінних:

$$m_1 = M/2 + P, m_2 = M/2 - P. \quad (71)$$

Як видно,  $-(1 - M/2) < P < (1 - M/2)$  при  $M > 0$  та  $-(1 + M/2) < P < (1 + M)$  при  $M < 0$ .

Крім цього, зручно ввести різницю та суму азимутальних кутів магнітних моментів:

$$\psi = \varphi_2 - \varphi_1, \chi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2. \quad (72)$$

У цих змінних рівняння для змінних  $P$  та  $\psi$  в нутаційних коливаннях відщеплюються. Віднімаючи один з одного рівняння (51,52) і, відповідно, (55,56), отримуємо ці рівняння у вигляді

$$\dot{P} = \varepsilon a_1(P) a_2(P) \sin \psi, \quad (73)$$

$$\dot{\psi} = -2P((1 + \varepsilon)a_1 a_2 + \varepsilon(1 + M^2/4 - P^2)\cos \psi)/a_1 a_2, \quad (74)$$

де визначено позитивні величини

$$a_1(P) = \sqrt{1 - (M/2 + P)^2}, \quad a_2(P) = \sqrt{1 - (M/2 - P)^2}. \quad (75)$$

Зауважимо, що до цієї системи рівнянь не входить магнітне поле, яке не впливає на частоти нутації, але впливає тільки на частоти прецесії. Ця система двох рівнянь першого порядку для нутаційних коливань є динамічною системою з одним ступенем свободи і одним інтегралом руху – енергією, яка в нових змінних має вигляд

$$E = (1 + \varepsilon) - (1 - \varepsilon)M^2/4 - (1 + \varepsilon)P^2 - hM + \varepsilon a_1 a_2 \cos \psi. \quad (76)$$

Отже, отримана система (73,74) повністю інтегрована. Але спочатку проведемо  $(\psi, P)$ її  $M < 0$ якісний аналіз  $a_1 = 0$ на  $a_2 = 0$ фазовій  $M > 0$ площині  $P$ .  $M$ .Межі області фазового портрета є особливими лініями (див. Рис.23,25). (73,74) видно, що фазовий портрет періодично повторюється під час заміни  $\psi \rightarrow \psi + 2\pi$ , тобто може розглядатися лише інтервалі  $\psi = 0 \div 2\pi$ .

Аналіз фазового портрета починається з знаходження особливих точок (точок зупинки), в яких  $\dot{P} = \dot{\psi} = 0$ , і спеціальних ліній (сепаратрис), що з'єднують спеціальні точки сідлового типу. Ці елементи фазового портрета перебувають точно аналітичному вигляді, які знання дозволяє якісно уявити всю динаміку системи. З (73,74) видно, що особливими точками є: точки  $P = 0, \psi = 2\pi n$  ( $m_1 = m_2, \varphi_1 = \varphi_2$ ), відповідні синфазним коливанням з  $E = E_s$ (67), точки  $P = 0, \psi = \pi(2n + 1)$  ( $m_1 = m_2, \varphi_2 = \pi + \varphi_1$ ), відповідні антифазним коливанням з  $E = E_a$ (68) (див. мал.25а), і при  $|M| < M_b$ (63) з'являються додаткові особливі точки з  $\psi = \pi(2n + 1)$  і  $P \neq 0$ (див. мал.25 б). В останньому

випадку занулюється дужка у виразі (74), що збігається з виразом у другій дужці (58). Ці точки відповідають неоднорідним стаціонарним коливанням з енергією  $E_n$ (69). З (62) випливає, що в них

$$P_n = \pm \sqrt{1 + M^2/4 - |M|(1 + \varepsilon)/\sqrt{1 + 2\varepsilon}}.$$

Характер особливих точок визначається лінеаризованими рівняннями (73,74) поблизу них. Поблизу точки  $P = \psi = 0$  для синфазних коливань вони мають вигляд.

$$\dot{P} = \varepsilon(1 - M^2/4)\psi, \quad \dot{\psi} = -2P(1 + 2\varepsilon - M^2/4)/(1 - M^2/4).$$

Ця особлива точка є стійкою точкою типу центру з обертанням фазової траєкторії навколо неї з частотою нутації.

$$\Omega_s = \sqrt{2\varepsilon(1 + 2\varepsilon - M^2/4)}.$$

Порівняйте цю частоту із частотою прецесії  $\omega_s$ (64) синфазних обертань.

Поблизу точки  $P = 0, \psi = \pi$  для антифазних коливань система лінеаризованих рівнянь для  $P$  і  $\delta = \psi - \pi$  мають вигляд

$$\dot{P} = -\varepsilon(1 - M^2/4)\delta, \quad \dot{\delta} = 2P((1 + 2\varepsilon)M^2/4 - 1)/(1 - M^2/4). \quad (80)$$

Таким чином, ця особлива точка залишається особливою точкою типу стійкого центру тільки до точки біфуркації  $M > M_b$  з частотою обертання зображувальної точки навколо центру з частотою нутації.

$$\Omega_a = \sqrt{2\varepsilon(M^2/M_b^2 - 1)}. \quad (81)$$

Ця частота також відрізняється від частоти прецесії  $\omega_a$ (65) антифазної прецесії моментів.

При критичному значенні намагніченості особлива  $M_b$  точка тире центр перетворюється на нестійку особливу точку сідлового типу. Отже, при  $|M| < M_b$  однорідних антифазних обертаннях, відповідні лінії  $E_a$  на Рис.22 стають нестійкими (див. також Рис.25). Але при цьому на фазовому портреті (див. Рис.25

в ) від сідлової точки відщеплюються дві особливі точки з  $P(77)$  для неоднорідних стаціонарних обертань. Лінеаризація рівнянь (73,74) поблизу  $\psi = \pi, P = P_n$  ( $\psi = \pi + \delta, P = P_n + \mu$ ) призводить до системи лінійних рівнянь

$$\dot{\mu} = -\delta M \varepsilon^2 / \sqrt{1 + 2\varepsilon}, \dot{\delta} = \mu 4P_n^2 (1 + 2\varepsilon)^{3/2} / M \varepsilon^2. \quad (82)$$

Особлива точка має характер стійкого центру із частотою нутаційних коливань

$$\Omega_n = 2P_n \sqrt{(1 + 2\varepsilon)}. \quad (83)$$

Зауважимо, що амплітуди (не частоти) нутаційних коливань на лініях  $E_s, E_a, E_n$  на Рис.22 дорівнюють нулю – рух носить суто прецесійний характер.

Крім зазначених особливих точок фазовий ртрет містить ще дві незвичайні особливі точки сідлового типу. Вони перебувають у межах фазового портрета при  $P = \pm(1 - M/2)$  (при  $M > 0$ ) – див. Рис.25. При наближенні до цього кордону, як впливає з (74),

$$\dot{\psi} \approx \varepsilon \sqrt{M(1 - M/2)} \cos\psi / \sqrt{1 - M/2 - P}. \quad (84)$$

Отже, на самій межі зображувальні точки наближаються до особливої точки  $\psi = \pi/2$  з двох сторін із нескінченною швидкістю. Нижче покажемо, що траєкторія, що «виходить» з сідла, збігається у напрямку з напрямом кордону. Тобто особлива точка має вигляд, зображений Рис.23.

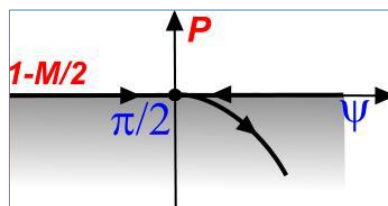


Рис.23. Сідлова точка на межі фазового портрета системи.

Крім особливих точок важливими елементами фазового портрета є сепаратиси: лінії, що розділяють області з різним характером руху. Сепаратиси «починаються» та «закінчуються» на особливих точках типу сідла. В даному випадку при всіх значеннях намагніченості  $M \varepsilon$  сідлові точки вказаного на Рис.23 виду (див. Рис.25), а також  $M < M_b$  зберігаються сідлові точки, які мають

координати на фазовій площині  $\psi = (2n + 1)\pi$ ,  $P = 0$ . Оскільки енергія системи вздовж сепаратрису зберігається і дорівнює енергії в сідловій точці, легко знайти вид цих сепаратрис. Для особливих точок  $\psi = \pi(1 + 2n)/2$ ,  $P = \pm(1 - M/2)$ (76) впливає відповідна енергія

$$E_q = (1 + \varepsilon - h)M - M^2/2. \quad (85)$$

На Рис.24 ця залежність наведена у вигляді кривої  $E_q$ . Ця крива перетинає криву  $E_a$ (68) для енергій антифазної прецесії в точці  $q$  Рис.24 з координатами

$$M_q = 2/(1 + 2\varepsilon), E_q(M_q) = \frac{2\varepsilon(3+2\varepsilon)}{(1+2\varepsilon)^2} - \frac{2h}{1+2\varepsilon}. \quad (86)$$

Ця точка, поряд із точкою біфуркації рішень (63), відіграє важливу роль у систематиці збуджень системи: фазовий портрет істотно перебудовується при цьому значенні намагніченості  $M_q$ . На Рис.24 області з межами  $(0, M_q, M_b, 2)$  виділені різним штрихуванням і позначені цифрами *I, II, III*. Підставляючи значення енергії (85) у вираз (76) для  $E(P, \psi) = E_q(M)$ , знаходимо форму сепаратрис, що з'єднують зазначені особливі точки  $\psi = \pi(1 + 2n)/2$ ,  $P = \pm(1 - M/2)$ . Він і описується формулою

$$P = \pm \sqrt{\left(1 + \frac{M}{2}\right)^2 - \frac{2M(1+\varepsilon)^2}{(1+2\varepsilon)+\varepsilon^2 \sin^2 \psi}} \quad (87)$$

і мають різний вид в областях  $M > M_q$  і  $M < M_q$  (див. мал.25 а , б , с ). При виведенні цього співвідношення використовувалося умова  $\cos \psi < 0$ , тобто. ці сепаратриси лежать в інтервалах  $\pi/2 + 2\pi n < \psi < 3\pi/2 + 2\pi n$ . При  $M > M_q$  сепаратриси пов'язують, наприклад, точки з  $\psi = \pi/2$  і  $P = \pm(1 - M/2)$ . При цьому  $M < M_q$  вони зв'язують точки з  $P = (1 - M/2)$  та  $\psi = \pi/2$  и  $3\pi/2$ . Поблизу особливих точок, з яких виходять ці сепаратриси, залежність (87) зводиться до такої:

$$P \approx \sqrt{\left(1 - \frac{M}{2}\right)^2 - \frac{2M\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)^2}, \quad (88)$$

що продемонстровано на Рис.23.

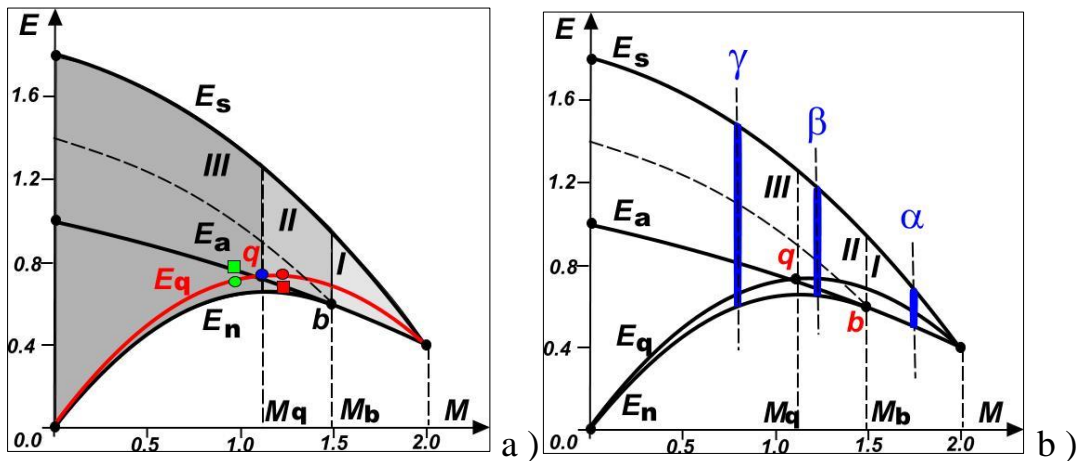


Рис.24. Лінії особливих залежностей енергії від намагніченості у сфері існування рішень динамічної системи (а). На малюнку ( б ) синіми лініями відзначені області зміни енергій при обговоренні точних розв'язків нелінійної динаміки в різних сферах параметрів. (Для наочності цих малюноків вибрано значення параметра  $\varepsilon = 0.4$  і зовнішнє полі покладено рівним нулю).

Замкнуті фазові траєкторії загального виду лежать усередині областей, обмежених сепаратрисами і межами фазового портрета  $P = \pm(1 - M/2)$  Рис.25. При  $M > M_q$  всі такі траєкторії замкнуті. Наприклад, тонкі сині лінії Рис.25. При  $M < M_q$  виникають незамкнуті лінії (зелені на Рис.25с), що відповідають прецесійному руху.

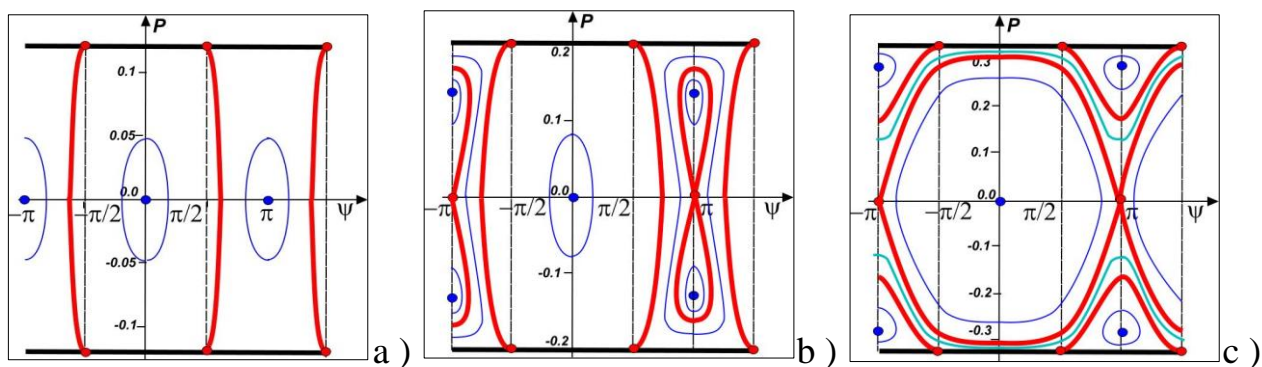
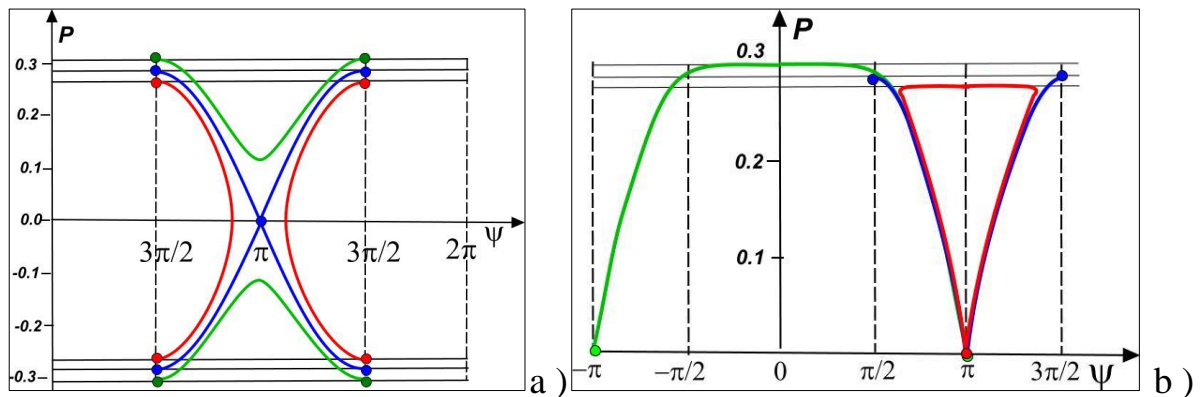


Рис.25. Особливі точки і сепартриси фазового портрета при різних значеннях повної намагніченості  $M$ : ( а )  $M_b < M < 2$  ( $h = 0, \varepsilon = 0.2, M = 1.76$  на малюнку), ( б )  $M_q < M < M_b$  ( $M = 1.6$ ), ( с )  $M < M_q$  ( $M = 1.35$ ). Звернемо увагу на те, що масштаб уздовж осі  $P$  різний на різних малюнках. Сині крапки відповідають особливим точкам типу «центр», а червоні – «сідлам».

Щоб зрозуміти перебудову зазначених сепаратрис при  $M = M_q$ , необхідно розглянути сепаратрис, які пов'язують особливі точки  $\psi = (2n + 1)\pi$ ,  $P = 0$  на фазовому портреті, і також істотно змінюються при переході через значення  $M = M_q$  намагніченості.  $E_q$  (76) дає залежність  $P = P(\psi)$  для цих сепаратрис. Рис.26а вони наведені одночасно для трьох значень намагніченості, близьких і рівних  $M_q$  при значеннях енергії, рівних  $E_q(M)$  (див. Різнокольорові кружки на Рис.24 з квітами, що відповідають Рис.26а).



Перезамкнення сепаратрис поблизу особливої точки  $(M_q, E_q)$  при зміні параметрів уздовж лінії  $E_q$  (а) і уздовж лінії  $E_a$  (а).

При зміні інтегралів руху уздовж лінії  $E_a$  та переході через критичну точку  $(M_q, E_q)$  відбувається перезамикання сепаратрис, що проходять через сідлові точки  $P = 0, \psi = \pi/2 + 2\pi n$ . Картина цього перетворення зображена на Рис.26 б, а відповідні значення позначені на Рис.24 квадратами відповідних кольорів. При цьому кут  $\psi$  на сепаратрис при фіксованому значенні  $P$  змінюється немонотонно. Це видно в залежності від  $M$  похідної намагніченості  $dP/d\psi$  в точці  $\psi = \pi$ :

$$\left. \frac{dP}{d\psi} \right|_{\psi=\pi} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+2\varepsilon} \frac{1-M^2/4}{M_b^2-M^2}}. \quad (89)$$

Графік цієї залежності наведено на Рис.27, з якого видно, що на цій залежності значення  $M_q$  не виділено.

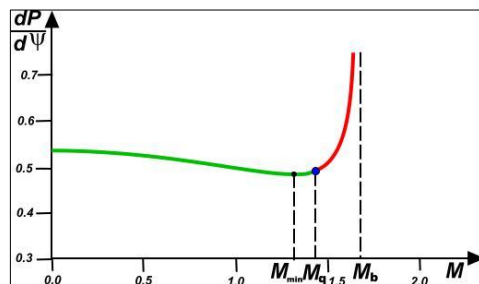


Рис.27. Нахил кривої  $dP/d\psi$  для сепаратрису в точці ( $P = 0, \psi = \pi$ ) на фазовому портреті при різних значеннях  $M$ .

Повний фазовий портрет системи при різних значеннях параметра  $M$  легко побудувати чисельно, користуючись виразом (76) залежності енергії  $E = E(P, \psi)$ . Фазовим траекторіям відповідають різні значення енергії. Їх можна знайти у звичайних програмах графіки (наприклад, MAPLE або МАТЕМАТИКА). На Рис.28 наведено характерні фазові портрети областей I, II и III на Рис.24. У цьому обрані самі значення намагніченості  $M$ , як і на відповідних малюнках на Рис.25.

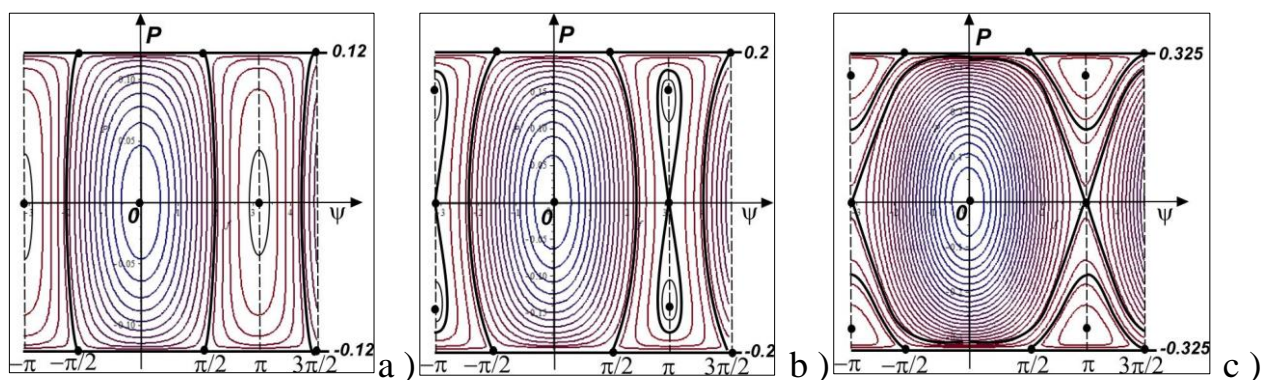


Рис.28. Фазові портрети нутаційних коливань системи при різних значеннях повної намагніченості  $M$ : ( а )  $M_b < M < 2$  ( $h = 0, \varepsilon = 0.2, M = 1.76$  на малюнку), ( б )  $M_q < M < M_b$  ( $M = 1.6$ ), ( с )  $M < M_q$  ( $M = 1.35$ ). Звернемо увагу на те, що масштаб уздовж осі  $P$  різний на різних малюнках.

#### 2.4. Аналіз динаміки магнітних моментів у межах наближених рішень.

У попередньому розділі ми обмежувалися дослідженням нутаційних коливань векторів намагніченості. Загальна динаміка включає також

прецесійний рух цих векторів. На лініях  $E_s, E_a, E_n$  на площині  $(E, N)$  прецесія спостерігається у чистому вигляді, і амплітуда нутаційних коливань перетворюється на нуль. Але у всій області інтегралів руху співіснують обидва типи коливань. Нутації описуються системою рівнянь (73,74), але повна система рівнянь (51-56) включає рівняння руху азимутальних складових моментів. У термінах змінних  $(P, \psi)$  ці додаткові рівняння (55,56) набувають вигляду

$$\dot{\varphi}_1 = h + (1 - \varepsilon) M/2 + (1 + \varepsilon)P + \varepsilon(M/2 + P)(a_2/a_1)\cos(\psi), \quad (90)$$

$$\dot{\varphi}_2 = h + (1 - \varepsilon) M/2 - (1 + \varepsilon)P + \varepsilon(M/2 - P)(a_1/a_2)\cos(\psi), \quad (91)$$

де  $a_i(P)$  визначаються формулами (75). Розглянемо малоамплітудні коливання моментів поблизу основного стану з  $m_1 = m_2 = 1$ . Система рівнянь (73,74), лінеаризована по  $P$  і  $\psi$ , набуває вигляду рівнянь (78), що мають рішення

$$P = A \sin \Omega_s t, \quad \psi = A \Omega_s \cos \Omega_s t / \varepsilon(1 - M^2/4), \quad (92)$$

з частотою синфазних коливань  $\Omega_s$  (79). У цьому ж наближенні рівняння (90,91) набувають вигляду

$$\dot{\varphi}_{1,2} = \omega_s \pm (1 + 2\varepsilon/(1 - M^2/4))P, \quad (93)$$

де  $\omega_s = h + M/2$  - Частота синфазної прецесії (64). Таким чином, прецесія кутових змінних має вигляд

$$\varphi_{1,2} = \omega_s t \mp A \Omega_s \cos(\Omega_s t) / 2\varepsilon(1 - M^2/4), \quad (94)$$

що узгоджується з виразом (92) для  $\psi$ .

Характеризуватимемо прецесійний рух середнім за періодом нутацій обертанням двох векторів намагніченості і введемо величину  $\chi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$  (див.(72)). Тоді частота прецесії визначається величиною

$$\omega = \bar{\chi} = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\chi} dt, \quad (95)$$

де  $T = 2\pi/\Omega$  - частота нутації. У лінійній межі вона збігається із частотою прецесії.

**2.5. Знаходження та дослідження точних розв'язків динамічних рівнянь для нутаційних коливань.**

Для знаходження точних рішень для динаміки магнітних моментів можна скористатися рівнянням (73) для  $\dot{P}$ , в якому виразити залежність  $\psi = \psi(P)$ , скориставшись виразом (76) для енергії як функції змінних  $(\psi, P)$ . В результаті отримаємо замкнуте рівняння для змінної  $P(t)$ . У відсутність магнітного поля воно було отримано в роботі [13], а за наявності поля має наступний вигляд (енергії  $E_s$  і  $E_a$  містять поле):

$$\dot{P}^2 = -A - BP^2 - CP^4, \quad (96)$$

$$A = (E - E_s)(E - E_a), \quad (97)$$

$$B = 2((1 + \varepsilon)E + (1 + \varepsilon)hM - (1 + 2\varepsilon) + M^2/4), \quad (98)$$

$$C = (1 + 2\varepsilon). \quad (99)$$

Рівняння (98) з усіма своїми рішеннями добре відоме у літературі (див. [15]) і описує так званий осцилятор Дюффінга. З (97) видно, що параметр (97) змінює знак при переході енергії через залежність антифазних коливань  $E_a$ , що призводить до зміни виду рішень. Крім того, константа  $B$  змінює знак при переході енергії через залежність

$$E = E_* = (-(1 + \varepsilon)hM + (1 + 2\varepsilon) - M^2/4)/(1 + \varepsilon). \quad (100)$$

Ця  $E_a$  залежність представлена на Рис .

(I) Дослідження динаміки магнітних моментів почнемо з найбільш простого випадку з параметрами  $(M, E)$  в області (I) на Рис.24 з  $M_b < M < 2i$  енергією, що змінюється вздовж лінії  $\alpha$ . При  $E_a < E < E_s$ , цьому  $A < 0$  і  $B > 0$ . При цьому рішення рівняння (96) має вигляд

$$P = \sqrt{D - B} \operatorname{cn}(\sqrt{D}t, k) / \sqrt{2C}, \quad (101)$$

с  $k^2 = (1 - B/D)/2$ , де  $\operatorname{cn}(z, k)$  -  $D = \sqrt{B^2 - 4AC}$  еліптичний косинус Якобі з модулем  $k$ . Оскільки період еліптичного косинуса дорівнює  $4K(k)$ , де  $K$  повний еліптичний інтеграл першого роду, то частота нутаційних коливань становить

$$\Omega = \pi\sqrt{D}/2K(k). \quad (102)$$

На межах області існування рішень  $E = E_s, E_a$  модуль  $k$  і амплітуда нутацій звертається в нуль, а частота набуває вигляду  $\Omega = \sqrt{B}$  і збігається  $E = E_q$  з отриманими раніше виразами  $\Omega_s$  (79) і  $\Omega_a$  (81). з точкою  $k$  максимуму значення

$P_{max} = 1 - M/2$ .  $E = E_q$  точки магнітні моменти в процесі нутації проходять по черзі через напрямок вздовж основного стану:  $m_1 = 1, m_2 = M - 1$  і  $m_2 = 1, m_1 = M - 1$ . Залежність розмаху коливань магнітних моментів від енергії продемонстровано на Рис.29.

Звернімо увагу, що у розглянутих коливаннях моментів середні за часом намагніченості вздовж осі  $Z$  для двох моментом збігаються і рівні  $M/2$ , тобто. спостерігається рівнорозподіл збуджень між двома підсистемами.

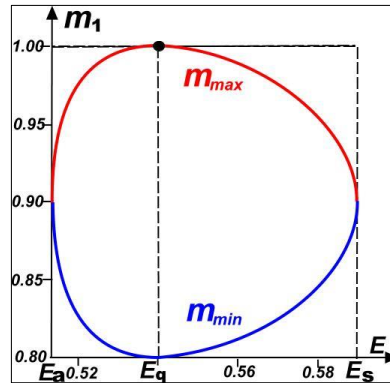


Рис.29. Характеристики коливань  $z$  – проекції магнітного моменту в залежності від енергії при  $M = 1.8, \varepsilon = 0.2$  і  $h = 0$ .

На Рис.30 наведено залежності частоти нутації (102) від енергії і намагніченості в області, що розглядається ( $I$ ) при значеннях поля  $h = 0$  та  $h = 0.6$ . Вони відрізняються лише зсувом вздовж осі енергій та зміною ширини області за значеннями енергій (див. мал.22). Дійсно, за всіма формулами для нутаційної динаміки поле входить лише у комбінації  $E + hM$ .

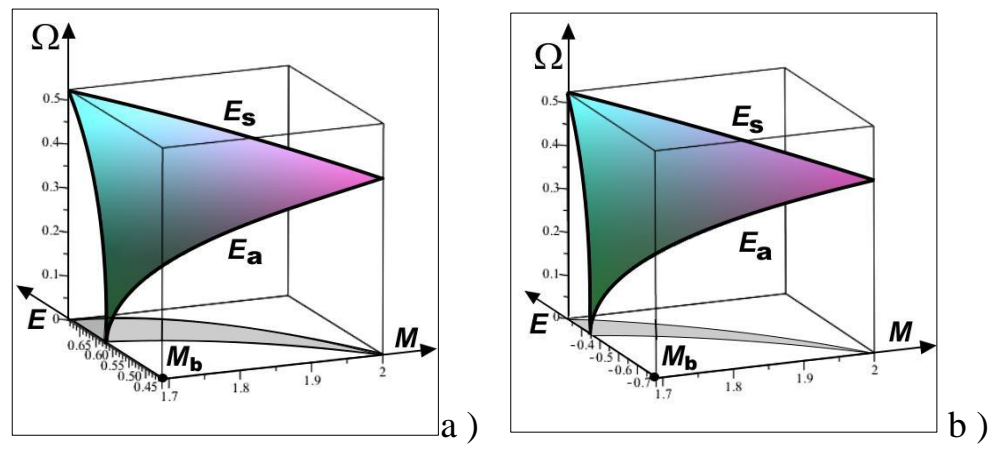


Рис.30. Залежність частоти нутації магнітних моментів від намагніченості та частоти в області (I) при  $h = 0$  (a) і  $h = 0.6$  (b).

(II) Дослідження динаміки у цій галузі складніше, т.к. при фіксованому значенні  $M$  та зниженні енергії система проходить через послідовність критичних значень енергії  $E_s \rightarrow E_* \rightarrow E_q \rightarrow E_a \rightarrow E_n$ . В інтервалі енергій  $(E_s, E_*)$  рішення має той самий вид (101), що й вище, з тими ж значеннями параметрів. У точці  $E = E_*$ , в якій модуль  $k = 1/\sqrt{2}$ , Величина змінює  $V$  знак, але рішення (101) разом до коефіцієнтами в ньому зберігають свій вигляд. Це ж має місце при переході через значення  $E = E_q$ . Але, як показано нижче, у своїй значенні стрибком змінюється частота прецесії моментів. Однак, гранична поведінка при  $E \rightarrow E_a$  суттєво змінюється в порівнянні з поведінкою при  $M > M_a$ . У цій межі модуль  $k$  прагне одиниці:

$$k^2 \approx 1 - \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon} \left(1 - \frac{M^2}{4}\right) \frac{E-E_a}{1-M^2/M_b^2}. \quad (103)$$

Видно, що точка  $E = E_a$  є  $M = M_b$  особливою: в ній величина  $k$  відчуває стрибок на одиницю. Оскільки асимптотика  $K(k)$  має  $k \approx 1$  вигляд  $K(k) \sim \ln(1 - k^2)$ , то на лінії  $E = E_a$  з  $M < M_a$  частота нутацій звертається в нуль, як

$$\Omega \sim -1/\ln(E - E_a). \quad (104)$$

При цьому рух магнітних моментів стає аперіодичним і відповідає сепаратрисної петлі на Рис. 25 b і 28 b. Межа рішення (101) при  $k \rightarrow 1$  ( $E \rightarrow E_a$ ) має вигляд:

$$m_{1,2} = M/2 \pm \sqrt{(\varepsilon/2)(M_b^2 - M^2)} \operatorname{sech} \left( \sqrt{2\varepsilon(1 - M^2/M_b^2)} t \right). \quad (105)$$

Це рішення можна назвати «тимчасовим солітоном» та його профіль зображений на Рис.31 с. Тут на Рис.31 a і Рис.31 b зображена динаміка магнітних моментів при енергіях, близьких до  $E_a$ . З малюнків видно, що з  $E > E_a$  середні за часом значення  $Z$  - проєкцій моментів однакові й рівні  $\langle m_1 \rangle = \langle m_2 \rangle = M/2$  (Рис.31 a), а  $E < E_a$  вони різні:  $\langle m_1 \rangle \neq \langle m_2 \rangle$  (Рис.31 b). Рішення рівнянь для цього наведено нижче (106). Відбувається стрибок вектор траєкторії момент. При цьому частота нутації змінюється плавно, але, як буде показано нижче, залежність частоти прецесії від енергії в цій точці має касп.

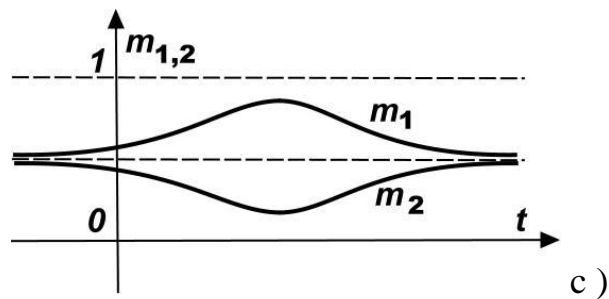
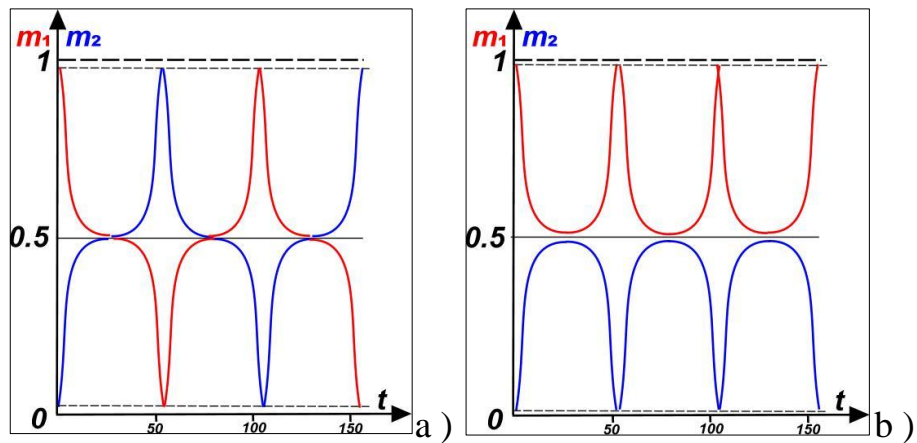


Рис.31. Динаміка магнітних векторів при  $E > E_a$  ( а ),  $E = E_a$  ( с ) та  $E < E_a$  ( б ) при  $M < M_b$ .

Формула для динаміки (101) і формула (102) для частот нутаційних коливань залишається справедливою і при  $M < M_q$  області (III), хоча характер руху змінюється, що видно з Рис.28 с : змінюється характер прецесії, але не нутації. Таким чином, можна зобразити залежність частоти нутації від інтегралів руху по всій області  $E_a < E < E_s$ . Вона зображена на Рис.32.

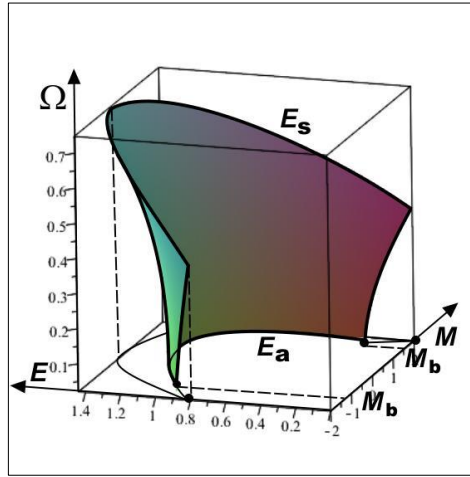


Рис.32. Залежність частоти нутацій від енергії та намагніченості у всій області  $E_a < E < E_s, -2 < M < 2$ .

У області значень енергій  $E_n < E < E_a$  рівняння (96) змінюється знак параметра  $A$ . При цьому рішення суттєво перетворюється і має вигляд

$$m_{1,2} = M/2 \pm a \operatorname{dn}(\sqrt{C} at, k), \quad (106)$$

де  $\operatorname{dn}(z, k)$ - Дельта амплітуди Якобі,  $a = \sqrt{2A/(|B| - D)}$  і  $k^2 = 1 - (B + D)^2/4AC$ . Оскільки період дельта амплітуди становить  $2K(k)$ , то частота нутацій моментів у цій галузі параметрів дорівнює

$$\Omega = \frac{\pi\sqrt{2AC}}{\sqrt{|B|-D} K(k)}. \quad (107)$$

Важливим властивістю цих коливань і те, що у середньому за часом магнітні моменти двох верств залишаються різними:  $\langle m_1 \rangle \neq \langle m_2 \rangle$ . Оскільки  $\langle \operatorname{dn}(z, k) \rangle = \pi/2K(k)$  (див. [17]), то

$$\langle m_{1,2} \rangle = \frac{M}{2} \pm \frac{\pi}{2\sqrt{C} K(k)}. \quad (108)$$

При зміні енергії від  $E_a$  до  $E_n$  модуль еліптичної функції зменшується від одиниці до нуля, і в межах  $E \rightarrow E_n$  маємо  $D = 0$  і  $B = -\sqrt{4AC}$ . Графік залежності частоти нутації від енергії та намагніченості представлений на Рис.33

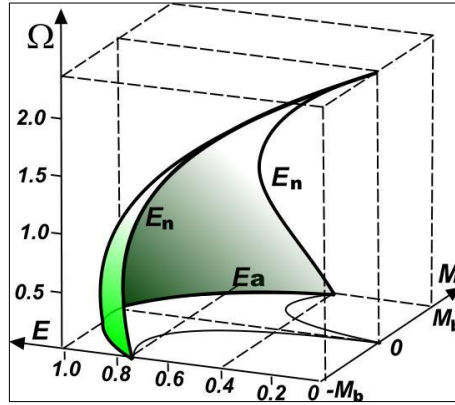


Рис.33. Залежність частоти нутацій від енергії та намагніченості у сфері  $E_n < E < E_a$ ,  $-2 < M < 2$ .

Графіки на Рис.32 і 33 дають повне уявлення про частотні залежності нутаційних коливань області існування нелінійних збуджень системи.

Обчислення частот прецесії складніше навіть за відомому точному рішенні (101,106). За визначенням, ця частота визначається виразом (95). Складаючи формули (90,91) та виражаючи  $\cos(\psi)$  через енергію за допомогою співвідношення (76), знаходимо

$$\dot{\chi} = (h + M) - \frac{(1 + \varepsilon)M(1 + M/2)}{(1 + M/2)^2 - P^2} + \frac{(M/2)(1 - M^2/4 + P^2)}{(1 - M/2 + P)((1 + M/2)^2 - P^2)} \frac{E - E_q}{(1 - M/2) - P} \quad (109)$$

У цій формулі спеціально виділено останній доданок. Видно, що точка  $E = E_q$  виділена. У цій точці амплітуда функції  $P(E)$  дорівнює  $(1 - M/2)$  і знаменнику останнього множника виникає нуль. Але при цьому в нуль звертається і чисельник. Легко показати, що поблизу точки  $E = E_q$  амплітуда функції  $P(E)$  поводитьься так:  $\sqrt{(D - B)/2C} \approx (1 - M/2) - \alpha(E - E_q)^2$ . Сама ж функція  $(E - E_q)$  змінює знак під час переходу через значення  $E_q$ . При усередненні відповідний інтеграл за часом сходиться, але межі  $E \rightarrow E_q$  мають різний знак з різних сторін. Таким чином, у точці  $E = E_q$  є стрибок частоти прецесії. Його легко знайти без обчислень (в даній області параметра  $M$ ) і показати, що він дорівнює частоті Нутацій  $\Omega$  при даному значенні енергії. У точці  $E = E_q$  момент (наприклад, перший) у процесі коливань проходить через точку з  $P = 1 - M/2$ ,

у якій  $m_1 = 1$ . Таким чином, при енергіях, близьких до  $E_q$  траєкторії (проекція на площину ( XY )) має вигляд, наведений на Рис.34.

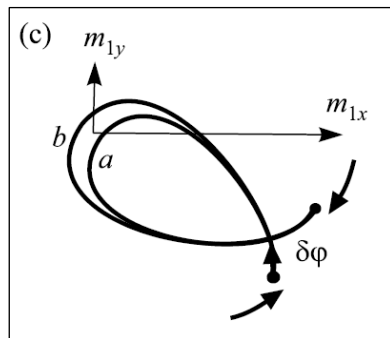


Рис.34. Траєкторії магнітного моменту з енергіями поблизу  $E = E_q$ .

Якщо енергії близькі до  $E = E_q$ , то траєкторії ( a ) і ( b ) близькі одна до одної та траєкторії, що проходить через точку  $m_{1x} = m_{1y} = 0$ . Зображені траєкторії відповідають одному періоду нутаційних коливань. При цьому зміна азимутального кута  $\delta\varphi$  для ( a ) і ( b ) для них відрізняється на  $2\pi$ . При цьому різниця частот прецесії (стрибок частоти) дорівнює

$$\Delta\omega = 2\pi/T_\Omega = \Omega \quad (110)$$

## 2.6. Обчислення частот прецесії магнітних моментів

Обчислення частот прецесії магнітних моментів у всій області зміни параметрів збуджень проводилося чисельно у програмі MAPLE . Усереднення проводилося за періодом еліптичних функцій (101,106).

Результати області ( I ) з  $M_b < M < 2$  наведені на Рис.35.

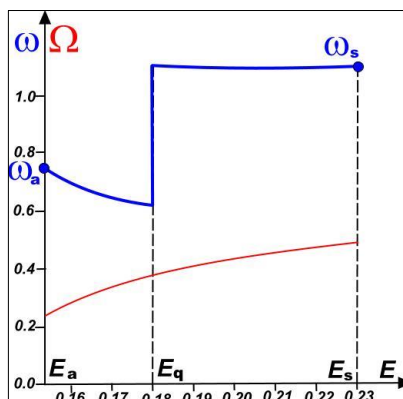


Рис.35. Частотні залежності прецесії (синя лінія) та нутації (червона лінія) магнітних моментів в інтервалі  $E_a < E < E_s$  в першій області параметрів (I) при  $M = 1.8$ . Вибрано значення параметрів  $\varepsilon = 0.2, h = 0.2$ .

З малюнка видно, що частоти прецесії та нутації мають один порядок величини і залежність частот прецесії має стрибок за енергії  $E = E_q$ .

У сфері (II) з  $M_q < M < M_b$  частотні залежності ускладнюються (див. рис.36).

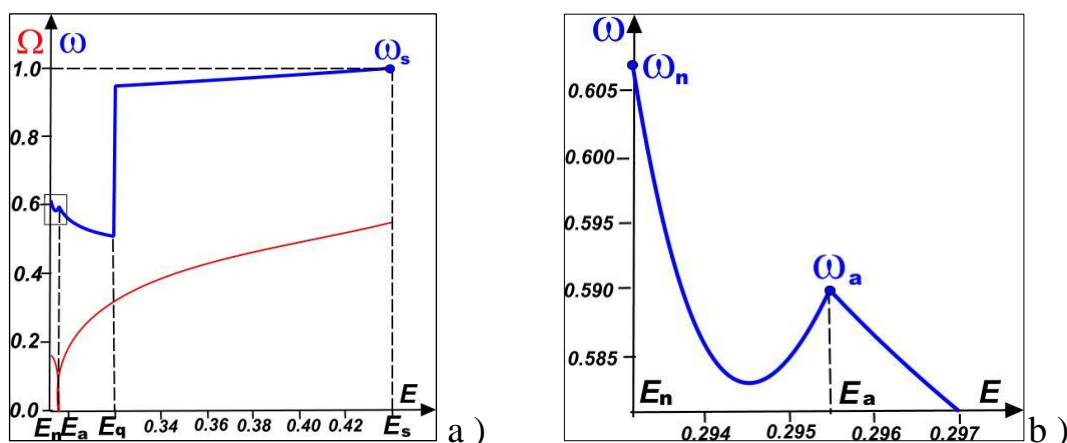


Рис.36. Частотні залежності прецесії (синя лінія) та нутації (червона лінія) магнітних моментів в інтервалі  $E_n < E < E_s$  в другій області параметрів (II) при  $M = 1.6$ . Вибрано значення параметрів  $\varepsilon = 0.2, h = 0.2$ .

По-перше, залежно від нутаційних коливань (червона лінія) утворюється касп, який відповідає особливості на Рис.32,33 при  $E = E_a$ . Цей касп супроводжується каспом і залежно від частоти прецесії. Його область виділено на Рис.36а і зображено у великому масштабі на Рис.36б. Як і попередньому випадку, перехід через значення  $E = E_q$  супроводжується стрибком частотної залежності частот прецесії.

Нарешті, в області (III)  $0 < M < M_q$  відбувається зміна чергувань каспів та стрибків частотних залежностей за зміни енергії. Частотні залежності у цій галузі показано на Рис.37.

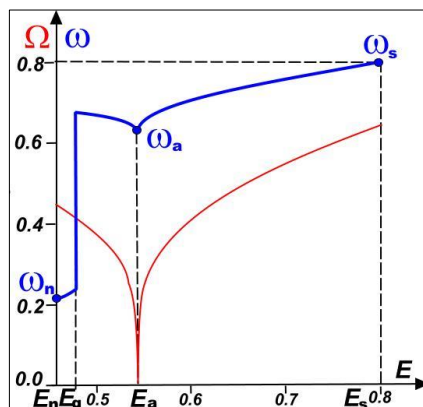


Рис.37. Частотні залежності прецесії (синя лінія) та нутації (червона лінія) магнітних моментів в інтервалі  $E_n < E < E_s$  в третій області параметрів (**III**) при  $M = 1.2$ . Вибрано значення параметрів  $\varepsilon = 0.2, h = 0.2$ .

Таким чином, аналітичні та чисельні залежності частот прецесії та нутації від параметрів системи, зображені на Рис.30,32,33,35-37 дають повну інформацію про суттєво нелінійну динаміку розглянутої системи. Ці дані можуть бути корисними при експериментальному дослідженні антиферомагнетиків та антиферомагніто-пов'язаних магнітних наносистемах, наприклад, магнітних багаточарників. Знання цих залежностей при високочастотних збудженнях магнітних систем дозволяють контрольованим чином при зміні частот високочастотного накачування змінювати параметри системи (її енергію та повну намагніченість).

Оскільки розв'язання задачі про визначення повної динаміки системи звелось на останньому етапі до квадратур, можна вважати розглянуту задачу повністю проінтегрованою в математичному сенсі.

## **2.7. Чисельна симуляція нелінійної динаміки пов'язаних магнітних моментів.**

Отримані вирази для динаміки пов'язаних магнітних моментів у термінах еліптичних функцій та інтегралів від еліптичних функцій не дають наочного уявлення про цю динаміку. Тому для якісного уявлення про неї корисно додатково розглянути цю динаміку чисельно з поданням її у графічному вигляді. Це просто зробити, наприклад, у пакеті Математика. Для цього можна

скористатися вихідними рівняннями (49) у проекціях векторів  $\vec{m}_1$  та  $\vec{m}_2$  в декартовій системі координат і на поверхні одиничної сфери (так званої *сфери Блоха*). Ці рівняння мають такий вигляд:

$$\dot{m}_{1x} = \varepsilon(m_{1y}m_{2z} - m_{2y}m_{1z}) - m_{1y}m_{1z} - hm_{1y}, \quad (111)$$

$$\dot{m}_{1y} = \varepsilon(-m_{1x}m_{2z} + m_{2x}m_{1z}) + m_{1x}m_{1z} + hm_{1x}, \quad (112)$$

$$\dot{m}_{1z} = \varepsilon(m_{1x}m_{2y} - m_{1y}m_{2x}), \quad (113)$$

$$\dot{m}_{2x} = \varepsilon(m_{2y}m_{1z} - m_{1y}m_{2z}) - m_{2y}m_{2z} - hm_{2y}, \quad (114)$$

$$\dot{m}_{2y} = \varepsilon(-m_{2x}m_{1z} + m_{1x}m_{2z}) + m_{2x}m_{2z} + hm_{2x}, \quad (115)$$

$$\dot{m}_{2z} = \varepsilon(m_{2x}m_{1y} - m_{2y}m_{1x}). \quad (116)$$

чисельні розрахунки вимагають завдання початкових умов  $M$

$$m_{1y}(t = 0) = m_{2y}(t = 0) = 0, \quad (117)$$

$$m_{2z}(t = 0) = M - m_{1z}(t = 0), \quad (118)$$

$$m_{1x}(t = 0) = \sqrt{1 - m_{1z}^2(t = 0)}, \quad (119)$$

$$m_{2x}(t = 0) = \pm\sqrt{1 - m_{2z}^2(t = 0)} = \pm\sqrt{1 - (M - m_{1z}(t = 0))^2}. \quad (120)$$

Завдання полягає у знаходженні початкових умов, тобто. вирази  $m_{1z}(t = 0)$  при заданих значеннях  $M$  і  $E$ . У принципі, це завдання не складна, але отриманий вираз досить громіздкий:  $m_{1z} = M/2 \pm \sqrt{M^2/4 - m_{1z}m_{2z}}$ , а для величини  $m_{1z}m_{2z}$  з виразу (76) для енергії при  $\psi = 0$  виходить  $\psi = \pi$  квадратне рівняння з громіздкими коефіцієнтами. Тому зручніше зробити інакше: після підстановки виразів (117-120) у формулу (76) отримати залежність  $E = E(m_{1z}, E)$  і розглядати на ній характерні точки, зіставляючи їх з відповідним фазовим портретом.

Для області параметрів  $(I)$  на Рис.24 це завдання виглядає так (див. «повернутий» графік на Рис.29). На площині  $(E, M)$  задаємо значення  $M$  (в даному випадку  $M = 1.8$ ). Він вибираємо характерні значення енергій, близькі

до  $E_s, E_q, E_a$  (точки на Рис.38 а ). Їм відповідають початкові умови (117-120), зображені відповідними точками фазовому портреті (точки на Рис.38 б ). У цьому точкам при  $\psi = 0$  відповідають початкові умови  $m_{2x}(t = 0) = \sqrt{1 - m_{2z}^2(t = 0)}$ , а точкам за  $\psi = \pi$  умови  $m_{2x}(t = 0) = -\sqrt{1 - m_{2z}^2(t = 0)}$ . На Рис.38 с наведена залежність енергії від початкових умов  $m_{1z}(t = 0)$  із зазначенням відповідних обраних точок з Рис.38 а, б.

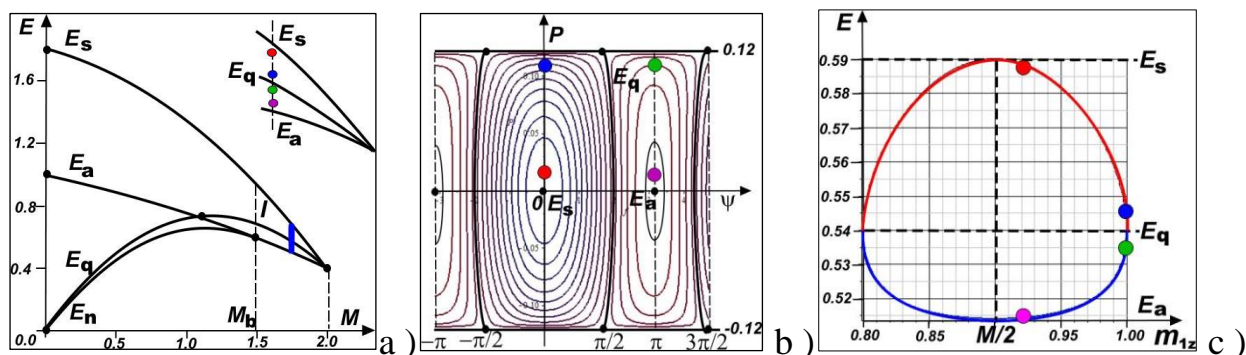
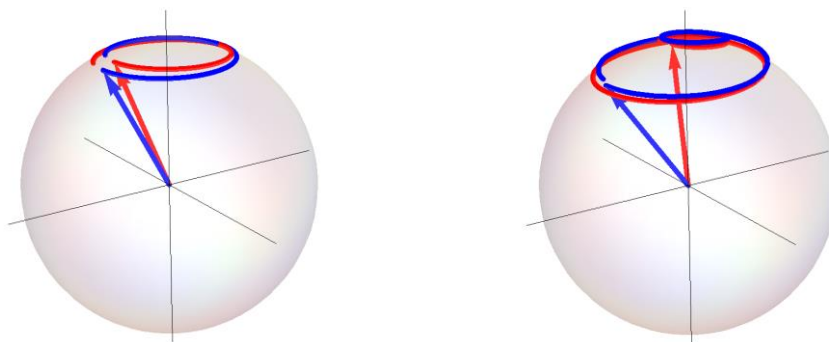
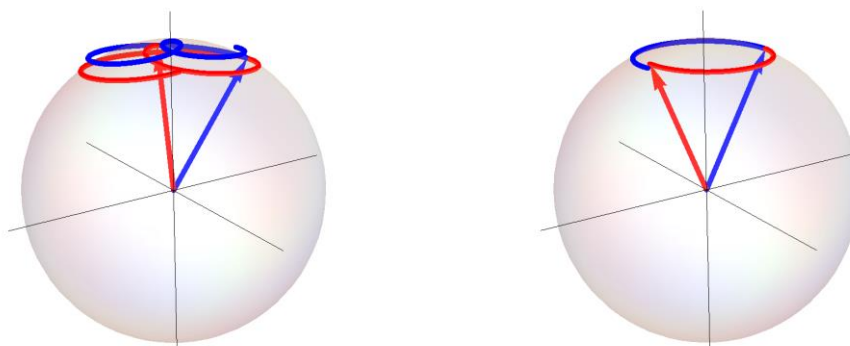


Рис.38. Вибір значень енергій та намагніченості в області (I) на площині  $(E, M)$  ( а ). Відповідні значення початкових умов на фазовому портреті ( б ) та залежності енергії від початкових умов ( с ).

Відповідні обраним точкам траєкторії у сфері Блоха зображені на Рис.39. Вибрано такі початкові умови:  $m_{z1} = 0.92(+)$ (а),  $m_{z1} = 0.995(+)$ ( б ),  $m_{z1} = 0.995(-)$ (с),  $m_{z1} = 0.92(-)$ (d) при  $M = 1.8$ . Тут знаки  $(\pm)$  відповідають знакам у формулах (120). Динаміка системи, зображена на Рис.39а відповідає майже синфазної прецесії моментів, а зображена на Рис.39d майже чистої прецесії зі зрушенням фази на кут  $\pi$ . Цікавіша динаміка при енергіях, близьких до  $E_q$  (Рис.39 б , с ). Проекції цих траєкторій на площину  $(m_x, m_y)$  наведено на Рис.40 моменту  $\vec{m}_1$ .



(a)  $E \approx E_s$  (b)  $E - E_q \ll E_q$



(c)  $E_q - E \ll E_q$

(d)  $E \approx E_a$

Рис.39. Траєкторії магнітних моментом на сфері Блоха при різних значеннях енергій і при  $M = 1.8$  області параметрів ( $I$ ).

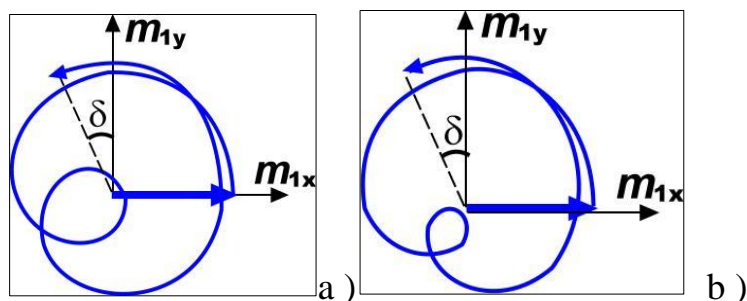


Рис.40. Вектор проєкції траєкторій  $\vec{m}_1$  на площину ( $XY$ ) для початкових умов  $m_{z1} = 0.998(+)$  при  $E > E_q$  ( a ) і  $m_{z1} = 0.998(-)$  при  $E < E_q$  ( b ) .

З Р рис. 40 видно, що з період нутації (зображений малюнку) азимутальний кут моменту  $E > E_q$  застосовується на величину  $9\pi/2 + \delta$ , а при  $E > E_q-$  на величину  $5\pi/2 + \delta$ . Отже, під час переходу через значення  $E = E_q$  фаза прецесії відчуває стрибок на величину  $2\pi$  у період нутаційного коливання, тобто. частота прецесії  $\omega$  стрибком змінюється на величину  $\Omega$ . Це питання обговорювалося вище та продемонстровано на рис. 34-37.

В області(II) малюнки 38 перетворюються в такий спосіб (див. рис. 41). Для розрахунків вибрано значення намагніченості  $M = 1.6$ . Для цього значення  $M$  мінімальне значення енергії на Рис.41с дорівнює  $E \approx 0.6131455$  і початкова умова  $m_{1z}$  впливає з (62) і дорівнює  $m_{1z} = m_0 \approx 0.931544$ . Цим значенням відповідає сіра точка на Рис.41с. Ми наводимо зазначені числа з такою точністю, оскільки струмом за такого близького підходу до лінії  $E_n$  наочно видно суттєву відмінність станів двох моментів і відсутність перекачування енергії між ними (рис. 42b). Вибір початкових умов на рис. 41с на зеленій лінії відповідає точкам всередині сепаратрисної петлі на рис. 41b, що лежить на фазових траєкторіях нижче особливої точки типу центру. Ці початкові умови дають нічого нового. Значення початкових умов енергії, близьких до  $E_a$ , впливають з формули (105) і дорівнюють  $m_{1z}(t = 0) \approx 0.972378$ . Велика точність цього значення важлива, оскільки у цій точці відбувається суттєва зміна динаміки.

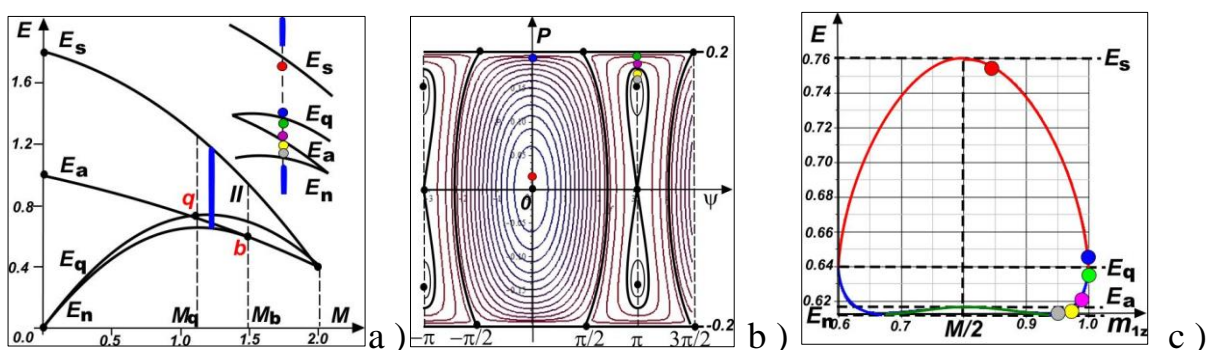
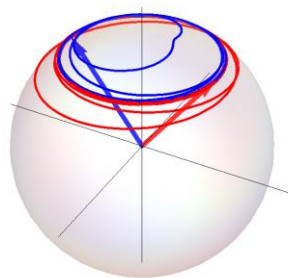
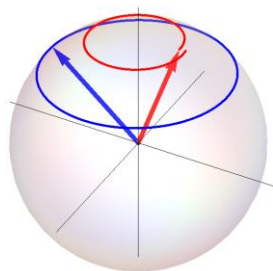


Рис.41. Вибір значень енергій та намагніченості в області(II) на площині  $(E, M)$ ( а). Відповідні значення початкових умов на фазовому портреті ( б) та залежності енергії від початкових умов (с).

Динаміка аналізованої системи при енергіях поблизу  $E = E_s$  і  $E = E_q$  аналогічна розглянутій вище області (I). Нові елементи динаміки з'являються при енергіях  $E \approx E_a$  та  $E \approx E_n$ . Вони зображені на Рис.42. При  $E \rightarrow E_n$  нутаційні коливання зникають і моменти обертаються зі зсувом фази  $\pi$  і з різним нахилом щодо осі симетрії. Це межа максимальної різниці енергій окремих моментів, якими моменти не обмінюються. При  $E = E_a$  динаміці було досліджено аналітично (див. (105)) і якісно зображено на Рис.31с. На Рис.42а наведено результати прямого чисельного розв'язання рівнянь динаміки для енергій поблизу  $E_a$ . Оскільки в цьому випадку  $\Omega \ll \omega$ , то траєкторії на сфері Блоха роблять багато обертів навколо осі Z вздовж траєкторії на круговому конусі з рідкісним виходом з цієї траєкторії. Цей малюнок відповідає Рис.31 а , б .



а )



б )

Мал. 42. Траєкторії магнітних моментом на сфері Блоха при різних значеннях енергій і при  $M = 1.6$  області параметрів (II). Малюнок 42 а відповідає  $E \approx E_a$ , а рисунок 42 б –  $E \approx E_n$ .

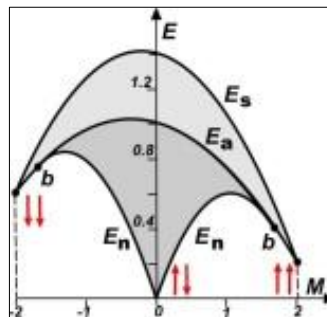
У сфері (III) динаміка моментів схожа, але змінюється послідовність переходів через критичні значення енергій, у яких залежність частоти прецесії мають стрибки і каспи.

Наведені чисельні розрахунки узгоджуються з результатами якісних, наближених та точних аналітичних досліджень, наведених вище, та доповнюють їх своєю наочністю.

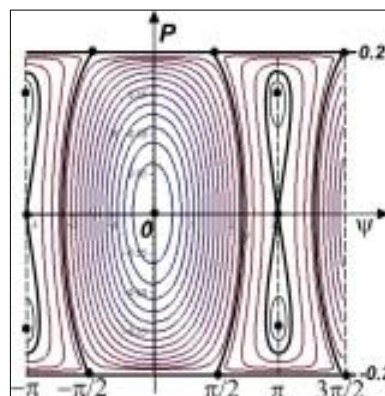
## ВИСНОВКИ

У цій роботі було повністю досліджено нелінійну динаміку просторово однорідних збуджень у двопідрешітковому антиферромагнетиці та в повністю аналогічній моделі динаміки двошарових магнітних систем з антиферромагнітною взаємодією.

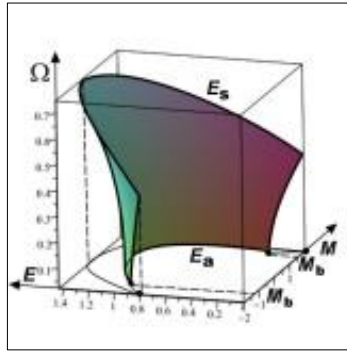
1. В рамках класичних рівнянь Ландау-Ліфшица без загасання для випадку легкоплоскостно одноіонної анізотропії при наявності зовнішнього магнітного поля проаналізовані нелінійні стаціонарні збудження таких систем з чистою прецесією магнітних моментів і знайдені області зміни енергії та намагніченості для існування всіх можливих.



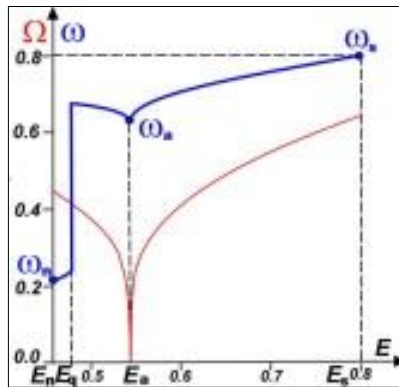
2. Методами якісно аналізу динамічних систем на фазовій площині досліджено всі можливі типи нелінійних нутаційних збуджень у всій галузі допустимої зміни енергії та намагніченості.



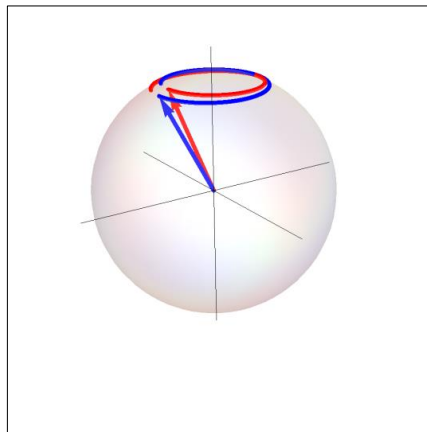
3. Знайдено точні аналітичні вирази для всіх можливих нутаційних коливань пов'язаних магнітних моментів та отримано аналітичні залежності частоти нутації від енергії та намагніченості.



4. Чисельно знайдено залежності частот прецесії нелінійних коливань магнітних моментів від енергії та намагніченості по всій області цих інтегралів руху.



5. Методом чисельної симуляції знайдено вид нелінійної динаміки пов'язаних магнітних моментів при різних характерних значеннях намагніченості та енергії.



Програма, виконана в даному дипломі, раніше в [14] була зроблена та опублікована дипломницею для подібної магнітної системи, але з магнітною анізотропією обмінної взаємодії.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. М.І.Каганов, В.М.Цукерник « *Природа магнетизму* », розділ 4
2. A. I. Akhiezer , V. G. Bar ' yakhtar , S. V. Peletminskii , *Spin Waves* , ( North - Holland , Amsterdam , 1968), chapter 1 , §4 , А.І.Ахієзер, В.Г.Барьяхтар, С.В.Пелетмінський
3. EMLifshitz, LPPitaevskii, *Statistical Physics* , part 2, Pergamon Press, 1980, §74  
Е.М.Ліфшиц, Л.П.Пітаєвський « *Статистична фізика* », часть2, §74
4. А.Г.Андерс та ін. ФНТ, **15** , 21 (1989)
5. А.А.Степанов та ін. ФНТ, **14** , 550 (1988)
6. LDLandau, EMLifshitz, *The Classical Theory of Fields* , Butterworth Heinemann, 1987.
7. LDLandau, EMLifshitz, Phys.Zs.Sowjet., **8** , 153 (1935).
8. S.Tehrani et al, J.Appl.Phys. **85,5822** (1999)
9. BYBorinskii et al, LTP, **49** , N7,946 (2023)
10. Binasch et al, PRB, **39** , N7,4828 (1989)
11. H.Wu et al, PRL, **120,097205** (2018)
12. H.Lang et al, PRB, **108** , 174404 (2023)
13. ASKovalev et al, LTP, **46** , N8,1014 (2020)
- 14.A. S.Kovalev, EVEserska, L.,Krbashyan, LTP, **49** , N12,1560 (2023)
15. А.М.Косевич, А.С.Ковальов, *Введення в нелінійну фізичну механіку* , Київ, Наукова думка, 1989
16. АСКовалев, ЛТП, **49** , N10,1237 (2023)
- 17.E.Janke, F.Emde, F.Losch, *Tafeln Hoherer Funktionen* , BGTeubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960.